UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL ORIENTE
ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

PAQUETE PARA LA EVALUACIÓN EXTRAORDINARIA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Grupo 401C

2020

INTEGRANTES

Francisco Javier Rodríguez Pérez

Leticia Aguilar Pascual

José Germán Ávila Vicenteño

Fernando García Aguilar

María Elena Gómez Pérez

Isidro Marín Romero

María Dolores Martínez Gutiérrez

Pedro Luis Martínez Abraján

Ricardo Yadel Murillo Pérez

María del Carmen Olivera Martínez

Cristhian Miguel Prieto Villalba

Juan Humberto Zendejo Sánchez

Ivonne Zenteno Canela

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo corresponde a un PAQUETE PARA LA EVALUACIÓN EXTRAORDINARIA DE UN CURSO, se estructura con los siguientes documentos, tal como lo establece el *Protocolo de equivalencias para el ingreso y la promoción de los Profesores ordinarios de Carrera del Colegio de ciencias y Humanidades*, esto es, contiene ; a) La guía para examen extraordinario de Cálculo Diferencial e Integral I, b) Banco de Reactivos y c) Modelo de exámenes extraordinarios, todo ello, acorde al programa de estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México.

El Programa de estudios correspondiente contiene 4 unidades, a saber; ***I) Procesos infinitos y la noción de límite, II) El concepto de derivada: variación y razón de cambio, III) Derivada de funciones algebraicas y IV) Comportamiento gráfico y problemas de optimización***, el trabajo se estructura acorde a lo establecido en el Protocolo de equivalencias vigentes, esto es, se presentan de acuerdo a lo siguiente:

La guía de examen extraordinario contiene los siguientes rubros; a) Introducción, b) Instrucciones, c) Presentación de cada unidad con los conceptos clave, d) sugerencias de actividades de aprendizaje teórico-prácticas, e) formas de autoevaluación o verificación del aprendizaje, f) bibliografía básica y complementaria. Y de una manera que no sea rebuscada para el alumno, que la parte conceptual sea fundamental para que dicha guía ayude a comprender los ejercicios que se proponen.

El banco de reactivos incluye: a) la clasificación y la evaluación de los aprendizajes propuestos en el programa de estudio, representativa de los aprendizajes medios de un grupo, b) instructivo para uso y respuestas, c) un mínimo de 100 reactivos de diferentes tipos clasificados por su grado de dificultad.

Este documento tiene el propósito de apoyar a los alumnos que cursan la asignatura, así como a los alumnos que la adeudan. La parte correspondiente a la guía se presenta de una manera accesible para su comprensión, de modo que el alumno no se pierda al consultarla, donde pueda además apreciar los conceptos como una parte fundamental para que dicha guía le ayude a comprender los ejercicios que se proponen.

En lo que se refiere al banco de reactivos, estos se presentan tipo examen extraordinario basados éstos en los modelos de los que se aplican en el Plantel Oriente del Colegio de Ciencias y Humanidades, esto es se estructuran con ejercicios de opción múltiple.

Consideramos que será un gran apoyo para el Profesor que imparte la asignatura y para los alumnos que cursan dicha materia.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL ORIENTE
ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

GUÍA PARA EXAMEN EXTRAORDINARIO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Grupo 401C

2020

INDICE

PRESENTACIÓN

El material aquí presentado constituye un material de apoyo a aquellos alumnos que vayan a presentar el examen extraordinario correspondiente a la asignatura de Calculo Diferencial e Integral I. En cada capítulo, se muestra la teoría necesaria para abordar los temas comprendidos en el plan de estudios vigente en el colegio de ciencias y humanidades de una manera clara y sucinta. Así también, se pueden encontrar sugerencias de actividades y una serie de ejercicios tanto resueltos como propuestos para que el alumno ejercite, desarrolle y trabaje con el propósito de contribuir a su formación y optimice su preparación. Los ejercicios son de opción múltiple para que se familiaricen con la forma del examen que presentarán.

La estructura de la esta guía es la siguiente. Al inicio de cada capítulo se presentan los aprendizajes que debe adquirir un alumno a lo largo del curso de Calculo Diferencial e Integral I, posteriormente se presentan una serie de ejercicios resueltos que conforman ejercicios tipo en cada tema y se resuelven incorporando diversas estrategias de resolución de problemas. Finalmente se propone una serie de ejercicios para que los alumnos resuelvan por sí mismos. Al final de cada capítulo se presenta una autoevaluación que permite a los estudiantes poner a prueba los conocimientos y evaluar por sí mismos si se encuentran los suficientemente preparados para presentar el examen extraordinario.

La primera unidad se dedica al estudio de la noción de límite, se presentan situaciones que dan lugar a los procesos infinitos de donde se parte hacia la representación simbólica y la formalización de las propiedades matemáticas. La segunda unidad está dedicada al concepto de la derivada y a su significado. En esta unidad se trabaja con diversos contextos en los que aparece la variación y el cambio. En la tercera unidad se formaliza la noción de derivada. Las funciones con las que se trabaja son básicamente funciones algebraicas como los son los polinomios y las funciones racionales. Finalmente, la última unidad está dedicada a las principales aplicaciones de la derivada a problemas geométricos y a problemas de optimización.

Unidad 1. Procesos infinitos y la noción de límite

Propósito. ***El alumno describirá intuitivamente el concepto de límite, a través de diversos problemas que involucren procesos infinitos mediante los diferentes registros: numérico, gráfico o simbólico.***

DESCRIPCIÓN

La presente unidad se desarrolla tomando como base un trabajo basado en el manejo de una variable discreta. Es de suma importancia y se requiere hacer énfasis en la diferencia con una variable continua. el manejo de los números naturales es fundamental y la transición de procesos con el uso de números naturales, a procesos que implican números reales a través de cantidades infinitesimales, que ayudaran a comprender el estudio de los límites.

La palabra proceso es usada en diferentes contextos: por ejemplo, se integran problemas que implican procesos, químicos, físicos, biológicos, sociales y económicos. La interpretación cuantitativa de dichos procesos será el primer objeto de estudio en este libro.

En esta unidad se estudian los procesos infinitos, considerando su representación tabular, gráfica y simbólica, para ello en el estudios de éstos, se consideran tanto procesos discretos como continuos.

En el análisis de dichos procesos se usa la aritmética, el álgebra y la geometría para el estudio del comportamiento y la obtención de resultados. Este análisis ayuda a estudiar el comportamiento de la variable dependiente, es decir, como es el caso de analizar si es monótona, acotada, etc.. Conduciéndonos a predecir su comportamiento. Esto ayuda a saber si el proceso tiene límite o no lo tiene.

El estudio de sucesiones permite mostrar ejemplos de procesos infinitos discretos. Los procesos infinitos continuos se mostrarán mediante el análisis del comportamiento de una función discontinua en puntos cercanos a dicha discontinuidad, la obtención de las raíces de una ecuación por medio de la función correspondiente a esta, así como en el estudio de de las asíntotas tanto horizontal como oblicua, en el caso de gráficas de una función.

Los métodos para la obtención de límites de sucesiones y de funciones permite recordar y profundizar algoritmos algebraicos que a su vez permiten profundizar los aprendizajes previos en los alumnos y con esto precisar la definición de límite sin tanta formalidad (cuando éste exista) de ciertos procesos infinitos.

PALABRAS CLAVE. Procesos finitos, Procesos infinitos, Infinitesimal, Límite

Sugerencias de actividades de aprendizaje teórico-prácticas

PROCESOS INFINITOS, DISCRETOS Y CONTINUOS

Estaremos usando las siguientes definiciones para proceso y proceso infinito.

Proceso: Es una acción que produce un resultado

Proceso infinito: Es un proceso que siempre puede producir un resultado más o podemos decir que es una acción que se repite indefinidamente

Proceso infinito discreto: Es un proceso que se puede modelar mediante una sucesión, concepto que retomaremos más adelante.

Proceso infinito continuo: Es un proceso que se puede modelar mediante una función definida en un intervalo.

El objetivo de nuestro estudio es la interpretación cuantitativa y el análisis de procesos. Comenzaremos por describir ***procesos discretos finitos*** con el problema siguiente:

Problema 1.1

Dos móviles que se encuentran a una distancia de 720 m uno del otro, se mueven al encuentro mutuo: El primero recorre 10 m/seg. El otro recorre 3 m en el primer segundo, en cada segundo siguiente recorre 5 m más que en el anterior. ¿Después de cuantos segundos los móviles se encuentran?

Solución: Utilizaremos como dominio a los números naturales, esto es los tiempos los contaremos con números enteros.

Analicemos el movimiento de cada uno de los objetos. De acuerdo a los datos, el móvil A recorre una distancia de 10 metros cada segundo, el móvil B recorre diferentes distancias cada segundo, es decir, recorre 3 metros en el primer segundo, 8 metros en el segundo, 13 en el tercero, 18 en el cuarto y así sucesivamente. Esto se explica convenientemente describiendo la tabla de la siguiente manera:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d_A	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
d_B	3	8	13	18	23	28	33	38	43	48	53

t	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
d_A	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
d_B	58	63	68	73	78	83	88	93	98	103	108

Observar que la tabla muestra que en el primer segundo el móvil A recorre 10 m en el segundo recorre también 10 m y así sucesivamente. Se representa la distancia recorrida por el móvil A cada segundo con d_A, y la distancia recorrida por el móvil B se representa con d_B.

Ahora construyamos una tabla en donde se muestre la suma de las distancias $(d_A + d_B)$ recorridas por los móviles en el tiempo t.

t	1	2	3	4	5	6	7	8
$(d_A + d_B)$	13	31	54	82	115	153	196	244

t	9	10	11	12	13	14	15	16
$(d_A + d_B)$	297	355	418	486	559	637	720	808

Podemos observar en las tablas que para un tiempo de $t = 15$ seg. La suma de las distancias recorridas es igual a 720 m, es decir la distancia que los separaba y con esto obtenemos la respuesta al problema

Con respecto a este problema podemos hacer las siguientes observaciones

1) El proceso (el encuentro) termina en un lapso definido, es decir podemos decir en cuanto tiempo se encuentran los móviles, por lo tanto, decimos que este proceso es finito.

2) El primer móvil recorre una distancia $10t$ en t seg.

El segundo móvil recorre una distancia $3+8+13+18+23+28+33+38+.......$, en donde los puntos sucesivos indican que los números subsecuentes, siguen el mismo patrón de comportamiento.

Vamos a estudiar los términos de cada suma; para el móvil A observemos que la distancia recorrida en cada segundo es

$$10+10+10+10+10+\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

Podemos decir que el recorrido del móvil A es constante en cada segundo.

Y en el caso del móvil B, la distancia total recorrida es

$$3+8+13+18+23+\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

Podemos decir que el recorrido del móvil B cambia en cada segundo.

Una expresión general para la distancia total recorrida por el móvil A en ***t*** segundos es $10t$.
Ahora veamos que ocurre con el móvil B, en este caso la distancia recorrida en cada segundo es $5t-2$, por ejemplo, cuanto recorre en el segundo número 3? Obtenemos ***5(3)-2=15-2=13.*** Y Así para cada segundo.

Observar que la expresión para el móvil B se obtuvo de la siguiente manera, la diferencia entre un número y el anterior siempre es la misma.

$$8-3=13-8=18-13=23-18=28-23=33-28= \ldots\ldots = 5$$

Ahora utilicemos un proceso algebraico para resolver el problema

Cada sumando de la distancia recorrida por el móvil B es de la forma $5t-2$, por lo tanto, la suma hasta el segundo ***t*** *es:*

$$3+8+13+18+23+28+33+38+\ldots\ldots\ldots+5t-2$$

¿Como calcular la suma anterior?

3) La suma de la distancia recorrida hasta el segundo ***t*** es

$$3+8+13+18+23+28+33+38+\ldots\ldots\ldots+5t-2$$

la podemos calcular con procedimiento algebraico sencillo de la siguiente forma, llamemos S a dicha suma, escribimos dos veces esta suma, pero una en sentido inverso y sumamos término a término

$$\begin{array}{lcl} S &=& 3 + 8 + 13 + 18 + \ldots\ldots + (5t-7) + (5t-2) \\ S &=& (5t-2) + (5t-7) + (5t-12) + (5t-17) + \ldots\ldots + 8 + 3 \\ \hline 2S &=& (5t+1)+(5t+1)+(5t+1)+(5t+1)+\ldots\ldots+(5t+1)+(5t+1) \end{array}$$

Todos los términos del lado derecho de la igualdad son iguales y el total de sumandos es ***t.***

Por lo tanto

$2S = t(5t+1)$ de aquí la suma es $S = \dfrac{t(5t+1)}{2}$

Para resolver el problema debemos sumar las distancias recorridas por los 2 móviles en ***t*** segundos, por lo tanto

$$10t + \frac{t(5t+1)}{2} = 720$$

La expresión anterior genera una ecuación de segundo grado.

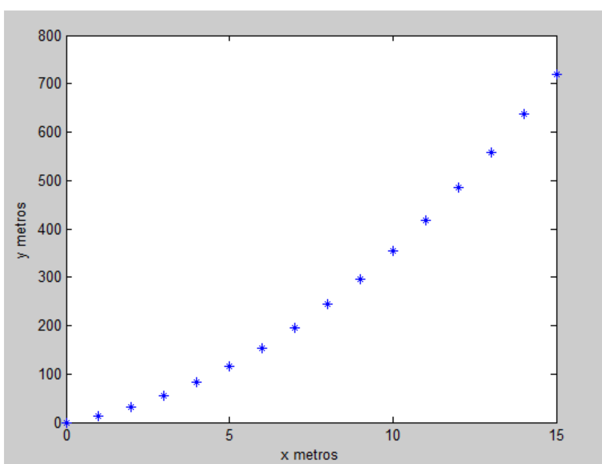
Al resolver se encuentra que el tiempo al que se encuentran los móviles es de 15 segundos.

SIMBOLO DE SUMATORIA (Σ)

Se aprovecha la suma $3+8+13+18+23+28+33+38+..........+5t-2$, para introducir el símbolo de suma, el cual se denota generalmente por medio del símbolo griego sigma (Σ) quedando de la siguiente manera $\sum_{k=m}^{n} f(k)$; donde k es la variable discreta independiente m es el valor inicial y n es el valor final, n y m son números enteros, $f(k)$ es una función cuyo dominio son los números naturales.

Por lo tanto la suma $3+8+13+18+23+28+33+38+..........+5t-2$ se escribe como $\sum_{k=1}^{t}(5k-2)$, la cual se lee como la suma (o sumatoria) desde $k=1$ hasta $k=t$ del término general $5k-2$.

La tabla de valores $(d_A + d_B)$ coincide con la tabla de valores de la función $f(t) = 10t + \frac{t(5t+1)}{2}$, la gráfica se muestra a continuación



Los números correspondientes a la distancia recorrida por el móvil B es d_B: $3+8+13+18+23+28+33+38+.......$, corresponden a las características siguientes:

Es un conjunto ordenado en el cual podemos determinar quién es el *primer* término, quién el segundo o quién el n-ésimo término. Cuando esto ocurre, decimos que este conjunto forma una ***sucesión***.

Ejemplo 1.1. Obtener la fórmula para el término general de la sucesión

$$200,\ 195,\ 190,\ 185,\ 180,\ 175,\ \ldots$$

Solución: Observemos que la diferencia entre un término y el anterior es igual a -5, es decir.

$$195-200=190-195=185-190=180-185=175-180=\ldots\ldots=-5\ ,$$

por lo tanto, el término general es de la forma $a_n = 200 - 5n$, siendo n un número natural.

PROGRESION ARITMETICA

Es una sucesión en la cual se cumple que; la diferencia de un término menos el término anterior es una constante, se dice que la sucesión es una progresión aritmética.

Forma de simbolizar una sucesión aritmética

Una sucesión se representa con a_n cuyos elementos son $a_n = \{a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n\}$ donde a_n es el n-ésimo termino.

La sucesión es aritmética, si la diferencia d entre dos términos contiguos es la misma, esto es $a_2 - a_1 = d;\ \ a_3 - a_2 = d; \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ a_n - a_{n-1} = d$

Y la expresión general de la sucesión es $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Ejemplo 1.2. Obtener los primeros cinco términos de la sucesión de números, cuyo término general corresponde a $a_n = 7 + \frac{n}{2}$ y comprobar que la diferencia entre un término y su anterior es una constante

Solución: $a_1 = \frac{15}{2}$, $a_2 = 8$, $a_3 = \frac{17}{2}$, $a_4 = 9$, $a_5 = \frac{19}{2}$

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = \frac{1}{2}$, en general

$a_n - a_{n-1} = 7 + \frac{n}{2} - \left(7 + \frac{n-1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, Esto quiere decir que la sucesión es una progresión aritmética.

SUMA DE LOS ELEMENTOS DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Ejemplo 1.3. Obtener una fórmula para calcular $\sum_{k=1}^{n} (2k+3)$

Solución: Se tiene para $\sum_{k=1}^{n} (2k+3)$, la expresión de los sumandos es:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+3) = 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \ldots + (2n+1) + (2n+3)$$

Llamemos S a dicha suma, Como lo hicimos anteriormente, escribimos dos veces esta suma, pero una en orden inverso y sumamos término a término

$$\begin{aligned}
S &= 5 + 7 + 9 + 11 + \ldots\ldots + (2n+1) + (2n+3) \\
S &= (2n+3) + (2n+1) + (2n-1) + (2n-3) + \ldots\ldots + 7 + 5 \\
\hline
2S &= (2n+8) + (2n+8) + (2n+8) + (2n+8) + \ldots\ldots + (2n+8) + (2n+8)
\end{aligned}$$

$2S = n(2n+8)$ de aquí se tiene $S = \frac{n(2n+8)}{2} = n(n+4)$ por lo tanto

Esta fórmula permite obtener el valor numérico para cualquier n por ejemplo, si $n = 50$, tenemos

$$\sum_{k=1}^{50} (2k+3) = 50(50+4) = 2700$$

Problema 1.2. El sueldo de un trabajador es de \$9500 mensuales y cada año se incrementa en \$500 (cada mes). Calcular cuánto dinero ganará en los 15 años siguientes.

Solución

La Ganancia por año es sueldo x 12, 12 meses en un año.

El primer año gana $9500x12 = 114000$; el segundo año gana $10000x12 = 120000$, para el tercer año gana 126000 y así sucesivamente hasta el 15avo año.

El termino general es, $a_n = a_1 + d(n-1)$, por lo tanto

$$a_n = 114000 + 6000(n-1) = 108000 + 6000n$$

Y la suma en n años es

$$S=114000+120000+126000+\ldots\ldots\ldots\ldots+(108000+6000n)$$

La suma en términos del número de años es

$$S=114000 \quad + \quad 120000 \quad +126000+\ldots\ldots\ldots(108000+6000n)$$
$$S=108000+6000n+102000+6000n+96000+6000n+........+114000$$
$$2S=122000+6000n+222000+6000n+222000+6000n+........222000+6000n$$
$$2S=n(222000+6000n)$$
$$S=\frac{n(222000+6000n)}{2}=111000n+3000n^2$$

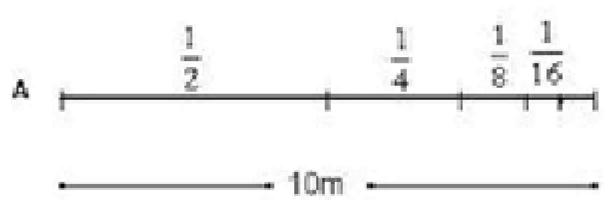
La ganancia al final del año 15 es S=$111000(15)+3000(15)^2=\$2340000$ Como podemos observar es un problema asociado con un ***proceso finito.***

PROCESOS DISCRETOS INFINITOS

Problema 1.3. Un caracol decide abandonar el lugar en donde vive porque en ese lugar ya no tienen las condiciones adecuadas para su supervivencia. El sitio al que decide trasladarse se encuentra a 10m de su lugar de origen, el caracol decide avanzar por etapas de la siguiente manera, primero recorre la mitad de la distancia total, descansa y recorre la mitad de la distancia que le faltaba y así sucesivamente. ¿Se puede recorrer la distancia total de 10 m de esta forma?

Solución:

Las etapas del recorrido se muestran en la figura (los números representan la fracción de la distancia total en cada etapa)



La distancia recorrida por el caracol se obtiene de la siguiente manera, en la primera etapa recorre la mitad de la distancia total $\frac{1}{2}(10)=5m$:

En la segunda etapa recorre la mitad de la distancia que le falta por recorrer

$$\frac{1}{2}(5)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(10)\right)=\frac{1}{4}(10)=2.5m.$$

En la tercera etapa recorre $\frac{1}{2}(2.5)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(10)\right)=\frac{1}{8}(10)=1.25m$.

En la cuarta etapa recorre $\frac{1}{2}(1.25)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}(10)\right)=\frac{1}{16}(10)=0.625m$; recordemos, va recorriendo la mitad de la distancia que le falta.

Y así sucesivamente.

Escribamos lo anterior en una tabla

Etapa	d_A	$\sum d_A$	**Etapa**	d_A	$\sum d_A$
1	$\frac{1}{2}(10)$	**5**	5	$\frac{1}{32}(10)$	9.6875
2	$\frac{1}{4}(10)$	**7.5**	6	$\frac{1}{64}(10)$	9.84375
3	$\frac{1}{8}(10)$	**8.75**	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
4	$\frac{1}{16}(10)$	**9.375**	n	$\frac{1}{2^n}(10)$	$\vdots$ ________

Ahora utilicemos una expresión algebraica

Las distancias d por etapa son:

$$\frac{1}{2}(10),\ \frac{1}{4}(10),\ \frac{1}{8}(10),\frac{1}{16}(10),\ \ldots,\ \frac{1}{2^{n-1}}(10),\frac{1}{2^n}(10)$$

La distancia total recorrida es la suma de todas las distancias

$$\frac{1}{2}(10)+\frac{1}{4}(10)+\frac{1}{8}(10)+\frac{1}{16}(10)+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}(10)+\frac{1}{2^n}(10),$$

Para encontrar la distancia total recorrida debemos realizar esta suma

Esta suma no se puede realizar como en los ejemplos anteriores, la diferencia entre términos contiguos no es la misma, pero tienen otra relación, a saber:

Se tiene que la división de un número entre el anterior es una constante, es decir

$$\frac{\frac{1}{4}(10)}{\frac{1}{2}(10)}=\frac{\frac{1}{8}(10)}{\frac{1}{4}(10)}=\frac{\frac{1}{16}(10)}{\frac{1}{8}(10)}=\frac{\frac{1}{2^n}(10)}{\frac{1}{2^{n-1}}(10)}=\frac{1}{2}$$

Lo que leemos de la siguiente manera "la razón de un término entre el anterior es siempre $\frac{1}{2}$". Para determinar el valor de la suma

$$\frac{1}{2}(10)+\frac{1}{4}(10)+\frac{1}{8}(10)+\frac{1}{16}(10)+\ ...+\frac{1}{2^{n-1}}(10)+\frac{1}{2^n}(10),$$

Procedemos de la siguiente manera; llamemos S_n a esta suma, multiplicamos la suma por la razón encontrada y la restamos a la suma S_n; esto es $S_n - \frac{1}{2}S_n$ y calculamos lo que se conoce como "suma telescópica"

$$S_n = \frac{1}{2}(10)+\cancel{\frac{1}{4}(10)}+\cancel{\frac{1}{8}(10)}+\cancel{\frac{1}{16}(10)}+\ ...+\cancel{\frac{1}{2^{n-1}}(10)}+\cancel{\frac{1}{2^n}(10)}$$

$$-\frac{1}{2}S_n = -\cancel{\frac{1}{4}(10)}-\cancel{\frac{1}{8}(10)}-\cancel{\frac{1}{16}(10)}-\cancel{\frac{1}{32}(10)}-\ ...-\cancel{\frac{1}{2^n}(10)}-\frac{1}{2^{n+1}}(10)$$

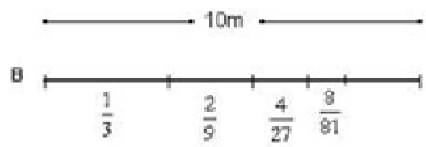
$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}(10)-\frac{1}{2^{n+1}}(10)$$

Multiplicando por 2, finalmente obtenemos lo que buscamos

$$S_n = 10-\frac{1}{2^n}(10) = 10\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

recordemos que n corresponde a la etapa correspondiente. En otras palabras es la expresión algebraica que nos permite calcular la distancia recorrida por el caracol en cualquier etapa, sin embargo no es posible determinar la etapa en la cual haya recorrido 10 m podemos decir que entre mas números de etapa tengamos, nos acercamos al ***límite*** que es 10 m.

Problema 1.4. Ahora consideremos que el caracol del problema anterior decide avanzar cada etapa de la siguiente, en la primera etapa recorre la tercera parte de la distancia total, descansa y recorre la tercera parte de la distancia que le faltaba y así sucesivamente.



En este caso tenemos la siguiente tabla

Etapa	d_B	$\sum d_B$	**Etapa**	d_B	$\sum d_B$
1	$\frac{1}{3}(10)$	$3.\overline{3}$	**5**		8.68312
2	$\frac{2}{9}(10)$	$5.\overline{5}$	**6**	$\frac{32}{729}(10)$	9.12208
3	$\frac{4}{27}(10)$	$7.\overline{037}$	**:**	$\vdots$	$\vdots$
4	$\frac{8}{81}(10)$	8.02469	**n**	$\frac{2^{n-1}}{3^n}(10)$	

La distancia recorrida por etapa es

En la primera etapa recorre $\frac{1}{3}(10)=3.\overline{3}$; En la segunda recorre la tercera parte de lo que le falta por recorrer $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}(10)\right)=\frac{2}{9}(10)=2.\overline{2}$.

En la tercera le falta por recorrer $\frac{4}{9}$ de la distancia total pero como solo recorre la tercera parte, entonces en esta etapa recorre $\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}(10)\right)=\frac{4}{27}(10)=1.\overline{481}$.

En la cuarta etapa le falta por recorrer $\frac{8}{27}$ de la distancia total, por lo tanto en esta etapa recorre $\frac{1}{3}\left(\frac{8}{27}(10)\right)=\frac{8}{81}(10)=0.\overline{987654320}$.

La distancia total recorrida por etapa hasta la etapa n, forma una sucesión de sumas dada por

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1}\left(\frac{2^{k-1}}{3^k}(10)\right) = \frac{1}{3}(10) = 3.\overline{3}$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{2}\left(\frac{2^{k-1}}{3^k}(10)\right) = \frac{1}{3}(10) + \frac{2}{9}(10) = 5.\overline{5}$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{2^{k-1}}{3^k}(10)\right) = \frac{1}{3}(10) + \frac{2}{9}(10) + \frac{4}{27}(10) = 7.\overline{037}$$

$$S_4 = \sum_{k=1}^{4}\left(\frac{2^{k-1}}{3^k}(10)\right) = \frac{1}{3}(10) + \frac{2}{9}(10) + \frac{4}{27}(10) + \frac{8}{81}(10) = 8.02469$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^{n-1}}{3^n}(10)\right) = \frac{1}{3}(10) + \frac{2}{9}(10) + \frac{4}{27}(10) + \frac{8}{81}(10) + \ldots + \frac{2^{n-1}}{3^n}(10)$$

A las expresiones $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ \ldots,\ S_n$ se le llama sucesión de sumas parciales

Por lo tanto, la distancia recorrida hasta la etapa $\boldsymbol{n}$ por el caracol, en este caso se obtiene de la siguiente manera:

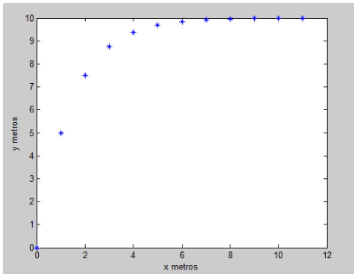
$$S_n = \frac{1}{3}(10) + \frac{2}{9}(10) + \frac{4}{27}(10) + \frac{8}{81}(10) + \ldots + \frac{2^{n-1}}{3^n}(10) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^{n-1}}{3^n}(10)\right)$$

Los términos de esta sucesión tienen una razón constante entre dos valores consecutivos.

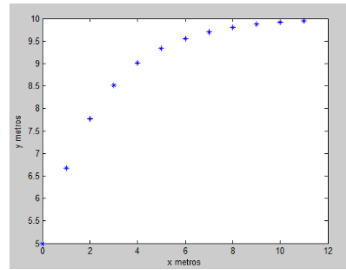
Al final de la suma, tenemos simbolizada la distancia total con el símbolo de sumatoria.

Las gráficas para la distancia recorrida por los caracoles se muestran en las siguientes figuras

Para el caracol A



Para el caracol B



Se puede observar en las dos graficas que las distancias recorridas se **aproximan** cada vez más a la distancia ***Límite*** de 10 m (esto también se observa en la tabla de valores), así como el hecho de que el dominio en tal gráfica son los naturales.

Ejercicio 1.1. Encontrar la razón r entre los términos contiguos, y encontrar S_n realizando la suma $S_n - rS_n$.

Vamos a definir lo que es una **PROGRESION GEOMETRICA**

Cuando en una sucesión se cumple que el cociente de un término entre el anterior es una constante, a dicha sucesión se le llama una progresión geométrica.

Ejemplo 1.4. Obtener la expresión el término general de la sucesión

$$\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},-\frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \ldots$$

Solución: El término general es de la forma $a_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

Podemos observar que los términos van alternando de signo por lo tanto la expresión debe incluir potencias del -1,

Una particularidad de esta sucesión es la siguiente; se puede comprobar que el cociente de un término entre el término anterior es una constante, es decir

$$\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{-\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{1}{16}}{\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{32}}{-\frac{1}{16}} = -\frac{1}{2}$$

Ejemplo 1.5. Determinar una fórmula para la sumatoria $\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k}$

Solución: Llamemos S a esta suma y efectuamos la operación $S+\frac{2}{3}S$ y realizamos una "suma telescópica"

$$\cancel{S} = -\cancel{\frac{2}{3}} \cancel{+} \frac{4}{9} \cancel{-} \frac{8}{27} + \cancel{\frac{16}{81}} + \ldots + \cancel{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}} + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n}$$

$$\frac{2}{3}\cancel{S} = -\frac{4}{9} \cancel{+} \frac{8}{27} - \frac{16}{81} + \ldots \quad -\left(-\frac{2}{3}\right)^{n} + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\frac{5}{3}S = -\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$S=\frac{3}{5}\left[-\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

LÍMITE DE UNA SUCESION

Ahora, en la siguiente tabla, observemos algunas imágenes (valores) de sucesiones a_n cuando el valor del n-ésimo término aumenta, queremos predecir el comportamiento de estas sucesiones cuando n se hace cada vez más grande (de manera formal; cuando n tiende a infinito $n \to \infty$).

n	$\frac{35}{n}$	$\frac{9n+3}{3n-5}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^n$	$\sqrt[n]{700^n+725^n}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^n$
10	3.5	3.72	0.05631	764.691	9.3132
20	1.75	3.327	0.00317	739.741	86.736
100	0.35	3.06101	$3.207\cdot10^{-13}$	725.213	$4.909\cdot10^{9}$
200	0.175	3.03025	$1.028\cdot10^{-25}$	725.003	$2.409\cdot10^{19}$
250	0.14	3.02416	$5.825\cdot10^{-32}$	725.0004	$1.688\cdot10^{24}$
500	0.07	3.01204	$3.393\cdot10^{-63}$	725.00000003	$2.851\cdot10^{48}$
1000	0.035	3.00601	$1.151\cdot10^{-125}$	-	$8.128\cdot10^{96}$
2000	0.0175	3.00300	$1.325\cdot10^{-250}$	-	$6.607\cdot10^{193}$
5000	0.007	3.00120	$2.024\cdot10^{-625}$	-	$3.548\cdot10^{484}$
10000	0.0035	3.00066	$4.098\cdot10^{-1250}$	-	$1.259\cdot10^{969}$
50000	0.0007	3.00012	$1.156\cdot10^{-6247}$	-	-
100000	0.00035	3.00006	$1.337\cdot10^{-12494}$	-	-
1000000	0.000035	3.000006	$1.833\cdot10^{-124939}$	-	-

Con lo anterior analicemos la expresión encontrada para el caracol del problema 1.3

$S_n = 10\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

Consideremos valores un poco "altos" para las etapas, por ejemplo 14, 15 y 16 y con ella calculemos la distancia dada por la expresión anterior

No. De etapas	Distancia total
14	9.9993896…….
15	9.99969482……
16	9.9998474…..

Observamos que, si aumentamos el número de etapas, la cantidad que resulta se acerca a 10, y no puede pasar de ese valor.

Ahora respecto a la tabla anterior, podemos observar que para la sucesión $\frac{35}{n}$, cuando se aumenta el valor de n, la sucesión se acerca a cero. En cuanto a la sucesión $\frac{9n+3}{3n-5}$, cuando es muy grande, la sucesión se acerca a 3. Y la sucesión $\left(\frac{3}{4}\right)^n$,es muy pequeña, y se acerca a cero cuando n aumenta. Y cuando n aumenta, la sucesión $\sqrt[n]{700^n + 725^n}$ se acerca a 725, y finalmente la sucesión $\left(\frac{5}{4}\right)^n$ se hace muy, muy grande. Utilicemos la palabra ***Límite***, para referirnos al valor al cual se acerca la sucesión correspondiente.

Utilizaremos la siguiente representación

Se puede observar de la tabla anterior lo siguiente:

Los valores de la sucesión $\frac{35}{n}$ se acercan a cero cuando n se hace cada vez más grande, esto se denota por

$$\lim_{n\to\infty} \frac{35}{n} = 0$$

Las imágenes de la sucesión $\frac{9n+3}{3n-5}$ se acercan a 3 cuando n se hace cada vez más grande, es decir, con la notación utilizada

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9n+3}{3n-5} = 3$$

Los valores de la sucesión $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ se acercan a cero cuando n se hace cada vez más grande, esto es

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

Las imágenes de $\sqrt[n]{700^n + 725^n}$ se acercan a 725 cuando n se hace cada vez más grande, es decir

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{700^n + 725^n} = 725.$$

Los valores de $\left(\frac{5}{4}\right)^n$ se hacen cada vez más grandes a cero cuando n se hace cada vez más grande, esto es

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = \infty ,$$

Como ∞ no es un número real decimos que la sucesión no tiene límite.

Ahora vamos a predecir el comportamiento de la sucesión $a_n = 3(-1)^n + 5$

La siguiente tabla muestra las imágenes para los primeros diez términos

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a_n	**2**	**8**	**2**	**8**	**2**	**8**	**2**	**8**	**2**	**8**

Podemos observar que para valores impares el valor de la sucesión es 2 y para valores pares su valor es 8, es decir los valores pasan de uno a otro dependiendo si n es par o impar (no se acercan a un mismo número) en este caso vamos a decir que la sucesión no tiene límite.

Es importante observar que estamos “encontrando” el límite de una sucesión

tomando varios valores para n “bastante grandes.

TEOREMAS SOBRE LÍMITES

Los resultados relativos a límites que se describen a continuación carecen de la demostración, éstas pueden consultarse en el apéndice si el lector lo requiere.

UNICIDAD DEL LÍMITE DE UNA SUCESIÓN. *Toda sucesión convergente tiene solo un límite*

LÍMITE DE LA SUMA DE SUCESIONES

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b$

LÍMITE DEL PRODUCTO DE UNA SUCESIÓN POR UNA CONSTANTE

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ y c es una constante entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\left(ca_n\right) = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ca$

LÍMITE DEL PRODUCTO DE DOS SUCESIONES

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n b_n\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right) = ab$

LÍMITE DEL COCIENTE DE DOS SUCESIONES

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$

TEOREMA DEL EMPAREDADO (SANDWICH)

Si $a_n \le c_n \le b_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$

TEOREMA DE WEIERSTRASS. *Toda sucesión monótona y acotada es convergente (tiene límite).*

Otros resultados que nos ayudaran a determinar límites de sucesiones son los siguientes

1) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$ donde c es una constante	6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad con \ \ a > 0$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^r = \infty, \quad con \ \ r > 0$	7) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c}{n^r} = 0, \quad con \ \ r > 0 \quad y \ \ c$ es una constante	8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c}{r^n} = 0, \quad con \ \ r > 1 \quad y \ \ c$ una constante
4) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty, \quad con \ \ a > 1$	9) Sí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n\right)^m = l^m$
5) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0, \quad con \ \ \lvert a \rvert < 1$	10) Sí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{l}$

A continuación, se describen varios ejercicios donde se muestra la utilidad de estos teoremas.

Ejemplo 1.6. Encontrar el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7}{8}\right)=\dfrac{7}{8}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{49}{(1.5)^n}=0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9}{\sqrt[5]{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9}{n^{\frac{1}{5}}}=0$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{15n^3+8}{3n^3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{15n^3}{3n^3}+\dfrac{8}{3n^3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{15n^3}{3n^3}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8}{3n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8}{3n^3}=5$

e)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n(6n+1)}{5^n(2n)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^n}{5^n}\right)\left(\frac{6n+1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n\left(\frac{6n}{2n}+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\right)=0(3+0)=0$$

f) $$\lim_{n\to\infty}\frac{9+(0.7)^n}{\left(-\frac{8}{9}\right)^n+5}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(9+(0.7)^n\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(-\frac{8}{9}\right)^n+5\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}9+\lim\limits_{n\to\infty}(0.7)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{8}{9}\right)^n+\lim\limits_{n\to\infty}5}=\frac{9+0}{0+5}=\frac{9}{5}$$

g) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5\sqrt[n]{n}+\left(\frac{11}{12}\right)^n}{(0.98)^n+15\sqrt[n]{1000}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}5\sqrt[n]{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{11}{12}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}(0.98)^n+\lim\limits_{n\to\infty}15\sqrt[n]{1000}}=$$

$$\frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty}5\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{11}{12}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}(0.98)^n+\left(\lim\limits_{n\to\infty}15\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1000}\right)}=\frac{(5)(1)+0}{0+(15)(1)}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

Un límite importante y que se debe analizar es el siguiente:

h) La sucesión $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ es creciente y por lo tanto monótona, también es acotada, la demostración de estas aseveraciones queda fuera del alcance de este texto, pero podemos observar esto mediante la construcción de una tabla de valores

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a_n	**2**	**2.25**	**2.3703**	**2.441**	**2.4883**	**2.5216**	**2.5464**	**2.5657**	**2.581**

n	**10**	**50**	**100**	**500**	**1000**
a_n	**2.5937**	**2.6915**	**2.7048**	**2.7155**	**2.7169**

Al valor de este límite se le asigna la letra e, este número es la base de los logaritmos naturales, es decir; el límite de la sucesión

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{es igual al número } e$$

Por lo general los problemas de límites no son tan directos como en los ejemplos anteriores, el determinar el valor numérico de un límite requiere de ciertas transformaciones algebraicas, para después aplicar algunos de los resultados dados anteriormente.

A continuación, se estudiarán algunos métodos para la determinación de límites de sucesiones.

LÍMITE DE EXPRESIONES RACIONALES

Para determinar el límite infinito $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ en donde $P \ y \ Q$ son polinomios con variables discretas, esto es el dominio son los números naturales; se realiza lo siguiente:

Dividir tanto el numerador como el denominador entre la variable n elevada al exponente máximo que aparece en la expresión.

Ejemplo 1.7. Calcular el $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{18n^3 + 4n^2 - 9}{5 + 7n^2 - 6n^3}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{18n^3+4n^2-9}{5+7n^2-6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{18n^3+4n^2-9}{n^3}}{\dfrac{5+7n^2-6n^3}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{18n^3}{n^3}+\dfrac{4n^2}{n^3}-\dfrac{9}{n^3}}{\dfrac{5}{n^3}+\dfrac{7n^2}{n^3}-\dfrac{6n^3}{n^3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{18+\dfrac{4}{n}-\dfrac{9}{n^3}}{\dfrac{5}{n^3}+\dfrac{7}{n}-6} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(18+\dfrac{4}{n}-\dfrac{9}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{n^3}+\dfrac{7}{n}-6\right)} = \frac{18}{-6} = -3$$

Ejemplo 18.. Calcular el $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{34n^5-43n^2+17}{17n^7+16n^3+3}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{34n^5-43n^2+17}{17n^7+16n^3+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{34n^5-43n^2+17}{n^7}}{\dfrac{17n^7+16n^3+3}{n^7}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{34n^5}{n^7}-\dfrac{43n^2}{n^7}+\dfrac{17}{n^7}}{\dfrac{17n^7}{n^7}+\dfrac{16n^3}{n^7}+\dfrac{3}{n^7}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{34}{n^2}-\dfrac{43}{n^5}+\dfrac{17}{n^7}}{17+\dfrac{16}{n^4}+\dfrac{3}{n^7}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{34}{n^2}-\dfrac{43}{n^5}+\dfrac{17}{n^7}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(17+\dfrac{16}{n^4}+\dfrac{3}{n^7}\right)} = \frac{0}{17} = 0$$

Ejemplo 1.9. Calcular el $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+15}{5n^2+9n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+15}{5n^2+9n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^3+15}{n^3}}{\dfrac{5n^2+9n+1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^3}{n^3}+\dfrac{15}{n^3}}{\dfrac{5n^2}{n^3}+\dfrac{9n}{n^3}+\dfrac{1}{n^3}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^3}{n^3}+\dfrac{15}{n^3}}{\dfrac{5n^2}{n^3}+\dfrac{9n}{n^3}+\dfrac{1}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{15}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{n}+\dfrac{9}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)} = \frac{1}{0} \notin \mathbb{R}$$

Es decir, la sucesión no tiene límite, al construirse una tabla de valores de la sucesión podría observarse que los valores se hacen cada vez más grandes, es decir se van a infinito. (El lector puede verificarlo si así lo desea)

Ejemplo 1.10. Calcular el $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n-2)(5n+1)(n+3)^2}{(4n-5)(2n+7)(3n+8)^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3n-2)(5n+1)(n+3)^2}{(4n-5)(2n+7)(3n+8)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(3n-2)(5n+1)(n+3)^2}{n^4}}{\dfrac{(4n-5)(2n+7)(3n+8)^2}{n^4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{3n-2}{n}\right)\left(\dfrac{5n+1}{n}\right)\left(\dfrac{n+3}{n}\right)^2}{\left(\dfrac{4n-5}{n}\right)\left(\dfrac{2n+7}{n}\right)\left(\dfrac{3n+8}{n}\right)^2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-2}{n}\right)\left(\dfrac{5n+1}{n}\right)\left(\dfrac{n+3}{n}\right)^2}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-5}{n}\right)\left(\dfrac{2n+7}{n}\right)\left(\dfrac{3n+8}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{2}{n}\right)\left(5+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^2}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\dfrac{5}{n}\right)\left(2+\dfrac{7}{n}\right)\left(3+\dfrac{8}{n}\right)^2} = \frac{(3)(5)(1)^2}{(4)(2)(3)^2} = \frac{5}{24}$$

El siguiente ejemplo muestra que el mismo procedimiento se puede usar para algunas expresiones irracionales

Ejemplo 1.11. Calcular el $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{64n^6+27}-5n^2}{\sqrt{16n^4+49}+6n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{64n^6+27}-5n^2}{\sqrt{16n^4+49}+6n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt[3]{64n^6+27}-5n^2}{n^2}}{\dfrac{\sqrt{16n^4+49}+6n^2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt[3]{64n^6+27}}{n^2}-\dfrac{5n^2}{n^2}}{\dfrac{\sqrt{16n^4+49}}{n^2}+\dfrac{6n^2}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\dfrac{64n^6+27}{n^6}}-5}{\sqrt{\dfrac{16n^4+49}{n^4}}+6} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\dfrac{64n^6}{n^6}+\dfrac{27}{n^6}}-5}{\sqrt{\dfrac{16n^4}{n^4}+\dfrac{49}{n^4}}+6} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{64+\dfrac{27}{n^6}}-5}{\sqrt{16+\dfrac{49}{n^4}}+6} = \frac{4-5}{4+6} = -\frac{1}{10}$$

LÍMITE DE EXPRESIONES IRRACIONALES

Para determinar el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ en donde aparecen raíces cuadradas, se procede a racionalizar el numerador o el denominador (en donde aparezca la parte irracional).

Si la parte irracional es un binomio se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado de dicho binomio.

Ejemplo 1.12. Calcular el $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+5n}-n}{9}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5n}-n}{9}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+5n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+5n}+n\right)}{9\left(\sqrt{n^2+5n}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+5n}\right)^2-(n)^2}{9\left(\sqrt{n^2+5n}+n\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n-n^2}{9\left(\sqrt{n^2+5n}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{9\left(\sqrt{n^2+5n}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5n}{n}}{\frac{9\left(\sqrt{n^2+5n}+n\right)}{n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5n}{n}}{9\left(\frac{\sqrt{n^2+5n}}{n}+\frac{n}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{9\left(\sqrt{\frac{n^2+5n}{n^2}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{9\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1\right)}=\frac{5}{18}$$

Ejemplo 1.13. Calcular el $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^2-n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^2-n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\left(\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2-n+1}\right)}{\left(\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)\left(\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2-n+1}\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2-n+1}}{\left(\sqrt{n^2+n-1}\right)^2-\left(\sqrt{n^2-n+1}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2-n+1}}{n^2+n-1-\left(n^2-n+1\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2-n+1}}{2n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2-n+1}}{n}}{\frac{2n-2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n^2+n-1}}{n}+\frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n}}{2-\frac{2}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n^2+n-1}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2-n+1}{n^2}}}{2-\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{2-\frac{2}{n}}=1$$

CONCEPTOS ÚTILES

Definición. Una sucesión es una función cuyo dominio es un subconjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) y cuyo contradominio son los números reales ($\mathbb{R}$), es decir

$$\begin{aligned} a : A \subset \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\to a(n) = a_n \end{aligned}$$

Si A es un conjunto finito la sucesión es finita, si A es infinito la sucesión es infinita

Definición. Una sucesión se dice que es creciente si cada término es mayor que su antecesor es decir $a_{n+1} > a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Definición. Una sucesión se dice que es decreciente si cada término es menor que su antecesor, es decir $a_{n+1} < a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Definición. Una sucesión se dice que es no decreciente si cada término es mayor o igual que su antecesor, es decir $a_{n+1} \geq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Definición. Una sucesión se dice que es no creciente si cada término es menor o igual que su antecesor, es decir $a_{n+1} \leq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$

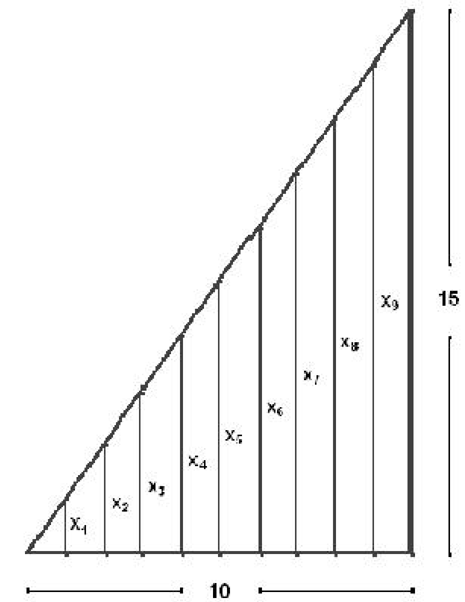
Definición. Una sucesión es monótona si es creciente o decreciente o no decreciente o no creciente

Definición. Una sucesión es acotada inferiormente si todos sus términos son mayores o iguales que un cierto número m es decir, $a_n \geq m$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Problema 1.5.

La estructura de un puente tiene la forma de un triángulo rectángulo con lados de 10 metros de base y 15metros de altura. Si la estructura contiene nueve soportes a espacios iguales. Determinar la longitud de los diez componentes verticales.

Solución: Observar que la base queda dividida en diez partes iguales de longitud 1 metro. Por otra parte, se tienen una serie de triángulos rectángulos semejantes, en donde se cumplen las siguientes proporciones



$$\frac{x_1}{15} = \frac{1}{10} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}$$

$$\frac{x_2}{15} = \frac{2}{10} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}(2)$$

$$\frac{x_3}{15} = \frac{3}{10} \Rightarrow x_3 = \frac{3}{2}(3)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{x_9}{15} = \frac{9}{10} \Rightarrow x_9 = \frac{3}{2}(9)$$

Se quiere obtener la suma de las longitudes de los soportes verticales, observar que $15 = x_{10} = \frac{3}{2}(10)$

Con esto la suma la denotamos por

$$S_{10} = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_9 + x_{10}$$

Sustituyendo valores tenemos

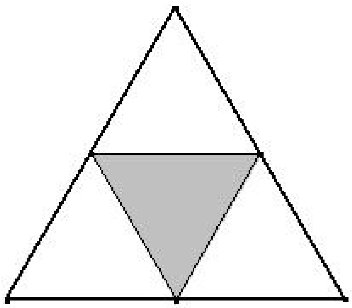
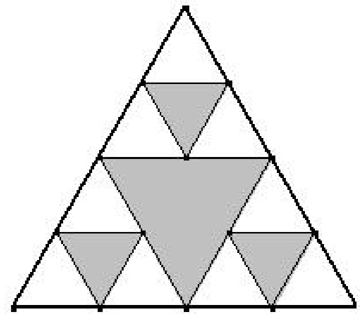
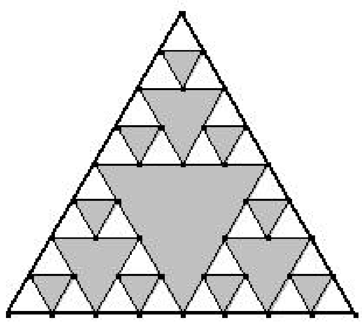
$$S_{10} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}(2) + \frac{3}{2}(3) + \ldots + \frac{3}{2}(9) + \frac{3}{2}(10)$$

Y factorizando se tiene

$$S_{10} = \frac{3}{2}(1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10) = \frac{3}{2}\left(\frac{10(11)}{2}\right) = 82.5m$$

Problema 1.6.

En un triángulo equilátero de área *A* se unen los puntos medios de sus lados para formar cuatro triángulos equiláteros, de los cuales el del centro se pinta de negro. Luego con cada uno de los triángulos restantes se realiza lo mismo. Dicho proceso se repite indefinidamente. Encontrar el área sombreada al final de cada paso, este triángulo es conocido como el triángulo de Sierpinski,

	
(1) En este caso el triángulo es dividido en 4 triángulos con la misma área ($\frac{1}{4}A$)	(2) En este caso los 3 triángulos que no se sombrearon en el paso anterior se dividen en cuatro partes con la misma área ($\frac{1}{16}A$)
	(3) En este caso los 9 triángulos que no se sombrearon en el paso anterior se dividen en cuatro partes con la misma área ($\frac{1}{64}A$)

Vamos a denotar por a_n al área sombreada en cada caso.

Sí S_1 representa al área sombreada en el primer caso, es decir $a_1 = \frac{1}{4}A$.

El área sombreada solamente en el segundo caso es la correspondiente a los tres triángulos sombreados de los 12 más pequeños es decir $a_2 = \frac{3}{16}A$.

El área sombreada en el tercer caso corresponde a los 9 triángulos sombreados de 36 más pequeños, es decir $a_3 = \frac{9}{64}A$.

Para el cuarto caso, cada uno de los triángulos no sombreados se divide en cuatro partes iguales y sombrea el del centro, es decir se dividen los 27 triángulos más pequeños en cuatro partes iguales, obteniéndose así 108 triángulos, de los cuales se sombrean 27, cada uno teniendo área igual a $\frac{1}{256}A$.

Por lo tanto, el área sombreada en este paso es de $a_4 = \frac{27}{256}A$, ahora, escribimos los términos obtenidos y los comparamos:

$$a_1 = \frac{1}{4}A\,,\quad a_2 = \frac{3}{16}A\,,\quad a_3 = \frac{9}{64}A\,,\quad a_4 = \frac{27}{256}A\,.$$

Observar que $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{4}$, esto quiere decir que la sucesión forma una progresión geométrica de razón $r = \frac{3}{4}$ y primer término $a_1 = \frac{1}{4}A$ por lo que la suma de los n primeros términos de esta progresión esta dada por

$$S_n = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r-1}$$

Sustituyendo tenemos $S_n = \dfrac{\frac{1}{4}A\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right)}{\frac{3}{4}-1} = -A\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right)$.

Y la suma cuando el proceso sigue indefinidamente es

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} -A\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right) = A$$

A este conjunto se le conoce como triángulo de Sierpinsky y es muy utilizado en matemáticas para ilustrar varios comportamientos muy particulares.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1.5. Obtener la expresión algebraica del término general de la sucesión y la expresión para la suma

a) $1024,\ 768,\ 576,\ 432,\ 324,\ \ldots,$

b) $\frac{1}{4},\ \frac{5}{8},\ \frac{25}{16},\ \frac{125}{32},\ \frac{625}{64},\ \ldots,$

c) $-3,\ \frac{9}{10},\ -\frac{27}{100},\ \frac{81}{1000},\ -\frac{243}{10000},$

Ejercicio 1.6. Obtener los sumandos y la suma finita de

a) $\sum_{k=1}^{10}(-2)^k$ b) $\sum_{k=1}^{10}80\left(\frac{3}{5}\right)^k$ c) $\sum_{k=1}^{10}-\left(-\frac{1}{2}\right)^k$ d) $\sum_{k=1}^{10}\frac{3^{k+1}}{5^{k-1}}$

Ejercicio 1.7. Obtener una fórmula en términos de n para las sumas

a) $\sum_{k=1}^{n}(-2)^k$ b) $\sum_{k=1}^{n}80\left(\frac{3}{5}\right)^k$ c) $\sum_{k=1}^{n}-\left(-\frac{1}{2}\right)^k$ d) $\sum_{k=1}^{n}\frac{3^{k+1}}{5^{k-1}}$

Ejercicio 1.8. Obtener el término general de cada una de las siguientes sucesiones de números:

a) $13,\ 17,\ 21,\ 25,\ 29,\ \ldots,$ b) $293,\ 287,\ 281,\ 275,\ 269,\ \ldots,$

Ejercicio 1.9. a) Obtener una fórmula para la suma de los primeros n números naturales. b) Obtener una fórmula para la suma de los primeros n-números pares naturales. c) Obtener una fórmula para la suma de los primeros n números impares naturales. d) Obtener una fórmula para la siguiente suma $5+9+13+17+21+\ldots\ldots$ (Obtener primero el término general). e) Obtener una fórmula para la siguiente suma $11+18+25+32+39+\ldots\ldots\ldots$ (Obtener primero el término general)

Ejercicio 1.10. Obtener el resultado de los siguientes límites

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n^3-4n^2+8}{6n^3+7}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{3n+7}\right)^4$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^7+8n^2-10}{5n^8+6n^2+9}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{27n^6+1}}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(0.7)^n+4}{1+(0.3)^n}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2(10)^{n+1}}{5+3(10)^{n-1}}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{2}{5}\right)^n-2}$ h) $\lim\limits_{n\to 2}\frac{4(10)^n-3(10)^{2n}}{3(10)^{n-1}+2(10)^{2n-1}}$ i) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+25(3)^n}{10(3)^n-2^n}$

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2-(n-1)^2}$ k) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2)^{\frac{1}{n}}-8}{(2)^{\frac{1}{n}}+24}$ l) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+3)^3(3n-2)^2}{n^5+5}$

Unidad 2. El concepto de derivada: variación y razón de cambio

Propósito. El alumno interpretará el concepto de derivada a partir del análisis de la variación y de la razón de cambio, al resolver problemas en diferentes contextos cuyos modelos sean funciones polinomiales.

En esta unidad los procesos que se desarrollan son los relacionados con funciones reales con variable real, la dependencia de la variación de la variable independiente, conoce y maneja la variación de la variable independiente, lo que implica también que la representación de un problema o suceso por medio de la función se vuelve fundamental. En el presente trabajo suponemos que el lector conoce y maneja el concepto de función, el seguimiento de estos temas requiere de un manejo formal, pues los conceptos y su definición en este texto, se distinguen considerablemente de los utilizados anteriormente. Es importante, que el concepto de función se maneje con cierta soltura, así como su fabulación y gráfica y distinga el dominio y rango de la función (conjunto de imágenes de valores del dominio) el cual, es un subconjunto de los números reales.

0 0

Sugerencias de actividades de aprendizaje teórico-prácticas

Comenzaremos la unidad planteando varios problemas, a través del cual se introducirá los conceptos de *incremento, razón, razón de cambio promedio.*

Problema 1. **Aplicación a Física.** Un objeto se desplaza con respecto a un origen determinado, de acuerdo con la expresión $S(t) = 5t + 3$ m. En la expresión $S(t)$ esta

dado en m y Encuentre la ***razón de cambio promedio*** de su desplazamiento entre los tiempos $t_1 = 2\,s$ y $t_2 = 4s$ y t en segundos, la ***razón de cambio instantáneo*** de

su desplazamiento. Ilustre con una tabulación y gráfica.

Solución:

Vamos introduciendo los diferentes conceptos: Inicialmente observemos que la función dada es una función lineal, y utilicemos *Cambio en el tiempo*, lo denominaremos *Incremento del tiempo*, de manera simple entenderemos como diferencia entre los dos tiempos $t_2 - t_1$ *a esta diferencia la llamaremos incremento y*

y la representaremos con $\Delta t = t_2 - t_1$, *en nuestro problema el CAMBIO en el tiempo es el incremento* $\Delta t = t_2 - t_1 = 4 - 2\ s$, *esto es* $\Delta t = 2s$

Ahora vamos a encontrar el **CAMBIO** del desplazamiento, esto es, como depende del tiempo $S(t)$ entonces debemos encontrar $S(t_2) - S(t_1)$, lo llamaremos incremento de la función $\Delta S(t)$; veamos $S(t_2)-S(t_1)=(5t_2+3)-(5t_1+3)$, sustituimos los valores $t_2=4$ y $t_1=2$, por lo tanto

$$\Delta S(t)=S(t_2)-S(t_1)=(5(4)+3)-(5(2)+3)=23-13=10m$$

Ahora vamos a recordar el concepto de razón, utilicemos r para representarla; "Una razón se define como la comparación de dos cantidades a y b a través del cociente entre ellas $r=\frac{a}{b}$".

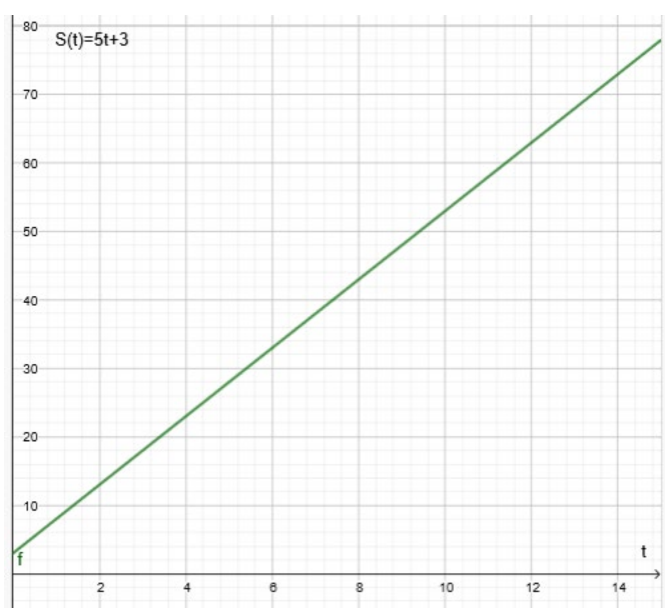
En nuestro problema vamos a calcular lo que nos interesa, LA RAZON DE CAMBIO DE LA FUNCIÓN $\Delta S(t)=S(t_2)-S(t_1)$ ENTRE EL CAMBIO DEL TIEMPO $\Delta t=t_2-t_1$.

Para nuestro caso particular, la razón de cambio, la cual llamaremos RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO es $r=\frac{\Delta S(t)}{\Delta t}$, por lo tanto

$$r=\frac{\Delta S(t)}{\Delta t}=\frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{23-13}{4-2}=\frac{10}{2}=5\frac{m}{s}$$

En física esta cantidad representa la velocidad promedio del objeto entre los tiempos $t_2=4$ y $t_1=2$ s.

Grafiquemos este caso particular



Observemos que la grafica de la función es una recta, esto es, corresponde a una función lineal.

Si *calculamos la razón de cambio entre dos tiempos cualesquiera, observaremos que nuestro resultado siempre será*

$$\frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1}=5\frac{m}{s}$$

Vamos a realizar un proceso algebraico, esto es, utilicemos dos tiempos utilizando símbolos, por ejemplo, usemos $t_1 = x$ y $t_2 = w$ y calculemos la razón de cambio instantáneo, a saber

$$r = \frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = \frac{S(w) - S(x)}{w - x} = \frac{(5w+3) - (5t+3)}{w-t} = \frac{5(w-t)}{w-t} = 5\frac{m}{s}$$

Observemos que no importa cual es el valor numérico de los tiempos, nuestro resultado es una constante, en otras palabras, el objeto tiene una velocidad promedio constante. Podemos decir que a cualquier tiempo (lo podemos decir como cualquier instante) tiene una velocidad de $5\frac{m}{s}$, en otras palabras, tendremos una razón de cambio instantánea.

Vamos a trabajar con un problema donde la función es una función polinomial de segundo grado

Problema 2. El costo de producción de x unidades de cierto artículo es $C(x) = 1500 + 5x + 0.09x^2$. a).- Calcular la razón de cambio promedio de C con respecto x cuando cambia el nivel de producción, de $x = 80$ artículos a $x = 140$ artículos y b) de $x = 100$ artículos a $x = 160$ artículos . c). Calcular la razón de cambio instantáneo de C cuando el nivel de producción es $x = 170$ artículos.

Solución:

Vamos a calcular la razón de cambio promedio del Costo respecto a la producción de artículos, esto es:

$$r = \frac{\Delta C(x)}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Para el inciso a)

$$r = \frac{\Delta C(x)}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\left[1500 + 5(140) + 0.09(140)^2\right] - \left[1500 + 5(80) + 0.09(80)^2\right]}{140 - 80}$$

Realizamos operaciones

$$r = \frac{\Delta C(x)}{\Delta x} = \frac{C(140) - C(80)}{140 - 80} = \frac{3964 - 2476}{60} = \frac{1488}{60} = 24,8\frac{pesos}{articulo} \qquad \text{(A)}$$

Ahora el inciso b)

$$r = \frac{\Delta C(x)}{\Delta x} = \frac{C(160) - C(100)}{160 - 100} = \frac{\left[1500 + 5(160) + 0.09(160)^2\right] - \left[1500 + 5(100) + 0.09(100)^2\right]}{60}$$

$$r=\frac{\Delta C(x)}{\Delta x}=\frac{C(160)-C(100)}{60}=\frac{4604-2900}{60}=\frac{1704}{60}=28.4\frac{pesos}{articulo}$$

Observar que, en este problema, la razón de cambio promedio en los incisos (a) y (b) son diferentes, esto no es constante como en el caso del problema 1.

Vamos a realizar un proceso algebraico, esto es, utilicemos dos tiempos utilizando símbolos, por ejemplo, usemos $t_1 = x$ y $t_2 = w$ y calculemos la razón de cambio instantáneo, a saber

$$r=\frac{\Delta C(x)}{\Delta x}=\frac{C(w)-C(x)}{w-x}=\frac{(1500+5w+0.09w^2)-(1500+5x+0.09x^2)}{w-x}=$$

$$r=\frac{C(w)-C(x)}{w-x}=\frac{5(w-x)+0.09(w^2-x^2)}{w-x}=\frac{5\,\cancel{(w-x)}}{\cancel{w-x}}+\frac{0.09\,\cancel{(w-x)}\,(w+x)}{\cancel{w-x}}=5+0.09(w+x)$$

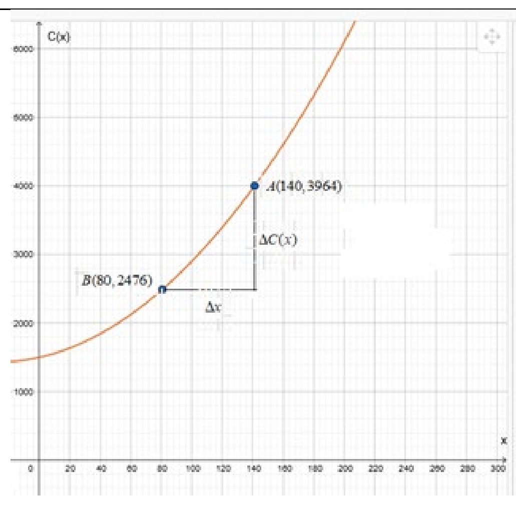
Nota. La factorización de diferencia de cuadrados (w^2-x^2) es el producto de los binomios conjugados $(w-x)(w+x)$.

Concluimos que la razón de cambio promedio en este problema depende linealmente de los dos valores de la variable independiente elegidos w y x.

Comprobémoslo para $x=80$ y $w=140$

$$\frac{C(140)-C(80)}{140-80}=5+0.09(w+x)=5+0.09(140+80)=5+0.09(220)=24.8\frac{pesos}{articulo}$$

Resultado mostrado en la ecuación A.



Observemos una imagen que representa gráficamente, la curva correspondiente y en forma particular un incremento de la variable independiente y el incremento de la función.

Para encontrar la rapidez de cambio instantánea, esto es, en un punto, procedemos con una tabulación de la siguiente manera.

Queremos la razón de cambio instantáneo en $x = 170$.

Calculamos entonces la razón de cambio promedio $\dfrac{C(w) - C(x)}{w - x}$, con la variación de x mostrada en la tabla

w	C´(x)
169.94	35.5892
169.95	35.591
169.96	35.5928
169.97	35.5946
169.98	35.5964
169.99	35.5982

170

w	C´(x)
170.02	35.6036
170.03	35.6054
170.04	35.6072
170.05	35.609
170.06	35.6108
170.07	35.6126

170

En la tabla del lado izquierdo vamos cambiando en un centésima el valor de w acercándonos al valor de x, la razón de cambio instantáneo va hacia el valor 35.6, en la tabla del lado derecho, nos acercamos a x con valores por encima de x, la razón de cambio instantáneo también va hacia 35.6. En matemáticas se dice que *es un límite* dicho valor.

Por lo tanto, la razón de cambio instantáneo cuando $x = 170$ es $C'(170) = 35.6\dfrac{pesos}{artículo}$. *C´(x)* representa la razón de cambio instantáneo.

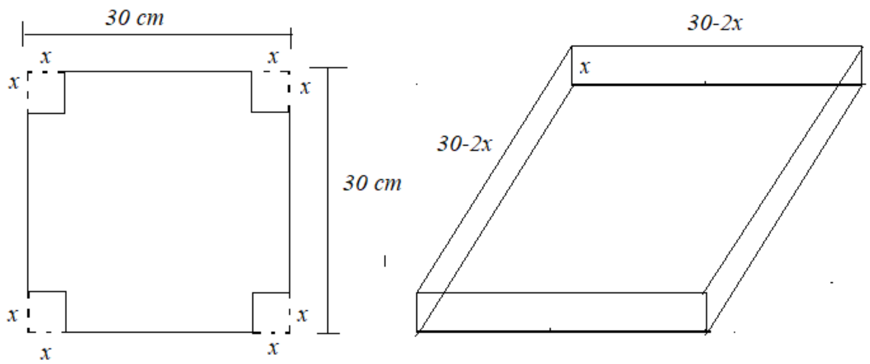
Aplicando el concepto de límite, podemos escribir que la razón de razón de cambio instantánea es

$$\lim_{w \to x} \frac{C(w) - C(x)}{w - x}$$

En nuestro problema $C'(x) = \lim_{w \to x} \dfrac{C(w) - C(x)}{w - x} = \lim_{w \to x} \left[5 + 0.09(w + x)\right] = 5 + 0.18x$

Si $x = 170$, entonces $C'(170) = 5 + 0.18(170) = 35.6\dfrac{pesos}{artículo}$

***Problema 3*. Construcción de una caja.** Se desea construir un depósito rectangular de base cuadrada, abierto por arriba utilizando una hoja de cartón de 30 cm. de lado. Se cortan cuadrados en las esquinas del cartón y se doblan los lados hacia arriba. Dependiendo del tamaño del corte realizado, el volumen de la caja varía de acuerdo con la expresión $V(x) = x(30-2x)^2$. Hallar la razón de cambio promedio cuando la variable x cambia de 5 a 8 cm. Hallar la razón de cambio instantáneo cuando $x = 10cm$.

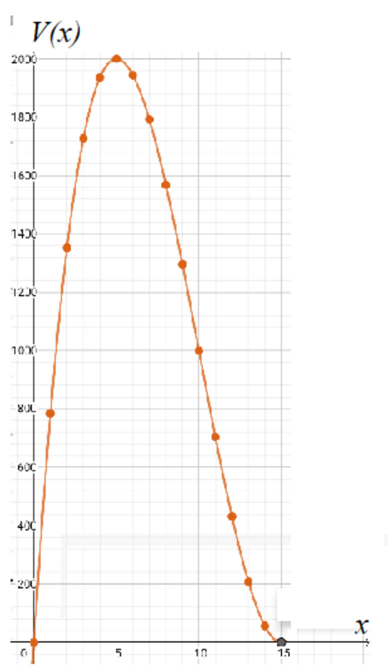


Solución.

Vamos inicialmente a desarrollar la expresión para el Volumen

$$V(x) = x(30-2x)^2 = x(900-120x+4x^2)$$

De donde $V(x) = 900x - 120x^2 + 4x^3$, la cual es una función cubica. Veamos su grafica



Importante tener en cuenta que el dominio de la función es el intervalo (0,15) cm

a) Vamos a encontrar la razón de cambio promedio cuando la variable x cambia de 5 a 8 cm

$$r=\frac{V(8)-V(5)}{8-5}=\frac{\left[900(8)-120(8)^2+4(8)^3\right]-\left[900(5)-120(5)^2+4(5)^3\right]}{8-5}$$

$$r=\frac{V(8)-V(5)}{8-5}=\frac{1568-2000}{3}=\frac{-432}{3}=-144cm^2$$

En esta razón de cambio promedio, vemos que nos muestra una disminución del Volumen, lo indica el signo menos.

Vamos a obtener la razón de cambio promedio para $x_1=x$ y $x_2=w$

$$r=\frac{V(w)-V(x)}{w-x}=\frac{\left[900(w)-120(w)^2+4(w)^3\right]-\left[900(x)-120(x)^2+4(x)^3\right]}{w-x}$$

$$r=\frac{V(w)-V(x)}{w-x}=\frac{900(w-x)-120(w^2-x^2)+4(w^3-x^3)}{w-x}=\frac{900(w-x)}{w-x}-\frac{120(w^2-x^2)}{w-x}+\frac{4(w^3-x^3)}{w-x}$$

$$r=\frac{900\,\cancel{(w-x)}}{\cancel{w-x}}-\frac{120\,\cancel{(w-x)}\,(w+x)}{\cancel{w-x}}+\frac{4\,\cancel{(w-x)}\,(w^2+wx+x^2)}{\cancel{w-x}}$$

$$r=900-120(w+x)+4(w^2+wx+x^2)$$

Ahora vamos a encontrar la rapidez de cambio instantánea en $x=10cm$, lo hacemos mediante una tabulación. Nos acercaremos a $x=10cm$ mediante un acercamiento con milésimas, veamos la siguiente tabla

x	*V(x)*
9.993	-299.9998
9.994	-299.9999
9.995	-299.9999
9.996	-299.9999
9.997	-300
9.998	-300

10

x	*V(x)*
10.001	-300
10.002	-300
10.003	-300
10.004	-299.9999
10.005	-299.9999
10.006	-299.9999

10

Aplicando el concepto de límite, podemos escribir que la razón de razón de cambio instantánea es

$$\lim_{w\to x}\frac{V(w)-V(x)}{w-x}=\lim_{w\to x}\left[900-120(w+x)+4(w^2+wx+x^2)\right]=900-120(x+x)+4(x^2+x^2+x^2)$$

$$\lim_{w\to x}\frac{V(w)-V(x)}{w-x}=900-240x+12x^2$$

Si sustituimos $x=10cm$ obtenemos la razón de cambio instantáneo

$$\lim_{w\to 10}\frac{V(w)-V(x)}{w-x}=900-240(10)+12(10)^2=-300\frac{volumen}{cm}$$

Es importante hacer notar lo siguiente, si trabajamos con una función lineal (grado máximo 1), como en el problema 1, la razón de cambio promedio es instantánea. Si la función con la cual se trabaja es cuadrática (grado máximo 2), la razón de cambio instantánea es de grado 1. (ver problema 2). Y si la función es de grado 3, la razón de cambio instantánea es de grado 2; Problema 3.

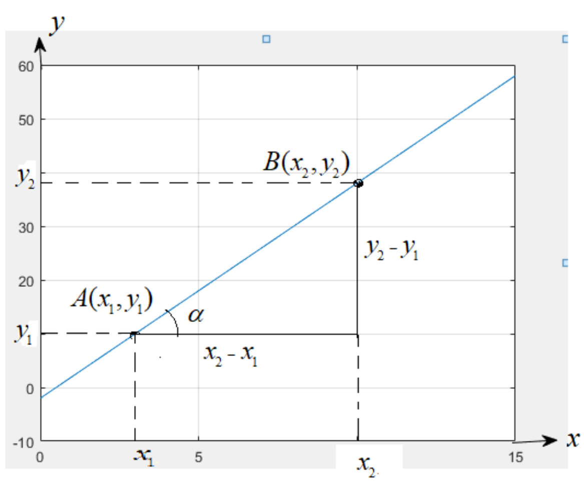
Interpretación Geométrica

Para este tema, vamos a recordar el concepto de pendiente de una recta.

La pendiente de una recta, la cual hemos representado con la letra m, la hemos definido como la tangente del ángulo de inclinación α de la recta, esto es:

$$m=\tan\alpha$$

Veamos la siguiente figura



Observamos que la pendiente de la recta es $m = \tan\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Ahora vamos a revisar las gráficas que representan a los problemas 1,2 y 3.

Para el problema 1, vamos a calcular la pendiente de una recta que pasa entre dos puntos de la curva, por ejemplo $\left(x, f(x)\ \right)$; $\left(w, f(w)\right)$.

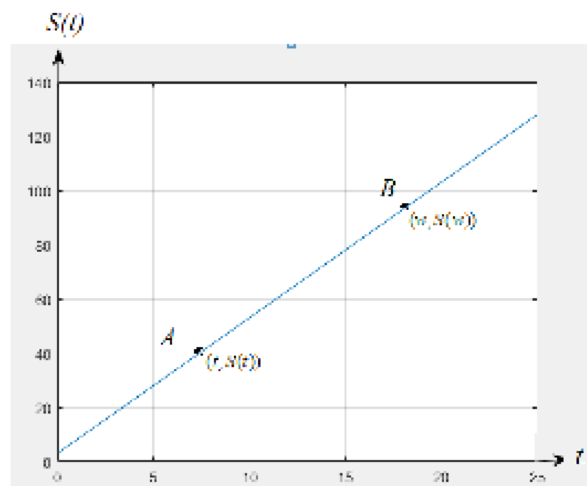
Para el ejercicio 1, tenemos la función del desplazamiento en términos del tiempo

$$S(t) = 5t + 3m$$

Si calculamos la pendiente entre los puntos $(t, S(t))$ y $(w, S(w))$ tenemos

$$m = \frac{S(w) - S(t)}{w - t}$$

Observamos que la pendiente siempre es la misma.



Para el problema 2, vamos a calcular la pendiente de una recta que pasa entre dos puntos de la curva, por ejemplo $\left(x, f(x)\ \right)$; $\left(w, f(w)\right)$.

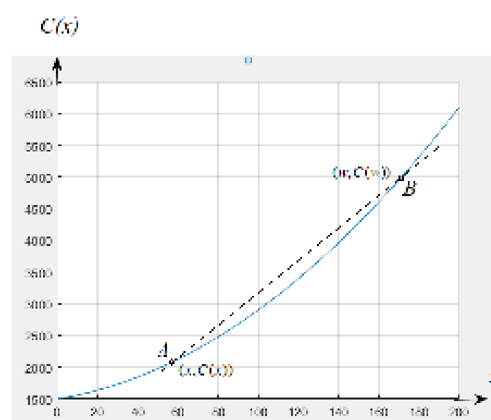
Para el problema 2, tenemos la función del Costo $C(x)$ respecto a artículos producidos x.

$$C\left(x\right) = 1500 + 5x + 0.09x^2$$

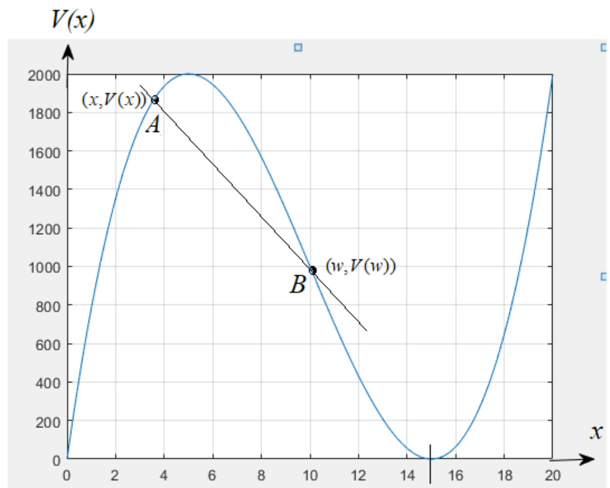
Si calculamos la pendiente entre los puntos $(x, C(x))$ y $(w, C(w))$ tenemos

$$m = \frac{C(w) - C(x)}{w - x}$$

Observamos que la pendiente cambia, si cambiamos los puntos elegidos



Para el problema 3, vamos a calcular la pendiente de una recta que pasa entre dos puntos de la curva, por ejemplo $\left(x, f(x)\ \right)$; $\left(w, f(w)\right)$.

Para el problema 3, tenemos la función del volumen *V(x)* en términos de los dobles realizados $V(x) = 900x - 120x^2 + 4x^3$ Si calculamos la pendiente entre los puntos $(x, V(x))$ y $(w, V(w))$ tenemos $m = \dfrac{V(w) - V(x)}{w - x}$ Observamos que la pendiente cambia según los puntos elegidos.	

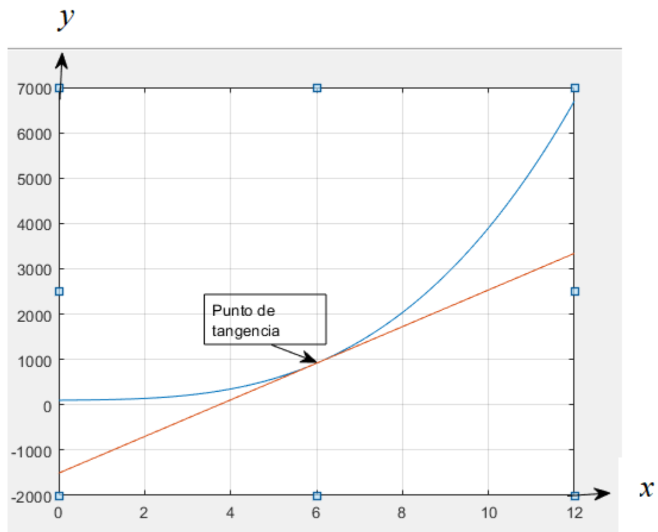
Las rectas que intersectan dos puntos de la curva se llaman rectas secantes a la curva.

Observamos en cada caso que la expresión para calcular la pendiente de la recta secante es la “misma” que permite calcular la razón de cambio promedio.

En conclusión, podemos calcular la pendiente de una recta secante a una curva.

Pendiente de recta tangente a una curva

La recta tangente a una curva es la línea que toca a la curva en un punto, veamos la figura



Recordemos que la razón de cambio instantánea esta dada por

$$\lim_{w \to x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x}$$

Lo cual indica que es el límite del cambio de la razón promedio cuando nos acercamos a un punto determinado. Geométricamente ***la recta secante tiende a ser una recta tangente*** a la curva en el punto cuando $w \to x$ (w tiende a x). Por lo tanto, la expresión última nos proporciona la pendiente de la recta tangente.

Ejercicio. Encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 4x^3 - 3x^2 + 10x + 100$ en el punto x=6.

Solución.

La pendiente de la recta tangente es $\lim_{w \to x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x}$

Tenemos $f(w) = 4w^3 - 3w^2 + 10w + 100$ y $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 10x + 100$

Sustituimos en el Límite

$$m = \lim_{w \to x} \frac{4w^3 - 3w^2 + 10w + 100 - \left(4x^3 - 3x^2 + 10x + 100\right)}{w - x}$$

$$m = \lim_{w \to x} \frac{4(w^3 - x^3) - 3(w^2 - x^2) + 10(w - x)}{w - x}$$

$$m=\lim_{w\to x}\frac{4\cancel{(w-x)}(w^2+wx+x^2)+3\cancel{(w-x)}(w+x)+10\cancel{(w-x)}}{w-x}=\lim_{w\to x}\frac{4(w^2+wx+x^2)+3(w+x)+10}{w-x}$$

$$m=\lim_{w\to x}\left[4(w^2+wx+x^2)+3(w+x)+10\right]=4(x^2+x^2+x^2)+6x+10=12x^2+6x+10$$

Nota: Se sugiere calcular el límite en forma general y al final sustituir el valor de x.

La pendiente en $x=6$ es $m=12x^2+6x+10=12(6)^2+6(6)+10=406$.

A la expresión $\lim_{w\to x}\frac{f(w)-f(x)}{w-x}$ se le conoce como **límite de FERMAT** en un problema específico nos permite encontrar la rapidez de variación de la función que representa al problema en cuestión, en otras palabras nos permite calcular la **rapidez de cambio instantánea.**

Geométricamente, el resultado evaluado en un punto de la curva **es la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.**

A la función obtenida después de aplicar el límite de Fermat, se le conoce como **derivada de la función original** y se representa de la siguiente manera

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{w0\to x}\frac{f(w)-f(x)}{w-x}$$

Ejercicios

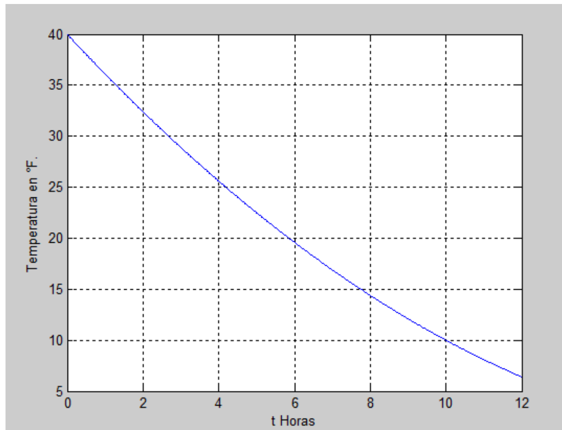
Problema. Una masa de aire frío se aproxima a una ciudad de modo que la temperatura es $T(t)$ grados Fahrenheit a t horas después de la media noche, Si la expresión de la temperatura en función del tiempo es $T(t)=0.1\left(400-40t+t^2\right)$ en el intervalo $0\le t\le 12$.

a). Graficar $T(t)\ vs\ t$. b). Obtener la razón de cambio promedio de la temperatura respecto al tiempo en el intervalo $[t_0,t]$ horas. c). Calcular la razón de cambio instantáneo de la temperatura respecto al tiempo $\frac{dT(t)}{dt}$ en cualquier t. d). Graficar $\frac{dT(t)}{dt}\ vs\ t$.

Solución. a) Tabulamos en el intervalo $[0,12]$ horas del dominio de la función $T(t)$

t	1	2	3	6	9	11	12
$T(t)$	36.1	32.4	28.9	19.6	12.1	8.1	6.4

La gráfica obtenida es:



b) Para encontrar la razón de cambio promedio $\bar{\tau}(t)=\dfrac{\Delta T(t)}{\Delta t}$ en el intervalo $[t_0,t]$, procedemos de la siguiente manera

$$\bar{\tau}(t)=\frac{T(t)-T(t_0)}{t-t_0}=\frac{0.1\left(400-40t+t^2\right)-0.1\left(400-40t_0+t_0^2\right)}{t-t_0}=$$

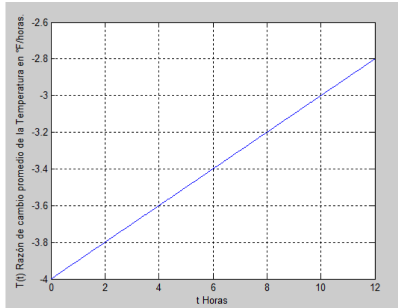
$$=\frac{-4\cancel{(t-t_0)}+0.1\cancel{(t-t_0)}(t+t_0)}{\cancel{t-t_0}}=-4+0.1(t+t_0)$$

Se observa que la razón de cambio promedio es variable, esto es, depende el tiempo t y del parámetro t_0.

Si consideramos $t_0=0$, la razón promedio en un intervalo $[0,t]$ en el intervalo $[0,12]$, es:

t	1	2	3	6	9	11	12
$\dfrac{\Delta T(t)}{\Delta t}$	- 3.9	- 3.8	- 3.7	- 3.4	- 3.1	- 2.9	- 2.8

La gráfica correspondiente de la razón de cambio promedio $\dfrac{\Delta T(t)}{\Delta t}$ vs t es:



Observar que la razón de cambio instantáneo $\bar{\tau}(t)=\dfrac{\Delta T(t)}{\Delta t}$ es una función lineal.

c) Para calcular la razón de cambio instantáneo utilizamos $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{T(t)-T(t_0)}{t-t_0}$, a saber:

$$\frac{dT(t)}{dt}=\lim_{t\to t_0}\frac{T(t\ )-T(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{0.1\left(400-40t\ +t^2\right)-0.1\left(400-40t_0+t_0^2\right)}{t-t_0}$$

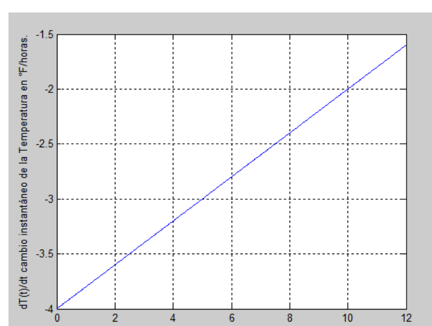
$$=\lim_{t\to t_0}\frac{(40.0-40.0)-4\cancel{(t-t_0)}+0.1\cancel{(t-t_0)}(t+t_0)}{\cancel{t-t_0}}=\lim_{t\to t_0}\left(-4+0.1(t+t_0)\right)=-4+0.2t_0$$

Consideremos a $t_0=t$. La función $\dfrac{dT(t)}{dt}$ en el tiempo t es $\dfrac{dT(t)}{dt}=-4+0.2t$

d). La gráfica $\dfrac{dT(t)}{dt}$ vs. t, la hacemos tabulando

t	**1**	**2**	**3**	**6**	**9**	**11**	**12**
$\dfrac{dT(t)}{dt}$	**- 3.8**	**- 3.6**	**- 3.4**	**- 2.8**	**- 2.2**	**- 1.8**	**- 1.6**

La gráfica correspondiente a $\dfrac{dT(t)}{dt}$ $vs\ t$ es



Ejercicio. a) Encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva cuya función es $f(x) = -6x^2 + 4x + 10$ en $x = -3$. b) Escribir la ecuación de la recta tangente.

Solución. a) Para encontrar la ecuación de la recta tangente utilizamos

$$m = \lim_{w \to x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x}$$

$$f(w) = -6w^2 + 4w + 10; \qquad f(x) = -6x^2 + 4x + 10\,;$$

Por lo tanto

$$\lim_{w \to x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x} = \lim_{w \to x} \frac{-6w^2 + 4w + 10 - (-6x^2 + 4x + 10)}{w - x} =$$

$$\lim_{w \to x} \frac{-6(w^2 - x^2) + 4(w - x)}{w - x} = \lim_{w \to x} \frac{-6\,\cancel{(w - x)}\,(w + x) + 4\,\cancel{(w - x)}}{\cancel{w - x}} = \lim_{w \to x} \left[-6(w + x) + 4\right]$$

Finalmente $$\lim_{w \to x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x} = \lim_{w \to x} \left[-6(w + x) + 4\right] = -6(x + x) + 4 = -12x + 4$$

Cuando $x = -3$, la pendiente de la recta tangente es $m = -12(-3) + 4 = 40$

b) Para encontrar la ecuación de la recta, además de la pendiente se requiere un punto de la recta. Este punto está en $x = -3$, la imagen correspondiente es $y = f(x) = f(-3)$

$$f(-3) = -6(-3)^2 + 4(-3) + 10 = -6(9) - 12 + 10 = -56$$

El punto es $P(-3, -56)$ y su pendiente es $m = 40$.

La ecuación de la recta tangente es

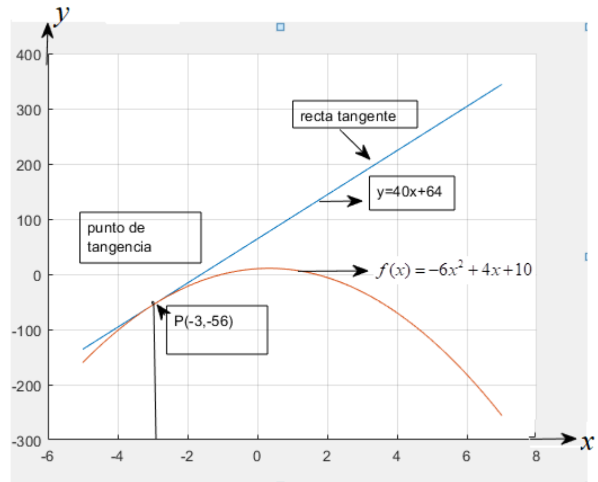
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

sustituyendo

$$y - (-56) = 40(x - (-3))$$

Finalmente

$$y = 40x + 64$$



Ejercicio. Encontrar la derivada de la función $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 10x - 7$.

Solución.

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{w0 \to x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x}$$

Al calcular el límite obtenemos

$$f^{'}(x) = 9x^2 - 10x + 10$$

Se sugiere realizar el límite.

Unidad 3. Derivada de funciones algebraicas

Propósito: Usará el concepto de derivada a través de su representación algebraica para identificar patrones de comportamiento y obtendrá las reglas de derivación; utilizará estas reglas para obtener la derivada de una función de manera eficaz y la reconocerá como otra función. Además, aplicará las reglas de derivación en diferentes contextos.

DESCRIPCIÓN

En la presente unidad se establece de manera formal el concepto de derivada y su interpretación geométrica. En el capítulo anterior se introdujo de manera intuitiva el concepto de derivada de una función, se mostró que el concepto de límite de una función continua es fundamental para entender un proceso continuo infinitesimal utilizando lo que denominamos el Límite de Fermat.

Se establece la equivalencia entre el Límite de Fermat y la representación de Leibniz a partir del concepto de incrementos, tanto de la función como de la variable independiente. Es importante el desarrollo algebraico requerido para obtener las fórmulas básicas de derivación, así como el uso de estas.

Con la interpretación geométrica de la derivada al final del capítulo, el lector queda en posibilidad de realizar un análisis del comportamiento gráfico de las funciones.

Se desarrolla la razón de cambio instantáneo con la representación $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, esto es la representación de Leibnitz-Newton, donde h corresponde al incremento correspondiente, se realizan ejercicios abstractos de funciones de grado cero, uno, dos y tres y se muestra que se obtiene los mismos resultados cuando se utiliza el límite de Fermat. A partir de trabajar las derivadas de funciones polinomiales, hacemos una generalización. Y aplicando la definición de derivada se obtienen las fórmulas para la suma, producto y cociente de funciones algebraicas, se hace una extensión para obtener y explicar la regla de la cadena. Se resuelven ejercicios donde se aplican las reglas de derivación. Además, se ejercita la obtención de ecuaciones de rectas tangentes a diversas curvas. Se propone que grafiquen utilizando software, por ejemplo, Geogebra.

PALABRAS CLAVE: Definición de derivada, Diferenciable, Reglas de Derivación, Regla de la cadena.

Sugerencias de actividades de aprendizaje teórico-prácticas

En el capítulo anterior de este texto, se trabajó la razón de variaciones para el caso de la razón promedio de una función $f(x)$, esto es, la razón de cambio de una función, con respecto a su variable independiente:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(w) - f(x)}{w - x}$$

Y la razón de variación instantánea se estableció como:

$$\lim_{w \to x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Ahora establecemos la definición formal en matemáticas para el concepto de *derivada de una función* $f(x)$ *en un punto* x .Hagámoslo para la notación usada en cada una de las siguientes figuras

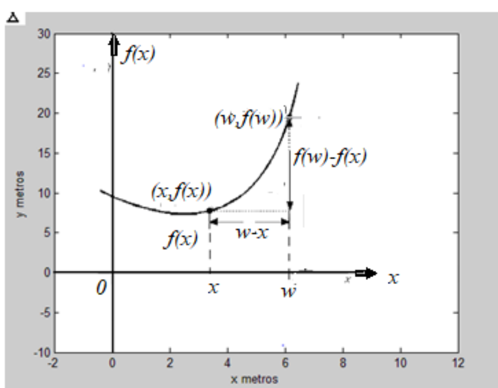


Figura 1

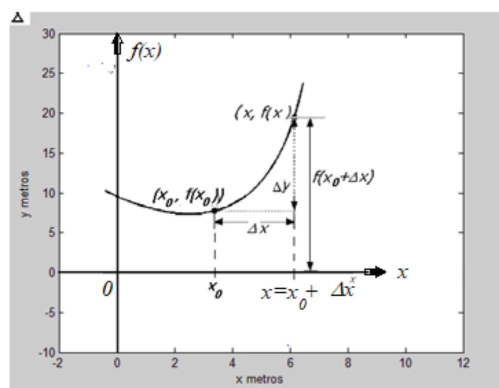


Figura 2

En la figura 1, obtuvimos que la derivada está dada por $\lim_{w \to x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x}$ cuando el límite existe.

Observemos que la gráfica de la figura 2 es equivalente a la gráfica de la figura 1, que $\Delta x = x - x_0$ es equivalente a $\Delta x = w - x$ y $\Delta f(x)$ corresponde a $f(x) - f(x_0)$ y es equivalente a $\Delta f(x) = f(w) - f(x)$ por lo cual la expresión $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, se transforma en $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ que es la expresión utilizada por Newton y Leibniz para la razón de cambio promedio. LA razón de variación de cambio instantánea es $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

DEFINICIÓN. La función real de variable real $f(x)$ es derivable o diferenciable en x_0 si $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ existe.

Equivalente a que $f(x)$ es derivable o diferenciable en x si $\lim_{w \to x} \frac{f(w)-f(x)}{w-x}$ existe.

Observación: Los conceptos derivable y diferenciable coinciden en el caso de una función real con variable real, sin embargo, en el caso de que el dominio o la imagen de la función estén en $\mathbb{R}^2$ los conceptos son diferentes.

Usemos a partir de este momento la notación de Leibnitz.

Se dice que: $f(x)$ *es derivable (diferenciable), si* $f(x)$ *es derivable (diferenciable) en* x_0, *para todo* x_0 *en el dominio de la función de* $f(x)$.

En este caso el límite es denotado por $f'(x_0)$ y se llama la derivada de la función $f(x)$ en x_0.

La definición de la derivada de la función $f(x)$ puede tener otra forma de representarse como se especifica a continuación.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Un resultado relativo a la derivada y que se utilizará con cierta frecuencia y del cual omitimos su demostración es el siguiente:

Si la función $f(x)$ es derivable en $x = x_0$ entonces la función $f(x)$ es continua en $x = x_0$. Sin embargo, el converso no necesariamente es verdad.

Una interpretación relativa a límites y que se desarrolló en el primer capítulo es lo que se refiere a derivadas laterales de las funciones reales de variable real.

DERIVADA LATERAL DERECHA $f\,'_{+}(x_0)$

Sea $f(x)$ una función real de variable real se dice que $f(x)$ es derivable por la derecha de x_0 si $f'_{+}(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ existe.

DERIVADA LATERAL IZQUIERDA $f\,'_{-}(x_0)$

Sea $f(x)$ una función real de variable real se dice que $f(x)$ es derivable por la izquierda de x_0 si $f'_{-}(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ existe.

De aquí se desprende otra definición sobre la derivada de la función $f(x)$

DEFINICIÓN.- Sea $f(x)$ una función real de variable real, se dice que $f(x)$ es derivable en $x = x_0$ si sólo si $f\,'_{+}(x_0) = f\,'_{-}(x_0)$.

NOTACIÓN DE LEIBNIZ

Issac Newton (1642 – 1727) y Gottfried Leibniz (1646- 1716), son considerados como fundadores del cálculo diferencial e integral e introdujeron, cada uno por su lado, la notación de la derivada. La notación prima es similar a la que empleó Newton, y los símbolos empleados por Leibniz evolucionaron hasta lo que actualmente se conoce como la notación de Leibnitz. Ambas notaciones tienen un uso generalizado. En la notación de Leibniz, la derivada de $f(x)$ en x_0 se denota $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ y la definición de derivada se escribe de la siguiente manera:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

REGLA DE LOS 4 PASOS PARA DERIVAR

A partir de la definición de la derivada se desarrolla el método de los cuatro pasos que nos ayuda a obtener las fórmulas que determinan la derivada de una función de una forma general, además nos permite obtener la derivada de cualquier función por medio de un procedimiento general.

La regla de los cuatro pasos se basa en la definición $\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

que se ha manejado a lo largo del texto:

La fórmula o definición de la derivada se va desarrollando poco a poco, por medio de cuatro pasos como se muestra a continuación:

Consideremos a la función $f(x)$.

Su derivada se obtiene siguiendo los pasos que se enumeran a continuación.

1. Se obtiene la función en $x+\Delta x$: $f(x+\Delta x)$

2. Se obtiene el incremento de la función: $f(x+\Delta x) - f(x)$

3. Se obtiene la razón de incrementos $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$: $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

4. Y finalmente se obtiene el límite cuando $\Delta x \to 0$: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

A manera de ejemplo, a continuación, se obtienen la derivada de una función constante, de una función polinomial, de una función racional y de una función con radicales con el fin de revisar y aplicar el cálculo de límites que aparecen en este tipo de ejercicios, una vez realizado lo anterior, encontraremos expresiones generales (fórmulas) para derivadas diversos tipos de funciones.

Derivada de una función constante $f(x)=c$.

1. Se obtiene la función $f(x+\Delta x)$; $f(x+\Delta x)=c$

2. Se obtiene el incremento de la función: $f(x+\Delta x)-f(x)=c-c$

3. Se obtiene la razón de incrementos $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{c-c}{\Delta x}=0$

4. Y finalmente se obtiene el límite cuando $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=0$$

Concluimos que la derivada de una función constante es cero, no importa el valor de la constante

$$\therefore \quad \frac{df(x)}{dx}=\frac{dC}{dx}=0$$

Derivada de la función lineal $f(x)=x$.

1. Se obtiene la función $f(x+\Delta x)$; $f(x+\Delta x)=x+\Delta x$

2. Se obtiene el incremento de la función:

$$f(x+\Delta x)-f(x)=x+\Delta x-x=\Delta x$$

3. Se obtiene la razón de incrementos $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$

4. Y finalmente se obtiene el límite cuando $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=1$$

Concluimos que la derivada de la función lineal $f(x)=x$, es igual a 1.

$$\therefore \quad \frac{df(x)}{dx}=\frac{dx}{dx}=1$$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN DE LA FORMA $f(x)=Cx$; $C=Cte.$

1. $f(x+\Delta x)=C(x+\Delta x)=Cx+C\Delta x$

2. $f(x+\Delta x)-f(x)=Cx+C\Delta x-Cx=C\Delta x$

3. $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{C\,\Delta x}{\Delta x}=C$

4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} C=C \quad \therefore \quad \dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{dCx}{dx}=C$

DERIVADA LA FUNCIÓN $f(x)=x^2$

1. $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2$

2. $f(x+\Delta x)-f(x)=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$

3. $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$

4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x \quad \therefore \quad \dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{dx^2}{dx}=2x$

DERIVADA LA FUNCIÓN $f(x)=Cx^2$

1. $f(x+\Delta x)=C(x+\Delta x)^2=C\,x^2+2Cx\Delta x+C(\Delta x)^2$

2. $f(x+\Delta x)-f(x) = Cx^2+2Cx\Delta x+C(\Delta x)^2-Cx^2 = 2Cx\Delta x+C(\Delta x)^2$

3. $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{2Cx\Delta x+C(\Delta x)^2}{\Delta x}=2Cx+C\Delta x$

4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\ 2Cx+C\Delta x=2Cx \quad \therefore \quad \dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{dCx^2}{dx}=2Cx$

DERIVADA LA FUNCIÓN $f(x)=x^3$

1. $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^3=x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+(\Delta x)^3$

2. $f(x+\Delta x)-f(x) = x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+(\Delta x)^3-x^3 = 3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+(\Delta x)^3$

3. $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2$

4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2\right)=3x^2 \quad \therefore \quad \dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{dx^3}{dx}=3x^2$

DERIVADA DE LA FUNCION $f(x)=C\,x^3$

1. $f(x+\Delta x)=C(x+\Delta x)^3=Cx^3+3Cx^2\Delta x+3Cx\Delta x^2+C(\Delta x)^3$

2. $f(x+\Delta x)-f(x) = Cx^3+3Cx^2\Delta x+3Cx\Delta x^2+C(\Delta x)^3-Cx^3 = 3Cx^2\Delta x+3Cx\Delta x^2+C(\Delta x)^3$

3. $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{3Cx^2\Delta x+3Cx\Delta x^2+C(\Delta x)^3}{\Delta x}=3Cx^2+3Cx\Delta x+C(\Delta x)^2$

4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(3Cx^2+3Cx\Delta x+C(\Delta x)^2\right)=3Cx^2$

$$\therefore \quad \frac{df(x)}{dx}=\frac{dCx^3}{dx}=3Cx^2$$

DERIVADA DE LA FUNCION $f(x)=x^n$ **con** n **número natural**

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^n=$$

1. $$x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}\Delta x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2(3)}x^{n-2}\Delta x^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(3)4}x^{n-3}\Delta x^4+\ldots\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots n(2)}{2(3)4\ldots\ldots(n-2)}x^2\Delta x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(2)(1)}{2(3)4\ldots\ldots(n-2)(n-1)}x^1\Delta x^{n-1}+\Delta x^n$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=$$

2. $$x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}\Delta x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2(3)}x^{n-2}\Delta x^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(3)4}x^{n-3}\Delta x^4+\ldots\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(2)}{2(3)4\ldots\ldots(n-2)}x^2\Delta x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(2)(1)}{2(3)4\ldots\ldots(n-2)(n-1)}x^1\Delta x^{n-1}+\Delta x^n-x^n=$$
$$=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}\Delta x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2(3)}x^{n-2}\Delta x^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(3)4}x^{n-3}\Delta x^4+\ldots\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots n(2)}{2(3)4\ldots\ldots(n-2)}x^2\Delta x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(2)(1)}{2(3)4\ldots\ldots(n-2)(n-1)}x^1\Delta x^{n-1}+\Delta x^n$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$

3. $$nx^{n-1}\frac{\Delta x}{\Delta x}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}\frac{\Delta x^2}{\Delta x}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2(3)}x^{n-2}\frac{\Delta x^3}{\Delta x}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(3)4}x^{n-3}\frac{\Delta x^4}{\Delta x}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots n(2)}{2(3)4\ldots\ldots(n-2)}x^2\frac{\Delta x^{n-2}}{\Delta x}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(2)(1)}{2(3)4\ldots\ldots(n-2)(n-1)}x^1\frac{\Delta x^{n-1}}{\Delta x}+\frac{\Delta x^n}{\Delta x}=$$
$$=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)(n-2)}{2(3)}x^{n-2}\Delta x^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(3)4}x^{n-3}\Delta x^3+\ldots\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots n(2)}{2(3)4\ldots\ldots(n-2)}x^2\Delta x^{n-3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots n(2)n(1)}{2(3)4\ldots\ldots(n-2)(n-1)n}x^1\Delta x^{n-2}+\Delta x^{n-1}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$

4. $$=\lim_{\Delta x\to 0}\{nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)(n-2)}{2(3)}x^{n-2}\Delta x^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(3)4}x^{n-3}\Delta x^3+\ldots\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots n(2)}{2(3)4\ldots\ldots(n-2)}x^2\Delta x^{n-3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots n(2)n(1)}{2(3)4\ldots\ldots(n-2)(n-1)n}x^1\Delta x^{n-2}+\Delta x^{n-1}\}=$$
$$=nx^{n-1}$$

Observar que todos los términos en donde interviene Δx dentro del límite son cero, por lo tanto, la derivada de una función potencia de la variable independiente x; $f(x)=x^n$, es igual al exponente multiplicado por la variable elevado al exponente menos uno, esto es:

$$\therefore \quad \frac{df(x)}{dx}=\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN: $f(x)=Cx^n$

$$f(x+\Delta x)=C(x+\Delta x)^n=$$

1. $$Cx^n+nx^{n-1}\Delta x+C\frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}\Delta x^2+C\frac{n(n-1)(n-2)}{2(3)}x^{n-2}\Delta x^3+C\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(3)4}x^{n-3}\Delta x^4+......$$
$$+C\frac{n(n-1)(n-2)(n-3).....n(2)}{2(3)4......(n-2)}x^2\Delta x^{n-2}+C\frac{n(n-1)(n-2)(n-3).....(2)(1)}{2(3)4......(n-2)(n-1)}x^1\Delta x^{n-1}+C\Delta x^n$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=$$

$$Cx^n+Cnx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}\Delta x^2+C\frac{n(n-1)(n-2)}{2(3)}x^{n-2}\Delta x^3+C\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(3)4}x^{n-3}\Delta x^4+......$$

2. $$+C\frac{n(n-1)(n-2)(n-3).....(2)}{2(3)4......(n-2)}x^2\Delta x^{n-2}+C\frac{n(n-1)(n-2)(n-3).....(2)(1)}{2(3)4......(n-2)(n-1)}x^1\Delta x^{n-1}+C\Delta x^n-Cx^n=$$
$$=Cnx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}\Delta x^2+C\frac{n(n-1)(n-2)}{2(3)}x^{n-2}\Delta x^3+C\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(3)4}x^{n-3}\Delta x^4+......$$
$$+C\frac{n(n-1)(n-2)(n-3).....n(2)}{2(3)4......(n-2)}x^2\Delta x^{n-2}+C\frac{n(n-1)(n-2)(n-3).....(2)(1)}{2(3)4......(n-2)(n-1)}x^1\Delta x^{n-1}+C\Delta x^n$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$

$$C\,nx^{n-1}\frac{\Delta x}{\Delta x}+C\frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}\frac{\Delta x^2}{\Delta x}+C\frac{n(n-1)(n-2)}{2(3)}x^{n-2}\frac{\Delta x^3}{\Delta x}+C\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(3)4}x^{n-3}\frac{\Delta x^4}{\Delta x}+......$$

3. $$+C\frac{n(n-1)(n-2)(n-3).....n(2)}{2(3)4......(n-2)}x^2\frac{\Delta x^{n-2}}{\Delta x}+C\frac{n(n-1)(n-2)(n-3).....(2)(1)}{2(3)4......(n-2)(n-1)}x^1\frac{\Delta x^{n-1}}{\Delta x}+C\frac{\Delta x^n}{\Delta x}=$$
$$=C\,nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}\Delta x+C\frac{n(n-1)(n-2)}{2(3)}x^{n-2}\Delta x^2+C\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(3)4}x^{n-3}\Delta x^3+......$$
$$+C\frac{n(n-1)(n-2)(n-3).....n(2)}{2(3)4......(n-2)}x^2\Delta x^{n-3}+C\frac{n(n-1)(n-2)(n-3).....n(2)n(1)}{2(3)4......(n-2)(n-1)}x^1\Delta x^{n-2}+C\Delta x^{n-1}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$

4. $$\lim_{\Delta x\to 0}\{Cnx^{n-1}+C\frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}\Delta x+C\frac{n(n-1)(n-2)}{2(3)}x^{n-2}\Delta x^2+C\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(3)4}x^{n-3}\Delta x^3+......$$
$$+C\frac{n(n-1)(n-2)(n-3).....n(2)}{2(3)4......(n-2)}x^2\Delta x^{n-3}+C\frac{n(n-1)(n-2)(n-3).....n(2)n(1)}{2(3)4......(n-2)(n-1)}x^1\Delta x^{n-2}+C\Delta x^{n-1}\}=$$
$$=C\,n\,x^{n-1}$$

EN RESUMEN:

Si $f(x)=C$ $\quad C$ constante, entonces $\dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{dC}{dx}=0$

Si $f(x)=x$ $\quad C$ constante, entonces $\dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{dx}{dx}=1$

Si $f(x)=C\,x^n$ $\quad C$ constante, entonces $\dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{dCx^n}{dx}=nCx^{n-1}$ $\;n$ número natural.

DERIVADA DE SUMA DE FUNCIONES $f(x)=u\left(x\right)+v\left(x\right)+w\left(x\right)$

1. $f(x+\Delta x)=u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)+w(x+\Delta x)$

2. $$f(x+\Delta x)-f(x)=u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)+w(x+\Delta x)-u(x)-v(x)-w(x)=$$
$$=u(x+\Delta x)-u(x)+v(x+\Delta x)-v(x)+w(x+\Delta x)-w(x)$$

3. $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)-u(x)+v(x+\Delta x)-v(x)+w(x+\Delta x)-w(x)}{\Delta x}=$$
$$=\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}+\frac{w(x+\Delta x)-w(x)}{\Delta x}$$

4. $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{w(x+\Delta x)-w(x)}{\Delta x}$$

Por lo tanto $\quad\dfrac{df(u+v+w)}{dx}=\dfrac{d}{dx}(u+v+w)=\dfrac{du}{dx}+\dfrac{dv}{dx}+\dfrac{dw}{dx}$, esto es:

La derivada de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones sumando.

VAMOS A ENCONTRAR DERIVADAS UTILIZANDO LAS REGLAS QUE HEMOS OBTENIDO

Ejemplo 3.1. Encuentre la derivada de la función $f(x)=6x^7+9x^4$

La expresión es una función real de variable real, la cual se puede considerar como una suma de dos funciones, esto es $f(x)=g(x)+h(x)=6x^7+9x^4$

Solución: Utilizamos la regla obtenida para derivar suma de funciones

$$\frac{d\left(g(x)+h(x)\right)}{dx}=\frac{dg(x)}{dx}+\frac{dh(x)}{dx}.$$

Donde $g(x)=6x^7$ y $h(x)=9x^4$, con esta información la derivada de la función $f(x)$ será

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d\left(6x^7\right)}{dx}+\frac{d\left(9x^4\right)}{dx}$$

$$\frac{df(x)}{dx}=6\left(7x^{7-1}\right)+9\left(4x^{4-1}\right)=42x^6+36x^3$$

$$\frac{df(x)}{dx}=42x^6+36x^3.$$

Ejemplo 3.2. Encontrar la derivada de la función $f(x)=8x^5-5x^3$

La expresión es una función real de variable real, la cual se puede considerar como una suma algebraica de dos funciones, esto es $f(x)=g(x)-h(x)=8x^5-5x^3$

Solución. Utilizamos la regla obtenida para derivar suma de funciones

$$\frac{d\left(g(x)+h(x)\right)}{dx}=\frac{dg(x)}{dx}+\frac{dh(x)}{dx}.$$

Donde $g(x)=8x^5$ y $h(x)=5x^3$, luego la derivada de la función será

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d\left(8x^5\right)}{dx}-\frac{d\left(5x^3\right)}{dx}$$

$$\frac{df(x)}{dx}=8\left(5x^{5-1}\right)-5\left(3x^{3-1}\right)=40x^4-15x^2 \qquad \frac{df(x)}{dx}=40x^4-15x^2.$$

Ejemplo 3.3. Derivar las funciones siguientes utilizando las fórmulas de la derivación:

a) $f(x) = x^5 + 4$ su derivada es $\frac{df(x)}{dx} = 5x^4$

b) $f(x) = x^3 + 4x + 5$ su derivada es $\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 + 4$

c) $f(x) = 3x^2 - 9x - 7$ su derivada es $\frac{df(x)}{dx} = 6x - 9$

d) $f(x) = 4x^3 - 7x - 8x^2$ su derivada es $\frac{df(x)}{dx} = 12x^2 - 7 - 16x$

DERIVADA DE UNA CONSTANTE C POR UNA FUNCIÓN $g(x)$

1. $f(x+\Delta x) = Cg(x+\Delta x)$

2. $f(x+\Delta x) - f(x) = Cg(x+\Delta x) - Cg(x)$

3. $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{Cg(x+\Delta x) - Cg(x)}{\Delta x}$

4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ \Delta x\to 0}}\dfrac{Cg(x+\Delta x) - Cg(x)}{\Delta x} =$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = C\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = C\frac{d}{dx}g(x)$$

En resumen $\dfrac{d}{dx}Cg(x) = C\dfrac{d}{dx}g(x)$

DERIVADA DE UN PRODUCTO DE FUNCIONES $f(x) = u(x)\cdot v(x)$

1. $f(x+\Delta x) = u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)$

2. $f(x+\Delta x) - f(x) = u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)$

3. $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$

Sumando y restando en el numerador $v(x)u(x+\Delta x)$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)+v(x)u(x+\Delta x)-v(x)u(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x)-v(x)]+v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]}{\Delta x}=$$
$$=\frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}+\frac{v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]}{\Delta x}$$

4.
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]}{\Delta x}$$
$$=u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}+v(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]}{\Delta x}$$

Observar que el término $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}$ es $\frac{dv(x)}{dx}$ y que el término

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]}{\Delta x}$ es $\frac{du(x)}{dx}$ por lo tanto:

$$\frac{d(u(x)\cdot v(x))}{dx}=\frac{d}{dx}(u(x)\cdot v(x))=u(x)\frac{dv(x)}{\partial x}+v(x)\frac{du(x)}{\partial x}$$

La derivada de un producto de dos funciones es igual al producto de la primera por la derivada de la segunda función, más el producto de la segunda función por la derivada de la primera función.

Ejemplo 3.4. Derivar la función $f(x)=3x^2\sqrt{3x-6}$ utilizando la regla de producto para un cociente.

Solución: Vamos a utilizar la regla encontrada para derivar un producto de funciones de funciones

$$\frac{df(x)}{dx}=3x^2\frac{d}{dx}\sqrt{3x-6}+\sqrt{3x-6}\,\frac{d3x^2}{dx}$$

$$\frac{df\left(x\right)}{dx}=3x^2\,\frac{3}{2\sqrt{3x-6}}+\sqrt{3x-6}(6x)$$

$$\frac{df\left(x\right)}{dx}=\frac{9x^2}{2\sqrt{3x-6}}+6x\sqrt{3x-6}=\frac{9x^2+12x\left(\sqrt{3x-6}\right)^2}{2\sqrt{3x-6}}$$

$$\frac{df\left(x\right)}{dx}=\frac{9x^2}{2\sqrt{3x-6}}+6x\sqrt{3x-6}=\frac{9x^2+12x\left(3x-6\right)}{2\sqrt{3x-6}}$$

$$\frac{df\left(x\right)}{dx}=\frac{45x^2-72x}{2\sqrt{3x-6}}$$

DERIVADA DE UN COCIENTE DE FUNCIONES $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)} \qquad v\left(x\right)\neq 0$

1. $f(x+\Delta x)=\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}$

2. $f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)}$

3. $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}}{\Delta x}$$

$$=\frac{v(x)\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]-u(x)\left[v(x+\Delta x)-v(x)\right]}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x}$$

4.
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]-u(x)\left[v(x+\Delta x)-v(x)\right]}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x}$$
$$=\frac{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}-u(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)v(x)}$$
$$=\frac{v(x)\dfrac{du}{dx}-u(x)\dfrac{dv}{dx}}{v^2(x)}$$

La derivada del cociente de dos funciones es igual al denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.

Ejemplo 3.5. Derivar la función $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{5x-6}{x^2+2}$ utilizando la regla de derivación para un cociente,

Solución: Vamos a utilizar la regla encontrada para derivar un cociente de funciones

$$\frac{d\dfrac{u(x)}{v(x)}}{dx}=\frac{v(x)\dfrac{du(x)}{dx}-u(x)\dfrac{dv(x)}{dx}}{\left(v(x)\right)^2}$$

Donde $u(x)=5x-6$ y $v(x)=x^2+2$, con esto la derivada de la función $f(x)=\dfrac{5x-6}{x^2+2}$ será

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d\left(\dfrac{5x-6}{x^2+2}\right)}{dx}=\frac{\left(x^2+2\right)\dfrac{d(5x-6)}{dx}-(5x-6)\dfrac{d\left(x^2+2\right)}{dx}}{\left(x^2+2\right)^2}$$

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d\left(\dfrac{5x-6}{x^2+2}\right)}{dx}=\frac{\left(x^2+2\right)\left(5\dfrac{dx}{dx}-\dfrac{d(6)}{dx}\right)-(5x-6)\left(\dfrac{dx^2}{dx}+\dfrac{d(2)}{dx}\right)}{\left(x^2+2\right)^2}$$

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d\left(\dfrac{5x-6}{x^2+2}\right)}{dx}=\frac{\left(x^2+2\right)(5-0)-(5x-6)(2x+0)}{\left(x^2+2\right)^2}$$

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d\left(\frac{5x-6}{x^2+2}\right)}{dx}=\frac{-5x^2+12x+10}{\left(x^2+2\right)^2} \qquad \frac{d\left(\frac{5x-6}{x^2+2}\right)}{dx}=\frac{-5x^2+12x+10}{\left(x^2+2\right)^2}$$

DERIVADAS DE FUNCIONES DE LA FORMA $f(x)=Cx^{-n}$ C constante y n entero.

Las funciones de la forma $f(x)=Cx^{-n}$ son equivalentes a $f(x)=\frac{C}{x^n}$**,** por lo tanto, la podemos considerar como un cociente de funciones si $x\neq 0$

Usando la regla para derivar un cociente $\frac{d\frac{u(x)}{v(x)}}{dx}=\frac{v(x)\frac{du(x)}{dx}-u(x)\frac{dv(x)}{dx}}{\left(v(x)\right)^2}$ con

$u(x)=C$ y $v(x)=x^n$, se tiene:

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d\left(\frac{C}{x^n}\right)}{dx}=\frac{\left(x^n\right)\cancel{\frac{dC}{dx}}^{0}-C\frac{dx^n}{dx}}{\left(x^n\right)^2}=\frac{-C\frac{dx^n}{dx}}{\left(x^n\right)^2}$$

$$=\frac{-C\frac{dx^n}{dx}}{\left(x^n\right)^2}=\frac{-Cnx^{n-1}}{x^{2n}}=-Cnx^{n-1-2n}=-Cx^{-n-1}=-Cx^{-(n+1)}$$

Pero la expresión $-Cx^{-(n+1)}$ es equivalente a $\frac{-C}{x^{n+1}}=-\frac{C}{x^{n+1}}$ por lo tanto:

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d\left(\frac{C}{x^n}\right)}{dx}=\frac{dCx^{-n}}{dx}=-Cnx^{-n-1}$$

Ejemplo 3.6. Derivar la función $f(x)=4x^{-3}$

Solución: Al aplicar la fórmula $\frac{dCx^{-n}}{dx}=-Cnx^{-n-1}$ se tiene

$$\frac{d4x^{-3}}{dx}=-4(3)x^{-3-1}=-12x^{-4}$$

Ejemplo 3.7. Derivar la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

Al aplicar la fórmula $\dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{d\left(\dfrac{C}{x^n}\right)}{dx}=\dfrac{dCx^{-n}}{dx}=-Cnx^{-n-1}$ se tiene:

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}{dx}=\frac{dx^{-2}}{dx}=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$$

Con lo anterior podemos establecer que la regla de derivación $\dfrac{dCx^n}{dx}=Cnx^{n-1}$ para cualquier número entero n.

DERIVADAS DE FUNCIONES DE LA FORMA $f(x)=\sqrt[n]{x}$ **;** n número entero.

1) $f(x+\Delta x)=\sqrt[n]{(x+\Delta x)}=(x+\Delta x)^{1/n}$

2) Para calcular $f(x+\Delta x)-f(x)$, utilizamos la fórmula siguiente.

$$a-b=(a^{1/n}-b^{1/n})(a^{\frac{n-1}{n}}+a^{\frac{n-2}{n}}b^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{n-3}{n}}b^{\frac{2}{n}}+\ \ldots\ldots\ldots+b^{\frac{n-1}{n}}) \qquad (1)$$

Ahora: $$f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^{1/n}-x^{1/n} \qquad (2)$$

De la expresión (1), se tiene:

$$(a^{1/n}-b^{1/n})=\frac{a-b}{(a^{\frac{n-1}{n}}+a^{\frac{n-2}{n}}b^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{n-3}{n}}b^{\frac{2}{n}}+\ \ldots\ldots\ldots+b^{\frac{n-1}{n}})}$$

utilizando la expresión anterior para sustituir en ecuación (2), tenemos:

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{\Delta x}{\left[(x+\Delta x)^{\frac{n-1}{n}}+(x+\Delta x)^{\frac{n-2}{n}}(x)^{\frac{1}{n}}+(x+\Delta x)^{\frac{n-3}{n}}(x)^{\frac{2}{n}}+\ldots+(x)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

donde $a = x + \Delta x$ y $b = x$, por lo que $a - b = \Delta x$

3)

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\left[(x+\Delta x)^{\frac{n-1}{n}}+(x+\Delta x)^{\frac{n-2}{n}}(x)^{\frac{1}{n}}+(x+\Delta x)^{\frac{n-3}{n}}(x)^{\frac{2}{n}}+\ldots+(x)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\left[(x+\Delta x)^{\frac{n-1}{n}}+(x+\Delta x)^{\frac{n-2}{n}}(x)^{\frac{1}{n}}+(x+\Delta x)^{\frac{n-3}{n}}(x)^{\frac{2}{n}}+\ldots+(x)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

4) Finalmente se calcula $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, esto es:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\left[(x+\Delta x)^{\frac{n-1}{n}}+(x+\Delta x)^{\frac{n-2}{n}}(x)^{\frac{1}{n}}+(x+\Delta x)^{\frac{n-3}{n}}(x)^{\frac{2}{n}}+\ldots+(x)^{\frac{n-1}{n}}\right]}=$$

$$=\frac{1}{\left[(x)^{\frac{n-1}{n}}+(x)^{\frac{n-2}{n}}(x)^{\frac{1}{n}}+(x)^{\frac{n-3}{n}}(x)^{\frac{2}{n}}+\ldots+(x)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

De esta forma $\frac{d(f(x))}{dx}=\frac{1}{n\,x^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}}$

La derivada de la función $f(x)=\sqrt[n]{Cx}=\sqrt[n]{C}\sqrt[n]{x}$, es entonces:

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\sqrt[n]{Cx}=\frac{d}{dx}\sqrt[n]{C}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{C}\frac{d}{dx}\sqrt[n]{x}$$

$$\frac{d}{dx}f(x)=\sqrt[n]{C}\frac{d}{dx}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{C}\frac{d}{dx}x^{1/n}=\sqrt[n]{C}\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=$$

Finalmente

$$\frac{d\sqrt[n]{Cx}}{dx}=\frac{\sqrt[n]{C}}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}}=\frac{1}{n}\sqrt[n]{Cx^{1-n}}$$

LA REGLA DE LA CADENA PARA DERIVAR

Sea $f(x)$ una función real de variable real que tiene como dominio al conjunto A y rango el conjunto B, $h(x)$ otra función real de variable real que tiene como dominio al conjunto B y rango el conjunto C. Los conjuntos $A, B\ y\ C$ son subconjuntos del conjunto de los números reales. Con esta información se puede hablar de la función composición que se denota por $h \circ f$ y que se define como

$$(h \circ f)(x) = h\big(f(x)\big)$$

Sea $F = h \circ f$ luego se puede decir que $F(x) = h\big(f(x)\big)$, que se conoce como la función composición. Procedemos aplicar el operador de derivada $\frac{d}{dx}$ en ambos lados de esta igualdad.

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}h\big(f(x)\big)$$

$$\frac{d\ F(x)}{dx} = \frac{d\ h(y)}{dy}\frac{d\,f(x)}{dx} \quad \text{donde} \quad f(x) = y$$

A la expresión $\frac{d\ F(x)}{dx} = \frac{d\ h(y)}{dy}\frac{d\,f(x)}{dx}$ se le conoce con el nombre de regla de la cadena.

En los siguientes ejercicios se aplica la regla de la cadena y se realiza una sustitución al realizar un cambio de variable:

Ejemplo 3.8. Derivar la función $f(x) = (3x^2 - 8)^3$

Solución. Para poder derivar la función primero se realiza la siguiente sustitución: $u = (3x^2 - 8)$, y por lo tanto $f(x) = u^3$. Ahora bien, la derivada de la función $u(x)$ respecto a x es $\frac{du}{dx} = 6x$

Y al derivar la función tenemos $\frac{df(x)}{dx} = \frac{du^3}{du}\frac{du}{dx} = 3u^2\frac{du}{dx}$ y sustituyendo $u = (3x^2 - 8)$ y $\frac{du}{dx} = 6x$, se tiene finalmente $\frac{df(x)}{dx} = 3(3x^2 - 8)^2(6x) = 18x(3x^2 - 8)$.

Ejemplo 3.9. Derivar la función $f(x)=(4-2x^3)^4$

Solución. Para poder derivar la función primero se realiza la siguiente sustitución: $u=(4-2x^3)$, y por lo tanto $f(x)=u^4$. Ahora bien, la derivada de la función $u(x)$ respecto a x es $\dfrac{du}{dx}=-6x$

Y al derivar la función tenemos $\dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{du^4}{du}\dfrac{du}{dx}=4u^3\dfrac{du}{dx}$ y sustituyendo $u=(4-2x^3)$ y $\dfrac{du}{dx}=-6x$, se tiene finalmente $\dfrac{df(x)}{dx}=4(4-2x^3)^3(-6x)=-24x(4-2x^3)^3$.

Ejemplo 3.10. Derivar la función $f(x)=\dfrac{2}{(5x^2-4)^4}=2(5x^2-4)^{-4}$

Solución. Para poder derivar la función primero se realiza la siguiente sustitución: $u=(5x^2-4)$, y por lo tanto $f(x)=2u^{-4}$. Ahora bien, la derivada de la función $u(x)$ respecto a x es $\dfrac{du}{dx}=10x$.

Y al derivar la función tenemos $\dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{d2u^{-4}}{du}\dfrac{du}{dx}=-8u^{-5}\dfrac{du}{dx}$ y sustituyendo $u=(5x^2-4)$ y $\dfrac{du}{dx}=10x$, se tiene finalmente $\dfrac{df(x)}{dx}=-8(5x^2-4)^{-5}(10x)=80x(5x^2-4)^{-5}=\dfrac{80x}{(5x^2-4)^5}$.

Ejemplo 3.11. Derivar la función $f(x)=\sqrt{9-5x^3}$

Solución. Para poder derivar la función primero se realiza la siguiente sustitución: $u=(9-5x^3)$, y por lo tanto $f(x)=u^{1/2}$. Ahora bien, la derivada de la función $u(x)$ respecto a x es $\dfrac{du}{dx}=-10x^2$

Y al derivar la función tenemos $\dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{du^{1/2}}{du}\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{2}u^{-1/2}\dfrac{du}{dx}$ y sustituyendo $u=(9-5x^3)$ y $\dfrac{du}{dx}=-10x^2$, se tiene finalmente $\dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{1}{2}(9-5x^3)^{-1/2}(-15x^2)=-\dfrac{15x^2}{2\sqrt{9-5x^3}}$.

Ejemplo 31.2. Derivar la función $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{2-5x^4}}=4(2-5x^4)^{-1/2}$

Solución. Para poder derivar la función primero se realiza la siguiente sustitución: $u=(2-5x^4)$, y por lo tanto $f(x)=4u^{-1/2}$. Ahora bien, la derivada de la función $u(x)$ respecto a x es $\dfrac{du}{dx}=-20x^3$

Y al derivar la función tenemos $\dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{d4u^{-1/2}}{du}\dfrac{du}{dx}=-2u^{-3/2}\dfrac{du}{dx}$ y sustituyendo $u=(2-5x^4)$ y

, se tiene finalmente $\dfrac{df(x)}{dx}=-2(2-5x^4)^{-3/2}(-20x^3)=\dfrac{40x^3}{\sqrt{(2-5x^4)^3}}$.

$\dfrac{du}{dx}=-20x^3$

Ejemplo 3.13. Dada la función $f(x)=\sqrt{5x^3-9x+6}$ encuentre la derivada de la función $f(x)$ utilizando la regla de la cadena.

Solución. Consideraremos lo siguiente, definimos $g(y)=\sqrt{y}$ y $h(x)=y$ de tal forma que $h(x)=5x^3-9x+6$. De acuerdo con la regla de la cadena para derivar, se tiene $\dfrac{d\,f(x)}{dx}=\dfrac{d\ g(y)}{dy}\dfrac{d\ h(x)}{dx}$, esto es, $\dfrac{d\,f(x)}{dx}=\dfrac{d\ \sqrt{y}}{dy}\dfrac{d\ \left(5x^3-9x+6\right)}{dx}$

$$\frac{d\,f(x)}{dx}=\left[\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}-1}\right]\left(15x^2-9\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{y^{1/2}}\left(15x^2-9\right).$$

Donde $y=h(x)=5x^3-9x+6$, por lo tanto:

$$\frac{d\,f(x)}{dx}=\frac{1}{2}\left(15x^2-9\right)\left[\frac{1}{\sqrt{5x^3-9x+6}}\right].$$

Ejemplo 3.14. Dada la función $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{5x-6}{4-9x}}$ encuentre la derivada de la función

Solución. Consideraremos lo siguiente, definimos $g(y)=\sqrt[3]{y}$ y $y=h(x)$ de tal forma que $h(x)=\dfrac{5x-6}{4-9x}$. De acuerdo con la regla de la cadena para derivar $\dfrac{d\,f(x)}{dx}=\dfrac{d\;g(y)}{dy}\dfrac{d\;h(x)}{dx}$, por lo tanto

$$\frac{d\,f(x)}{dx}=\frac{d\;\sqrt[3]{y}}{dy}\frac{d\left(\dfrac{5x-6}{4-9x}\right)}{dx}=\frac{dy^{1/3}}{dy}\left[\frac{(4-9x)\dfrac{d}{dx}(5x-6)-(5x-6)\dfrac{d}{dx}(4-9x)}{(4-9x)^2}\right]$$

$$\frac{d\,f(x)}{dx}=\frac{1}{3}y^{-2/3}\left[\frac{(4-9x)(5)-(5x-6)(-9)}{(4-9x)^2}\right]\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}\left[\frac{(4-9x)(5)-(5x-6)(-9)}{(4-9x)^2}\right].$$

$$\frac{d\,f(x)}{dx}==\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}\left[\frac{-34}{(4-9x)^2}\right];\text{ pero } y=h(x)=\frac{5x-6}{4-9x}\text{, entonces:}$$

$$\frac{d\,f(x)}{dx}=\frac{-34}{(3)\sqrt[3]{\left(\dfrac{5x-6}{4-9x}\right)^2}}\frac{1}{(4-9x)^2}$$

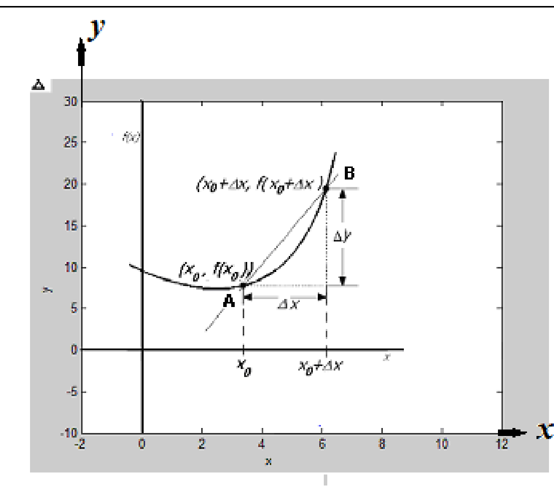
INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA

Vamos a establecer ahora la interpretación geométrica de la derivada, la cual también es fundamental en diversos problemas donde se aplica el cálculo diferencial, entre ellos los problemas de optimización.

En los capítulos anteriores se ha trabajado con la expresión

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Si observamos la gráfica, veremos que está razón corresponde a la pendiente de la recta secante a la curva entre los puntos $(x_o,f(x_o))$ y $(x,f(x))$

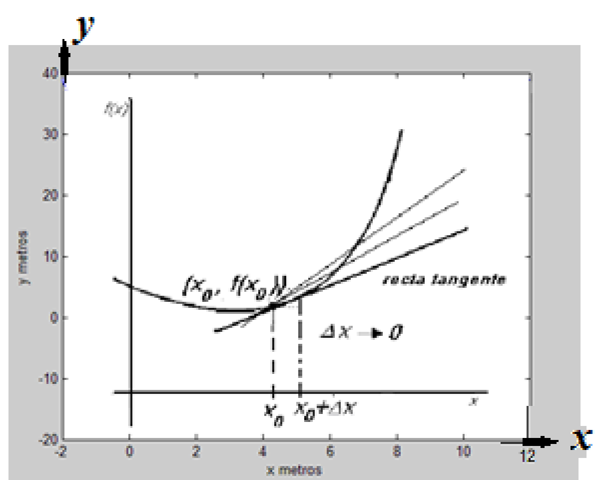


De acuerdo a la notación utilizada en la gráfica, la expresión $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, la podemos escribir en términos de $\Delta x = x - x_0$ y $\Delta y = f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$, lo cual se leen "incremento de la variable independiente x e incremento de la función $f\left(x\right)$ en el intervalo $\left[x_0, x_o+\Delta x\right]$.

De esta manera, la expresión de la pendiente de la recta secante asume la forma:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta f\left(x\right)}{\Delta x}$$

<table>
<tr>
<td>Cuando se hace un acercamiento del punto B al punto A, buscando encontrar la pendiente de la recta tangente en el punto B, el proceso es similar a un proceso infinito continuo, de tal manera que se puedan calcular pendientes de rectas secantes en diferencias Δx muy pequeñas, de tal forma que cuando $\Delta x \to 0$, la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto x_0,</td>
<td>Observar la siguiente gráfica:


</td>
</tr>
</table>

Entonces retomando el concepto de límite desarrollado en los capítulos anteriores, la pendiente de la recta tangente a la curva $\left(x, f\left(x\right)\right)$ en el punto $\left(x_{0,} f\left(x_0\right)\right)$ se escribe como:

$$m_{\tan} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f\left(x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

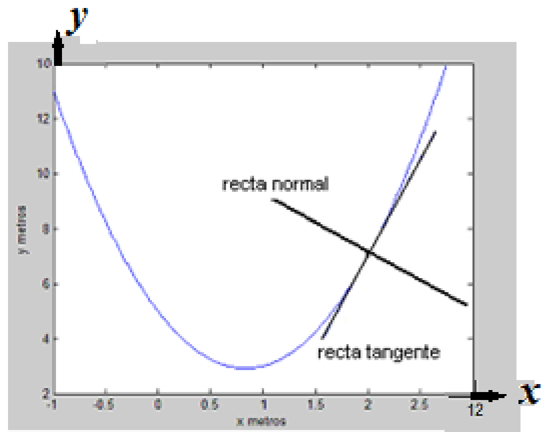
lo cual corresponde al límite de las pendientes de las rectas secantes y observar que es la expresión de la derivada de la función $f\left(x\right)$ en un punto x_0.

En resumen, podemos establecer lo siguiente:

La derivada de una función $f(x)$ $\left(\dfrac{df(x)}{dx}\right)$ evaluada en un punto x_0, corresponde a la pendiente de la recta tangente (m_t) a la curva de $f(x)$ en el punto x_0.

Con la interpretación anterior, podemos concluir que la pendiente de la recta normal (m_n) a la curva en el punto x_0 es

$$m_n = -\frac{1}{\left(\dfrac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}} = -\frac{1}{m_t}$$



Ejemplo. 3.15. Obtener la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva cuya función está dada por $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 10x + 24$, en el punto $x = 3$.

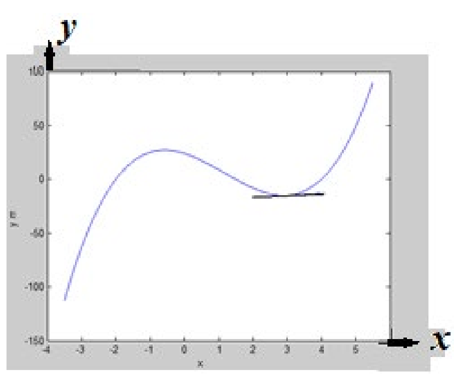
Solución. La derivada de la función es: $\dfrac{df}{dx} = 6x^2 - 14x \ - 10$

Este resultado representa la pendiente de la recta tangente en un punto x de la curva.

Para obtener la ecuación tangente a la función dada en el punto $x = 3$, sustituimos este valor en la función derivada:

$$f'(3) = 6(3)^2 - 14(3) \ - 10 = +2$$

Observar que la pendiente es positiva, y si se gráfica:



Recordemos que la ecuación de una recta cuando se conoce un punto y su pendiente está dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

En nuestro caso, sabemos que la abscisa del punto es $x = 3$, por lo tanto, su ordenada correspondiente es $f(3) = -15$, es decir, el punto de tangencia es $(3,\text{-}15)$.

Sustituyendo: $y - (-15) = 2(x - 3)$ de donde $y + 15 = 2(x - 3)$

Finalmente, la ecuación de la recta tangente a la curva en su forma general en el punto $x = 3$ es $2x - y - 21 = 0$.

Para encontrar la ecuación de la recta normal, utilizamos $m_n = -\dfrac{1}{m_t}$, por lo tanto $m_n = -\dfrac{1}{2}$, la ecuación en el punto $(3,\text{-}15)$. es $y - (-15) = -\dfrac{1}{2}(x - 3)$; de donde $2y + 30 = -x + 3$; finalmente, escrita la ecuación de la recta normal escrita en su forma general es $x + 2y + 27 = 0$.

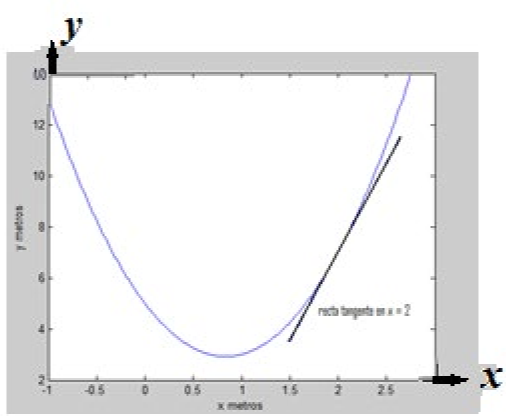
Ejemplo 3.16. Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva cuya función: es $f(x) = 3x^2 - 5x + 5$ en $x = 2$

La derivada de la función es: $\dfrac{df(x)}{dx} = 6x - 5$

Para obtener la pendiente de la recta tangente a la curva de la función dada en el punto $x = 2$ simplemente sustituimos el valor en la función derivada

$$f'(2) = 6(2) - 5 = +7$$

Observa que la pendiente es positiva, y si se grafica la función obtenemos una parábola como se muestra en la siguiente figura:



La imagen de $x = 2$ es $f(2) = 3(2)^2 - 5(2) + 5 = 12 - 10 + 5 = 7$

Sustituyendo las coordenadas del punto y la pendiente de la recta tangente encontrada, en la expresión

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

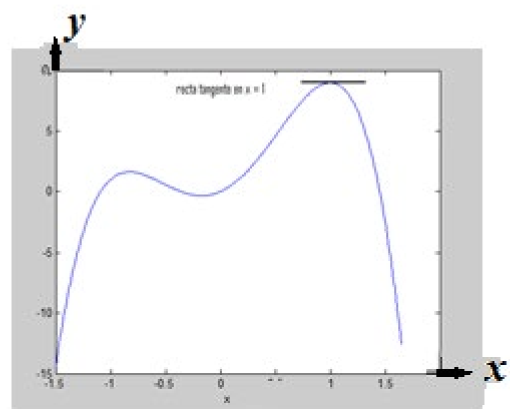
Tenemos: $y - (7) = 7(x - 2)$, que escrita en su forma general es $7x - y - 7 = 0$

Ejemplo 3.17. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva cuya función es $y = -7x^4 + 12x^2 + 4x$ en el punto de tangencia $(1,9)$.

Solución. La derivada de la función es: $\frac{df}{dx} = -28x^3 + 24x + 4$

Para obtener la pendiente de la recta tangente a la curva dada en el punto $x = 1$, sustituimos este valor en la función derivada:

$$f'(1) = -28(1)^3 + 24(1) + 4 = 0$$

Observar que la pendiente es cero, es decir, en la gráfica se muestra que el punto de tangencia corresponde a un punto donde la recta tangente es una recta horizontal.	

Al sustituir el punto de tangencia y la pendiente encontrada en $y - y_1 = m(x - x_1)$, se tiene:

$y - (9) = 0(x - 1)$, Al reducir $y = 9$ (ecuación de recta horizontal

.

Unidad 4. Comportamiento gráfico y problemas de optimización

Propósito. Contrastará la gráfica de una función y sus dos primeras derivadas para obtener información sobre el comportamiento de la función; utilizará dicha información para resolver problemas de optimización.

DESCRIPCIÓN

Al tener una herramienta poderosa como lo es la derivada de una función, el cálculo diferencial permite realizar un análisis gráfico y analítico de las funciones que representan el comportamiento de variables en diversos problemas de disciplinas tales como física, química, administración, economía, comunicaciones, etc.
La interpretación geométrica de la derivada es fundamental en el estudio del comportamiento de las funciones para comprender conceptos como: función creciente, función decreciente, puntos críticos, máximos, mínimo y/o puntos de inflexión, concavidad, etc. establecer con claridad el comportamiento de las funciones permite tomar decisiones de acuerdo con el problema establecido.

Importante trabajar con el concepto de segunda derivada para apoyar el análisis de las funciones, en particular nos ayudará a determinar la concavidad de estas y en consecuencia su comportamiento.

Finalmente, todo lo realizado con los conceptos anteriores, se aplica en problemas que involucran optimización.

PALABRAS CLAVE. Función creciente, función decreciente, puntos críticos, máximo y mínimo locales, concavidad, punto de inflexión

Sugerencias de actividades de aprendizaje teórico-prácticas

COMPORTAMIENTO GRAFICO Y PROBLEMAS DE OPTIMIZACION

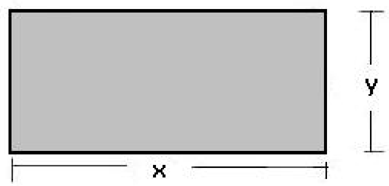
Inicialmente se trabajan situaciones que propician el análisis de las relaciones entre la gráfica de una función y sus derivadas.

Antes de relacionar una función con la función de su derivada, es importante ejemplificar la variación de una función emanada de un problema de optimización, para ello se ha elegido el siguiente problema.

Problema 4.1.

Pedro tiene 100 metros de malla de alambre y va a cercar un terreno rectangular para usarlo como espacio de juegos. Se quiere construir un terreno que tenga la máxima área posible y que este cercado con la cantidad de malla que se indica.

Solución: Representamos gráficamente un rectángulo que contenga dimensiones no conocidas, utilicemos la literal x para representar el largo del rectángulo y la literal y para representar el ancho del rectángulo.



Sabemos que el perímetro del rectángulo es 100 metros, ya que esta cantidad corresponde a la longitud de malla que se tiene para cercarlo.

La expresión algebraica que relaciona el área A del terreno con la dimensión del largo x, se obtiene multiplicando el largo por el ancho, esto es $A = xy$.

Por otro lado, el perímetro del terreno debe tener 100 m; por lo que el perímetro se puede escribir como $2x + 2y$ y debe ser igual a 100 m.

Para escribir el área del terreno en términos de la variable x, debemos despejar de la expresión del perímetro la variable y

$$y = \frac{100 - 2x}{2}.$$

Al simplificar se puede escribir $y = 50 - 2x$. Por lo que finalmente la expresión para el área en función del largo x es

$$A = xy = x\left(\frac{100-2x}{2}\right) = 50x - x^2.$$

La tabla correspondiente es

x	5	10	12	15	18	19	20	25	30	35	40	45	50
A	225	400	464	525	576	589	600	625	600	525	400	225	0

Cada columna indica un terreno rectangular que se puede construir, por ejemplo, en la primera columna tendríamos un rectángulo de largo 5 m y de ancho 45 m, con estas dimensiones el rectángulo tendría un área de 225 m^2. En la columna 9 tendríamos un rectángulo de dimensiones; largo 30 m y ancho 20 m y su área sería de 600 m^2, etc.

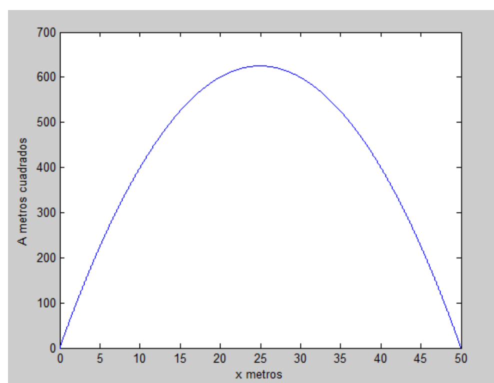
Ahora vamos a realizar un análisis del comportamiento de la función encontrada utilizando los conceptos de razón de cambio y variación. $A(x)$; observar que le dominio de la función es el intervalo abierto $(0,50)$.

Al considerar dos puntos cualesquiera del intervalo $(0,25)$; por ejemplo $x=12$ y $x=15$, el incremento de x es $\Delta x = 15-12=3$ y el incremento de la función área es $\Delta A = 525-464=61$ por lo tanto la razón de incrementos es $\frac{\Delta A}{\Delta x}=\frac{61}{3}=20.33..$ y corresponde a una razón positiva.
Y por otra parte al consideran dos puntos cualesquiera en el intervalo $(25,50)$, por ejemplo $x=35$ y $x=40$, la razón de incrementos es $\frac{\Delta A}{\Delta x}=\frac{400-525}{40-35}=\frac{-125}{5}=-25$, lo cual es una razón es negativa.

Podemos seguir calculando razones de incrementos y observaremos que en el intervalo $(0,25)$ se tendrán razones positivas y en el intervalo $(25,50)$ se tendrán razones negativas.

En la gráfica se puede observar que en el intervalo $(0,25)$ al ir aumentando los valores del largo del terreno, se tendrá un ***área mayor***, pero en cuanto se rebasa el valor de $x=25$, es decir, si se aumentan valores para el largo del terreno en el intervalo $(25,50)$, el ***área del terreno disminuye.*** Además podemos determinar que el terreno que tendrá área máxima con 100 m de malla para cercar, debe tener dimensiones; largo igual a 25 m y ancho igual a 25 m.

La gráfica del Área en términos del largo x es:



En el problema anterior hemos realizado un repaso del crecimiento y decrecimiento de una función, por lo que a continuación establecemos estos conceptos de manera formal.

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

En esta sección vamos a establecer los conceptos de función creciente y función decreciente, aspectos fundamentales para el análisis de una gráfica. En particular lo trataremos para casos particulares de funciones polinomiales.

Función creciente. Se dice que una función es creciente si ocurre lo siguiente: Para dos valores cualesquiera de la variable independiente x_1, x_2 en un intervalo $\mathbf{I}$ y $x_2 > x_1$ se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$.

Función decreciente. Se dice que una función es decreciente si ocurre lo siguiente: Para dos valores cualesquiera de la variable independiente x_1, x_2 y en un intervalo $\mathbf{I}$ **y** $x_2 > x_1$ se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$.

Ejemplo 4.1. Determinar en forma aproximada para la siguiente función $f(x) = x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 32$ en que intervalos la función es creciente y en que intervalos la función es decreciente.

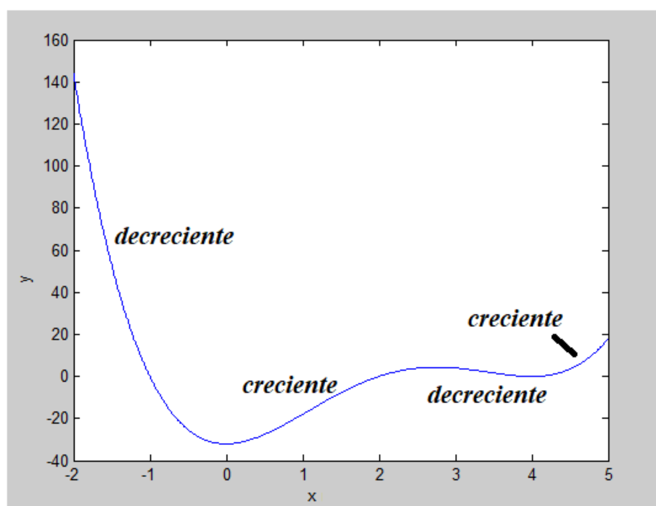
Solución: Recordemos que una función polinomial es continua en todo su dominio extendido, los números reales. Para determinar el comportamiento gráfico de la función, vamos a realizar una tabulación, ya sea tabular o de la misma gráfica determinaremos en que intervalos la función es creciente y en que intervalos la función es decreciente.

Restringimos la tabulación al intervalo $[-3,5]$

También recordemos que si $x \to -\infty$, y si $x \to \infty$ la función $f(x) \to \infty$, por el signo positivo y el exponente par del primer término de $f(x)$.

x	***f(x)***
- 3	**490**
- 2.5	**285.187**
- 2	**144**
-1.5	**52.9375**
-1	**0**
- 0.5	**- 25.312**
0	**- 32**
0.5	**- 27.562**

x	***f(x)***
1	**- 18**
1.5	**- 7.812**
2	**0**
2.5	**3.9375**
3	**4**
3.5	**1.6875**
4	**0**
4.5	**3.4375**
5	**18**



Al observar la tabla o la gráfica, podemos establecer que la función es decreciente en dos intervalos $(-\infty, 0)$ y $(\sim 2.6, 4)$ y es creciente en los intervalos $(0, \sim 2.6)$ y $(4, \infty)$. Observar en la tabla, en el intervalo $(-\infty, 0)$ donde la función es decreciente, por ejemplo, que cuando $-2 > -2.5$ se tiene $f(-2) < f(-2{,}5)$

USO DE LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA PARA EL ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE UNA FUNCIÓN

Antes de explicar el comportamiento de la gráfica de una función utilizando el concepto de derivada, recordemos que la derivada de una función esta dada por

$$f'(x)=\lim_{h\to o}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Si el límite existe y su representación geométrica es la pendiente de la recta tangente a la curva en cualquier punto de ella.

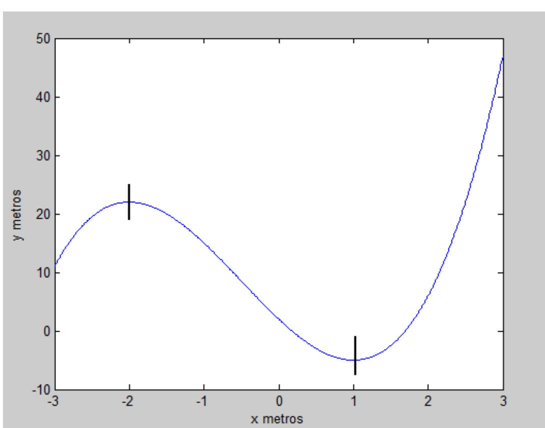
También recordemos que la derivada de una función se puede escribir utilizando la razón de cambio instantáneo, esto es

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to o}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Con los siguientes ejemplos vamos a introducir el tema utilizando la interpretación geométrica de la derivada (pendiente de la recta tangente a la curva).

Ejemplo 4.2. Sea la función $f(x)=2x^3+3x^2-12x+2$, la cual tiene como gráfica:

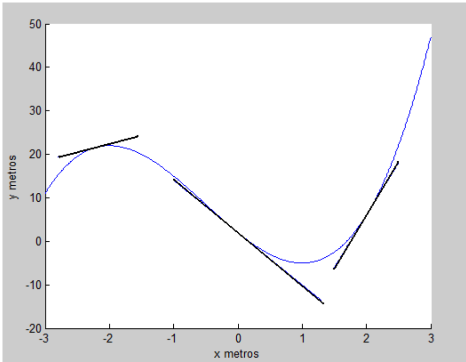
Se recomienda graficar con un software



Observamos en la gráfica que la función es creciente en los intervalos $(-\infty,-2)$ y $(1,\infty)$ y es decreciente en el intervalo $(-2,1)$.

También se observa que existen dos puntos en donde la gráfica cambia de creciente a decreciente y de decreciente a creciente, Esta observación se debe realizar al recorrer el dominio (eje X) de izquierda a derecha.

Ahora, para analizar la función con su función derivada, hacemos uso de la interpretación geométrica de la derivada de una función, esto es, recordemos que la derivada de una función evaluada en un punto de esta es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto dado, tracemos algunas rectas tangentes a la curva.



Una vez trazadas rectas tangentes a la curva, podemos ver que en donde la función es creciente, las pendientes de las rectas tangentes tienen ángulos de inclinación menor de 90º y por lo tanto pendiente positiva y en la región donde la función es decreciente, las rectas tangentes tienen ángulo de inclinación mayor a 90º y por lo tanto las pendientes de las rectas tangentes son negativas.

Ahora realicemos un tratamiento analítico para encontrar en que regiones la pendiente de la recta tangente es positiva.

La expresión que permite encontrar las pendientes de rectas tangentes a la curva en cualquier punto de ella se obtiene derivando la función dada, esto es:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(2x^3+3x^2-12x+2\right)=6x^2+6x-12$$

En resumen $m_t(x)=6x^2+6x-12$ permite calcular dichas pendientes; m_t es la pendiente de la recta tangente.

Ahora determinemos los intervalos en los que la función derivada es positiva, esto nos indicará en donde las pendientes de rectas tangentes son positivas y en su caso en donde son negativas. Para ello, debemos resolver la desigualdad

$$6x^2+6x-12>0$$

Al factorizar la expresión se tiene $6(x-1)(x+2)>0$, esto implica dos casos:

$$(x-1)>0 \quad \text{y} \quad (x+2)>0 \qquad \text{o} \qquad (x-1)<0 \quad \text{y} \quad (x+2)<0$$

Para el primer caso se tiene $x>1$ y $x>-2$, la intersección es el intervalo $(1,\infty)$ y para el segundo caso se tiene $x<1$ y $x<-2$, la intersección es el intervalo $(-\infty,-2)$, por lo tanto los intervalos donde la pendiente de la recta tangente es positiva son $(1,\infty)$ o $(-\infty,-2)$, en consecuencia el intervalo donde la pendiente de la recta tangente es negativa es el intervalo $(-2,1)$. Lo anterior concuerda con lo mostrado en la gráfica.

En resumen, se puede establecer para cualquier función lo siguiente:

Cuando una función es creciente o decreciente en un intervalo **I** es llamada ***monofónica*** en **I.**

Y con el uso del concepto de derivada podemos establecer el siguiente criterio:

Suponer que la función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y diferenciable en el intervalo (a,b):
a) si $f'(x) > 0$ para todo valor de x en el intervalo (a,b), entonces la función $f(x)$ es creciente en dicho intervalo.
b) Si $f'(x) < 0$ para todo valor de x en el intervalo (a,b), entonces la función $f(x)$ es decreciente en dicho intervalo.

Es importante recordar que una **función es derivable en un punto** a si $f'(a)$ existe. Esto es, es diferenciable en un intervalo abierto (a,b) si la función es **diferenciable** en cada valor del intervalo.

PUNTOS CRÍTICOS

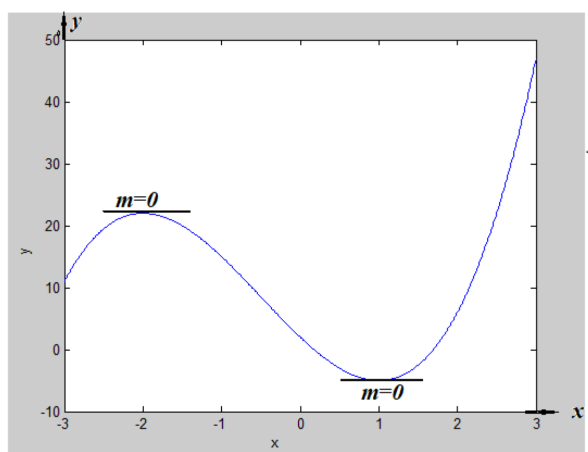
Para tratar este tema, ejemplificaremos los siguientes tres casos que nos interesan para los propósitos del curso:

Caso 1

Ejemplo 4.3. En algunas gráficas como la de la función

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$$

existen puntos donde las pendientes de las rectas tangentes tienen pendiente igual a cero, esto es, si trazamos una recta tangente en esos puntos la línea recta corresponde a una recta horizontal.



Observemos la gráfica adjunta

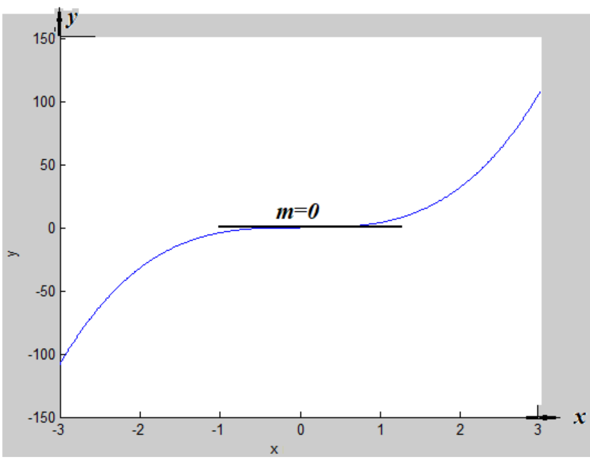
Podemos observar en el ejemplo que existen puntos significativos $(x=c)$ en la curva de la función, donde la derivada de la función es cero $\left(\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=c}=0\right)$.

En el ejemplo particular que se ha mostrado, se observa que, al recorrer la gráfica de izquierda a derecha, y al pasar por dichos puntos la grafica cambia de forma creciente a decreciente o viceversa.

Lo anterior no siempre ocurre, veamos el siguiente ejemplo

Caso 2

Ejemplo 4.4. En la gráfica de la función $f(x)=4x^3$ existen puntos donde la pendiente de la recta tangente a la curva es igual a cero.



A este punto se le denomina punto de inflexión.

En este caso existe un punto $x=0$ donde la pendiente de la recta tangente a la curva es Igual a cero y sin embargo, a diferencia del caso anterior, la función antes de $x=0$ es creciente y también es creciente después de $x=0$.

Lo comprobamos con la derivada de la función

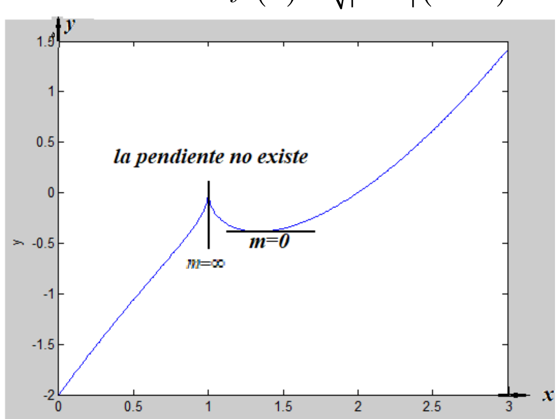
$$\frac{d4x^3}{dx}=12x^2$$

Al sustituir $x=0$, se tiene

$$\left.\frac{d4x^3}{dx}\right|_{x=0}=12x^2=12(0)^2=0$$

Caso 3

Ejemplo 4.5. La gráfica de la función $f(x)=\sqrt{|x-1|}(x-2)$ es la siguiente:



En la gráfica se observa que existe un punto donde la pendiente de la recta tangente a la curva es cero, aproximadamente en $x = 1.3.....$

Pero también se observa un punto $x = 1$ donde la pendiente de la recta tangente a la curva no existe (se dice que es infinita), sin embargo, para puntos cercanos a éste, la pendiente de las rectas tangentes si existe.

Un tratamiento analítico, del caso 3, lo realizaremos utilizando el concepto de derivada.

La función que se estudia $f(x) = \sqrt{|x-1|}(x-2)$ tiene como dominio todos los números reales

$Domf = \mathbb{R}$. La derivada de la función es:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{|x-1|}(x-2) = \sqrt{|x-1|}\frac{d(x-2)}{dx} + (x-2)\frac{d\sqrt{|x-1|}}{dx} =$$

$$= \sqrt{|x-1|} + (x-2)\frac{d\sqrt{|x-1|}}{dx}$$

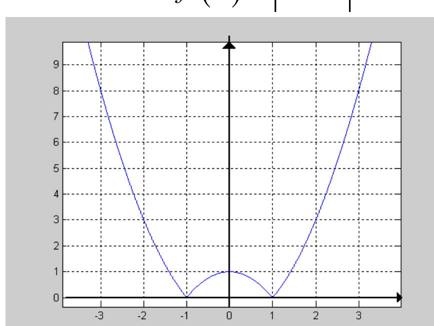
La derivada es igual a cero en $x = \frac{4}{3}$, esto es, existe un punto donde la derivada es cero.

Por otra parte, la derivada $f'(x) = \sqrt{|x-1|} + (x-2)\frac{d\sqrt{|x-1|}}{dx}$ no existe en $x = 1$, sin embargo, la función $f(1) = 0$

Con los tres casos anteriores podemos establecer la siguiente definición:

Definición. Un punto $x = c$ que pertenece al dominio de una función, es llamado un punto crítico si cumple alguna de las siguientes condiciones i) $f'(c) = 0$ o ii) la derivada $f'(c)$ no existe.

Ejemplo 4.6. La gráfica de la función $f(x) = |1 - x^2|$ es la siguiente:



En la gráfica se observa que existen dos puntos $x=-1$ y $x=1$ donde la pendiente de la recta tangente a la curva no existe, sin embargo, para puntos cercanos a éstos, la pendiente de las rectas tangentes si existe

La derivada $\dfrac{d\left|1-x^2\right|}{dx}=\left|-2x\right|$, de otra forma:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x \ \text{ si } \ x<-1 \ \text{ y } \ x>1 \\ -2x \quad \text{ si } \ -1<x<1 \end{cases}$$, en $x=1$, en $x=0$, la derivada es cero.

Los puntos críticos de una función nos permiten determinar de forma analítica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función.

Ejemplo 4.7. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=x^3+2x^2-15x-20$.

Solución. Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función debemos encontrar los puntos críticos de la misma.

Notar que la función es continua en todo su dominio.

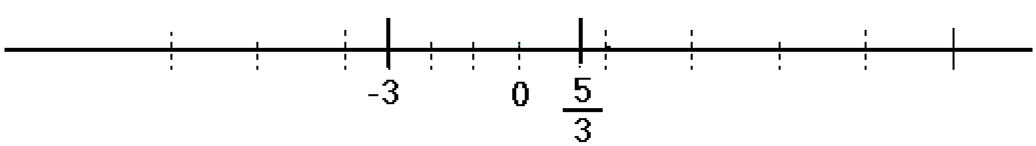
Los puntos críticos de la función son los puntos donde la derivada de la función es igual a cero.

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\left(x^3+2x^2-15x-20\right)=3x^2+4x-15$$

Al igualar a cero se obtiene la ecuación de segundo grado con una incógnita $3x^2+4x-15=0$

Las soluciones de la ecuación son $x=-3$ y $x=\dfrac{5}{3}$; dividimos nuestra recta horizontal en intervalos definidos por las raíces encontradas.

Vamos a analizar los diferentes intervalos determinados por los puntos donde la derivada es cero.



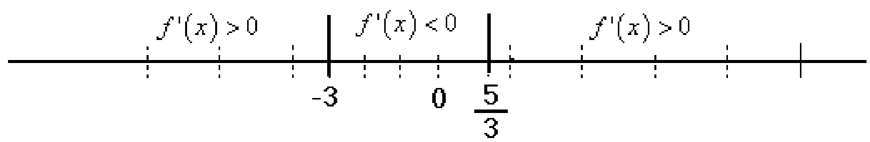
En el intervalo $(-\infty,-3)$, por ejemplo $x=-5$, al sustituir en la función derivada podemos determinar con el signo si es creciente o decreciente en dicha región

$$f'(-5)=3(-5)^2+4(-5)-15=40>0$$

En la región del intervalo $(-\infty,-3)$, determinamos que la función es creciente,

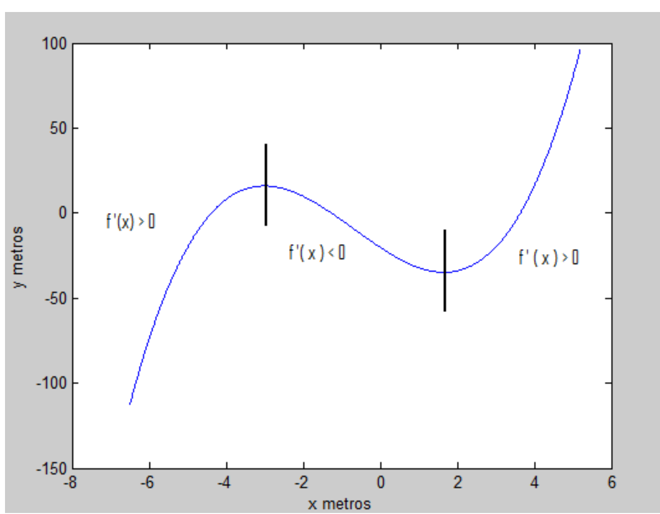
Consideramos ahora la región determinada por el intervalo $\left(-3,\frac{5}{3}\right)$, el valor más simple en esta región es $x=0$, por lo tanto $f'(0)=3(0)^2+4(0)-15=-15<0$; en esta región la derivada tiene signo negativo, por lo tanto en esta región la función decrece.

Finalmente en la región $\left(\frac{5}{3},\infty\right)$, utilizamos, por ejemplo el valor $x=3$, la derivada evaluada en este valor es $f'(3)=3(3)^2+4(3)-15=24>0$, concluimos que en esta región la función es creciente.



La función es creciente en los intervalos $(-\infty,-3)$, $\left(\frac{5}{3},\infty\right)$ y decreciente en el intervalo $\left(-3,\frac{5}{3}\right)$.

El bosquejo de la gráfica de la función $f(x)=x^3+2x^2-15x-20$ es

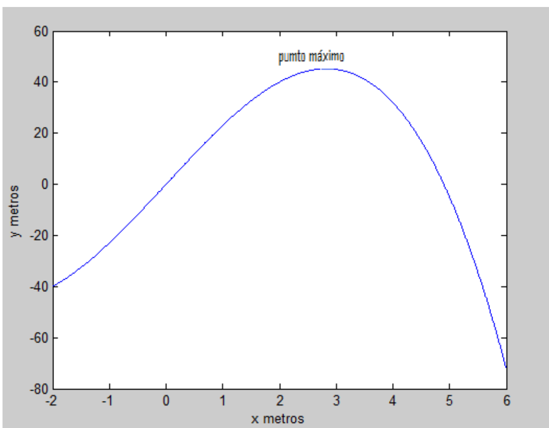


MÁXIMOS Y MÍNIMOS ABSOLUTOS

En esta sección estableceremos la idea de los máximos y mínimos absolutos, para ello, estableceremos las siguientes definiciones:

Definición. Una función $f(x)$ tiene un máximo absoluto en $x=c$ si $f(c)>f(x)$ para todo valor de x en el dominio de la función. El número $f(c)$ corresponde al máximo valor de la función en el dominio de esta.

Ejemplo 4.8*.* La gráfica que corresponde a la función $f(x)=24x-x^3$ en el dominio restringido, el intervalo cerrado $[-2,6]$ es



La gráfica de la función en el intervalo dado muestra un valor mínimo absoluto en $x=\sqrt{8}$.

Se cumple que para cualquier valor de x del dominio

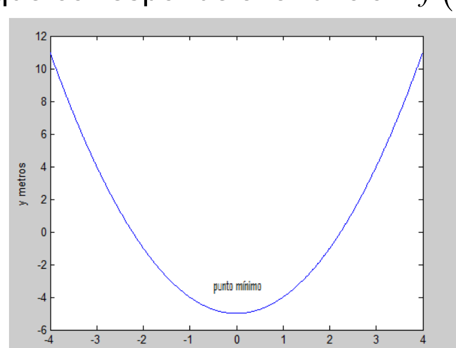
$f(x)<f(\sqrt{8})$

Hay un máximo absoluto

Definición. Una función $f(x)$ tiene un mínimo absoluto en $x=c$ si $f(c)<f(x)$ para todo valor de x en el dominio de la función. El número $f(c)$ corresponde al mínimo valor de la función en el dominio de esta.

En las definiciones anteriores el máximo y el mínimo absoluto son los valores extremos de la función en el dominio de la función.

Ejemplo 4.9. La gráfica que corresponde a la función $f(x)=x^2-5$ es



La gráfica de la función muestra un valor mínimo absoluto en $x=0$.

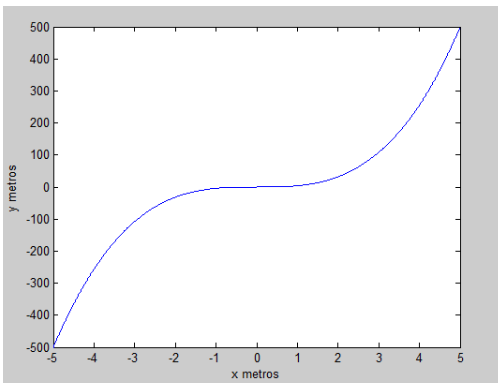
Se cumple que para cualquier valor de x del dominio

$$f(x) > f(0)$$

Hay un mínimo absoluto

Sin embargo, puede ocurrir que en el dominio extendido de una función no exista ni un máximo ni un mínimo absoluto, observemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.10. La gráfica que corresponde a la función $f(x)=4x^3$ es:



En la gráfica de la función no existe un valor de $x=c$ que corresponda a un punto que sea un máximo o mínimo absoluto en el dominio de la función $f(x)=4x^3$

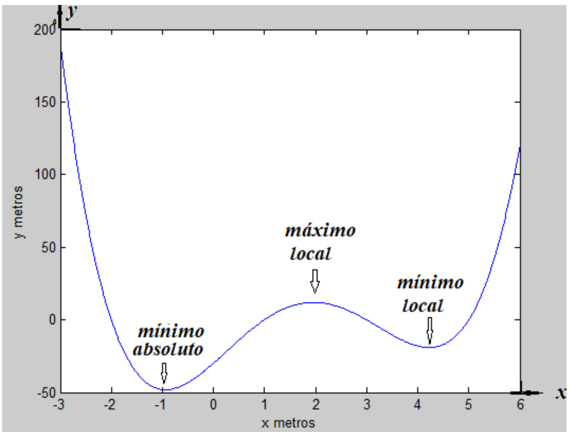
MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES O RELATIVOS

En la gráfica de una función pueden existir puntos máximos o mínimos locales (relativos) que no corresponden a los absolutos, como su nombre lo indica sólo están localizados en un intervalo que contenga a dichos puntos.

Definición. Una función $f(x)$ tiene un máximo local o máximo relativo en $x=c$ si existe un intervalo abierto I conteniendo a $x=c$ tal que $f(c) > f(x)$ para toda x en el intervalo I.

Definición. Una función $f(x)$ tiene un mínimo local o mínimo relativo en $x=c$ si existe un intervalo abierto I conteniendo a $x=c$ tal que $f(c) < f(x)$ para toda x en el intervalo I.

Ejemplo 4.11. Graficar la función $f(x) = x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 31x - 30$ y establecer los máximos/mínimos absolutos y los máximos/mínimos locales.



Podemos observar en la gráfica que el máximo absoluto de la función se localiza en el punto $(-2.5, 72.188)$, el mínimo absoluto de la función se localiza en $(-0.93536, -48.1278)$.

Ahora, existe un mínimos local en el punto $x = 4.22367$ y un máximo local en $x = 1.96169$, los cuales como podemos observar, que al igual que el localizado en $x = -0.93536$ son puntos críticos de la función.

Con lo que se ha revisado hasta el momento, podemos establecer el siguiente teorema:

TEOREMA 1. Si la función $f(x)$ tiene un extremo local (máximo o mínimo) en un punto $x = c$, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

En términos de puntos críticos se puede establecer el siguiente enunciado; "**Si $f(x)$ tiene un extremo local (máximo o mínimo) en un punto $x = c$, entonces $x = c$ es un punto critico de la función $f(x)$**"

MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES. CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

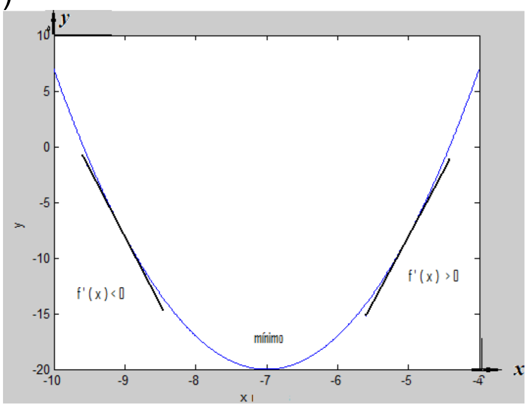
Para determinar los valores extremos locales de una función (máximo o mínimo) podemos utilizar como herramienta el concepto de la primera derivada de la siguiente manera:

En la gráfica número 1 se muestra que cuando existe un punto crítico que corresponde a un mínimo, la función es creciente $f'(x) > 0$ en el intervalo anterior al punto crítico y en el intervalo posterior al punto crítico, la función es decreciente $f'(x) < 0$.

En la gráfica número 2 se muestra que cuando existe un punto crítico que corresponde a un máximo, la función es creciente $f'(x) > 0$ en el intervalo anterior al punto crítico y en el intervalo posterior al punto crítico, la función es decreciente $f'(x)<0$.

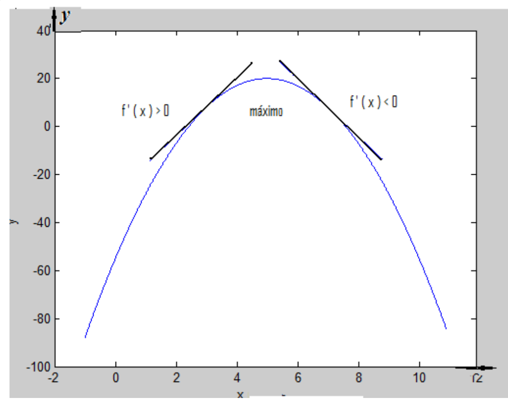
Observemos las gráficas

1)



Se muestra un punto critico donde existe un mínimo.

2)



Se muestra un punto critico donde existe un máximo

Con las observaciones anteriores, podemos establecer el criterio de la primera derivada para determinar si un punto crítico de una función corresponde a un punto máximo o a un punto mínimo.

PRUEBA DE LA PRIMERA DERIVADA

Suponer que $x=c$ es el punto crítico de una función continua $f(x)$.

a) Si al calcular la función derivada $f'(x)$ en valores $a<c$ y en valores $b>c$, el signo de la función derivada cambia de positivo a negativo, entonces $f(x)$ tiene un máximo local en $x=c$.
b) Si al calcular la función derivada $f'(x)$ en valores $a<c$ y en valores $b>c$, el signo de la función derivada cambia de negativo a positivo, entonces $f(x)$ tiene un mínimo local en $x=c$.
c) Si al calcular la función derivada $f'(x)$ en valores $a<c$ y en valores $b>c$, el signo de la función derivada no cambia, entonces $f(x)$ no tiene valores extremos en $x=c$.

Ejemplo 4.12. Encontrar los puntos críticos de la función $f(x)=x^3-6x^2+9x$ y determinar si son máximos y o mínimo.

Solución. Inicialmente encontramos la derivada de la función

$$\frac{d}{dx}\left(x^3-6x^2+9x\right)=3x^2-12x+9$$

Para encontrar los puntos críticos igualamos la función derivada con cero, de acuerdo con lo establecido en el teorema 1.

$$3x^2-12x+9=0$$

Lo anterior es una ecuación de segundo grado con una incógnita, su solución es

$$x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4(3)(9)}}{2(3)}=\frac{12\pm\sqrt{36}}{6}=\begin{cases}x_1=1\\x_2=3\end{cases}..$$

Existen dos puntos críticos $x_1=1$ y $x_2=3$; es fácil ver que $f'(1)=0$ y $f'(3)=0$.
Ahora vamos a analizar si los puntos críticos pertenecen a un máximo o a un mínimo, para ello el criterio de la primera derivada nos dice que debemos darle valores a x antes y después del punto crítico y observar el signo de la evaluación.

Análisis de $x=1$

Antes de $x=1$ podemos utilizar $x=0$, en este caso

$$f'(0)=3(0)^2-12(0)+9=9>0$$

Después $x=1$ podemos utilizar $x=2$, en este caso

$$f'(2)=3(2)^2-12(2)+9=-3<0$$

La derivada cambio de positivo a negativo, entonces se trata de un máximo local en $x=1$**.**

Análisis de $x=3$

Antes de $x=3$ podemos utilizar $x=2$, en este caso

$$f'(2)=3(2)^2-12(2)+9=-3<0$$

Después $x=3$ podemos utilizar $x=4$, en este caso

$$f'(4)=3(4)^2-12(4)+9=9>0$$

La derivada cambio de negativo a positivo, entonces se trata de un mínimo local en $x=3$.

Para encontrar las imágenes de los puntos críticos, simplemente sustituimos en la función $f(x)$

La imagen de $x=1$ es $f(1)=(1)^3-6(1)^2+9(1)=4$, el punto máximo es $(1,4)$.

y la imagen de $x=3$ es $f(3)=(3)^3-6(3)^2+9(3)=0$, el punto mínimo es $(3,0)$.

Ejemplo 4.13. Encontrar los puntos críticos de la función $f(x)=3x^5-5x^3$ y determinar si son máximos y o mínimo.

Solución. Inicialmente encontramos la derivada de la función

$$\frac{d}{dx}\left(3x^5-5x^3\right)=15x^4-15x^2=15x^2\left(x^2-1\right)$$

Para encontrar los puntos críticos igualamos la función derivada con cero, de acuerdo con lo establecido en el teorema 1.

$$15x^2\left(x^2-1\right)=0$$

Lo anterior es una ecuación de cuarto grado con una incógnita, de la factorización podemos escribir

$$15x^2=0 \quad \text{y} \quad \left(x^2-1\right)=0$$

Al solucionar, encontramos tres puntos críticos $x_1=0$ y $x_2=1$ y $x_3=-1$, es fácil verificar que $f'(0)=0$: $f'(1)=0$ y $f'(-1)=0$.

Ahora vamos a analizar si los puntos críticos pertenecen a un máximo o a un mínimo, para ello el criterio de la primera derivada nos dice que debemos darle valores a x antes y después del punto crítico y observar el signo de la evaluación.

Análisis de $x=-1$

Antes de $x=-1$ podemos utilizar $x=-2$, en este caso

$$f'(-2)=15(-2)^4-15(-2)^2=180>0$$

Después $x=-1$ no podemos utilizar $x=0$, porque este es punto crítico, tendremos que usar, por ejemplo $x=-0.5$ en este caso

$$f'(-0.5)=15(-0.5)^4-15(-0.5)^2=-\frac{5}{16}<0$$

La derivada cambio de positivo a negativo, entonces se trata de un máximo local en $x=-1$**.**

Análisis de $x=0$

Antes de $x=0$ podemos utilizar $x=-0.5$, en este caso $f'(-0.5)=-\frac{5}{16}<0$

Después $x=0.5$ no podemos utilizar $x=1$, también es punto crítico, por lo tanto

$$f'(0.5)=15(0.5)^4-15(0.5)^2=-\frac{5}{16}<0$$

La derivada no cambio de signo, por lo tanto, no existe punto extremo en $x=0$

Análisis de $x=1$

Antes de $x=1$ podemos utilizar $x=0.5$, en este caso $f'(0.5)=-\frac{5}{16}<0$

Después $x=1$ podemos utilizar $x=2$, en este caso $f'(2)=15(2)^4-15(2)^2=180>0$

La derivada cambio de negativo a positivo, entonces se trata de un mínimo local en $x=1$**.**

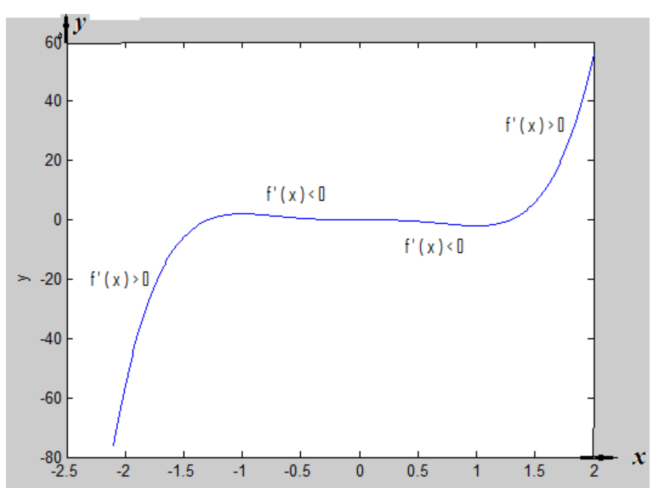
Para encontrar las imágenes de los puntos críticos, simplemente sustituimos en la función $f(x)$

<table>
<tr>
<td>La imagen de $x=-1$ es

$f(-1) \;=\; 3(-1)^5-5(-1)^3=2$,

el punto máximo es $(1,2)$ y la imagen de $x=1$ es

$f(1) \;=\; 3(1)^5-5(1)^3=-2$,

el punto mínimo es $(1,-2)$.
En el punto crítico $(0,0)$ no existe valor extremo.</td>
<td>La gráfica de la función es:

</td>
</tr>
</table>

Nota: Para bosquejar la gráfica de una función, debemos encontrar los valores extremos locales, en su caso los puntos de los extremos del dominio y determinar los intervalos donde es creciente y decreciente la función.

SEGUNDA DERIVADA

Si $f(x)$ es una función derivable, entonces su derivada $f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$ es también una función, luego $f'(x)$ también puede tener su propia derivada, la cual se representa como $f''(x)=\frac{df'(x)}{dx}$. Esta nueva función $f''(x)$ se llama la **segunda derivada de la función** $f(x)$.

En resumen, la segunda derivada de la función $f(x)$ es:

$$\boxed{f''(x)=\frac{df'(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)}$$

Y en general, la segunda derivada $\frac{d}{d}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)$ se representa como $\frac{d^2}{dx^2}f(x)\equiv\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ y se lee como derivada segunda de la función $f(x)$ respecto a x. Otra forma de representarlo es $D_x^2 f(x)$.

Ejemplo 4.14. Encontrar la segunda derivada de la función $f(x)=10+12x-3x^2-2x^3$

Solución. La primera derivada de la función la obtenemos aplicando las reglas de derivación

$$f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\left(10+12x-3x^2-2x^3\right)=12-6x-6x^2$$

Para obtener la segunda derivada de la función $f(x)$, se debe derivar la función $f'(x)=12-6x-6x^2$, al aplicar las reglas de derivación se obtiene:

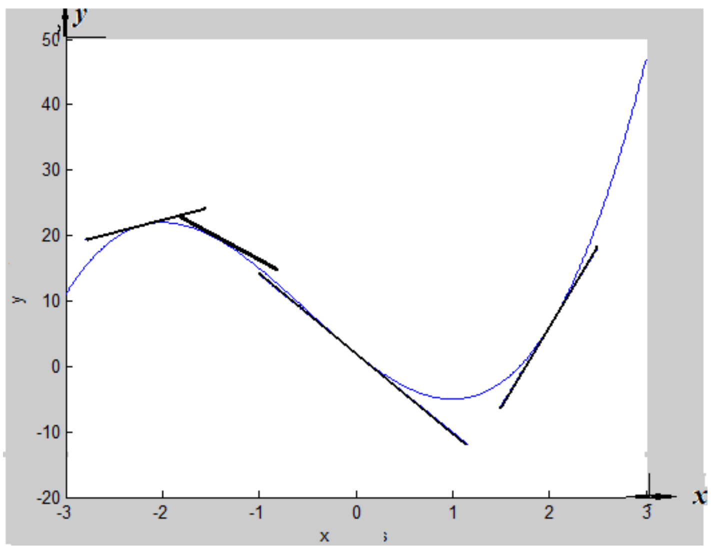
$$f''(x)=\frac{d}{dx}f'(x)=\frac{d}{dx}\left(12-6x-6x^2\right)=-6-12x$$

La segunda derivada de la función $f(x)=10+12x-3x^2-2x^3$ es $f''(x)=-6-12x$.

CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

DEFINICION. Si en la gráfica de $f(x)$ todas las rectas tangentes se establecen por debajo de ella, se dice que la gráfica es cóncava hacia arriba, si por el contrario las rectas tangentes a ella se establecen por arriba de ella, se dice que la curva es cóncava hacia abajo.

Observemos la siguiente gráfica:



En el intervalo donde esta graficada la curva de una función, se observa que en el intervalo abierto de $(-3,0)$, las rectas tangentes a ella están por arriba, de acuerdo a la definición, se dice que la gráfica en este intervalo es **cóncava hacia abajo** y en el intervalo abierto $(0,2)$ se observa que las rectas tangentes a la curva se encuentran por debajo de ella, de acuerdo a la definición, se dice que la curva en este intervalo es **cóncava hacia arriba.**

DEFINICION. El punto P de la curva donde la gráfica cambia de **cóncava hacia abajo** a **cóncava hacia arriba** o cambia de **cóncava hacia arriba** a **cóncava hacia abajo** se llama **PUNTO DE INFLEXION.**

En el caso de la gráfica anterior, el punto de inflexión se localiza en $x=0$.

Vamos ahora a establecer una prueba de tipo analítico para determinar la concavidad de la gráfica de una función.

PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA DETERMINAR CONCAVIDAD

Supongamos que la función $f(x)$ es dos veces diferenciable en un intervalo I. a) Si $f''(x) > 0$ para toda x que pertenece al intervalo I, entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo I. b) Si $f''(x) < 0$ para toda x que pertenece al intervalo I, entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia abajo en el intervalo I.

Ejemplo 4.15. Determinar el intervalo en donde la curva de la función $y = x^3 - 3x + 1$ es cóncava hacia arriba y en donde es cóncava hacia abajo Y determinar también el punto de inflexión. Bosquejar la curva.

Solución. Para bosquejar la gráfica de la curva, podemos hacerlo determinando sus puntos críticos (máximo y/o mínimo) y su concavidad.

Usamos el criterio de la primera derivada para determinar los puntos máximo y/o mínimo.

Recordemos, derivar y el resultado igualarlo a cero para obtener los puntos críticos.

La derivada $\quad \dfrac{d}{dx}y = \dfrac{d}{dx}\left(x^3 - 3x + 1\right) = 3x^2 - 3$

Al igualar a cero se tiene la ecuación $3x^2 - 3 = 0$, y al resolver, los puntos críticos son $x = 1$ y $x = -1$.

Ahora determinamos si los puntos críticos pertenecen a un máximo o a un mínimo.

Para $x = 1$ utilizamos valores antes y después y sustituimos en la derivada para determinar si crece o decrece

Utilicemos por ejemplo $x = .8$ (antes de $x = 1$) y $x = 1.2$ (después de $x = 1$). Al sustituir $x = .8$ en la derivada se tiene

$$y'(.8) = 3(.8)^2 - 3 = 3(.64) - 3 = 1.92 - 3 = -1.08 < 0$$

esto indica que a la izquierda de $x = 1$ la función es decreciente.

Recordemos que hay que analizar $x = -1$, esto es podemos garantizar que la función decrece desde $x > -1$ y hasta $x < 1$. Ahora sustituimos en la derivada $x = 1.2$, al hacerlo se tiene $y'(1.2) = 3(1.2)^2 - 3 = 3(2.44) - 3 = 7.32 - 3 = 4.32 > 0$, lo cual significa que a la derecha de $x = 1$ la función es creciente. En este caso sí podemos garantizar que la función crece en el intervalo abierto $(1,\infty)$ ya que no existe otro punto critico en esta región.

Podemos concluir que como $y'(x)$ cambia de negativo a positivo en $x=1$, la función tiene un mínimo local en $x=1$.

Ahora analicemos la función alrededor de $x=-1$:

En $x=-1.2<-1$ (antes de $x=-1$)

$$y'(-1.2)=3(-1.2)^2-3=3(2.44)-3=7.32-3=4.32>0$$

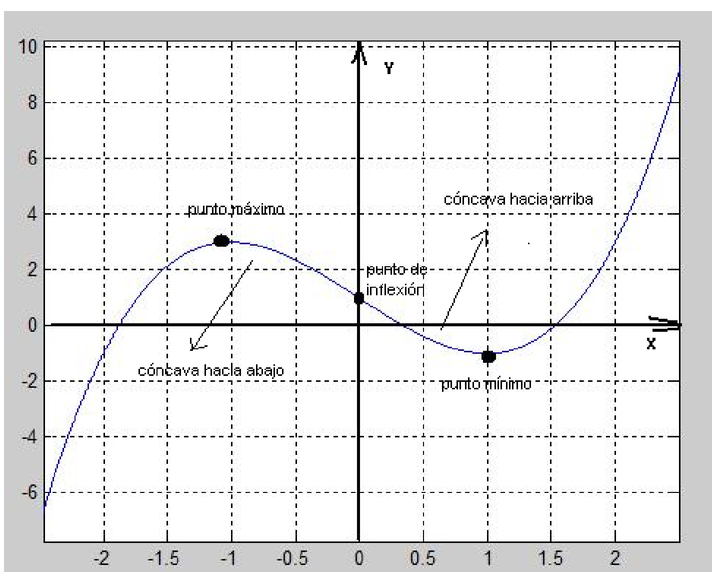
y en $x=-0.8>-1$ (después de $x=-1$)

$$y'(-0.8)=3(-0.8)^2-3=3(0.64)-3=1.92-3=-1.08<0\ ,$$

la derivada cambia de positivo a negativo, por lo tanto existe un punto máximo local en $x=-1$.

Como la segunda derivada de esta función es $f''(x)=6x$, es claro que para $x>0$, la segunda derivada de la función es positiva, por lo tanto es cóncava hacia arriba en esta región; por otra parte, la segunda derivada es negativa para $x<0$, por lo tanto la curva es cóncava hacia abajo en dicha región. En consecuencia, concluimos que $x=0$ es un punto de inflexión.

La gráfica de la curva es:



GRÁFICA DE $f(x)$ A PARTIR DE SU PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA

En esta sección haremos un breve bosquejo de cómo construir la gráfica de la función a partir de conocer su segunda o primera derivada, para ello ejemplificaremos sólo con funciones de tipo polinomial

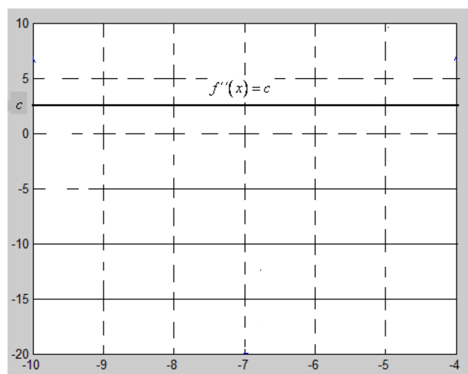
Hemos observado en capítulos anteriores, lo siguiente, si la derivada de una función es del tipo $f'(x)=ax^n+bx^{n-1}+.......cx^2+dx+e$, podemos afirmar que la función original es una función polinomial de grado $n+1$, esto es, tiene la forma $f(x)=a'x^{n+1}+b'x^n+.......c'x^3+d'x^2+e'x$, en particular, veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.16. Supongamos que la segunda derivada de una función es $f''(x)=c$ c una constante, entonces la función de donde fue obtenida es del tipo $f'(x)=cx+b$, es decir una línea recta con pendiente $m=c$, a su vez esta primera derivada fue obtenida de un polinomio de grado dos, es decir $f(x)=c'x^2+bx+d$, la cual al graficarla corresponde a una parábola.

Análisis

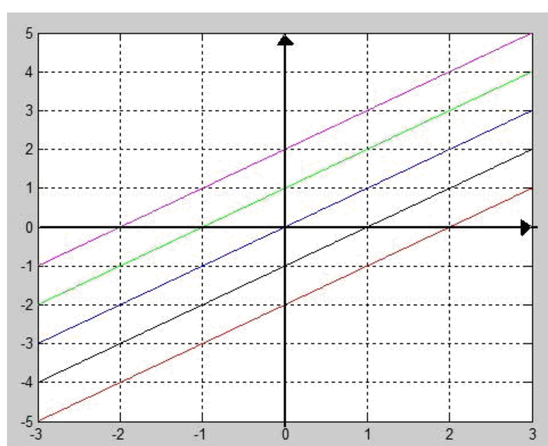
Si $c>0$, la gráfica de $f''(x)=c$ es de la forma.

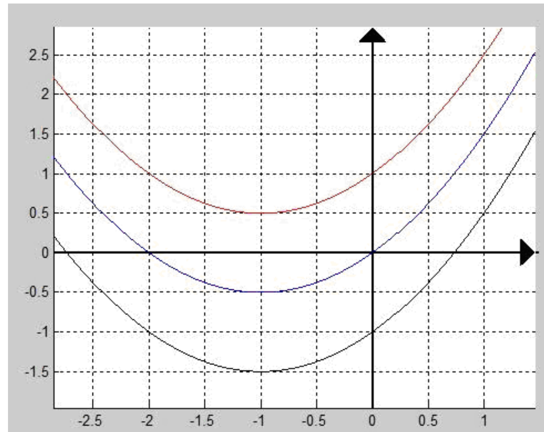
Observar que es una recta horizontal que intersecta al eje vertical en $y=c$



La primera derivada de este tipo de función es de la forma $f'(x)=cx+b$, esto es la gráfica corresponde a una familia de rectas cuya pendiente es igual a c e intersectan al eje vertical en $y=b$

Observar que no es posible determinar exactamente cuál es la función $f'(x)$, ya que cualquiera que sea de esta forma tiene por derivada la constante c





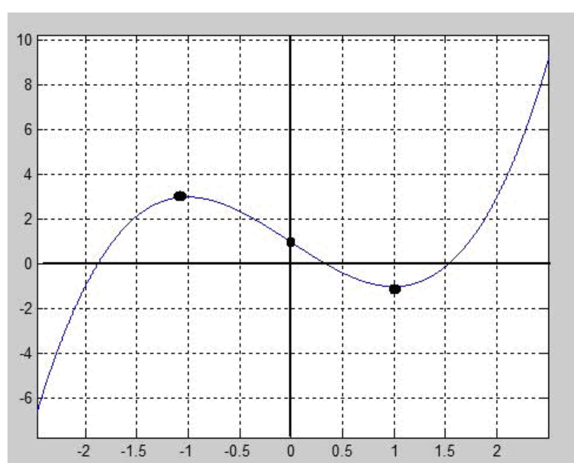
La función original es entonces de la forma $f(x)=c'x^2+bx+d$, esto es la gráfica corresponde a una familia de parábolas de tal forma que intersectan al eje vertical en $y=d$.

Al igual que en el caso anterior, no es posible determinar cuál es la función original $f(x)$, ya que al derivarla cualquiera de ellas, obtenemos la función $f'(x)=cx+b$, donde $c=2c'$.

Ejercicio 4.1. Supongamos que la segunda derivada de una función es $f''(x)=c$, donde c es una constante negativa. a) Bosquejar la familia de gráficas que corresponden a la primera derivada, b) Bosquejar la familia de gráficas que corresponden a la función original.

En el presente texto no abordaremos los casos de funciones más elaboradas, como es el caso de las funciones de tipo racional o con radicales, su estudio se realizará posteriormente.

GRÁFICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCION $f(x)$ A PARTIR DE SU GRAFICA

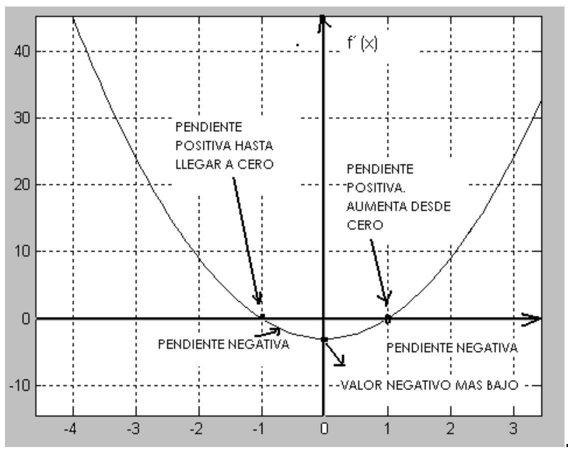


Supongamos que se quiere encontrar la gráfica de la derivada de la función cuya gráfica se muestra.

Para realizar lo anterior, recordemos que la derivada de una función evaluada en un punto dado es la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

En el intervalo $(-5,-1)$, la pendiente de las rectas tangentes es positiva y va disminuyendo su valor hasta hacerse cero en $x=-1$; en el intervalo $(-1,0)$, la pendiente de la recta tangente es negativa y va aumentando en forma absoluta hasta $x=0$, después de $x=0$, la pendiente de las rectas tangentes siguen siendo negativas, pero su valor disminuye en forma absoluta hasta hacerse cero en $x=1$, finalmente en el intervalo $(1,3)$, la pendiente de las rectas tangentes es positiva y va aumentando.

Veamos lo anterior representado gráficamente



4.9 PROBLEMAS DE APLICACIÓN A MÁXIMOS Y MINIMOS

Problema 4.2.

Un fabricante determina que el costo total, c, de producir un producto, q, está dado por la función de costo $c=0.05q^2+5q+500$ ¿Para qué nivel de producción será mínimo el costo promedio por unidad?

Solución. Observar que esta función del costo es una parábola que abre hacia arriba. La cantidad por minimizar es el costo promedio. La función del costo promedio es $\bar{c}=\frac{c}{q}, \quad q\neq 0$. Es por eso, que dividimos entre q, la función del costo total:

$$\bar{c}=\frac{0.05q^2+5q+500}{q}$$

$$\bar{c}=0.05q+5+\frac{500}{q}$$

Para conocer el valor de producción que hace que el costo promedio sea mínimo, derivamos $\bar{c}$, con respecto a q:

$$\frac{d\bar{c}}{dx} = 0.05 - \frac{500}{q^2}$$

Si igualamos este valor obtenido a cero, tendremos la pendiente de la recta tangente en el punto mínimo, es decir

$$\frac{d\bar{c}}{dq} = 0.05 - \frac{500}{q^2} = 0$$

$$0.05q^2 - 500 = 0$$

$$q = \sqrt{\frac{500}{0.05}} = 100 \; unidades$$

Esto significa que para cuando se tiene un nivel de producción de 10 000 unidades, se tiene un costo mínimo. ¿Cuánto vale?. Basta sustituir las unidades encontradas en el costo promedio que describimos anteriormente.

Problema 4.3.

Una variedad de pelícanos se encuentra en peligro de extinción, su población es una función del tiempo dado por la ecuación:

$$P(t) = 80\left(1 + \frac{4t}{t^2 + 16}\right)$$

Donde 80 es la población inicial de pelícanos. Encuentre el número máximo de pelícanos que pueden existir.

Solución. Obtener la primera derivada

$$P'(t) = 80\left(\frac{4(t^2 + 16) - 4t(2t)}{(t^2 + 16)^2}\right)$$

$P'(t) = 0$ Implica que: $-4t^2 + 64 = 0$; obtenemos los tiempos críticos $t = \pm 4$, donde el tiempo negativo no tiene sentido.

Obtenemos la segunda derivada:

$$P'(t) = 80\left(\frac{-8t(t^2 + 16)^2 - (-4t^2 + 64)4t(t^2 + 16)}{(t^2 + 16)^4}\right)$$

Para $t=4$ $P''(t)$ es negativa por lo tanto la función $P(t)$ tiene un máximo en $t=4$

Por lo que la población máxima de pelícanos es de 120.

Problema 4.4.

Se sabe que entre 0º C y 30º C el volumen (en cm^3) de un kilogramo de agua a la temperatura T es aproximadamente dado por la fórmula:

$$V(T)=999.87-0.06426T+0.0085043T^2-0.0000679T^3$$

Encuentre la temperatura a la cual el agua tiene su máxima densidad.

Solución. La densidad está dada por $\rho=\frac{m}{V}$, donde V es el volumen y m es la masa expresada en gramos, por lo tanto se tiene:

$$\rho=\frac{1000}{999.87-0.06426T+0.0085043T^2-0.0000679T^3}$$

Derivando la función de densidad:

$$\rho'(T)=\frac{-1000(-0.06426+0.0170086T-0.0002037T^2)}{(999.87-0.06426T+0.0085043T^2-0.0000679T^3)^2}$$

Igualando a cero:

$$\rho'(T)=-1000(-0.06426+0.0170086T-0.0002037T^2)=0$$

Implica que los puntos críticos son $T_1=3.966519391$ ºC y $T_2=79.5317624$ ºC
Ahora, usando la segunda derivada:

$$\rho''(T)=\frac{-1000(0.0170086-0.0004074T)(999.87-0.06426T+0.0085043T^2-0.0000679T^3)^2}{(999.87-0.06426T+0.0085043T^2-0.0000679T^3)^2}-$$

$$\frac{1000(-0.06426+.0170086T-0.0002037T^2)2(999.87-0.06426T+0.0085043T^2-0.0000679T^3)}{(999.87-0.06426T+0.0085043T^2-0.0000679T^3)^2}$$

Al sustituir $T=3.966519391\ ^{\circ}C$ en la segunda derivada, esta es menor que cero por lo que a esta temperatura la densidad es máxima.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicios 4.2. Determinar los extremos locales (máximo o mínimo de las siguientes funciones. Bosquejar su gráfica

a) $f(x) = x^4 - 4x$ b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x - 20$ c) $f(x) = x^4 - x^2 + 1$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$. e) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$

Ejercicio 4.3. Determinar la concavidad de las curvas cuyas funciones se dan a continuación. Las literales utilizadas como a, b y c son parámetros.

a) $y = x^2$. Resp. Siempre cóncava hacia arriba

b) $y = 5 - 2x - x^2$. Resp. Siempre cóncava hacia abajo.

c) $y = x^3$. Resp. Cóncava hacia abajo a la izquierda de (0, 0. Y cóncava hacia arriba a la derecha de (0, 0).

d) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$. Resp. Cóncava hacia abajo a la izquierda de (1, - 2).Y cóncava hacia arriba a la derecha de (1, - 2).

e) $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$. Resp. Cóncava hacia arriba a la izquierda de x = 2, cóncava hacia abajo entre x = 2 y x = 4 y cóncava hacia arriba después de x = 4

Ejercicio 4.4. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y determinar si pertenecen a un máximo o a un mínimo.

a) $f(x) = (x-3)^2(x-2)$ b) $f(x) = (x-1)^3(x-2)^2$ c) $f(x) = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$.

d) $f(x) = 2 - 2(x-4)^{\frac{1}{3}}$ e) $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 6x - 7$

RESOLVER LOS SIGUIENTES PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Problema 4.1R. Se tiene una lámina cuadrada de 30 cm por lado. Se desea construir una caja abierta, cortando en las cuatro esquinas cuadrados iguales y doblando los lados hacia arriba (construirla con una hoja de papel). Escribir la función Volumen en términos del corte realizado y calcular el valor del doblez tal que la caja contenga el máximo volumen.

Problema 4.2R. Se quiere construir una caja rectangular de base cuadrada, abierta por arriba, calcular el volumen de la mayor caja que se pueda obtener de 1200 cm^2 de material.

Problema 4.3R. Se desea construir un depósito rectangular de base cuadrada abierto por arriba. Debe tener 125 metros cúbicos de capacidad. Si el costo de las caras laterales es de 2 pesos por metro cuadrado y el del fondo de 4 pesos por metro cuadrado, ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que el costo sea mínimo?

Problema 4.4R. Un prado rectangular de un jardín ha de tener 72 m^2 de área. Debe rodearse de un paseo de 1 metro de ancho en los lados y dos metros de ancho en las extremidades. Si el área total del prado y del paseo debe ser mínima. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del prado?

Problema 4.5R. Se desea cercar un terreno rectangular de área dada uno de cuyos lados coincide con la orilla de un río. Si la cerca no es necesario del lado lado del río, demuéstrese que se necesitará la mínima cantidad de material cuando el largo del terreno sea 2 veces el ancho.

Bibliografía

1. Anfossi, A. (1950) ***Cálculo Diferencial e Integral***, Editorial Progreso, México, D.F.
2. Bers, Lipman, (1975) ***Cálculo Diferencial e Integral,*** Editorial Interamericana
3. Boyce William, Di Prima Richard, (1999), ***Cálculo,*** CECSA Ediciones México
4. Granville, Smith, (1970) ***Cálculo Diferencial e Integral, CECSA***
5. Grupo institucional 401-C, CCH UNAM, (2011) ***Cálculo Diferencial e Integral I, Colegio*** de Ciencias y Humanidades, UNAM
6. Gutiérrez S, Sánchez Faustino, (1998), ***Matemáticas para las Ciencias Naturales***, Aportaciones matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana
7. Kline, Morris. (2010) ***Matemáticas para los estudiantes de humanidades,*** Fondo de Cultura económica
8. Leithold, Louis, (2007) ***Cálculo con Geometría Analítica,*** Oxford University Press-Harla México, S.A. de C.V
9. Sántalo Carbonell ***Cálculo Diferencial e Integral***, Textos universitarios S.A.
10. Stewart, James, (2015), Calculus, Thompson Matemáticas Editorial
11. Swokowsky, Earl W., (2004) ***Cálculo con Geometría Analítica,*** Oxford University Press-Harla México, S.A. de C.V