

و غ ي
م ن ه
ق ك ل

UNAM - CCH ORIENTE

MATEMÁTICAS I

PARA EL
CCH

NÚMEROS Y MODELOS LINEALES

GÓMEZ - SÁNCHEZ - LECHUGA - RODRÍGUEZ - GONZÁLEZ
RENDÓN - TOVAR - HERNÁNDEZ - PAREDES - RODRÍGUEZ

COORDINARON: GÓMEZ-SÁNCHEZ

PRODUCTO 2019 - 2020

UNAM - CCH ORIENTE

MATEMÁTICAS I

PARA EL
CCH

NÚMEROS Y MODELOS LINEALES

PRODUCTO 2019 - 2020



AUTORES:

Pantaleón Gómez Carranza

Ramón Sánchez Rivas

Jesús Lechuga Anaya

Miguel Ángel Rodríguez Chávez

Héctor González Pérez

José Luis Hernández Hernández

José Adolfo Rendón Ortiz

Mauricio Enrique Rodríguez Pérez

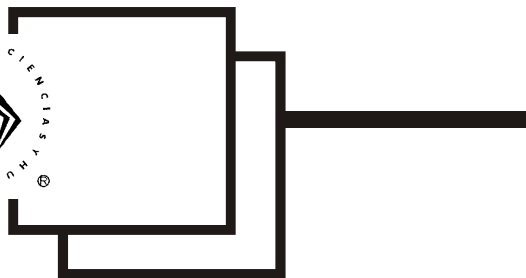
Martín Paredes Martínez

Fernando Tovar Chávez

COORDINARON: PANTALEÓN GÓMEZ CARRANZA - RAMÓN SÁNCHEZ RIVAS

CICLO 2019 - 2020

**COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL ORIENTE**



Impreso en CCH Oriente, UNAM
Departamento de Impresiones a cargo del Sr. Rosendo Vargas
Torres
Se tiraron 500 ejemplares

Introducción

Este texto, es un material que hemos construido con objeto de ofrecer una propuesta didáctica que atienda los aprendizajes y contenidos del Programa de Estudios de la asignatura de Matemáticas I, recientemente actualizada en el Colegio de Ciencias y Humanidades.

Los profesores que conformamos el Grupo de Trabajo, trabajamos bajo los principios del Modelo Educativo del CCH y revisamos exhaustivamente cada una de las unidades con el propósito de presentar de forma clara y coherente los aprendizajes y contenidos del actualizado Programa de Estudios de Matemáticas I

El libro va dirigido a docentes y a los estudiantes que cursan por primera vez Matemáticas en el Colegio de Ciencias y Humanidades. No es un libro para especialistas, sin embargo, consideramos, que la presentación reúne los requisitos disciplinarios mínimos y adecuados para que todos los interesados lo comprendan y puedan utilizar. Es un texto que consideramos debe ser revisado constantemente para que cumpla con el objetivo de ser útil a profesores y alumnos del Colegio.

La perspectiva que mostramos está centrada en el aprendizaje de los conceptos básicos de la aritmética y álgebra, mismos que se describen en las cuatro Unidades. De tal manera que en cada Unidad, se proponen actividades, ejercicios resueltos y problemas que deben ser abordados con los aprendizajes obtenidos y que permiten ser profundizados para quien así lo considere.

En la elaboración de esta obra, han participado profesores en activo que precisamente a partir de su docencia cotidiana, conocen los objetivos del Programa Actualizado de Estudios de Matemáticas I, así como la ubicación y el alcance de los aprendizajes indispensables que deben lograr los alumnos en esta asignatura.

Así, al contemplar por unidad, todos los contenidos y aprendizajes del Programa de Estudios, se incluyeron los ejercicios y sitios de internet o ligas que fueron seleccionadas por los profesores del Grupo de Trabajo, en función de que al aplicarse frente a grupo, demostraron ser viables y positivas

ii Introducción

para los alumnos. Se incorporan una serie de figuras con la intención de situar al lector en el contexto en que se desarrollan los ejercicios y problemas trabajados.

Como todo producto de trabajo colegiado, sabemos que el texto está sujeto a la discusión y réplica de los docentes del Área de Matemáticas, pues no hay otra forma de medir su contribución. Los autores asumimos como benéficas la retroalimentación, críticas y comentarios con fundamentos académicos que puedan desprenderse de este recurso didáctico.

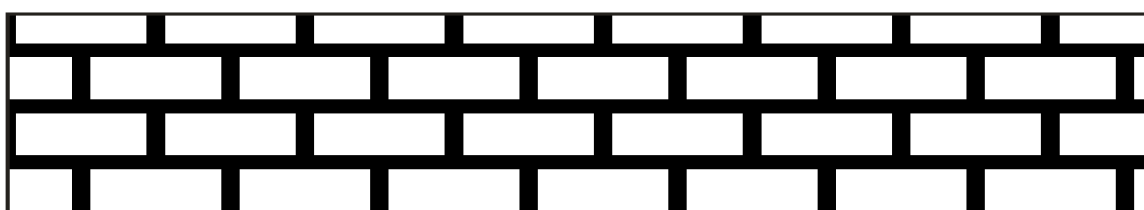
LOS AUTORES

índice

1. EL SIGNIFICADO DE LOS NÚMEROS Y SUS OPERACIONES BÁSICAS	1
1.1 El significado de los números reales y su simbolización	3
1.2 Operaciones con números racionales	16
1.3 Potencias y radicales	29
1.4 Significado contextual de las operaciones	39
1.5 Patrones y fórmulas	55
2. VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL Y FUNCIONES LINEALES	64
2.1 Variación, variación directamente proporcional y el sistema cartesiano	64
2.2 La función lineal y su análisis	84

índice

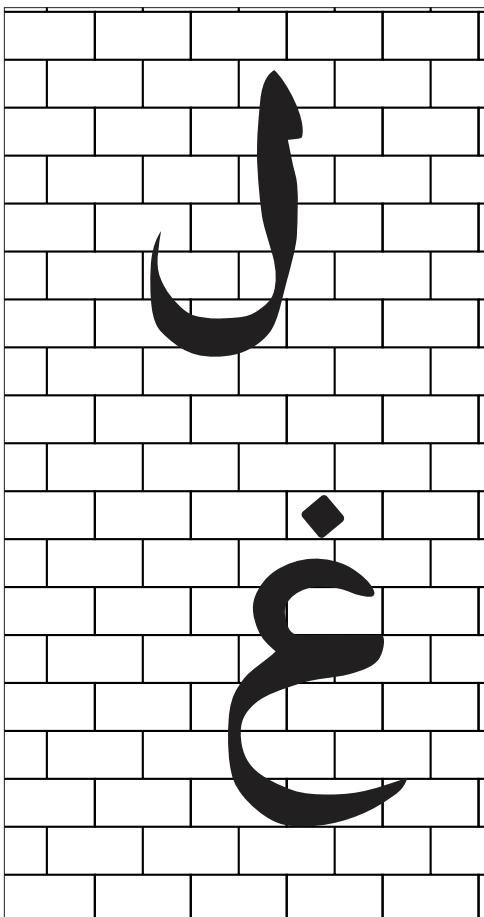
3. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA	98
3.1 El lenguaje algebraico como representación de la generalidad	99
3.2 El álgebra como sistema simbólico y abstracto que se utiliza para la resolución de problemas	113
4. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	124
4.1 Sistemas de ecuaciones lineales dos por dos y métodos de solución	125
4.2 Sistemas de ecuaciones lineales tres por tres	139
a. RESPUESTAS DE EJERCICIOS SELECCIONADOS	140



1

EL SIGNIFICADO DE LOS NÚMEROS Y SUS OPERACIONES BÁSICAS

CONTENIDO



1.1 SIGNIFICADO DE LOS NÚMEROS REALES Y SU SIMBOLIZACIÓN

- Significado de los números racionales Q (enteros Z y no enteros) e irracionales I .
- Las diversas simbolizaciones de un número racional y sus equivalencias: fracción (parte de un todo), decimal, porcentaje.

1.2 OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

- Algoritmos de las operaciones entre números enteros y racionales: suma, resta, multiplicación, división, y las condiciones para su ejecución.
- El mínimo común múltiplo (mcm) y la regla

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \frac{mcm(b, d)}{b} + c \frac{mcm(b, d)}{d}}{mcm(b, d)}, \quad \left(\frac{a}{b} \right) \left(\frac{c}{d} \right) = \frac{ac}{bd} \quad y$$

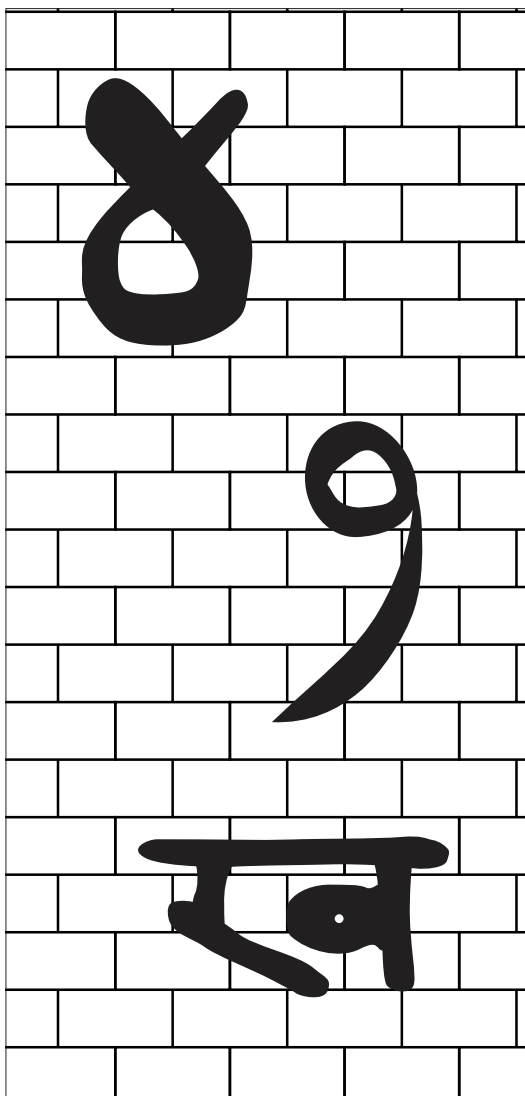
$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

- El Máximo Común Divisor (MCD) y la simplificación de resultados.

1.3 POTENCIAS Y RADICALES

- Operaciones con potencias: exponentes positivos, negativos y fraccionarios.

CONTENIDO

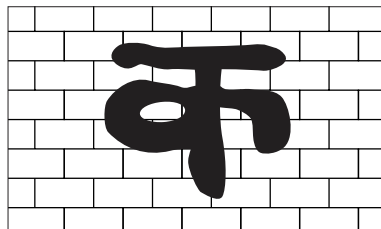


1.4 SIGNIFICADO CONTEXTUAL DE LAS OPERACIONES

- Significado contextual de las operaciones suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.
- Relaciones entre partes de una cantidad y la cantidad.
- Relaciones entre partes de una cantidad (medir una parte tomando como unidad la otra, etcétera).
- Relaciones de área.
- Relaciones entre porcentajes: el porcentaje de una cantidad; el porcentaje de un porcentaje y su relación con el total; relación porcentual entre una parte y el total; dada la cantidad que representa un porcentaje encontrar el total
- Relación de dos magnitudes de distinta clase que varían conjuntamente. Por ejemplo: relaciones entre distancia velocidad y tiempo; distancia, eficiencia en kilometraje por litro de combustible y volumen de combustible; masa, densidad y volumen; fuerza, área y presión.
- Aplicación de estrategias heurísticas en la resolución aritmética de problemas con más de una operación.

1.5 PATRONES Y FÓRMULAS

- Expresión simbólica de la generalidad (la obtención de fórmulas).



1.1

SIGNIFICADO DE LOS NÚMEROS
REALES Y SU
SIMBOLIZACIÓN**El alumno:**

1. Comprenderá el significado de los números reales.
2. Usará correctamente las diversas simbolizaciones de un número racional, transitando entre sus equivalencias (cuando sea necesario) en problemas puramente aritméticos y en contexto
3. Comparará dos cantidades haciendo uso de las representaciones de un número racional.

A la palabra “número” se le asigna diversas interpretaciones, por ejemplo, nos referimos a ellos como símbolos que indican la cantidad de objetos de un grupo, símbolos que indican el lugar que ocupa un objeto en un grupo, símbolos que permiten expresar o clasificar grupos de objetos, símbolos que son indicadores de propiedades medibles de objetos, los números también se utilizan en un sentido cualitativo para denominar objetos o cosas; sin embargo, resulta complicado definir número rigurosamente. Es posible clasificar los objetos en “conjuntos”, en que los objetos tienen la misma propiedad, por ejemplo, el grupo “A” de objetos de la misma forma, el conjunto “B” de objetos con la misma utilidad, el conjunto “C” de objetos del mismo color, el conjunto “D” de los objetos que pertenecen a una misma región o el conjunto “E” de objetos del mismo tamaño, etc. Los conjuntos que tienen la propiedad de tener el mismo número de objetos se conocen como “conjuntos equipotentes” y se les asigna un símbolo que se conoce como número.

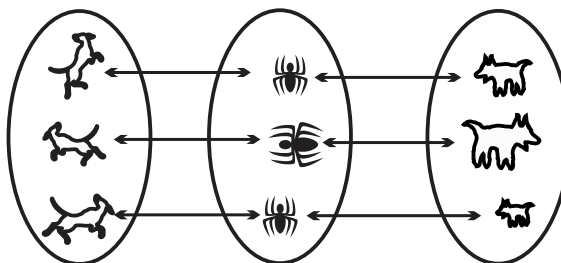


FIGURA 1.1

La propiedad en común de los conjuntos equipotentes (aquellos que tienen el mismo número de objetos) se llama “número cardinal”, así, la idea de “número cardinal”, está asociada con el “sentido de cantidad o número”. Por otra parte, contar un grupo de objetos significa asignar a cada uno de ellos un término de una sucesión natural, el término asignado al último objeto del grupo en estudio se llama “número ordinal”, una combinación de los conceptos antes tratados (número cardinal y número ordinal en un grupo de objetos) es próxima al concepto de número. El número cardinal de los conjuntos unitarios se denomina uno y se representa con el símbolo 1; el número cardinal de los conjuntos de pares de objetos se llama dos y se representa con el símbolo 2; al número cardinal de los conjuntos de ternas de objetos se le nombra tres y se representa por el símbolo 3, etc. La inclusión de ciertas propiedades en los números cardinales (los axiomas de Peano), entre las que destacan:

- i. “Si n es un número, entonces su sucesor (el que sigue también es un número natural”,
 - ii. “El número 1 no tiene sucesor”,
 - iii. “Si hay dos números naturales con el mismo sucesor, entonces son iguales”;
- da formalidad al sistema de numeración conocido como conjunto de los números naturales que se representa por

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}.$$

En el conjunto de los **números naturales**:

- i. El número 1 es el primer número natural y cada número natural se construye sumándole 1 al número natural anterior (antecesor).

4 UNIDAD 1 EL SIGNIFICADO DE LOS NÚMEROS Y SUS OPERACIONES BÁSICAS

- ii. Si sumamos o multiplicamos números naturales el resultado es otro número natural.
- iii. La multiplicación de cualquier número natural por el número 1 no altera el número.

Una representación de los números naturales consiste en utilizar una semi recta dirigida, en ella se seleccionan puntos equidistantes y cada uno de ellos tiene asociado un número natural, vea la figura 1.2.



FIGURA 1.2

DEFINICIÓN 1.1 (CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES)

- a. El conjunto $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$, recibe el nombre “conjunto de los número naturales”.
- b. Los elementos del conjunto \mathbb{N} son los números naturales.

NOTA

Cuando en el conjunto de los números naturales se agregan las operaciones suma y producto, representadas por $+$ y \cdot , respectivamente, obtenemos la terna $\{ \mathbb{N}, +, \cdot \}$ a la que nos referiremos como “sistema de los números naturales”.

Imprescindible en los sistemas de numeración es el número cero, número al que se le asocia el símbolo 0. El número cero fue inicialmente utilizado en la India y luego pasó a Europa a través de los árabes, su nombre se deriva de la palabra árabe “sifr” que significa vacía. Del concepto de “número cero” se deriva el principio de posición de la numeración, concepto que se desarrolló en la India en el siglo IX de nuestra era y se cree que fue Brahmagupta, en el año 598, quien lo inventó. El cero es el número que hace referencia a un valor nulo, a la ausencia de objetos, indica un punto de partida o un origen, por ejemplo, el kilómetro cero es el punto desde donde se empieza a medir una distancia en una carretera; en una balanza el peso se mide a partir del cero; el número cero separa los números negativos de los positivos y da sentido a las operaciones aritméticas.



FIGURA 1.3

El **conjunto de los números enteros** se representa por el símbolo \mathbb{Z} y surge de la necesidad de establecer diferencias entre objetos (números) a partir de una referencia, que como antes señalamos es el número 0. El conjunto formado por:

- i. los números naturales anteceditos por el signo “-” (signo menos),
- ii. el número cero,
- iii. los números naturales

se llama conjunto de los números enteros.

DEFINICIÓN 1.2 (SISTEMA DE LOS NÚMEROS ENTEROS)

- a. $\mathbb{Z} = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$, recibe el nombre “conjunto de los número enteros”.
- b. Los elementos del conjunto \mathbb{Z} son los números enteros.

Los números enteros se asocian a puntos de una línea recta dirigida, en ella, dos números enteros consecutivos se encuentran a una misma distancia; el número cero los separa en dos categorías, estas categorías son los números enteros positivos y los números enteros negativos, vea la figura 1.4.

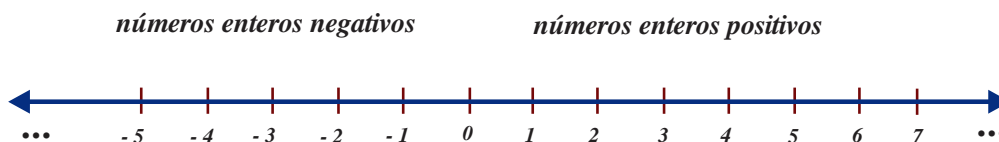


FIGURA 1.4

Observe que los puntos correspondientes a dos números enteros que difieren únicamente en el signo, digamos -3 y 3 (o cualquier otro par de números con éstas características) se encuentran a la misma distancia de un punto de referencia (el número 0), vea la *figura 1.5*.

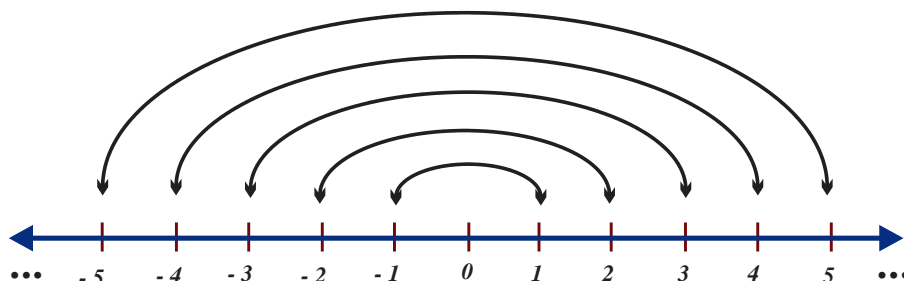


FIGURA 1.5

NOTA

i. Si en el conjunto Z se incluyen las operaciones (binarias) $+$ y \cdot se obtiene la terna $\{Z, +, \cdot\}$, misma que nombraremos sistema de los números enteros.

ii. Los dos números sobre los que actúa la operación $(+)$ se llaman sumandos.

iii. Los dos números sobre los que actúa la operación (\cdot) se llaman factores.

De las propiedades del sistema de los números enteros destacan:

i. El ser cerrado bajo las operaciones suma y producto, es decir, al sumar o multiplicar (algebraicamente) dos números enteros obtendremos otro número entero.

ii. Contiene al número 0 que también se conoce como *neutro aditivo*.

iii. La multiplicación (o producto) de número entero específico por el número 1 tiene como resultado el número, por esta razón el número 1 recibe el nombre de neutro multiplicativo.

◆ EJEMPLO 1.1 (“PROPIEDADES DEL SISTEMA DE LOS NÚMEROS ENTEROS”)

a. Los números 5 y 6 son enteros, también lo es el resultado de la operación $5 + 6 = 11$ (propiedad de cerradura bajo la suma).

b. Los números -3 y 4 son enteros, también lo es el resultado de la operación $(-3) \times (4) = -12$ (propiedad de cerradura bajo la multiplicación).

c. Los números 0 y 4 son enteros, también lo es el resultado de la operación $0 + 4 = 4$ (propiedad del neutro aditivo).

d. Los números 1 y 6 son enteros, también lo es el resultado de $(1) \times (6) = 6$, el multiplicar por 1 un número entero no lo transforma, actúa como un neutro bajo la operación (\cdot) .

e. Sean los números 6 y -6 , entonces $6 + (-6) = 0$, por tanto, 6 es el inverso aditivo de -6 , también el número -6 es el inverso aditivo del número 6 .



Conviene señalar que las propiedades asociativas (tanto de la suma como la del producto), como la propiedad distributiva (que trataremos posteriormente) introducen los símbolos de agrupamiento (paréntesis, corchetes, llaves, entre otros), mismos que sugieren el orden en que deben efectuarse las operaciones aritméticas (combinaciones de números).

NOTA

Los símbolos de agrupamiento sugieren el orden en que deben efectuarse las operaciones, dan prioridad a la operación que se encuentra contenida en un mayor número de ellos.

◆ EJEMPLO 1.2 (“PROPIEDADES DEL SISTEMA DE LOS NÚMEROS ENTEROS”)

Otras propiedades que cumplen los números enteros (también cumplen los números naturales) son:

i. La propiedad conmutativa, afirma “el orden en que se sumen (o multipliquen)” no altera el resultado de la operación.

ii. La propiedad asociativa, si sumamos o multiplicamos tres números enteros obtendremos siempre el mismo resultado, no importa que par de números sea sumado (o multiplicado) inicialmente.

iii. La propiedad distributiva, indica la forma de operar con números cuando están involucradas las operaciones $(+)$ y (\cdot) .



◆ EJEMPLO 1.3 (ORDEN DE EJECUCIÓN DE OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS)

- a. En la resolución de la operación, $(3+15)^2-4$ los superíndices indican el orden en que deben efectuarse las operaciones, primero se efectúa la suma y luego la resta.
- b. Para realizar la operación $8 \cdot (3+15)^3 + 12$ se comienza con la suma marcada con el superíndice 1, se continúa con el producto de superíndice 2 y finalmente se efectúa la suma con superíndice 3.
- c. En la resolución de la operación $8 - \left[10 \cdot (4+15)^3 + 12 \right]$, primero se efectúa la suma marcada con el superíndice 1, luego el producto señalado con el superíndice 2, se continúa con la suma de superíndice 3 y por último se efectúa la resta (suma algebraica) con el superíndice 4.



Algunas operaciones pueden efectuarse simultáneamente, veamos el *ejemplo 1.4*

◆ EJEMPLO 1.4 (ORDEN DE EJECUCIÓN DE OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS)

- a. Para calcular $[9-10(4+15)][15-(5-15)(7+2)]$, primero se realizan las operaciones incluidas en dos símbolos de agrupamiento (corchetes y paréntesis), así $\left[9-10\left(4+15\right) \right] \left[15-\left(5-15\right)\left(7+2\right) \right]$. Posteriormente se procede con aquellas operaciones que se encuentran en un símbolo de agrupamiento (corchetes) dando prioridad a los productos:

$$\left[9-10 \cdot \left(4+15\right) \right] \cdot \left[15-\left(5-15\right) \cdot \left(7+2\right) \right].$$

- b. Para calcular $47-\{22-[9+10(4+15)]+[(9+2)-5]\}$ se inicia con las operaciones incluidas en un mayor número de símbolos de agrupamiento (paréntesis, corchetes y llaves): $47-\left\{ 22-\left[9+10\left(4+15\right) \right] + \left[\left(9+2\right)-5 \right] \right\}$. A continuación con aquellas operaciones que se encuentran entre dos símbolos (llaves y corchetes) de agrupamiento dando prioridad a los productos,

$$47-\left\{ 22-\left[9+10 \cdot \left(4+15\right) \right] + \left[\left(9+2\right)-5 \right] \right\} \text{ y } 47-\left\{ 22-\left[9+10 \cdot \left(4+15\right) \right] + \left[\left(9+2\right)-5 \right] \right\}.$$

A continuación se procede con las operaciones contenidas en un solo símbolo de agrupamiento (llaves), por tanto,

$$47-\left\{ 22-\left[9+10 \cdot \left(4+15\right) \right] + \left[\left(9+2\right)-5 \right] \right\} \text{ y finalmente } 47-\left\{ 22-\left[9+10 \cdot \left(4+15\right) \right] + \left[\left(9+2\right)-5 \right] \right\}.$$



Los números enteros son una “extensión” de los números naturales (o los números naturales son parte de los números enteros), esto lo ilustra la *figura 1.6*.

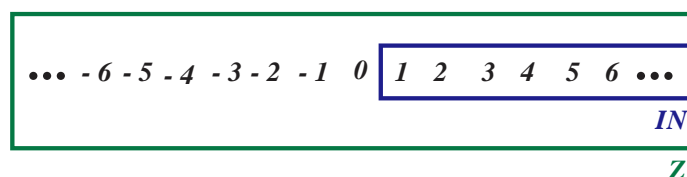


FIGURA 1.6

La siguiente etapa en el proceso de conteo y representación de objetos por medio de símbolos (números) implica a los números racionales. Los números racionales se utilizan para medir, es decir, asociar un número a una característica de un objeto (longitud, superficie, volumen etc.). Para este efecto, se establece un patrón de medida (o unidad de medida) con el que se compara la característica del objeto a medir. En el proceso de medida de la característica del objeto puede ocurrir que el patrón de medida sea incluido por él. El proceso de medir requiere de otro tipo de números, vea la *figura 1.7*.

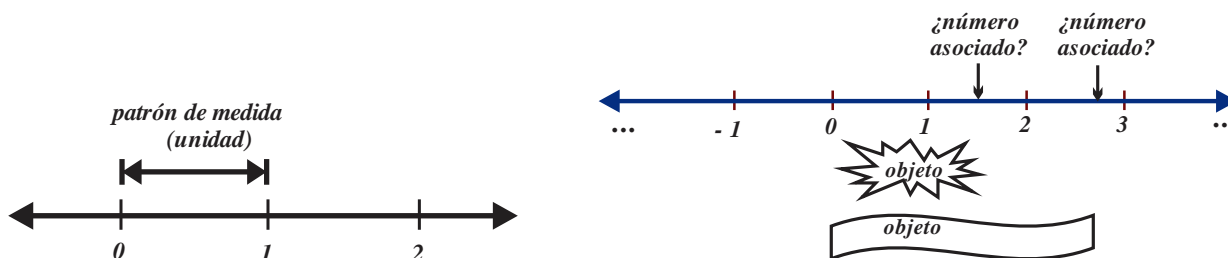


FIGURA 1.7

◆ **EJEMPLO 1.5 (PARTES DE UN TODO)**

- a. Supongamos que tenemos un alambre recto cuya longitud es 8 unidades, esto significa que el patrón de medida tiene una longitud de 1 unidad, y que este patrón cubre la octava parte del alambre, lo que se representa por $\frac{1}{8}$.
- b. Para cubrir un piso se utilizaron 100 mosaicos (idénticos), por tanto, un mosaico cubre una centésima parte de la superficie del piso, esto se representa por el número $\frac{1}{100}$. Por otra parte, 23 mosaicos cubrirán una superficie de $\frac{23}{100}$ del piso.



Números de la forma $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{100}$ y $\frac{23}{100}$ se llaman “números racionales” y se construyen utilizando números enteros, por tanto, así, el conjunto de todos éstos números se conoce como “conjunto de los números” racionales y se considera una extensión de los números enteros, note que todo número entero puede describirse como un número racional utilizando la unidad, por ejemplo: $10 = \frac{10}{1}$, $213 = \frac{213}{1}$, $-3 = -\frac{3}{1}$, $-14 = -\frac{14}{1}$, etc.

DEFINICIÓN 1.3 (CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES)

El conjunto $Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \text{ y } n \text{ son enteros y } n \neq 0 \right\}$, recibe el nombre “conjunto de los número racionales”.

NOTA

La simbología involucrada en la definición anterior se interpretan: “el conjunto de los números de la forma m sobre n , tales que m y n son números enteros y n es diferente a cero”.

La figura 1.8 muestra la relación de contención entre los conjuntos de números naturales, enteros y racionales.

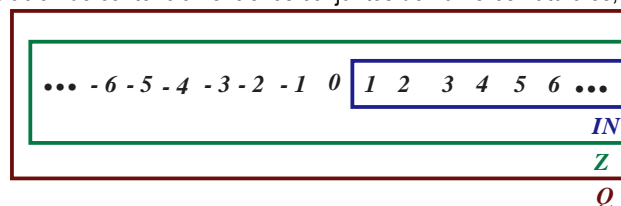


FIGURA 1.8

NOTA

- El número $\frac{m}{n}$ también se llama “fracción” o “quebrado”.
- En el número $\frac{m}{n}$, m es el numerador y n es el denominador.
- Todos los números enteros también son números racionales, pero no todos los números racionales son números enteros.

Nombraremos a la terna $\{Q, +, \cdot\}$ como “sistema de los números racionales”, El sistema de los números reales satisface todas las propiedades de los números enteros y otras más, que trataremos en la presente sección.

LA PROPIEDAD DEL INVERSO MULTIPLICATIVO

Esta propiedad (o axioma) establece:

“Para todo número, diferente de cero, existe un (único) número diferente de cero, de manera que el producto de estos dos números es uno.”

◆ EJEMPLO 1.6 (INVERSOS MULTIPLICATIVOS)

- El inverso multiplicativo de $\frac{1}{8}$ es 8.
- El inverso multiplicativo de -3 es $-\frac{1}{3}$.
- El inverso multiplicativo de $-\frac{43}{4}$ es $-\frac{4}{43}$.
- El inverso multiplicativo de $\frac{6}{11}$ es $\frac{11}{6}$.



Los números racionales pueden representarse en la forma $N.a_0a_1a_2\dots$, en esta representación el símbolo N es un número entero, los símbolos a_0, a_1, a_2, a_3 , etc, son números naturales y reciben el nombre (“genérico”) de decimales, vea la figura 1.9, el punto (.) se llama punto decimal.

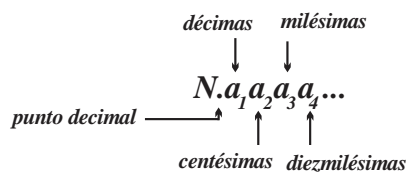


FIGURA 1.9

DEFINICIÓN 1.4 REPRESENTACIÓN DECIMAL

Todo número racional tiene asociada una representación única de la forma $N.a_0a_1a_2\dots$ llamada representación decimal.

Para determinar la forma decimal del número racional $\frac{a}{b}$ basta efectuar la división, el cociente de esta división es la forma decimal, por ejemplo, $\frac{1}{10} = 0.1$, $\frac{1}{100} = 0.01$, $\frac{1}{1000} = 0.001$, $\frac{1}{10000} = 0.0001$, $\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{33}{100} = 0.33$, etc. Todos los números racionales tiene una representación decimal única, sin embargo, puede ocurrir que en el proceso de determinación de la forma decimal de un número racional el número de divisiones esté indefinido (sea extremadamente grande o sin fin), si éste es el caso el cociente será un número decimal periódico.

◆ EJEMPLO 1.7 DECIMALES PERIÓDICOS)

- Es fácil verificar que $\frac{6}{11} = 0.5454545454\dots$, los puntos indican que los decimales 54 se repiten indefinidamente y son el periodo de la forma decimal.
- También $\frac{12}{37} = 0.324324324\dots$, los puntos indican que los decimales 324 (periodo) se repiten indefinidamente.



Para simplificar (o indicar) la escritura de un número decimal periódico se utiliza la barra “ $\overline{}$ ”, misma que se coloca sobre la secuencia de dígitos (o decimales) que es periódica, por ejemplo, $0.5454545454\dots = 0.\overline{54}$, $0.\overline{324} = 0.324324324\dots$, y $0.\overline{3} = 0.33333333\dots$, etc. Para describir el número racional en periódico $0.a_0a_1a_2\dots$ a la forma $\frac{a}{b}$ es de gran utilidad el siguiente proceso.

PROCESO 1 (TRANFORMACIÓN DE $0.a_0a_1a_2 \dots$ A LA FORMA $\frac{a}{b}$)

- Cuente el número de dígitos de un periodo de $0.a_0a_1a_2 \dots$.
- Tome un periodo (no incluya el punto decimal) y divídalo por el número que se genera cuando los dígitos de un periodo se sustituyen por números 9.

Vea la figura 1.10.

$$\frac{\text{dígitos de un periodo}}{\text{el número compuesto por nueves (tantos dígitos como tenga un periodo)}}$$

FIGURA 1.10

◆ **EJEMPLO 1.8 (CONVERSION DE DECIMALES PERIÓDICOS A LA FORMA $\frac{a}{b}$)**

- El periodo del número racional $0.\overline{78}$ tiene dos dígitos, por tanto, $0.\overline{78} = \frac{78}{99}$.
- El periodo del número racional $0.\overline{754}$ tiene tres dígitos, por tanto, $0.\overline{754} = \frac{754}{999}$.
- El periodo del número racional $0.\overline{2541}$ tiene cuatro dígitos, por tanto, $0.\overline{2541} = \frac{2541}{9999}$.

Los números racionales también se pueden escribirse como una fracción del número 100, es decir, como un "porcentaje".

◆ **EJEMPLO 1.9 (PARTES DE UN ENTERO)**

La figura 1.11.a. muestra un cuadrado de área igual a la unidad (cuadrado unitario), en la figura 1.11.b.:

a. El cuadrado unitario ha sido dividido en cien cuadrados iguales (congruentes), cada uno de ellos tiene una centésima parte del área del cuadrado unitario (el uno por ciento).

b. La primera fila (fila superior) tiene $0.1 = \frac{1}{10}$ del área del cuadrado unitario (el diez por ciento del área del cuadrado unitario).

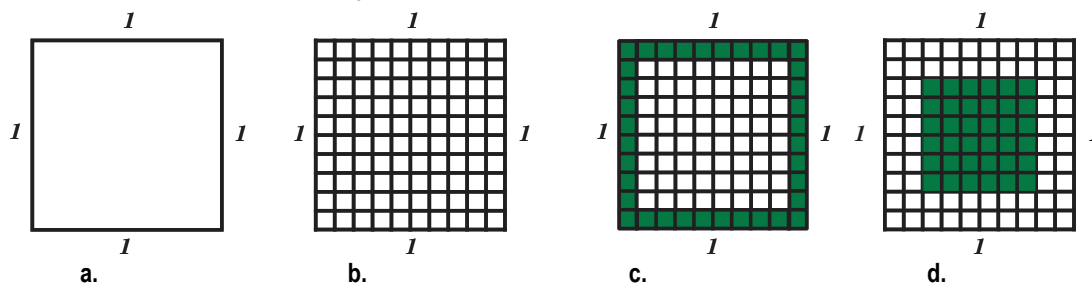


FIGURA 1.11

c. El área de los 36 cuadrados que forman el borde del cuadrado unitario contienen el $\frac{36}{100}$ de su área (el 36 por ciento).

d. El área de los 16 cuadrados que componen el cuadrado central del cuadrado unitario de la figura 1.11. d. contienen $\frac{16}{100}$ del área del cuadrado unitario (el 16 por ciento).

DEFINICIÓN 1.5 PORCENTAJE

- Si un total se divide en cien partes y se selecciona una parte de ella, entonces la fracción seleccionada se llama porcentaje y se representa por el símbolo %.
- El símbolo % se lee "tanto por ciento".

A continuación proporcionamos un método para escribir un número como un porcentaje.

PROCESO 2 (CONVERSIÓN DE NÚMEROS RACIONALES)

Para escribir el número $\frac{m}{n}$ como un porcentaje:

- Se obtiene su forma decimal y luego se multiplica por 100.
- Para escribir un porcentaje (tanto por ciento) en la forma $\frac{m}{n}$, se coloca el número porcentual como numerador y el número 100 como denominador.

La figura 1.12 muestra las tres formas de un número racional.



FIGURA 1.12

Los porcentajes se utilizan para otorgar comisiones a empleados sobre sus ventas, para determinar cuánto han subido o bajado los precios, para saber si han aumentado las ganancias, para realizar rebajas, etc.

◆ EJEMPLO 1.10 (PORCENTAJES)

- Un aumento del 8% a un salario (o a un precio), equivale a multiplicar el salario o precio por 0.08 y agregar el resultado al salario (precio) el resultado obtenido. El nuevo salario (o precio) es el resultado de la multiplicación $(1.08)(\text{salario})$.
- Una disminución (o descuento del 8% a un salario (o a un precio), equivale a multiplicar el salario o precio por 0.08 y restar el resultado al salario (o precio) el resultado obtenido. El nuevo salario (o precio) es el resultado de la multiplicación $(0.92)(\text{salario})$.

◆ EJEMPLO 1.11 (AUMENTOS Y DESCUENTOS)

- Si un artículo cuesta mil pesos, después de un incremento del 22% su nuevo precio es $(1 + 0.22)(1000)$ pesos.
- Si un artículo cuesta mil pesos, después de un incremento del 40% tendrá un precio de $(1 + 0.40)(1000)$ pesos.
- Si un artículo cuesta mil pesos, después de un descuento del 30% su nuevo precio es $(1 - 0.30)(1000)$ pesos.
- Si un artículo cuesta mil pesos, después de un descuento del 15% su nuevo precio es $(1 - 0.15)(1000)$ pesos.
- Si un artículo cuesta mil pesos y primero se descuenta un 20% y luego un 30%, entonces su precio final es $(1 - 0.30)[(1 - 0.20)(1000)] = (0.70)[(0.80)(1000)] = 560$ pesos y no 500 pesos.

◆ EJEMPLO 1.12 (TRÁNSITO ENTRE LAS FORMAS DE UN NÚMERO RACIONAL)

- Escribamos 45 %, 128 %, 213 %, 0.45 %, 0.18 % y 0.092 % en la forma $\frac{m}{n}$.

Tanto por ciento	Omitimos el signo %	División por 100	Simplificación
45 %	45	$\frac{45}{100}$	$\frac{9}{20}$
128 %	128	$\frac{128}{100}$	$\frac{32}{25}$
0.45 %	0.45	$\frac{0.45}{100}$	$\frac{9}{2000}$
0.18 %	0.18	$\frac{0.18}{100}$	$\frac{9}{500}$
0.092 %	0.092	$\frac{0.092}{100}$	$\frac{23}{25000}$

b. Escribamos las fracciones $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{12}{15}$, $\frac{14}{8}$ y $\frac{4}{10}$ en porcentajes.

Fracción	Forma decimal	Multiplicación por 100	En %
$\frac{3}{5}$	0.60	60	60 %
$\frac{4}{3}$	$1.\overline{33}$	$133\frac{1}{3}$	$133\frac{1}{3}$ %
$\frac{1}{6}$	$0.1\overline{66}$	$16.\frac{2}{3}$	$16.\frac{2}{3}$ %
$\frac{12}{15}$	2.4	240	240 %
$\frac{14}{8}$	1.75	175	175 %
$\frac{4}{10}$	0.40	40	40 %

c. Transformemos: 37 %, 18.5 %, 19.3 %, 0.42 %, 30.18 % y 0.0792 % a fracciones decimales.

Tanto por ciento	Omitimos el signo %	Desplazamiento del punto decimal
37 %	37	0.37
18.5 %	18.5	0.185
19.3 %	19.3	0.193
0.42 %	0.42	0.0042
30.18 %	30.18	0.3018
0.0792 %	0.0792	0.000792

d. Transformemos las fracciones decimales 1.78, 0.25, 0.013, 10.14, 203.01 y 0.0004 a porcentajes.

Fracción decimal	Desplazamiento del punto decimal	Con %
1.78	178	178 %
0.25	25	25 %
0.013	1.3	1.3 %
10.14	1014	1014 %
203.01	20301	20301 %
0.0004	0.04	0.04 %

El sistema de los números racionales incluye un “orden” relacionado con la posición que ocupan en una línea la recta dirigida, así, un primer número será mayor que otro, si al representarlo en la recta numérica se encuentra su la derecha; por ejemplo 8 es mayor que 3 (equivalentemente, 3 es menor que 8) y -9 es menor que -2 (equivalentemente, -2 es mayor que -9), vea la figura 1.13.

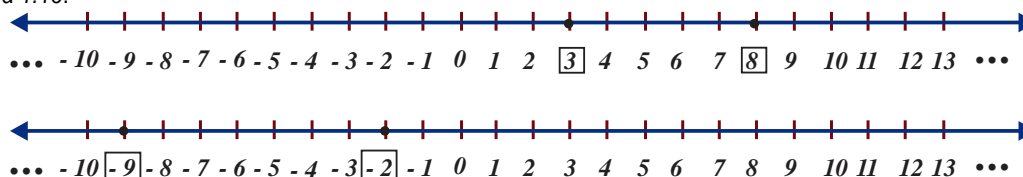


FIGURA 1.13

La ley de la tricotomía establece: Dados dos números reales, se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:
 el primer número es menor que el segundo número,
 el segundo número es menor que el primer número,
 los números son iguales.

Para indicar que un número es mayor a otro, se utiliza la relación de orden (en forma estricta orden total), esto se formaliza en la *definición 1.6*.

DEFINICIÓN 1.6 (RELACIÓN DE ORDEN)

El símbolo $>$ se denomina relación de orden (estricta) y se utiliza para indicar que un número es mayor a otro.

Cuando el símbolo $>$ se encuentra entre dos números:

- i. Si se lee de izquierda a derecha se interpreta como “el número de la izquierda es mayor que el número su derecha”.
- ii. Si se lee de derecha a izquierda se interpreta como “el número de la derecha es mayor que el número su izquierda”.

El uso correcto de la relación de orden total (símbolo $>$) estriba en que en su parte más aguda (la punta) debe colocarse el número que es menor, en consecuencia, el número mayor debe estar colocado en donde su “apertura” es mayor, vea la figura 1.14.

$a > b$ <i>“el número a es mayor que el número b”</i>	o	$a < b$ <i>“el número b es menor que el número a”</i>
--	-----	--

FIGURA 1.14

El siguiente proceso es de gran utilidad en la comparación de números racionales (en forma de fracción).

PROCESO 3 (ORDEN EN NÚMEROS RACIONALES EN FORMA DE FRACCIÓN)

- i. Si los números tienen distinto signo, entonces es mayor el número con signo positivo.
- ii. Si ambos números son positivos o negativos, multipliquelos por el producto de los denominadores, será mayor el número en el que el resultado del producto sea mayor.

◆ EJEMPLO 1.13 (COMPARACIÓN DE NÚMEROS)

- a. $-\frac{3}{7}$ es menor que $-\frac{11}{28}$ puesto que $-\frac{3}{7}(7 \times 28) = -84$ y $-\frac{11}{28}(7 \times 28) = -77$, este hecho se escribe en términos de la relación de orden como $-\frac{3}{7} < -\frac{11}{28}$ o $-\frac{11}{28} > -\frac{3}{7}$.
- b. $\frac{2}{7}$ es menor que el número $\frac{3}{8}$ puesto que $\frac{2}{7}(7 \times 8) = 16$ y $\frac{3}{8}(7 \times 8) = 21$, este hecho se escribe en términos de la relación de orden como $\frac{2}{7} < \frac{3}{8}$ o $\frac{3}{8} > \frac{2}{7}$.



Si se ponen en correspondencia (uno a uno) todos los números racionales con los puntos de una línea recta, se puede demostrar que ésta última no queda totalmente cubierta, es decir, contiene huecos: ¡la línea recta “contiene más puntos” que números racionales existentes!, esto garantiza la existencia de números que no son racionales. En efecto, en cursos a otro nivel de matemáticas se comprueba la existencia de números que no se pueden escribir en la forma $\frac{p}{q}$ (p y q números enteros y q distinto de cero) tales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π , etc. Los puntos de una línea que no están asociados a números racionales se asignan a números que se conocen como “irracionales”. vea la figura 1.15.

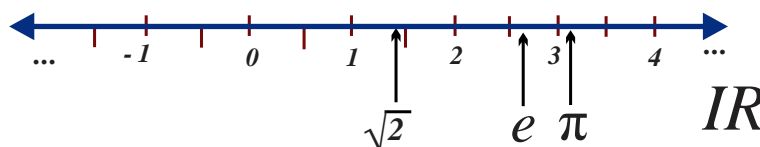


FIGURA 1.15

El conjunto de los números irracionales se representa con el símbolo I , éstos números están asociados a los vacíos que dejan los números racionales a ser representados en una línea recta; Así, el conjunto de todos los números que “cubren” a la línea recta se conoce como “conjunto de los números reales” que se representa con el símbolo IR . El conjunto de los números reales y es la base de todas las ramas de matemática. Al incluir en el conjunto de los reales las operaciones $+$ y \cdot se obtiene la terna $\{IR, +, \cdot\}$, que recibe el nombre de “sistema de los número reales”. Los símbolos $+$ y \cdot son las operaciones “suma” y “producto” y operan sobre dos números respectivamente, bajo un conjunto de reglas conocidas como propiedades o “axiomas de los números reales”.

NOTA

i. El concepto de “conjunto de los números reales” es abstracto porque consta de objetos abstractos cuya naturaleza no se precisa y tampoco es necesario saber. En el estudio de este conjunto sólo son de interés las relaciones existentes entre sus objetos (números) tal y como lo establecen los axiomas correspondientes.

ii. Un axioma es una afirmación o propiedad que se considera evidente por lo que no requiere demostrarse.

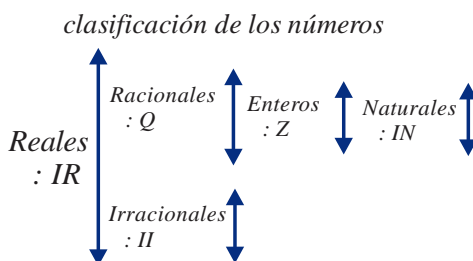


FIGURA 1.16

Si a , b y c son números reales, entonces;		
Propiedad	Nombre	Descripción
1. $a + b$ es un número real.	Cerradura bajo la suma	La suma de dos números reales es un número real.
2. ab es un número real.	Cerradura bajo la multiplicación.	La multiplicación de dos números reales es un número real.
3.. $a + b = b + a$	Conmutativa bajo la suma	
4. $a \cdot b = b \cdot a$	Conmutativa bajo el producto	
5. $(a + b) + c = a + (b + c)$	Asociativa bajo la suma	Para sumar tres números reales, no importa cuáles dos se suman primero.
6. $(a \cdot b) c = a (b \cdot c)$	Asociativa bajo el producto	Para multiplicar tres números reales, no importa cuáles dos se multiplican primero.
7. $a (b + c) = ab + ac$	Distributiva	Multiplicar una suma de números por una cantidad específica equivale a multiplicar cada uno de los números por la cantidad específica y posteriormente sumar los resultados.
8. $a + 0 = a$	Neutro aditivo	El neutro aditivo es el número 0 , al sumar cero a un número, el número no cambia.
9. $a \cdot 1 = a$	Neutro multiplicativo	El neutro multiplicativo es 1 , al multiplicar por uno un número, el número no cambia.
10. $a + (-a) = 0$	Inverso aditivo	Junto con la propiedad anterior define la resta aritmética (resta algebraica).
11. $a(a^{-1}) = a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$.	Inverso multiplicativo	$a^{-1} = \frac{1}{a}$ es el inverso multiplicativo de $a \neq 0$. La división de números es un caso particular de este axioma.
12. Se cumple una y sólo una: $a < b$, $a = b$ o $a > b$.	Tricotomía	IR es un conjunto ordenado. Comparación de números reales

13. $ a = a$ si $a \geq 0$ $ a = -a$ si $a < 0$.	Valor absoluto, norma o magnitud	Establece la distancia de un número real y el número cero (o entre dos números reales).
14. Si a es un número real arbitrario y $x > 0$, entonces existe un entero positivo n tal que $nx > 0$	Propiedad arquimediana	Distingue un número irracional de otro número que no lo es.
15. *Su enunciada requiere de otro tipo de conocimientos.	Propiedad del supremo.	Completa la relación uno a uno entre el conjunto de los números reales y "todos" los puntos de la línea recta numérica.

Ejercicios 1.1

1. Determine los inversos aditivos e inversos multiplicativos.

- a. 8. b. -23. c. $\frac{2}{5}$. d. $-\frac{3}{7}$.
e. $-\frac{11}{4}$. f. 3.1416. g. -8.42.

2. Establezca el orden en que deben efectuarse las operaciones (no efectúe las operaciones).

- a. $3(3) + 8(4)$.
b. $5 - 6(8 - 2)$.
c. $3(5 - 4) + 8(4 - 4(2))$.
d. $5 - 6(8 + 2)(3 + 4(3))$.
e. $4(4(5) + 2(4)) - 5(8 + 4(5) + 2)$.
f. $8 - 3(4 + 23) + 5(8 + 4 + 2)$.
g. $[5 - 3(4 - 2)][-2(2 + 5) - 2(3 - 6)]$.
h. $6 + [1(2 + 1) + 2(3 - 1)] - 2(3 + 4)$.
i. $8\{5 - 3[2 + 3(4 - 2 + 3) + 3(6 + 4(2))]\}$.
j. $\{5 + 3[2 - 3(4(2) + 3) - 5]\}$.

3. Obtenga el resultado.

- a. $4(7) - 11 - (3 + 2(1))$.
b. $6(4 + 5(4)) - 5(1 - 3(4)) + 7(10 - 4)$.
c. $2(12) - 11 - (7 + 3(2))(9 - 2(6))$.
d. $6(1 - 2(6))(1 - 8(2))(8 - 6)$.
e. $2 + 5(-8 - 12 - 3) + 5 - 3(8 - 10)$.
f. $-7 + 3(8 - 3) - 7(-9 + 6)$.
g. $(-4 - 2 - 3)(-10 - 5 - 10) - 5 - 3(-4 - 6)$.
h. $-4[-2 - 4(3 - 8) + 5(-4 - 3 - 1)] - (-1 + 7)$.
i. $-4(13 - 5\{ -4 - 2[15 - (4 - 22) - 7(8 + 10)] \})$.
j. $[-(5 - 4) - (-9 - 4)][(10 - 8) - 8(-7 - 3)]$.
k. $-[-1 - 4(-1 - 2) - 5(-2 - 3 - 4)]$.
l. $-4(7 - 2\{ -4 - [6 - (8 - 2) - 4(4 - 3)] \})$.

4. Escriba en la forma $\frac{m}{n}$

- a. 0.16. b. -2.07. c. 0.003. d. 2.0101.
e. 3.18. f. 0.0008. g. 3.012. h. 0.039.

5. Rescriba en forma decimal.

- a. $\frac{3}{100}$. b. $\frac{8}{4000}$. c. $\frac{12}{36000}$. d. $\frac{9}{810}$.

6. Escriba en forma decimal.

- a. 13.2%. b. 18.53%. c. 0.005%. d. 1.03%.

7. a. Escriba en la forma $\frac{m}{n}$, 36%, 214%, 0.006%, 0.112% y 3.18%.

b. Escriba $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{18}{4}$ y $\frac{3}{12}$ como un porcentaje.

c. Transforme: 16%, 8.5%, 14.3%, 0.002%, 10.16% y 0.0012% a fracciones decimales.

d. Rescriba: 2.75, 0.015, 0.003, 68.14, 106.04 y 0.0504 como un porcentaje.

8. Rescriba en la forma $\frac{m}{n}$.

- a. $0.\overline{371}$. b. $0.\overline{4117}$. c. $0.\overline{29377}$. d. $0.\overline{41}$.

9. Verifique:

- a. $0.\overline{9} = 1$. b. $0.4\overline{9} = 0.5$. c. $0.1\overline{9} = 0.2$. d. $0.0\overline{9} = 0.1$.

10. Para determinar si la forma decimal de un cociente de números enteros terminará o será periódica se utiliza la regla:

- i. "El número racional en la forma $\frac{m}{n}$ en sus términos más simples tiene como resultado un decimal terminal, si los únicos factores primos del denominador son 2 o 5 (pueden ser ambos)".

ii. “El número racional en la forma $\frac{m}{n}$ en sus términos más simples tiene como resultado un decimal periódico, si los únicos factores primos del denominador aparece un factor primo distinto de 2 o 5, pueden ser ambos”.

11. Utilice el criterio anterior y determine cuales de los siguientes números racionales tiene asociado un decimal periódico.

- | | | | |
|----------------------|-----------------------|----------------------|------------------------|
| a. $\frac{22}{55}$. | b. $\frac{37}{46}$. | c. $\frac{24}{75}$. | d. $\frac{130}{250}$. |
| e. $\frac{14}{53}$. | f. $\frac{13}{343}$. | g. $\frac{4}{312}$. | h. $\frac{44}{215}$. |

12. Explique:

- a. ¿Por qué todos los números naturales son números enteros?
- b. ¿Por qué todos los números enteros son números racionales?
- c. ¿Existen números irracionales que sean racionales?

13. Investigue:

- a. ¿Qué significa que los números reales sean densos?
- b. ¿Es denso el conjunto de los números naturales?
- c. ¿Es denso el conjunto de los números enteros?
- e. ¿Es denso el conjunto de los números racionales?

1.2

OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

El alumno:

4. Operará correctamente con los números racionales (enteros y no enteros), en los casos de una sola operación y una secuencia de operaciones.

El sistema de los números racionales incluyen dos operaciones binarias (se aplican a dos números), sin embargo, cada una de éstas operaciones admite otras interpretaciones; la operación resta (o sustracción) suele ser considerada como un caso particular de la suma (o adición) y la división también se considera como un caso especial del producto (o multiplicación). En las siguientes líneas trataremos los algoritmos básicos de las operaciones antes señaladas en el sistema de los números racionales. En la sección 1.4 trataremos el significado de las operaciones en contextos específicos. Para facilitar las operaciones entre números racionales éstos deben encontrarse en su forma más simple, lo que se consigue introduciendo el concepto de “fracciones equivalentes”.

DEFINICIÓN 1.7 (FRACCIONES EQUIVALENTES)

Dos o más (números racionales) fracciones que tienen la misma representación decimal se denominan equivalentes.

Son fracciones equivalentes $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{30}{40}$ y $\frac{-6}{-18}$, puesto que $\frac{3}{4} = 0.75$, $\frac{9}{16} = 0.5625$, $\frac{30}{40} = 0.75$, $\frac{-6}{-18} = 0.3333$, note que todas las fracciones tienen la misma representación decimal. La figura 1.17 representa (como áreas de regiones) varias fracciones equivalentes.

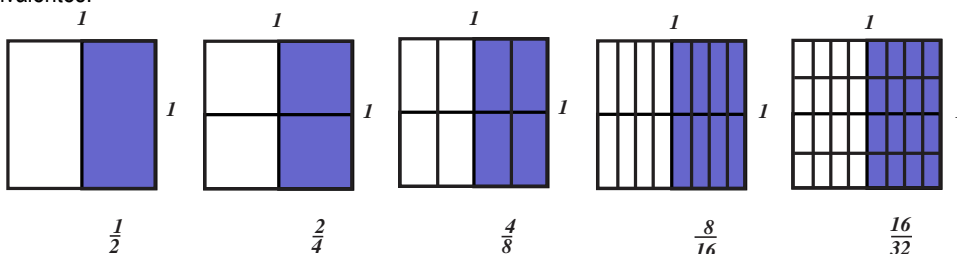


FIGURA 1.17

La figura 1.18 muestra fracciones equivalentes a la unidad.

1										
1/2					1/2					2/2 = 1
1/3			1/3			1/3				3/3 = 1
1/4		1/4		1/4		1/4				4/4 = 1
1/5		1/5		1/5		1/5		1/5		5/5 = 1
1/6		1/6		1/6		1/6		1/6		6/6 = 1
1/7		1/7		1/7		1/7		1/7		7/7 = 1
1/8		1/8		1/8		1/8		1/8		8/8 = 1
1/9		1/9		1/9		1/9		1/9		9/9 = 1
1/10		1/10		1/10		1/10		1/10		10/10 = 1

FIGURA 1.18

Para generar fracciones equivalentes (a una fracción específica) a un número racional dado basta con multiplicar (o dividir) su numerador y su denominador por un mismo número distinto de cero (este proceso lo justifica la propiedad del neutro multiplicativo). Por otra parte, para verificar que dos fracciones (números reales) son equivalentes, ambas deben ser rescritas en su forma más simple, es decir, de manera que el numerador y el denominador no tengan factores (o divisores) comunes. De gran utilidad en la simplificación de fracciones suele ser el siguiente criterio de divisibilidad.

El conocimiento de los criterios de divisibilidad de los números dígitos presenta gran utilidad en la simplificación de fracciones (números racionales o fracciones), por tanto los enunciamos a continuación.

DIVISIBILIDAD ENTRE NÚMEROS DÍGITOS

Un número entero es divisible por:

- i. 3 (tiene tercera), si la suma de sus cifras absolutas es un número múltiplo de 3.
- ii. 4 (tiene cuarta), cuando los dos últimos dígitos son ceros o cuando generan un número que es múltiplo de 4.
- iii. 5 (tiene quinta), cuando su último dígito es 0 o es 5.
- iv. 6 (tiene sexta), cuando es par y es divisible por 3.
- v. 7 (tiene séptima), si la suma de los productos de los dígitos de la sucesión $\{ 1, 3, 2, -1, -3, -2 \}$ por los dígitos de las unidades, decenas, centenas, etc., del número considerado es 0 o es múltiplo de 7.
- vi. 8 (tiene octava), si el número formado por sus tres últimos dígitos tiene octava.
- vii. 9 (tiene novena), si la suma de sus cifras es un número múltiplo de nueve.

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD UN NÚMERO ENTERO ES DIVISIBLE POR	2	si termina en 0 ó cifra par
	3	si la suma de sus cifras es múltiplo entero de tres
	4	si sus dos últimas cifras son 00 ó un múltiplo de cuatro
	5	si su última cifra es 0 ó 5
	6	si es divisible por 2 y por tres
	8	si el número formado por sus tres últimas cifras tiene octava
	9	si la suma de sus cifras es un número múltiplo de 9

FIGURA 1.19

La figura 1.19 no incluye el criterio de divisibilidad por siete, sin embargo, uno éstos criterios consiste en: Calcular la suma de los productos de los dígitos de la sucesión $\{ 1, 3, 2, -1, -3, -2 \}$ por los dígitos de las unidades, decenas, centenas,... del número es 0 o múltiplo de 7.

◆ EJEMPLO 1.14 (DIVISIBILIDAD POR DÍGITOS)

a. El número 347211 tiene tercera puesto que $3+4+7+2+1+1=18$ y $1+8=9$ y 9 es múltiplo de tres.

El número 3476 no tiene tercera puesto que $3+4+7+6=20$ y $2+0=2$ y 2 no es múltiplo de tres.

b. El número 967212 tiene cuarta puesto que 12 (los dos últimos dígitos) es múltiplo de cuatro.

El número 237 no tiene cuarta puesto que 37 (los dos últimos dígitos) no es múltiplo de cuatro.

c. El número 47214 tiene sexta puesto que es par, $4+7+2+1+1=15$ y $1+5=6$ tiene tercera.

El número 347211 tiene tercera pero no es par, por tanto, no es múltiplo de seis.

d. Veamos si el número 91414 tiene séptima. Utilizamos la sucesión $\{ 1, 3, 2, -1, -3, -2 \}$ y obtenemos $9(1)+1(3)+4(2)+1(-1)+4(-3)=9+3+8-1-12=7$, es múltiplo de siete, por tanto, 91414 tiene séptima.

El número 71414 no tiene séptima puesto que $7(1)+1(3)+4(2)+1(-1)+4(-3)=7+3+8-1-12=5$, que no tiene séptima.



◆ EJEMPLO 1.15 (SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES)

a. Para simplificar $\frac{42}{56}$, notemos que tanto su numerador como su denominador tienen séptima, por tanto, $\frac{42}{56} = \frac{6}{8}$, también 6 y

8 son pares por lo que tienen mitad, luego $\frac{42}{56} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

b. Observemos que en la fracción $\frac{70}{84}$ el numerador y el denominador tienen séptima, por tanto, $\frac{70}{84} = \frac{10}{12}$. Los números enteros

de la fracción $\frac{10}{12}$ son pares, luego tienen mitad, por tanto $\frac{70}{84} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.



Un método para efectuar la suma algebraica (suma o resta) de dos fracciones consiste en rescribirlas de forma que tengan un mismo denominador (denominador común), vea la figura 1.20.

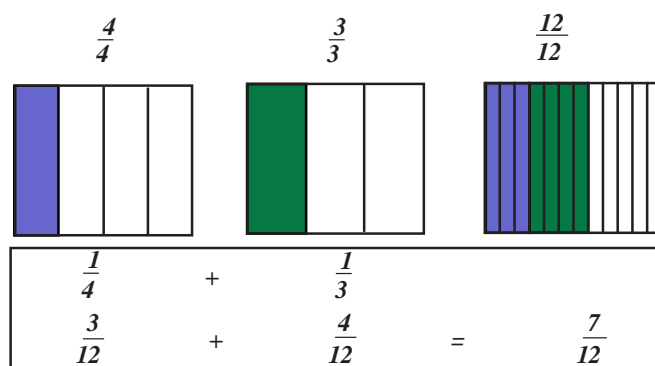


FIGURA 1.20

Note que para sumar (algebraicamente) dos fracciones con el mismo denominador, el proceso a seguir consiste en sumar (algebraicamente) los numeradores, el resultado de la suma tendrá el mismo denominador que las fracciones a sumar. Para efectuar la suma de dos fracciones con distinto denominador se utiliza el proceso que se describe a continuación.

SUMA ALGEBRAICA DE DOS NÚMEROS RACIONALES EN FORMA DE FRACCIONES

- i. Simplifique las fracciones que desea sumar.
- ii. Multiplique los denominadores, el resultado es el denominador de la fracción resultante.
- iii. Multiplique el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda, haga lo mismo con el otro denominador y el otro numerador.
- iv. Sume algebraicamente los números obtenidos en iii., el resultado de esta suma algebraica es el numerador de la fracción resultante.
- v. Simplifique la fracción obtenida en iv.

La figura 1.21., ilustra el proceso antes descrito.

$$\frac{\text{numerador } 1}{\text{denominador } 1} + \frac{\text{numerador } 2}{\text{denominador } 2} = \frac{(\text{numerador } 1)(\text{denominador } 2) + (\text{numerador } 2)(\text{denominador } 1)}{(\text{denominador } 1)(\text{denominador } 2)}$$

FIGURA 1.21

◆ EJEMPLO 1.16 (SUMA ALGEBRAICA DE DOS FRACCIONES)

a. $\frac{2}{7} + \frac{1}{4} = \frac{(2)(4) + (1)(7)}{28} = \frac{15}{28}$.

b. $\frac{5}{6} + \frac{2}{5} = \frac{(5)(5) + (2)(6)}{30} = \frac{37}{30}$.

c. $\frac{2}{9} - \frac{1}{7} = \frac{(2)(7) - (1)(9)}{63} = \frac{5}{63}$.



Para sumar dos o más números racionales, en forma de fracciones decimales, conviene reacomodarlos en una columna de manera que los puntos decimales se encuentren alineados sobre una misma línea vertical, vea la *figura 1.22*.

$$\begin{array}{r} N.a_1a_2a_3a_4\dots \\ + M.b_1b_2b_3b_4\dots \\ P.c_1c_2c_3c_4\dots \\ Q.d_1d_2d_3d_4\dots \\ \hline \end{array}$$

FIGURA 1.22

Para sumar dos o más números racionales en forma de porcentajes, se suman de manera ordinaria los números y se agrega el símbolo de porcentaje.

PRODUCTO DE FRACCIONES

En cursos previos al presente, la operación aritmética conocida como multiplicación suele interpretarse como una “suma abreviada”, por ejemplo: $3\left(\frac{1}{4}\right)$ significa $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$;

$$4\left(\frac{2}{9}\right) \text{ significa } \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$$

$$5\left(\frac{2}{3}\right) \text{ significa } \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3}, \text{ etc.}$$

Estas observaciones sugieren que el resultado del producto de un número entero y una fracción se obtiene multiplicando el número entero por el numerador de la fracción, y que el denominador se conserva, vea la *figura 1.23*.

$$(\text{número entero}) \frac{\text{numerador}}{\text{denominador}} = \frac{(\text{número entero})(\text{numerador})}{\text{denominador}}$$

FIGURA 1.23

La *figura 1.24* muestra el significado de los productos de fracciones $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ y $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$ en términos de áreas de cuadrados.

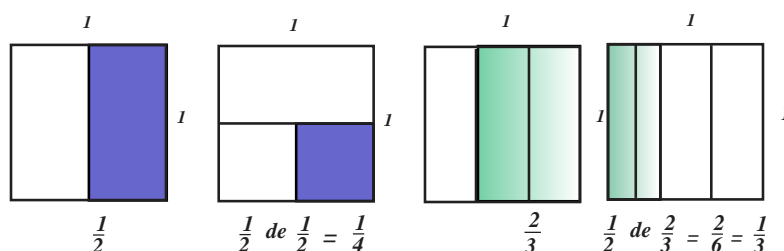


FIGURA 1.24

Para multiplicar dos números racionales en forma de fracciones:

- Simplifique las fracciones que desea multiplicar.
- Multiplique los denominadores, el resultado es el denominador de la fracción resultante.
- Multiplique los numeradores de las fracciones, el resultado de esta multiplicación es el numerador de la fracción resultante.

La *figura 1.25* muestra el proceso a seguir en la multiplicación de dos fracciones:

$$\frac{\text{numerador } 1}{\text{denominador } 1} \cdot \frac{\text{numerador } 2}{\text{denominador } 2} = \frac{(\text{numerador } 1)(\text{numerador } 2)}{(\text{denominador } 1)(\text{denominador } 2)}$$

FIGURA 1.25

DIVISIÓN DE FRACCIONES

En los números reales, la **división** es una operación binaria (se efectúa con dos números) que se define como el producto de dos números, se fundamenta en la propiedad del inverso multiplicativo de los números reales.

Propiedad del inverso multiplicativo y la división de números racionales

Para todo número, diferente de cero, existe un único número (también diferente de cero), de manera que el producto de ambos números es uno.

La propiedad del inverso multiplicativo (de los números reales) proporciona una interpretación diferente del producto de números y en ella se fundamenta la definición de la operación aritmética conocida como división, así, la división $\frac{m}{n}$ con $n \neq 0$ es equivalente a multiplicar el número m por el inverso multiplicativo del número n , (siempre que $n \neq 0$); la operación $m \div n = m \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{m}{n}$, se llama división, el número n es el denominador (o divisor) y el número m se conoce como numerador (o dividendo).

◆ EJEMPLO 1.17 (DIVISIÓN DE DOS FRACCIONES)

a. La división $3 \div 2$ es el producto de 3 y el inverso multiplicativo de 2, es decir $3 \div 2 = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

b. La división $4 \div 3$ es el producto de 4 y el inverso multiplicativo de 3, es decir $4 \div 3 = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

c. La división $4 \div \frac{1}{2}$ es el producto de 4 y el inverso multiplicativo de $\frac{1}{2}$, es decir $4 \div \frac{1}{2} = 4 \left(2 \right) = 8$.

d. La división $\frac{1}{6} \div 3$ es el producto de $\frac{1}{6}$ y el inverso multiplicativo de 3, por tanto, $\frac{1}{6} \div 3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$.

e. La división $\frac{1}{5} \div \frac{1}{2}$ es el producto de $\frac{1}{5}$ y el inverso multiplicativo de $\frac{1}{2}$, es decir $\frac{1}{5} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{5} \left(2 \right) = \frac{2}{5}$.

La figura 1.26. muestra el algoritmo a seguir para efectuar la división de dos números racionales en forma de fracciones.

$$\frac{\text{numerador 1}}{\text{denominador 1}} \div \frac{\text{numerador 2}}{\text{denominador 2}} = \frac{(\text{numerador 1}) \cancel{(\text{denominador 2})}}{(\text{denominador 1}) \cancel{(\text{numerador 2})}}$$

FIGURA 1.26

La división entre dos fracciones también se realiza utilizando la “regla del sándwich”, misma que muestra la figura 1.27.

$$\frac{\frac{\text{numerador 1}}{\text{denominador 1}}}{\frac{\text{numerador 2}}{\text{denominador 2}}} = \frac{(\text{numerador 1}) \cancel{(\text{numerador 2})}}{(\text{denominador 1}) \cancel{(\text{denominador 2})}}$$

FIGURA 1.27**◆ EJEMPLO 1.18 (DIVISIÓN DE FRACCIONES)**

a. $\frac{2}{7} \div \frac{1}{5} = \frac{(2) \cancel{(5)}}{(7) \cancel{(1)}} = \frac{10}{7}$.

b. $-\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = -\frac{(3) \cancel{(3)}}{(4) \cancel{(2)}} = \frac{9}{8}$.

c. $\frac{4}{7} \div \frac{2}{5} = \frac{(4) \cancel{(5)}}{(7) \cancel{(2)}} = \frac{20}{14} = \frac{10}{7}$.

d. $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{9}} = \frac{(9) \cancel{(1)}}{(6) \cancel{(4)}} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.

e. $\frac{2}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{(9) \cancel{(2)}}{(1) \cancel{(4)}} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$.

f. $\frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{1}} = \frac{(2) \cancel{(3)}}{(7) \cancel{(1)}} = \frac{2}{21}$.

Con base algunas de las propiedades de los números reales (tratadas en las secciones previas) y los algoritmos antes señalados, es posible simplificar y obtener el resultado de grupos de operaciones que involucran números racionales, sin embargo, existen otros procesos que contribuyen en facilitar la obtención de resultados.

DEFINICIÓN 1.8 (MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO REAL)

Los múltiplos de un número real son los números que se obtienen al multiplicar el número real por los números enteros, es decir, para los números a y b , se dice que el número b es múltiplo del número a , si $b = na$ para algún número entero n .

Por ejemplo, los múltiplos de 8, son todos los números que resultan de multiplicar 8 por cualquier otro número entero.

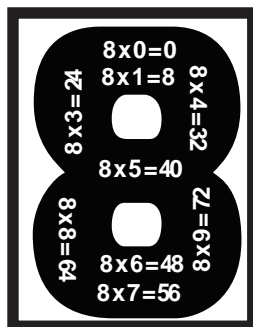


FIGURA 1.28

EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (mcm)

El *mínimo común múltiplo* de dos números naturales, es el menor número natural, que es múltiplo de ambos números, veamos el ejemplo 1.14.

◆ EJEMPLO 1.19 (MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO)

- El mínimo común múltiplo de 6 y 8 es 24, porque 24 es el número menor que es múltiplo de 6 y 8.
- El mínimo común múltiplo de 2 y 5 es 10, porque 10 es el número menor que es múltiplo de ambos.
- El mínimo común múltiplo de 12, 15 y 30 es 60, porque 60 es el número menor que es múltiplo de 12, 15 y 30.

En el proceso de determinación del mínimo común múltiplo de dos o más números naturales requiere de sus “*descomposición en factores primos*”; esto significa que en él debemos:

factorizar el número 2 tantas veces como sea posible,
luego el número 3 tantas veces como sea posible,
luego el número 5 tantas veces como sea posible
luego el número 7 tantas veces como sea posible,
etc.

◆ EJEMPLO 1.20 (DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS)

- $10 = 2 \times 5$.
- $12 = 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 3$.
- $56 = 2 \times 28 = 2 \times 2 \times 14 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$.
- $324 = 2 \times 162 = 2 \times 2 \times 81 = 2 \times 2 \times 3 \times 27 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 9 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$.

Para determinar el mínimo común múltiplo de un conjunto de números enteros positivos siga el proceso descrito en las siguientes líneas.

PROCESO PARA CALCULAR EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

- Descomponga los números en factores primos (como un producto de factores primos).
- Identifique los factores comunes en todos los números y seleccione los que se encuentra multiplicado por sí mismo más veces.

iii. El mínimo común múltiplo es el producto de los números comunes que se repiten más veces con los factores no comunes.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO
$mcm(a, b) = c$

FIGURA 1.29

El ejemplo 1.21 ilustra el uso del proceso anterior.

◆ **EJEMPLO 1.21 (CÁLCULO DEL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO)**

a. Calculemos el mínimo común múltiplo de 90 y 324.

i. Sus descomposiciones en factores primos son:

$$90 = 2 \times 45 = 2 \times 3 \times 15 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

$$324 = 2 \times 162 = 2 \times 2 \times 81 = 2 \times 2 \times 3 \times 27 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 9 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

ii. El mínimo común múltiplo incluye los factores 2, 3 y 5.

El factor 2 aparece dos veces en ambas descomposiciones, consideramos 2×2 .

El factor 3 aparece más veces en la descomposición de 324, consideramos $3 \times 3 \times 3$.

Otro factor que aparece es 5, lo consideramos.

iii. Por tanto, el mínimo común múltiplo de 90 y 324 es $mcm(90, 324) = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 1620$.

b. Calculemos el mínimo común múltiplo de 42, 36 y 12.

i. Las descomposiciones en factores primos son:

$$42 = 2 \times 21 = 2 \times 3 \times 7$$

$$36 = 2 \times 18 = 2 \times 2 \times 9 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$12 = 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 3$$

ii. El mínimo común múltiplo incluye los factores 2, 3 y 7.

El factor 2 aparece dos veces en dos de las descomposiciones, consideramos 2×2 .

El factor 3 aparece dos veces en una descomposición consideramos 3×3 .

Otro factor que aparece es 7, lo consideramos.

iii. El mínimo común múltiplo de los números 42, 36 y 12 es $mcm(42, 36, 12) = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 252$.



Si al dividir dos números naturales obtenemos residuo sea 0, entonces el dividendo es múltiplo del divisor, si éste es el caso se dice la división exacta. Si el residuo de una división es un número distinto a 0 la división no es exacta y el dividendo no es múltiplo del divisor. Los divisores de un número natural aquellos números naturales que lo dividen resultando como cociente otro número natural y residuo 0.

EL MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)

El máximo común divisor se aplica para simplificar números racionales escritos como fracciones y, por tanto, en la ejecución de operaciones que incluyen esta clase de números. Como su nombre lo indica, el máximo común divisor de dos (o más) números naturales es número más grande que divide a ambos (todos los) números. Un proceso para determinar el máximo común divisor de un conjunto de números lo muestra la figura 1.30.

<p><i>Los divisores de 40 son:</i></p> <p style="text-align: center;">1 2 4 5 8 10 20 40,</p> <p><i>los divisores de 16 son</i></p> <p style="text-align: center;">1 2 4 8 16</p> <p><i>los divisores comunes (los que se repiten) son</i></p> <p style="text-align: center;">1 2 4 8</p> <p><i>el mayor de ellos es 8, por tanto,</i></p> <p style="text-align: center;">8 es el MÁXIMO COMÚN DIVISOR</p>
--

FIGURA 1.30

◆ **EJEMPLO 1.22 (CÁLCULO DEL MÁXIMO COMÚN DIVISOR)**

Calculemos el máximo común divisor de la terna (son tres) 12, 20 y 36.

Los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

Los divisores de 20 son 1, 2, 4, 5, 10 y 20.

Los divisores de 36 son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 18 y 36.

Una vez determinados los divisores, se selecciona el mayor de ellos que es común para todos los números, así, el máximo común divisor es 4. Se escribe $MCD(12, 20, 36) = 4$.



Si se tiene un mayor número de cantidades o éstas son más grandes, en ambos casos el siguiente algoritmo facilita el cálculo del MCD.

PROCESO DE CÁLCULO DEL MÁXIMO COMÚN DIVISOR

- i. Descomponemos los números en factores primos (producto de factores primos).
- ii. Seleccionamos los factores que son comunes en las descomposiciones.
- iii. El máximo común divisor es el producto de los factores que son comunes y que se repiten menos veces.

◆ **EJEMPLO 1.23**

a. Calculemos el máximo común divisor de la terna (son tres) 12, 24 y 36, utilizando el proceso antes descrito.

i. Descomponemos los números en factores primos

Los factores primos de 12 son 2, 2 y 3.

Los factores primos de 24 son 2, 2, 2 y 3.

Los factores primos de 36 son 2, 2, 3 y 3.

ii. Los factores comunes en las descomposiciones son 2 y 3.

iii. El máximo común divisor es el producto de los factores comunes y que se repiten menos veces, es decir 2, 2 y 3, por tanto, $MCD(12, 24, 36) = 2 \times 2 \times 3 = 12$.

b. Calculemos el máximo común divisor de la diada (son dos) 180 y 225, utilizando el proceso antes descrito.

i. Descomponemos los números en factores primos

Los factores primos de 180 son 2, 2, 3, 3 y 5.

Los factores primos de 225 son 3, 3, 5 y 5.

ii. Los factores comunes en las descomposiciones son 3 y 5.

iii. El máximo común divisor es el producto de los factores comunes que se repiten menos veces, es decir 3, 3 y 5, por tanto,

$$MCD(180, 225) = 3 \times 3 \times 5 = 45.$$



Tanto el mínimo común múltiplo como el máximo común divisor son útiles en la resolución de problemas en los que se requiere conocer:

- a. El menor de los múltiplos de varios números, por ejemplo, para saber cuándo coinciden las cantidades de ciertos objetos y es necesario determinar un número mayor a los proporcionados.
- b. El máximo común divisor se utiliza cuando en el texto de un problema se solicita dividir o repartir cierta cantidad de objetos.

◆ **EJEMPLO 1.24 (APLICACIONES DEL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO)**

a. Se colocarán envases de refresco (cada envase en un lugar) en dos tipos de cajas. Las cajas tipo *CH* tienen 15 espacios y las cajas tipo *G* tienen 20 espacios. Para conocer el máximo número envases de manera que las cajas donde se coloquen los envases estén completas y sea mínima es necesario calcular el $mcm(15, 20)$.

i. Las descomposiciones de los números de lugares en las cajas, en factores primos son:

$$15 = 3 \times 5.$$

$$20 = 2 \times 2 \times 5.$$

ii. El mínimo común múltiplo incluye los factores 2, 3 y 5.

El factor 2 aparece dos veces en la segunda descomposición, consideramos 2×2 .

El factor 3 aparece más veces en la primera descomposición, consideramos 3.

Otro factor que aparece es 5, lo consideramos.

24 UNIDAD 1 EL SIGNIFICADO DE LOS NÚMEROS Y SUS OPERACIONES BÁSICAS

iii. Por tanto, $mcm(15, 20) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$, es decir, se requieren un mínimo de 60 envases.

b. Se quieren colocar los libros de una estantería en grupos de 4, 6 y 8 libros sin que sobren. ¿Cuál es el número mínimo de libros necesarios?

i. Las descomposiciones de los tamaños de los bloques en factores primos son:

$$4 = 2 \times 2$$

$$6 = 2 \times 3.$$

$$8 = 2 \times 2 \times 2.$$

ii. El mínimo común múltiplo incluye los factores 2 y 3.

iii. Por tanto, $mcm(4, 6, 8) = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$, se requieren 24 o más libros.

c. Un primer reloj emite una señal de alarma cada 30 minutos, otro reloj la emite cada 90 minutos y un tercero lo hace cada 150 minutos. A las 8 de la mañana los tres relojes coinciden en la emisión de la señal. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que vuelvan a coincidir las señales que emiten?

Se requiere un tiempo superior a los 150 minutos para que las señales de emisión coincidan, por tanto, corresponde a un problema de cálculo de mínimo común múltiplo.

i. Las descomposiciones en factores primos de los tiempos transcurridos en la emisión de señales son:

$$30 = 2 \times 3 \times 5.$$

$$90 = 2 \times 3 \times 5 \times 3.$$

$$150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5.$$

ii. El mínimo común múltiplo incluye los factores 2, 3 y 5.

iii. Por tanto, $mcm(30, 90, 150) = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 450$ y deben transcurrir 450 o más minutos.



◆ EJEMPLO 1.25 (APLICACIONES DEL MÁXIMO COMÚN DIVISOR)

a. ¿Cuál es la longitud máxima de un “flexómetro” para poder medir de manera exacta los objetos de longitudes 140, 560 y 800 centímetros?

Se pide la longitud de un flexómetro, su longitud debe ser menor que las longitudes de los objetos, por tanto, se requiere calcular el MCD.

i. Las descomposiciones de las longitudes de los objetos en factores primos son:

$$140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7.$$

$$560 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7.$$

$$800 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5.$$

ii. El máximo común divisor incluye los números 2 y 5.

iii. Por tanto, $MCD(140, 90, 150) = 2 \times 2 \times 5 = 20$, deben transcurrir 450 o más minutos.

b. En tres depósitos d_1 , d_2 y d_3 se almacenan 1600, 2000 y 3392 cajas de galletas respectivamente (las cajas de galletas son idénticas). Se desean dividir las cajas de galletas de los depósitos en bloques con un mismo número de cajas de galletas y mayor peso posible.

¿Cuántas cajas deben contener los bloques?

Se desean obtener bloques del mismo número de cajas de galletas de grupos mayores de cajas, por tanto, se requiere calcular el MCD.

i. Las descomposiciones de las longitudes de los objetos en factores primos son:

$$1600 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5.$$

$$2000 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5.$$

$$3392 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 53.$$

ii. El máximo común divisor incluye los números 2 y 5.

iii. $MCD(1600, 2000, 3392) = 2 \times 2 \times 2 = 16$.

Los depósitos deben dividirse en: d_1 $\frac{1600}{16} = 100$ bloques, d_2 en $\frac{2000}{16} = 125$ bloques y d_3 en $\frac{3392}{16} = 212$ bloques.

c. Una persona tiene tres fajos de billetes. El primero tiene \$4500, el segundo tiene \$5240 y el tercero \$6500. Si todos los billetes son de la misma denominación y ésta es la mayor denominación posible, ¿cuánto vale cada billete y cuántos billetes hay en cada fajo?

Se pide determinar la denominación del billete y ésta debe dividir a los fajos en un número entero de billetes, se requiere calcular el MCD.

i. Las descomposiciones de las longitudes de los objetos en factores primos son:

$$4500 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5.$$

$$5240 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 131.$$

$$6500 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5.$$

ii. El máximo común divisor incluye los números 2 y 5.

iii. $MCD(4500, 5240, 6500) = 2 \times 2 \times 5 = 20$.

Los fajos contienen: el fajo f_1 $\frac{4500}{20} = 225$ billetes, el fajo f_2 $\frac{5240}{20} = 262$ billetes y el fajo f_3 $\frac{6500}{20} = 325$ billetes.



La aplicación de mayor utilidad del mínimo común múltiplo se relaciona con la resolución de fracciones en las que los denominadores son distintos. El mínimo común múltiplo se utiliza para transformar las fracciones (con las que se quiere operar) en fracciones con un mismo denominador.

◆ EJEMPLO 1.26 (OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES)

a. En $\frac{7}{72} + \frac{11}{60}$ la descomposición prima de los denominadores son: $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ y $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$.

$mcm(72, 60) = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 360$, por consiguiente

$$\frac{7}{72} + \frac{11}{60} = \frac{\frac{360}{72} \times 7 + \frac{360}{60} \times 11}{360} = \frac{101}{360}.$$

b. En $\frac{5}{14} + \frac{1}{40} - \frac{3}{16}$, las descomposiciones primas de los denominadores son: $14 = 2 \times 7$, $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$ y $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

$mcm(14, 40, 16) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 560$, por consiguiente $\frac{5}{14} + \frac{1}{40} - \frac{3}{16} = \frac{\frac{560}{14} \times 5 + \frac{560}{40} \times 1 - \frac{560}{16} \times 3}{560} = \frac{109}{560}$.

c. En $-\frac{1}{14} - \frac{2}{18} + \frac{5}{22}$, la descomposición prima de los denominadores es $14 = 2 \times 7$, $18 = 2 \times 3 \times 3$ y $22 = 2 \times 11$, por lo que,

$mcm(14, 18, 22) = 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 11 = 1386$, entonces $-\frac{1}{14} - \frac{2}{18} + \frac{5}{22} = \frac{\frac{1386}{14} \times (-1) + \frac{1386}{18} \times (-2) - \frac{1386}{22} \times 5}{1386} = \frac{169}{1386}$.



Para simplificar y resolver operaciones aritméticas (que incluyen números racionales) se utilizan las propiedades de los números reales tratadas en la sección previa, junto con las de esta sección.

◆ EJEMPLO 1.27 (OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES)

a. Para resolver $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}$ primero debemos efectuar el producto y posteriormente la resta:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{10-1}{20} = \frac{9}{20}.$$

b. Si $\frac{5}{4} \left(1 - \frac{1}{4} \div \frac{3}{16} \right)$, las operaciones se efectúan en el orden: primero la división, luego la resta y por último el producto.

$$\frac{5}{4} \left(1 - \frac{1}{4} \div \frac{3}{16} \right) = \frac{5}{4} \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{3} \right) = \frac{5}{4} \left(1 - \frac{16}{12} \right) = \frac{5}{4} \left(\frac{12-16}{12} \right) = \frac{5}{4} \left(\frac{-4}{12} \right) = -\frac{5}{12}$$

c. En $\frac{2}{3} \left(3 + \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{4} \left(2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} \right)$ primero se efectúa el producto, luego las “sumas algebraicas” de los paréntesis, se continúa con los productos y se concluye con la resta.

$$\frac{2}{3} \left(3 + \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{4} \left(2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} \right) = \frac{2}{3} \left(3 + \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{4} \left(2 - \frac{5}{24} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{24+1}{8} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{48-5}{24} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{25}{8} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{43}{24} \right) = \frac{50}{24} - \frac{43}{96} = \frac{200-43}{96} = \frac{157}{96}$$

d. En la operación $\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4} \right) \div \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{4} \right)$ tienen prioridad las “sumas algebraicas”, entonces

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right) \div \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{6+1}{4}\right) \div \left(\frac{20-3}{12}\right) = \left(\frac{7}{4}\right) \div \left(\frac{17}{12}\right) = \left(\frac{7}{4}\right) \left(\frac{12}{17}\right) = \frac{84}{68} = \frac{22}{17}.$$

e. En $\left(\frac{1}{5} \div 2\right) \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right) - 5$ el orden en que deben efectuarse las operaciones es: simultáneamente la división y la resta contenida en el paréntesis, finalmente la resta exterior a los paréntesis, por tanto

$$\left(\frac{1}{5} \div 2\right) \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right) - 5 = \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}\right) \left(\frac{4-5}{10}\right) - 5 = \left(\frac{1}{10}\right) \left(-\frac{1}{10}\right) - 5 = -\frac{1}{100} - 5 = -\frac{1+500}{100} = -\frac{501}{100}.$$

f. La operación $\frac{3}{4} \div \left(\frac{1}{\frac{1}{5} - \frac{2}{15} + \frac{1}{3}}\right)$ es equivalente a $\frac{3}{4} \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{15} + \frac{1}{3}\right)$, por tanto,

$$\frac{3}{4} \div \left(\frac{1}{\frac{1}{5} - \frac{2}{15} + \frac{1}{3}}\right) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{15} + \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3-2+5}{15}\right) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{6}{15}\right) = \frac{18}{100} = \frac{9}{50}.$$

g. Si $\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{8}}{\frac{5}{4} + \frac{1}{7} - 2}$, entonces $\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{8}}{\frac{5}{4} + \frac{1}{7} - 2} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}\right) \div \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{7} - 2\right) = \frac{5}{24} \div \left(-\frac{17}{28}\right) = \frac{5}{24} \cdot \left(-\frac{28}{17}\right) = -\frac{140}{208} = \frac{35}{102}.$

h. En la operación $\frac{2 - \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right)\right] - 4\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{10}\right)}{5}$ se tiene $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, $3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ y $\frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$, por tanto,

$$\frac{2 - \left[\frac{1}{6} - \frac{3}{2}\right] - 4\left(\frac{3}{10}\right)}{5} = \frac{2 - \left[-\frac{8}{6}\right] - 4\left(\frac{3}{10}\right)}{5} = \frac{2 + \frac{4}{3} - \frac{6}{5}}{5} = \frac{\frac{30+20-18}{15}}{5} = \frac{\frac{32}{15}}{5} = \frac{32}{75}.$$



Ejercicios 12

1. Simplifique al máximo.

- a. $\frac{213}{63}$. c. $\frac{75}{315}$.
b. $\frac{777}{42}$. d. $\frac{256}{312}$.

2. Determine los dígitos que son divisores.

- a. 31456. e. 431477.
b. 414325. f. 3264338.
c. 238560. g. 238560.
d. 842844. f. 842844.

3. Determine el mínimo común múltiplo.

- a. 2, 3 y 4.
b. 9 y 15.
c. 3, 27 y 81.
d. 12, 18 y 20.
e. 3, 12 y 54.
f. 5, 15, 35 y 70.

4. Leoncio y Pedro comen en la misma taquería, pero

Leoncio asiste a ella cada 20 días y Pedro lo hace cada 38 días. Si hoy comieron juntos, ¿cuántos días después volverán a encontrarse volverán a encontrarse?

5. Andrés tiene una cuerda de 120 metros y otra de 96 metros. Desea cortarlas de modo que todos los trozos sean iguales pero lo más largo posible. ¿Cuántos trozos de cada cuerda obtendrá?

6. Un ebanista quiere cortar una placa de madera de 256 cm de largo y 96 cm de ancho, en cuadrados lo más grande posible.

a. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de cada cuadrado?

b. ¿Cuántos cuadrados obtendrá de la placa de madera?

7. En una banda está compuesta por un baterista, un guitarrista, un bajista y un saxofonista, el baterista toca en lapsos de 8 tiempos, el guitarrista lapsos de 12 tiempos, el bajista en 6 tiempos y el saxofonista en

16 tiempos. Si todos empiezan al mismo tiempo, ¿en cuántos tiempos sus periodos volverán a iniciar simultáneamente?

8. Por cierta esquina, la bicicleta de los tamales pasa cada 8 días y la bicicleta del pan pasa cada dos semanas. Se sabe que 15 días atrás ambas bicicletas pasaron coincidieron. Raúl cree que dentro de un mes las bicicletas volverán a encontrarse y Oscar cree esto ocurrirá dentro de dos semanas. ¿Quién está en lo cierto?

9. Determine la capacidad de un barril sabiendo que es la menor posible que se puede llenar exactamente con botellas de 60 cl, 90 cl, 1 litro y 2 litros.

10. Silvestre quiere pintar una casa. Según sus cálculos, necesitará 12 litros de pintura roja, 24 litros de pintura verde y 16 litros de pintura blanca. Pero quiere comprar botes de pintura que tengan la misma cantidad de litros y que el número de botes sea el menor posible, ¿de qué capacidad debe ser cada bote y cuántos botes de cada color debe comprar Silvestre?

11. Una empresa que vende leche cuenta con tres establos en la región, uno en el norte, uno en el sur y uno en el este. El establo del norte produce 300 botellas de leche diarias, el establo del sur produce 240 botellas y el establo del este produce 360 botellas. Se quieren transportar estas botellas de leche en camionetas de manera que lleven el mismo número de botellas, pero que sea el mayor número de botellas posible. ¿Cuántas botellas de leche deben transportar en cada camioneta?

12. Tres caballos arrancan juntos en una carrera en una pista circular. El primero tarda 10 segundos, el segundo tarda 11 y el tercero tarda 12 segundos en dar una vuelta a la pista. ¿Al cabo de cuántos segundos pasarán juntos por la línea de salida?

13. Se tienen dos barricas, A y B, con 216 litros y 360 litros de vino, respectivamente. Su contenido se quiere envasar en recipientes iguales, de forma que el número de ellos sea el menor posible y que contengan el vino, sin mezclar el de las barricas. ¿Qué cantidad de vino debe tener cada envase? ¿Cuántos envases se utilizan para cada barrica?

14. Se instalarán tres tomas de agua (automáticas) para regar. La primera toma se abrirá cada 6 horas, la segunda lo hará cada 8 horas y la tercera, cada 14 horas. Si la primera vez que inicia el contador es al mediodía,

¿cuántas veces al mes empezarán todas las tomas a regar al mismo tiempo?

15. Erika tiene en su tienda los botones en bolsas. En la caja A tiene bolsas de 24 botones cada una y no sobra ningún botón. En la caja B tiene bolsas de 20 botones cada una y tampoco sobra ningún botón. El número de botones que hay en la caja A es igual al que hay en la caja B. ¿Cuántos botones como mínimo hay en cada caja?

16. Ana y Raquel tienen 25 bolas blancas, 15 bolas azules y 90 bolas rojas y quieren hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna bola.
a. ¿Cuántos collares iguales pueden hacer?
b. ¿Qué número de bolas de cada color tendrá cada collar?

17. Luís tiene cubos azules de 55 milímetros de arista y cubos rojos de 45 milímetros de arista. Apilando los cubos en dos columnas, una de cubos azules y otra de cubos rojos quiere conseguir que las dos columnas sean iguales. ¿Cuántos cubos, como mínimo, necesita de cada color?

18. Un vigilante pasa por cierto lugar cada 12 minutos, otro lo hace cada 18 minutos y un tercero cada 60 minutos. A las 6:30 de la tarde los tres vigilantes coinciden. Determine las veces que coincidirán en las cinco horas siguientes.

19. Determine la capacidad mínima del barril que se puede llenar exactamente con botellas de 60 centilitros, 90 centilitros, 1 litro y 2 litros.

20. Un obrero trabaja 5 días seguidos y descansa el sexto día. Empieza su trabajo en lunes. ¿Cuántos días tienen que transcurrir para que le toque descansar en domingo?

21. Simplifique al máximo.

a. $\frac{3}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{8}$.

b. $\frac{2}{4} + \frac{6}{18} - \frac{5}{6}$.

c. $-\frac{3}{7} - \frac{8}{9} + \frac{1}{63}$.

d. $\frac{5}{48} + \frac{3}{36} - \frac{1}{18} + \frac{1}{24}$.

e. $\frac{3}{36} + \frac{1}{30} - \frac{3}{18} + \frac{3}{15}$.

f. $-\frac{3}{14} - \frac{1}{18} - \frac{5}{28} + \frac{5}{22}$.

22. Simplifique al máximo.

a. $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \right)$.

b. $\frac{3}{5} \left(2 + \frac{1}{2} \div \frac{4}{7} \right)$.

c. $\frac{4}{3} \left(8 - \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{5} \left(2 - \frac{1}{5} \div \frac{5}{8} \right)$.

d. $\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} + 5 \div \frac{1}{4} \right) \left(\frac{5}{6} \div \frac{1}{10} - \left(4 \cdot \frac{1}{8} \right) \right)$.

e. $\left(\frac{2}{5} + 2 \div \frac{2}{5} \right) \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5} \div 6 \right) \div 3$.

f. $\left[\frac{1}{6} \div \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{8} \div \frac{2}{5} \right) - \frac{2}{9} \right] \div \left(4 \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{3} \right)$.

g. $\frac{\frac{3}{8} + 1}{\frac{1}{4} \div \left(\frac{2}{6} + \frac{2}{3} \right)}$.

h. $\frac{\frac{4}{3} - \frac{3}{8}}{3 \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{7} \right) - \left(2 \div \frac{1}{6} \right)}$.

i. $\frac{4 \div \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - 3 \div \frac{1}{4} \right] \div 4 \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{10} \right)}{7}$.

23. Efectúe las operaciones.

a. $4 - \frac{\frac{1}{4} - 3}{4 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$.

b. $\left(2 + \frac{2}{\frac{1}{2}} - 1 \right) \left(\frac{2}{\frac{2}{3}} - 1 \right) \div \frac{3}{2}$.

c. $\frac{\frac{2}{3} \left(2 - \frac{1}{3} \right) \left(1 + \frac{2}{3} \right)}{\frac{1}{5} \left(1 - \frac{3}{5} \div \frac{2}{5} \right)}$.

d. $\frac{4}{5} - \left(\frac{1}{\frac{2}{5} \div \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right)} - \left(\frac{3}{2} + 4 \cdot \frac{1}{3} \right) \right)$.

e. $\left(\left(\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{8} + 2 \right) \div \frac{2}{5} \right) \div \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{8}{7} + 1 - \frac{1}{2} \right)$.

f. $\frac{1}{\left(2 - \frac{1}{4} \div 3 \right) - \frac{1}{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{4 + \frac{1}{3}}$.

g. $\left(\frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + 4}{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - 2} \right) \div \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + 1 \right) \right)$.

h. $\frac{5 \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4}}{\left(1 - \frac{1}{4} \right) \left(2 - \frac{1}{4} \right)}$.

i. $\frac{2 - \left[\left(-\frac{4}{5} + \frac{3}{10} \right) - 2 \right] - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8} \right)}{\frac{1}{2}}$.

24. Efectúe las operaciones.

a. $\frac{\frac{2}{3} - 3}{4 - \frac{1}{3}} - \frac{1}{2}$.

b. $3 - \frac{1}{\frac{4}{8}} - \frac{1 - \frac{3}{4}}{4 + \frac{1}{5}}$ c. $\frac{\frac{3}{4} \left(3 - \frac{1}{2} \right)}{\frac{3}{5} \left(1 - \frac{1}{4} \div \frac{4}{5} \right)}$.

d. $\frac{1}{\frac{5}{3} \div \frac{5}{6} - \frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{3} \right)$.

e. $\left(\frac{4}{5} + 2 \div \frac{1}{4} \right) \div \left(2 + \frac{1}{2} \right)$.

f. $\frac{1}{3} \div \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} + 2 - \frac{2}{2 + \frac{1}{5}}$.

g. $\frac{\left(1 - \frac{1}{8} + 4 \right) \frac{3}{2}}{\left(3 - \frac{1}{8} \right) \frac{1}{6}} \div 6 - \frac{1}{4}$.

h. $\frac{5 \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5} \right) - \frac{3}{8}}{\frac{3}{8} + \frac{1}{4} - 2 \div \frac{1}{2}}$.

i. $\frac{7 \div \left[\left(-\frac{1}{3} + 1 \right) - 2 \right] - 7 \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{10} \right)}{14}$.

j. $2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}$.

k. $4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$.

1.3

POTENCIAS Y RADICALES

El alumno:

5. Operará correctamente con potencias y radicales con la misma base.

En el estudio del sistema de los números reales, el primer encuentro con las potencias se presenta en el axioma denominado “propiedad del inverso multiplicativo”, misma que postula:

“para todo número real a (diferente de cero), existe un único número real a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = 1$ ”.

En la propiedad del inverso multiplicativo, en a^{-1} , a representa un número y se denomina base, el súper índice se conoce como potencia. Una potencia entera asociada a un número real indica cuántas veces la base debe ser multiplicada por sí mismo repetidamente, así, una potencia entera se utiliza para simplificar y hacer y dar accesibilidad a producto de números de igual base. La figura 1.31 incluye una representación de las potencias “cuadrada y cúbica en términos de superficies y volúmenes.

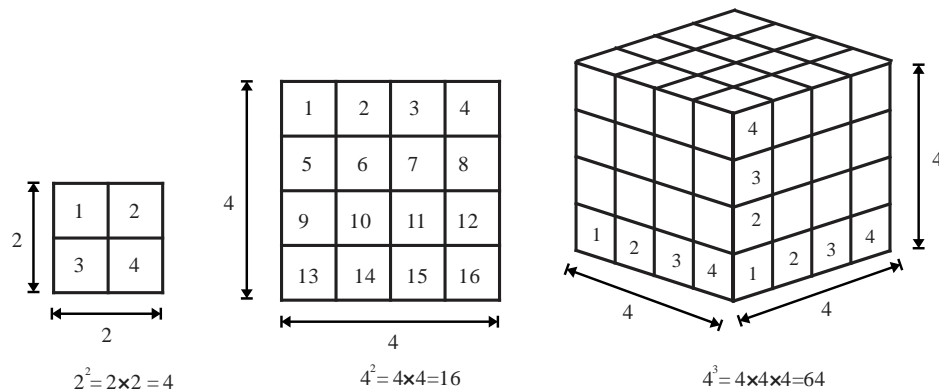


FIGURA 1.31

◆ EJEMPLO 1.28 (POTENCIAS)

a. El volumen de un cubo en el que las aristas miden a unidades se obtiene efectuando la operación $a \times a \times a$, operación que en términos de una potencia se simplifica como a^3 , vea la figura 1.32.

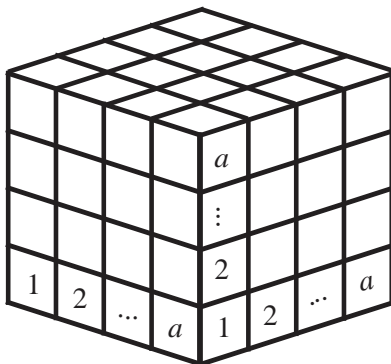


FIGURA 1.32

$D_1 \backslash D_2$	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

FIGURA 1.33

b. Si se lanzan dos dados normales y se observan los números de las caras que quedan hacia arriba, entonces se tienen $6 \times 6 = 6^2 = 36$ posible resultados, vea la figura 1.33.



DEFINICIÓN 1.9 (BASE Y POTENCIA)

- a. Si a representa a cualquier número real y n es un número entero positivo, entonces la *potencia* n del número a se representa por a^n y equivale al producto $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ factores}}$.
- b. El número a se conoce como base y el número n recibe el nombre de potencia.
- c. La expresión a^n se lee “ a a la potencia n ”.

En particular, el número a se lee “ a ” o “ a a la uno”, el número a^2 se lee “ a cuadrada” o “ a a la dos”, el número a^3 se lee “ a cúbica” o “ a a la tres”, a^4 se lee “ a cuarta” o “ a a la cuatro”, etc.

Rescribamos algunos productos como potencias.

◆ EJEMPLO 1.29 (PRODUCTOS COMO POTENCIAS)

- a. El producto $3 \times 3 \times 3 \times 3$, en términos de una potencia, se representa por 3^4 .
- b. El producto $\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8}$ en términos de una potencia, se representa por $\left(\frac{1}{8}\right)^5$.
- c. El producto $0.18 \times 0.18 \times 0.18 \times 0.18 \times 0.18 \times 0.18 \times 0.18 \times 0.18$, escrito en términos de una potencia es $(0.18)^8$.
- d. El producto $(-5)(-5)(-5)(-5)(-5)(-5)(-5)(-5)$, se representa por $(-5)(-5)(-5)(-5)(-5)(-5)(-5)(-5) = (-5)^6$.



En ciertas situaciones es necesario operar con expresiones (aritméticas o algebraicas) que poseen potencias, por lo que resulta necesario establecer las propiedades que rigen este tipo de expresiones.

◆ EJEMPLO 1.30 (CONJETURAS SOBRE LAS PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS)

- a. El producto $4^3 \cdot 4^2$, obtenemos $4^3 \cdot 4^2 = \underbrace{4 \times 4 \times 4}_{3 \text{ factores}} \times \underbrace{4 \times 4}_{2 \text{ factores}} = \underbrace{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}_{5 \text{ factores}} = 4^5 = 4^{3+2}$, observe que al multiplicar dos términos con bases iguales, la expresión resultante contiene la misma base y su potencia es la suma de las potencias de las bases, esto es $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
- b. Desarrollemos la operación

$$(5^2)^4, \text{ así } (5^2)^4 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2,$$

de donde

$$(5^2)^4 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2 = \underbrace{5 \times 5}_{2 \text{ factores}} \times \underbrace{5 \times 5}_{2 \text{ factores}} \times \underbrace{5 \times 5}_{2 \text{ factores}} \times \underbrace{5 \times 5}_{2 \text{ factores}} = 5^8,$$

entonces

$$(5^2)^4 = 5^8.$$

Por lo que podemos establecer la conjetura

$$(a^m)^n = a^{m \times n}.$$

c. Ahora desarrollemos

$$[(2)(5)]^3 = (2)(5)(2)(5)(2)(5) = (2 \times 2 \times 2)(5 \times 5 \times 5) = (2)^3(5)^3,$$

por lo que podemos establecer la conjetura

$$[(a)(b)]^m = (a^m)(b^m).$$

d. Observe que

$$\left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{4 \times 4 \times 4}{7 \times 7 \times 7} = \frac{4^3}{7^3},$$

por lo que, también podemos establecer la conjetura

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

e. Ahora desarrollemos la operación

$$\frac{6^7}{6^3} = \frac{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}{6 \times 6 \times 6} = 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^{7-3} = 6^4,$$

de éste resultado establecemos la conjetura:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

f. Si $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ y $m = n$, entonces $\frac{a^m}{a^m} = 1 = a^{m-m} = a^0$, es decir, $a^0 = 1$.

g. Bajo las suposiciones de que las expresiones $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ y $a^0 = 1$ son válidas, podemos escribir

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}, \text{ es decir, } \frac{1}{a^n} = a^{-n}.$$



Las conjeturas anteriores son válidas y son formalizadas en la *proposición 1.3*.

Proposición 1.3 (Propiedades de las potencias)

Si a es cualquier número real distinto de cero y, m y n son números enteros, entonces

a. $(a^m)(a^n) = a^{m+n}.$	Para multiplicar dos números con la misma base basta sumar las potencias y agrega el resultado a la base.
b. $(a^m)^n = a^{(m)(n)}.$	La potencia de la potencia de un número tiene como resultado el número con potencia igual al producto de las potencias.
c. $[(a)(b)]^m = a^m b^m.$	La potencia de un producto de números tiene como resultado el producto de las potencias de los números.
d. Si $b \neq 0$, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$	La potencia de una división tiene como resultado la división de las potencias.
e. Si $a \neq 0$, entonces $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$	El resultado de la división de potencias con base común tiene como resultado un número con la misma base y como potencia la resta de las potencias.
f. Si $a \neq 0$, entonces $a^0 = 1.$	Todo número, distinto de cero, elevado a la potencia 0 es uno.
g. Si $a \neq 0$, entonces $\frac{1}{a^n} = a^{-n}.$	El número a^{-n} es el inverso multiplicativo del número a^n .

NOTA

i. La *proposición 1.3* también es válida si las potencias son números reales.

ii. Si en a^m , m no es un número entero su interpretación es más complicada y puede no estar definida.

iii. En las siguientes líneas para representar productos utilizaremos de manera indistinta los símbolos \times y $()$.

En los siguientes ejemplos utilizamos las propiedades de las potencias en la simplificación de operaciones aritméticas.

◆ EJEMPLO 1.31 (SIMPLIFICACIÓN DE OPERACIONES ARITMÉTICAS 1)

a. En $3^4 3^5$ las bases de los factores son iguales, por tanto, $3^4 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$.

b. En $4^2 4^7 4^5$, las bases de los factores son iguales, entonces $4^2 4^7 4^5 = 4^{2+7+5} = 4^{14}$.

c. En la operación $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^7 \left(\frac{2}{5}\right)^{11} \left(\frac{2}{5}\right)^3$, las bases de todos los factores son iguales, entonces

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^7 \left(\frac{2}{5}\right)^{11} \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^{2+7+11+3} = \left(\frac{2}{5}\right)^{23}.$$

32 UNIDAD 1 EL SIGNIFICADO DE LOS NÚMEROS Y SUS OPERACIONES BÁSICAS

d. La operación $(0.28)^9(0.28)^5(1.11)^6(1.11)^7$, puede ser reescrita como:

$$(0.28)^9(0.28)^5(1.11)^6(1.11)^7 = (0.28)^{9+5}(1.11)^{6+7} = (0.28)^{14}(1.11)^{13}.$$

e. Si $(2^3)^2$, entonces $(2^3)^2 = 2^{(3)(2)} = 2^6 = 64$.

f. Si $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)^5$, entonces $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-10} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}} = \frac{1}{\frac{1}{2^{10}}} = 2^{10} = 1024$.

g. Si $\left(\left(\frac{3^{-2}}{2^3}\right)^{-1}\right)^2$, entonces $\left(\left(\frac{3^{-2}}{2^3}\right)^{-1}\right)^2 = \left(\frac{3^{-2}}{2^3}\right)^{-2} = \frac{3^4}{2^{-6}} = (3^4)(2^6) = (81)(64) = 5184$.

h. Si $\left(\frac{3^{-2}}{2^3}\right)^{-1}$, entonces $\left(\frac{3^{-2}}{2^3}\right)^{-1} = \frac{3^2}{2^{-3}} = (3^2)(2^3) = (9)(8) = 72$.

◆ EJEMPLO 1.32 (ELIMINACIÓN DE POTENCIAS NEGATIVAS)

a. El producto $8^4 6^{-14}$ se describe sin potencias negativas como $8^4 6^{-14} = \frac{8^4}{6^{14}}$.

b. El producto $4^{-3} 9^7 2^{-6}$ se describe sin potencias negativas como $4^{-3} 9^7 2^{-6} = \frac{9^7}{4^3 2^6}$.

c. La operación $\frac{4^{-2} 9^{-3}}{12^{-7} 5^8}$ se describe sin potencias negativas como $\frac{4^{-2} 9^{-3}}{12^{-7} 5^8} = \frac{12^7}{5^8 4^2 9^3}$.

d. La operación $(-7)^{-4}(6)^{-3}$ se describe sin potencias negativas como $(-7)^{-4}(6)^{-3} = \frac{1}{(-7)^4(6)^3}$.

e. La operación $\frac{3^7}{3^{-2} 4^{-5}}$ se describe sin potencias negativas como $\frac{3^7}{3^{-2} 4^{-5}} = 3^7 3^2 4^5 = 3^9 4^5$.

f. La operación $\frac{8^{12} 4^{-4}}{8^{-3} 4^5}$ se describe sin potencias negativas como $\frac{8^{12} 4^{-4}}{8^{-3} 4^5} = \frac{8^{12} 8^3}{4^5 4^4} = \frac{8^{12+3}}{4^{5+4}} = \frac{8^{15}}{4^9}$.

g. La operación $\frac{3^7 3^4 5^4}{5^{-4}}$ se describe sin potencias negativas como $\frac{3^7 3^4 5^4}{5^{-4}} = 3^{7+4} \frac{5^4}{5^{-4}} = 3^{11} 5^8$.

◆ EJEMPLO 1.33 (SIMPLIFICACIÓN DE OPERACIONES CON POTENCIAS)

a. La operación $\frac{3^5}{3^3}$ se simplifica como $\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2 = 3 \cdot 3 = 9$.

b. Si $\frac{2^6 4^9}{2^4 4^8}$, entonces $\frac{2^6 4^9}{2^4 4^8} = (2^6)(2^{-4})(4^9)(4^{-8}) = (2^{6-4})(4^{9-8}) = (2^2)(4) = 16$.

c. Al simplificar $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)^5$ obtenemos $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-10} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}} = \frac{1}{\frac{1}{2^{10}}} = 2^{10} = 1024$.

d. Si $\frac{(-5)^4(-2)^4}{(-5)^6(-2)^3}$, entonces $\frac{(-5)^4(-2)^4}{(-5)^6(-2)^3} = \frac{(-2)^4(-2)^{-3}}{(-5)^6(-5)^{-4}} = \frac{(-2)^{4-3}}{(-5)^{6-4}} = \frac{(-2)^1}{(-5)^2} = -\frac{2}{25}$.

e. Al simplificar $\left(\left(\frac{3^{-2}}{2^3}\right)^{-1}\right)^2$ obtenemos $\left(\left(\frac{3^{-2}}{2^3}\right)^{-1}\right)^2 = \left(\frac{3^{-2}}{2^3}\right)^{-2} = \frac{3^4}{2^{-6}} = (3^4)(2^6) = (81)(64) = 5184$.

Los procesos de simplificación (o ejecución) de una operación aritmética pueden ser muchos, sin embargo, el resultado final es único.

◆ **EJEMPLO 1.34 (OPERACIONES ARITMÉTICAS CON POTENCIAS)**

a. El resultado de la operación $2^{-1} + 4^{-2} - 2^{-3}$ se obtiene como sigue,

$$2^{-1} + 4^{-2} - 2^{-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} - \frac{1}{8} = \frac{8+1-2}{16} = \frac{7}{16}.$$

b. El resultado de $3 \cdot 2^{-2} - 5 \cdot 4^{-2} + 3 \cdot 2^{-3}$ se obtiene como sigue:

$$3 \cdot 2^{-2} - 5 \cdot 4^{-2} + 3 \cdot 2^{-3} = \frac{3}{4} - \frac{5}{16} + \frac{3}{8} = \frac{12-5+6}{16} = \frac{13}{16}.$$

c. En la ejecución de la operación $\frac{3 \cdot 2^{-2}}{3^0 + 2^{-1}} - 2^{-3}$, primero la reescribimos sin potencias negativas y aplicamos la propiedad

$$3^0 = 1, \text{ obtenemos } \frac{3 \cdot 2^{-2}}{3^0 + 2^{-1}} - 2^{-3} = \frac{\frac{3}{2^2}}{1 + \frac{1}{2}} - \frac{1}{2^3} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8} = \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 4} - \frac{1}{8} = \frac{6}{12} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

d. Para simplificar $\left(\frac{\left(\frac{2}{3} \right)^{-1} + 3^2}{8^0 + 2^{-1}} \right)^{-3}$, reescribamos el interior del paréntesis ("el de mayor tamaño") sin potencias negativas y

$$\text{potencias cero, obtenemos } \left(\frac{\frac{3}{2} + 9}{1 + \frac{1}{2}} \right)^{-3} \text{ simplificamos } \left(\frac{\frac{21}{2}}{\frac{3}{2}} \right)^{-3} = \left(\frac{21}{3} \right)^{-3} = (7)^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}.$$

◆

Al inicio de la presente sección señalamos que las potencias "2" y "3" admiten interpretaciones geométricas de áreas y volúmenes, respectivamente. Consecuencia de lo anterior, y en contextos específicos las potencias " $\frac{1}{2}$ " y " $\frac{1}{3}$ " de un número pueden ser interpretadas como el número de unidades lineales de la arista de un cuadrado o de un cubo, respectivamente. En la figura 1.32 los "pequeños" cuadrados y los "pequeños" cubos tienen como longitud de lado la unidad, por tanto,

$$4^{\frac{1}{2}} = 2, \quad 16^{\frac{1}{2}} = 4 \quad \text{y} \quad 64^{\frac{1}{3}} = 4$$

Respectivamente, por tanto, el uso de potencias fraccionarias tiene sentido práctico.

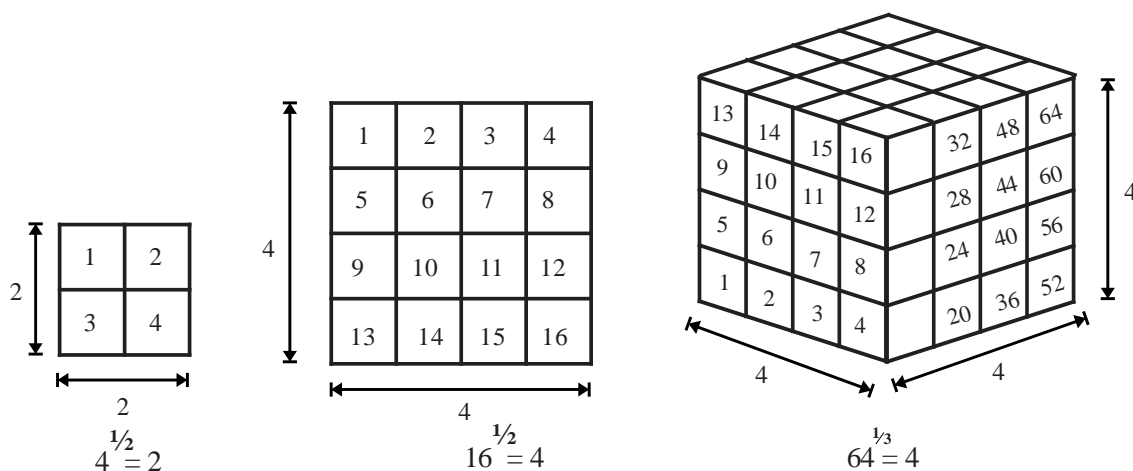


FIGURA 1.34

Relacionado con las potencias racionales (irreducibles) se encuentra el símbolo $\sqrt[n]{}$ llamado radical de índice n . La expresión $\sqrt{10}$ se lee “raíz cuadrada de 10”, la expresión $\sqrt[3]{10}$ es la raíz cúbica de 10 y $\sqrt[5]{13}$ es la raíz quinta de 13. Para dar significado las expresiones de la forma $\sqrt[n]{a}$ se utiliza la ecuación $b^n = a$.

◆ **EJEMPLO 1.35 (ENTENDIENDO EL SIGNIFICADO DEL SÍMBOLO $\sqrt[n]{a}$)**

- El valor de $\sqrt{9}$ es 3, también lo es -3 , puesto que $3^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$.
- $\sqrt{121} = 11$ o $\sqrt{121} = -11$, puesto que, $11^2 = 121$ y $(-11)^2 = 121$.
- $\sqrt[3]{8} = 2$, puesto que $2^3 = 8$.
- $\sqrt[4]{625} = 5$ o $\sqrt[4]{625} = -5$, puesto que, $5^4 = 625$ o bien $(-5)^4 = 625$.
- $\sqrt[6]{64} = 2$ (o $\sqrt[6]{64} = -2$), puesto que, $2^6 = 64$ (o $(-2)^6 = 64$).
- $\sqrt[3]{-8} = -2$, puesto que $(-2)^3 = -8$.
- Las expresiones $\sqrt[2]{-64}$, $\sqrt[4]{-64}$ y $\sqrt[6]{-64}$ no están definidas, debido a que las raíces pares de números negativos son positivas.

Formalicemos lo antes tratado.

DEFINICIÓN 1.10 (Raíz “n”)

Si n es un número entero y positivo, entonces:

- la raíz n principal del número a se representa por $\sqrt[n]{a}$ y la expresión $\sqrt[n]{a} = b$ significa $b^n = a$. La expresión $\sqrt[n]{a}$ se lee “raíz n de a ”.
- Si n es un número par (y positivo) en $\sqrt[n]{a} = b$, necesariamente a y b son números no negativos.
- La expresión $\sqrt[n]{a}$ es equivalente a $a^{\frac{1}{n}}$, es decir, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ (a representa un número no negativo cuando n es par).

La definición 1.10 asocia a todo número con potencia fraccionaria un radical, y viceversa, todo número “en el interior de un” radical (radicando) tiene asociada una potencia fraccionaria.

$$\begin{array}{ccc} \text{índice} & \text{radical} & \text{raíz} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \sqrt[n]{a} & = & b \\ \uparrow & & \\ \text{radicando} & & \end{array}$$

FIGURA 1.35

◆ **EJEMPLO 1.36 (EQUIVALENCIA ENTRE RADICALES Y POTENCIAS FRACCIONARIAS 1)**

- El número $8^{\frac{1}{5}}$ puede escribirse como $\sqrt[5]{8}$, es decir $8^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{8}$.
- El número $13^{\frac{1}{2}}$ puede escribirse como $\sqrt[2]{13}$, es decir $13^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{13}$.
- la expresión $(-64)^{\frac{1}{2}}$ no está definida.
- El número $(-10)^{\frac{1}{5}}$ puede reescribirse como $\sqrt[5]{-10}$, es decir $(-10)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-10}$.
- El número $\sqrt[4]{17}$ puede reescribirse como $17^{\frac{1}{4}}$, es decir $\sqrt[4]{17} = 17^{\frac{1}{4}}$.
- El número $\sqrt[4]{12^3}$ puede reescribirse como $(12^3)^{\frac{1}{4}}$, es decir $\sqrt[4]{12^3} = (12^3)^{\frac{1}{4}} = 12^{\frac{3}{4}}$.

◆ EJEMPLO 1.37 (EQUIVALENCIA DE RADICALES Y POTENCIAS FRACCIONARIAS 2)

- a. El número $\frac{8}{7^{\frac{1}{2}}}$ también puede reescribirse como $\frac{8}{\sqrt{7}}$, es decir, $\frac{8}{7^{\frac{1}{2}}} = \frac{8}{\sqrt{7}}$.
- b. Observe que $\frac{1}{\sqrt[5]{2} + \sqrt[4]{2} + \sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{5}} + 2^{\frac{1}{4}} + 2^{\frac{1}{3}}}$.
- c. Observe que $\frac{3^{\frac{1}{9}} - 5^{\frac{1}{9}}}{5^{\frac{9}{5}} - 4^{\frac{7}{3}} - 9^{\frac{5}{3}}} = \frac{\sqrt[9]{3} - \sqrt[9]{5}}{\sqrt[5]{5^9} - \sqrt[3]{4^7} - \sqrt[3]{9^5}} = \frac{\sqrt[9]{3} - \sqrt[9]{5}}{(\sqrt[5]{5})^9 - (\sqrt[3]{4})^7 - (\sqrt[3]{9})^5}$.
- d. Note que $\frac{\sqrt[4]{61} - \sqrt[4]{17}}{\sqrt[9]{111}} = \frac{(61)^{\frac{1}{4}} - (17)^{\frac{1}{4}}}{(111)^{\frac{1}{9}}}$.
- e. Observe $\sqrt[8]{\left(\frac{10}{9} + 6\right)^4} = \left(\frac{10}{9} + 6\right)^{\frac{4}{8}} = \left(\frac{64}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{8}{3}$.

Los radicales son casos especiales de las potencias (son potencias racionales) y como consecuencia de ello “heredan” sus propiedades., la *proposición 1.4* presenta las propiedades más comunes de los radicales.

Proposición 1.4 (*Propiedades de los radicales*)

Sean m y n representan números naturales, a y $b \neq 0$ representan números reales (y las operaciones están definidas), entonces:

a. $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.	“Si los factores de un producto son radicales con un mismo índice, para efectuar el producto basta con multiplicar los radicandos, el radical conserva su índice.”
b. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.	“La raíz m de la raíz n de un número es igual a la raíz mn del número”.
c. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, siempre que $b \neq 0$.	“Una fracción afectada por un radical es igual a otra fracción en la que el numerador como el denominador están afectados por el radical”.
d. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{si } n \text{ es impar} \\ a & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$	“La raíz n se cancela con la potencia n ”.

*Las barras indican que la raíz tiene signo positivo.

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de las propiedades incluidas en la proposición anterior.

◆ EJEMPLO 1.38 (SIMPLIFICANDO RADICALES)

- a. Al simplificar $\sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}$, obtenemos $\sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{(-8)(2)(3)} = \sqrt[3]{-48}$.
- b. Al simplificar $\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}}$, obtenemos $\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{3}{2}$.
- c. Al simplificar $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{3107}}}$, obtenemos $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{3107}}} = \sqrt[2 \times 3 \times 4]{3107} = \sqrt[24]{3107}$.
- d. Si simplificamos $\frac{\sqrt[3]{216} \sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{729}}$, obtenemos $\frac{\sqrt[3]{216} \sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[3]{\frac{(216)(8)}{729}} = \sqrt[3]{\frac{1728}{729}} = \frac{12}{9}$.
- e. Si $\frac{\sqrt{\sqrt[3]{312}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{2}}}{\sqrt[8]{6}}$, entonces $\frac{\sqrt{\sqrt[3]{312}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{2}}}{\sqrt[8]{6}} = \frac{2 \times 2 \times \sqrt[3]{312} \cdot 4 \times 2 \sqrt{2}}{\sqrt[8]{6}} = \frac{8 \sqrt[3]{312} \sqrt{2}}{\sqrt[8]{6}} = \sqrt[8]{\frac{(312)(2)}{6}} = \sqrt[8]{\frac{624}{6}} = \sqrt[8]{104}$.
- f. Si $\frac{\sqrt{20} \sqrt{5} \sqrt{10}}{\sqrt{5}}$, entonces $\frac{\sqrt{20} \sqrt{5} \sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{(20)(5)(10)}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$.

Ejercicios 1.3**1. Simplifique las operaciones.**

a. $(-4)^4, -4^4, (3.1416)^0, 4^4\left(\frac{1}{4}\right)^3, \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$ y $2^{-4}\left(\frac{5}{8}\right)^0$.

b. $(2)^{-3}(2)^2(2)^{-1},$
 $(5)^2(5)^{\frac{1}{2}}(5)^{-\frac{3}{2}},$
 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^4$ y
 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{13}{6}},$

c. $(2^3)^{\frac{4}{3}}, (2^3)^{-2}, (3^{-2})^{-2}$ y $\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{6}{2}}.$

d. $\frac{10^6}{10^2}, \frac{(4)^{-3}}{8^2(2)^{-3}}, \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{-2},$
 $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{-2}$ y $\left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)^0}{\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}\right]^0.$

2. Simplifique las operaciones.

a. $20 \div \{(3+4^2)-(2^3-2^2)\}.$

b. $100 - \{2(7^2-30)-4^2\} + 4^3.$

c. $(3^2-6)^2 - (2^4+6)^2 \div 10^2.$

d. $[\{(12-14)^2-4^0\}-2]^2.$

e. $3[\{(5-4)^3-4(3-1)^2\}-2 \div 2^{-1}]^2.$

f. $2^2(12)-11-(7-3(2))^3(8^2-2^4(6))^3.$

g. $6(1-2^3(6))^2(-10^2-8^2(2))^{-2}(8-6^2)^0.$

h. $110 - \left[\{3(6-4)^2-3\}^0 - 4 \right]^2.$

i. $33 - \left[\{(4-2-3)^8 + 4(5-1-3)^6\} \div 2^{-1} \right]^0.$

j. $2^3 \left(1 - (3^2 - 2^3)^0 \right)^2 - 3(5^2 - 3 \cdot 2^3)^0.$

k. $5^2 - 2^2 \left[\{3(6-4)^0 + 3(81-3^4)\}^2 - 5 \right]^3.$

3. Simplifique las operaciones.

a. $\left(\frac{4^{-2}}{3^{-3}} - \frac{2}{3^2}\right)^{-2}.$

b. $\left(\frac{2^{-2}}{5^{-3}}\right)^{-2} - \left(\frac{4 \cdot 3^{-3}}{3 \cdot 4^{-2}}\right)^2.$

c. $\left(\frac{2^{-1}}{4^{-2}} - 2^{-2}\right)^{-2} + \left(\frac{2^{-1}}{2}\right)^{-2}(4-2^{-3})^{-2}.$

d. $\left[\left(\frac{2^2}{4^{-3}}\right)^{-5} \div \frac{4 \cdot 3^{-3}}{5^{-3} \cdot 4^{-2}}\right]^{-2}.$

e. $\left(\frac{5^2}{5}\right)^{-2}\left(-\frac{3^{-1}}{4^{-2}}\right)^{-1}\left(-\frac{3^{-1}}{5^{-2}}\right)^{-2}.$

f. $\left(\frac{5}{4^{-2}} - 2^{-4}\right)^0 + \left(\frac{7^2}{5^{-2}}\right)^{-1}(4-3^{-3})^0.$

4. Simplifique las operaciones.

a. $\frac{3^{-2}}{5^{-1}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}(2 \cdot 4^{-2})^{-2}.$

b. $\left(\frac{2}{3} \div \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right) - \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \div \left(\frac{1}{3}\right)^2\right].$

c. $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^{-1}.$

d. $\left[\frac{2}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)^3\right]^2.$

e. $\left[\left(\frac{2^{-2}}{5^{-1}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \div \left(\frac{2^{-1}}{5^{-1}}\right)^{-2}\right]^3.$

f. $\frac{1}{2^2} - \left[\left\{3^{-1}\left(\frac{5}{2}-4\right)^2 - \frac{1}{4}\right\}^2 + \frac{3}{4}\right]^2.$

5. Simplifique las operaciones.

a. $2^{-3}(4)-8^{-1}+2.$

b. $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 16^{-1}.$

c. $\left(\frac{2}{3} - 2^{-2} + \frac{2^2}{12}\right)^3.$

d. $\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 2^{-2}(3).$

e. $(3 - 2^{-1})^2$.

f. $\left((1 - 2^{-1})^2 \right)^{-3}$.

g. $\left(\frac{2^{2^2}}{3^{(2^0)}} \right)^3$.

h. $\left(\left(\frac{1}{3} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^3 \right)^2$.

6. Simplifique las operaciones.

a. $\frac{2^{-2} - \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2^3}}{3^{-1} + 20 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right)^2}$.

b. $\frac{\left(\frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \frac{12}{2^3} \right)^3}{\left(2 + 2^4 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right)^2 \right)^2}$.

c. $\frac{\left(\frac{3}{54} - 6 \left(\frac{1}{4} \right)^3 + \frac{4}{3} (4^{-1}) \right)^0}{\left(2 + 2^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)^2 \right)^2}$.

d. $\left(\frac{3}{5} \right)^2 + \frac{3^{-2} - \frac{1}{2^3}}{3^{-1} + 6 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right)^2}$.

e. $\frac{2^0 + 2^{-1} + 2^{-2}}{\left(2^2 + 2^4 \left(2^{-2} - \frac{1}{8} \right)^2 \right)^2}$.

7. Escriba en términos de radicales.

a. $8^{\frac{1}{5}}$.

b. $(3 + 5)^{\frac{3}{8}}$.

c. $20^{-\frac{6}{11}}$.

d. $\left(1 - \frac{1}{3} \right)^{\frac{5}{9}}$.

e. $\frac{5}{13^{-\frac{1}{2}}}$.

f. $179.3^{-\frac{1}{5}}$.

g. $\left(3^{\frac{2}{3}} + 5^{-\frac{1}{8}} \right)^{\frac{2}{7}}$.

h. $\left(14^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{6}}$.

i. $\left(\frac{3}{6^{\frac{4}{5}}} + \frac{1}{3^{-\frac{2}{5}}} \right)^{-\frac{5}{9}}$.

j. $6^{-\frac{2}{3}} \div \left(3 + \frac{5}{8} \right)^{-\frac{2}{3}}$.

k. $\frac{3^{-\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{5}} + 2^{\frac{1}{4}}}$.

l. $\frac{3^{\frac{1}{9}} - 5^{\frac{1}{9}}}{5^{\frac{9}{5}} - 4^{\frac{7}{3}} - 9^{\frac{5}{3}}}$.

m. $\left(\frac{2^{\frac{4}{5}}}{10^{\frac{4}{5}}} + \frac{9^{\frac{6}{5}}}{3^{-\frac{2}{5}}} \right)^{-\frac{1}{5}}$.

n. $\left(\left(\frac{3}{6^{-\frac{4}{5}}} \right)^{\frac{4}{3}} \div \frac{1}{10^{-\frac{2}{5}}} \right)^{\frac{3}{8}}$.

8. Evalúe.

a. $125^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{2}{8}}$.

b. $81^{\frac{3}{4}}$.

c. $\left(\frac{169}{144} \right)^{\frac{3}{2}}$.

d. $\left(\left(\frac{225}{256} \right)^{\frac{3}{2}} \right)^2$.

e. $\left(\left(\frac{1}{256} \right)^{\frac{5}{4}} \right)^2$.

f. $\left(\left(\frac{225}{169} \right)^{-\frac{3}{2}} \right)^2$.

g. $\sqrt[2]{\sqrt[4]{100000000}}$.

9. Evalúe.

a. $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$.

b. $\sqrt{81} + 27^{\frac{2}{3}}$.

c. $\sqrt[3]{125} + \sqrt[4]{625}$.

d. $\sqrt[8]{3^{16}}$.

e. $\sqrt[5]{100^{10}}$.

f. $\sqrt[2]{\frac{3^4}{8^6}}$.

g. $\sqrt[4]{\frac{5^8}{8^{12}}}$.

10. Evalúe.

$$\text{a. } \frac{\frac{20}{4} + 2^3}{\sqrt{36} \div 6 + 10 \div 2}.$$

$$\text{b. } \frac{\sqrt{36} - (\sqrt{4} + 2)^2 + \sqrt{9}}{4(3 + \sqrt[3]{8}) - 4^2}.$$

$$\text{c. } \frac{4(-3 + 2)^2 + 9\sqrt{9}}{4(\sqrt{16} - 2\sqrt[3]{8} + 2) - 4^0}.$$

$$\text{d. } \frac{\sqrt{\frac{20}{5}} + \sqrt{\frac{48}{3}}}{\sqrt{64} \div 6 + \sqrt{100} \div 2}.$$

$$\text{e. } \frac{6 - (3 + 2)^2 + 9}{4(3 + 2) - 4^2}.$$

$$\text{f. } \frac{\sqrt[3]{27}(-3 + 2)^2 + \frac{12}{\sqrt[3]{8}}}{4\left(\frac{4}{\sqrt[3]{125}} - 2\sqrt[3]{8} + 2\right) - 4^0}.$$

11. Evalúe.

$$\text{a. } \frac{\sqrt{\frac{125}{5}} + \sqrt{\frac{363}{3}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{225}{9}}}{\left(\sqrt{100} \div 6\right) - \left(\sqrt{121} \div 2\right)}.$$

$$\text{b. } \frac{3\sqrt{49} - 5(3 + 2)^2 + 9}{4(\sqrt{625} + 2) + 5^2}.$$

$$\text{c. } \frac{\sqrt[3]{125}(-3 - \sqrt{81})^2 + \frac{8}{\sqrt[3]{8}}}{\frac{3}{2}\left(\frac{4}{\sqrt[3]{125}} - 2\sqrt[3]{8} + 2\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^0}.$$

1.4

OPERACIONES ARITMÉTICAS EN DIVERSOS CONTEXTOS

El alumno:

6. Traducirá, relaciones contextuales en operaciones entre números racionales (enteros y no enteros) y las resolverá correctamente.
7. Resolverá problemas aritméticos que involucren una secuencia de relaciones contextuales, auxiliándose de estrategias heurísticas en las etapas de comprensión, elaboración de un plan y su ejecución.

La construcción de este sistema de numeración avanzó de manera progresiva a partir de la evolución de los distintos tipos de números (naturales, enteros, racionales e irracionales) que forman parte de él. El sistema de los números reales (que se denota con el símbolo \mathbb{R}) incluye dos operaciones binarias (llamadas así por operar sobre dos números): la suma o adición y la multiplicación o producto. La adición asigna a cada par de números reales (a, b) otro número real, llamado suma de a y b , y que se denota $a + b$; la multiplicación asocia a cada par (a, b) de números reales otro número llamado producto de a y b , que se representa por $a \cdot b$ (también se representa de las formas ab y $a \times b$). Casos especiales de las operaciones señaladas son: la resta o sustracción, la división, la potenciación y la radicación. En el contexto de la aritmética la suma se define como la operación matemática que resume el proceso de contar (si sólo se utilizan números enteros) o medir (si se utilizan números racionales), debemos tener en cuenta que el término “suma” se refiere tanto a la operación como al resultado de la misma, por ejemplo, al decir “la suma de números naturales cumple la propiedad asociativa”, la palabra suma hace referencia tanto a la operación como al resultado de ella, al decir “la suma de 3 y 2 es 5”, la palabra suma significa el resultado de la operación.

◆ EJEMPLO 1.39 (SITUACIONES ADITIVAS)

- a. A una bodega llegaron cargas de 825, 328 y 518 kilogramos de papas, entonces el número de kilogramos papas en la bodega aumentó en $825 + 328 + 518 = 1671$ kilogramos.
- b. Se tienen cuatro cajas con bolígrafos, las cajas contienen 5, 12, 17 y 22 bolígrafos respectivamente, entonces el total de bolígrafos en las cajas es $5 + 12 + 17 + 22 = 56$.
- c. Al inicio de la jornada una papelería tenía en su almacén 68 bolígrafos, si antes del mediodía se vendieron 17 y en la tarde se vendieron 40, entonces el número de bolígrafos al término de la jornada es $68 - 17 - 40 = 11$.
- d. Una persona salió con un carro en el que transportaba 200 tamales para su venta, en tres sitios distintos vendió 112, 20 y 58 tamales respectivamente, entonces regresó con $200 - 112 - 20 - 58 = 10$ tamales.

◆ EJEMPLO 1.40 (SUMAS)

- a. De las 150 personas que asistieron a una fiesta de “traje”: 70 llevaron comida, 60 llevaron bebidas y 40 llevaron golosinas, 35 llevaron comida y bebidas, 25 llevaron comida y golosinas, 20 bebida y golosinas y 15 llevaron los tres elementos. ¿Cuántas personas no llevaron estos alimentos?

En situaciones de “conteo” en las que una persona u objeto presenta dos o más características (como el planteado en las líneas anteriores) son de gran utilidad los diagramas de Venn - Euler, como el de la figura 1.36.

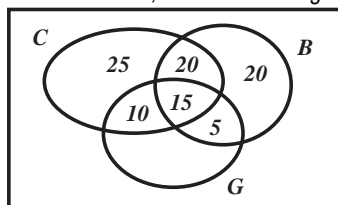


FIGURA 1.36

Los números de personas que aportaron se encuentran en los “círculos”, por tanto, aportaron

$$25 + 10 + 15 + 20 + 5 + 20 = 75 \text{ personas y no aportaron } 150 - 75 = 75 \text{ personas.}$$

b. Una persona va a subir una escalera; puede hacerlo subiendo uno o dos escalones a la vez. Si la escalera tiene 9 escalones en total, ¿de cuántas formas distintas puede subirla?

El problema se puede razonar de la forma: ¿De cuántas formas se puede obtener como total 9 usando únicamente los números 1 y 2?, por ejemplo, para llegar al escalón 4 puede hacerse de las formas

$$1+1+1+1 \text{ o } 1+2+1, 1+1+2 \text{ y } 2+1+1 \text{ o } 2+2 \text{ (cinco posibilidades).}$$

La tabla anexa muestra el número acumulado de posibilidades para llegar a cierto escalón.

Numero de escalón	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Posibilidades de subir	1	2	3	5	8	13	21	34	55

c. Con base en la figura 1.37 determine el número de bloques utilizados si:



FIGURA 1.37

Si la base tiene un bloque, el número de bloques es 1

Si la base tiene dos bloques, el número de bloques es $1 + 2 = 3$

Si la base tiene tres bloques, el número de bloques es $1 + 2 + 3 = 6$

Si la base tiene cuatro bloques, el número de bloques es $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

i. Por tanto, si la base contiene 5 bloques, el total de bloques del arreglo es $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

ii. Por tanto, si la base contiene 10 bloques, número total de bloques en el arreglo es $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$.

iii. Si la base tiene 15 bloques, el número total de bloques en el arreglo es

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 120.$$

d. Con base en la figura 1.38 y determinemos el número de cuadrados negros que son agregados:

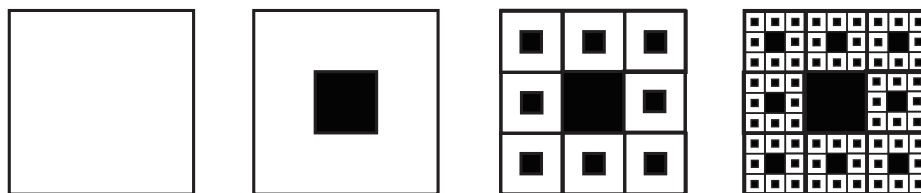


FIGURA 1.38

Inicialmente (etapa 0) no hay cuadrados negros agregados.

i. En la etapa 1 existe un solo cuadrado negro. 1

ii. En la etapa 2 son agregados $8 = 8^1$ cuadrados negros, en total hay $1 + 8^1$.

iii. En la etapa 3 son agregados $64 = 8^2$ cuadrados negros, por tanto, hay $1 + 8^1 + 8^2$.

iv. En la etapa 4 son agregados $512 = 8^3$ cuadrados negros, es decir, en total hay $1 + 8^1 + 8^2 + 8^3$.

vi. Por tanto, en la etapa 8 son agregados 8^7 cuadrados negros, hay $1 + 8^1 + 8^2 + 8^3 + 8^4 + 8^5 + 8^6 + 8^7$.

vii. Por tanto, en la etapa 12 son agregados 8^{11} cuadrados negros, hay

$$1 + 8^1 + 8^2 + 8^3 + 8^4 + 8^5 + 8^6 + 8^7 + 8^8 + 8^9 + 8^{10} + 8^{11}.$$

e. Con base en la figura 1.39 y determinemos el número de cubos en diversas etapas:

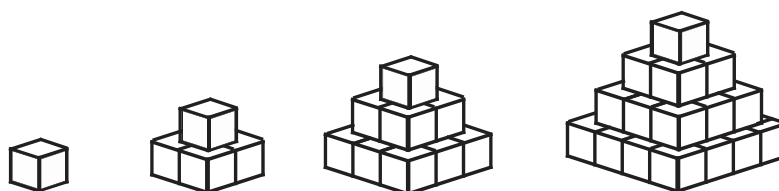


FIGURA 1.39

- i. Inicialmente hay un cubo.
- ii. En la etapa 2 hay $1+2^2$ cubos.
- iii. La etapa 3 incluye $1+2^2+3^2$ cubos.
- iv. La etapa 4 incluye $1+2^2+3^2+4^2$ cubos.
- v. La etapa 8 incluye $1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2$ cubos.
- vi. La etapa 10 incluye $1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2$ cubos.
- g. Tome como base figura 1.40 y exprese como una suma el número de segmentos rectilíneos en cada una de ellas:



FIGURA 1.40

- i. La etapa 1 incluye 4 segmentos rectilíneos.
- ii. La etapa 2 incluye $4+4+4+4=4 \times 4=16=4^2$ segmentos rectilíneos.
- iii. La etapa 3 incluye $16+16+16+16=4 \times 16=4^3$ segmentos rectilíneos.
- Por consiguiente:
- iv. La etapa 8 incluirá 4^8 segmentos rectilíneos.
- v. La etapa 20 incluirá 4^{20} segmentos rectilíneos.

LA MULTIPLICACIÓN COMO SUMA ABREVIADA

El producto o multiplicación puede interpretarse como “suma abreviada”, es decir, puede utilizarse para abreviar la suma de cantidades iguales, *ejemplos 1.41, 1.42 y 1.43.*

◆ EJEMPLO 1.41 (SUMAS ABREVIADAS)

- i. La suma $4+4+4+4+4+4$ se abrevia como 6×4 , en donde el número 6 corresponde al número de sumandos.
- ii. La suma $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ se abrevia como $5 \times \frac{1}{2}$, en donde el número 5 corresponde al número de sumandos.
- iii. La suma $0.2+0.2+0.2$ se abrevia como 3×0.2 , en donde el número 3 corresponde al número de sumandos.

◆ EJEMPLO 1.42 (SUMAS ABREVIADAS)

- a. En la figura 1.41 el número de cuadriláteros (unitarios) en las filas es $6+6+6+6=24$, la suma $6+6+6+6$ puede abreviarse como $6 \times 4=24$.

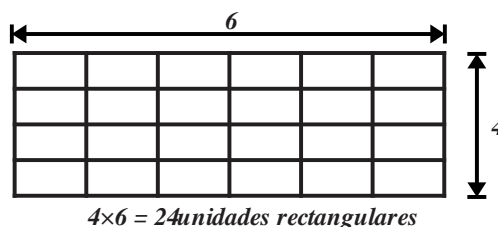


FIGURA 1.41

b. En la *figura 1.42* para determinar el número de cubos (unitarios) notemos:

Primer nivel: 5 más 5 más 5 más 5 más 5 más 5 cubos, subtotal 6 veces 5 o 6×5 cubos unitarios.

Segundo nivel: 5 más 5 más 5 más 5 más 5 más 5 cubos, subtotal 6 veces 5 o 6×5 cubos unitarios.

Tercer nivel: 5 más 5 más 5 más 5 más 5 más 5 cubos, subtotal 6 veces 5 o 6×5 cubos unitarios.

Cuarto nivel: 5 más 5 más 5 más 5 más 5 más 5 cubos, subtotal 6 veces 5 o 6×5 cubos unitarios.

En total, 4 niveles con 6×5 cubos unitarios cada uno, es decir, $4 \times 6 \times 5 = 120$ cubos unitarios.

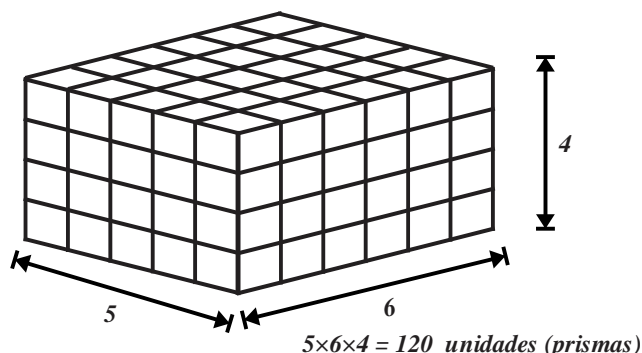


FIGURA 1.42

NOTA

En ocasiones es más adecuado utilizar paréntesis que el símbolo \times en la representación de una multiplicación (producto).

◆ EJEMPLO 1.43 (SITUACIONES MULTIPLICATIVAS)

a. Los radios de los neumáticos pertenecientes a una bicicleta miden 0.34 metros.

i. El perímetro de un neumático es $p = 2\pi(1) = 2\pi$ metros.

ii. Si en un viaje los neumáticos de la bicicleta rotan 120 veces, entonces quién utiliza la bicicleta se desplaza

$$d = 2\pi(0.34)(120) = 81.6\pi \text{ metros.}$$

iii. Si en un viaje los neumáticos de la bicicleta rotaron 1000 veces, quién utiliza la bicicleta se desplaza

$$d = 2\pi(0.34)(1000) = 680\pi \text{ metros.}$$

b. Visto en un paquete de rollos de papel higiénico, “cada rollo contiene 400 hojas dobles”.

i. El número de hojas sencillas en un paquete con 18 rollos es $(18)(400)(2) = 14400$.

ii. El número de hojas sencillas en un paquete con 12 rollos es $(12)(400)(2) = 9600$.

iii. El número de hojas sencillas en un paquete con 36 rollos es $(36)(400)(2) = 28800$.

c. Visto en un paquete de chocolates de mesa, “tabletas con 8 porciones cada una”.

i. El número de porciones en un paquete con 12 tabletas es $12 \times 8 = 48$.

ii. El número de porciones en una caja con 24 paquetes, con 12 tabletas es $24 \times 12 \times 8 = 48$.

d. La línea 1 del “MB” de la Ciudad de México incluye 45 estaciones.

i. Si un conductor del “MB” recorre el trayecto de la línea 1 tres veces en un turno (ida y vuelta), entonces recorrió

$$3 \times 2 \times 45 = 270 \text{ estaciones.}$$

ii. Si un conductor del “MB” recorre el trayecto de la línea 1 siete veces en un día (ida y vuelta), entonces recorrió

$$7 \times 2 \times 45 = 630 \text{ estaciones.}$$



◆ EJEMPLO 1.44 (OTRAS SITUACIONES MULTIPLICATIVAS)

a. Si una persona tiene 3 camisas: roja, azul y blanca; tiene 4 pantalones: café, negro, gris y azul, entonces puede combinarlos de $3 \times 4 = 12$ formas.

b. Un restaurante de comida italiana especializado en pastas, la ofrece en 12 tipos y con 8 clases de salsa, por tanto, un platillo se puede solicitar de $12 \times 8 = 96$ formas.

c. Las estanterías de un supermercado tienen cuatro estantes (baldas), sobre los que se colocan los productos en venta. Los estantes rectangulares miden 200 centímetros de largo por 40 centímetros de ancho. Si se pide al encargado que forre los

cantos de las baldas de tres estanterías, necesitará: por balda $40+40+200+200=2(40)+2(200)=480$ centímetros de forro. En total requerirá $4(480)=1920$ centímetros de forro.

d. Un terreno cuadrado tiene perímetro de 1600 metros. Se cerca utilizando cuatro postes (uno en cada vértice) y ocho alambres paralelos separados 20 centímetros, por tanto, son necesarios $8 \times 1600 = 12800$ metros de alambre.



EL PROCESO DE MEDICIÓN, MÚLTIPLOS Y SUBMÚLTIPLOS

Medir ha sido una actividad muy importante para el hombre, siempre le ha sido necesario medir: tiempos, longitudes, superficies, volúmenes, etc. En un principio, el hombre, definió y utilizó unidades de medida tomando como referencia partes del cuerpo humano, por ejemplo el pie, los dedos de la mano o el brazo, sin embargo, estas unidades eran variables debido a la existencia de las diferencias físicas entre una persona y otra. Actualmente, el medir una característica de un objeto incluye un patrón de medida (que tienen asociados unidades de medida) que se comparan con la característica del objeto a “medir”, al que se le asigna un número. Para medir el segmento de recta \overline{AB} de la figura 1.43 (asignarle un número) se ha utilizado como unidad (o patrón de medida) el segmento rectilíneo de longitud u , el número de veces o la fracción de u que está contenido en \overline{AB} .

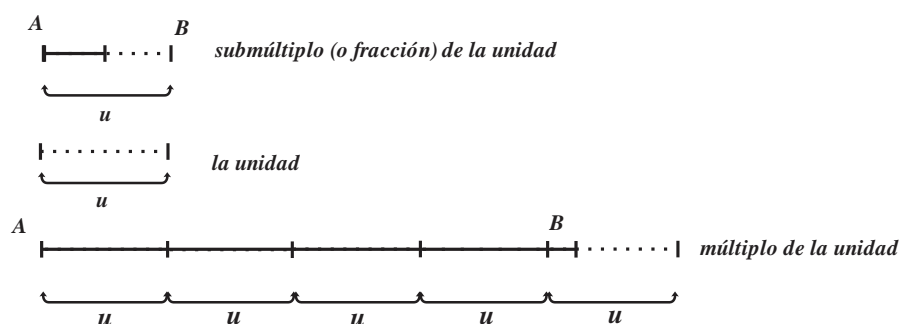


FIGURA 1.43

Para medir una superficie plana se utiliza como unidad de superficie un cuadrado de lados de longitud u , la medida de la unidad de superficie es la unidad cuadrada, vea la figura 1.44.

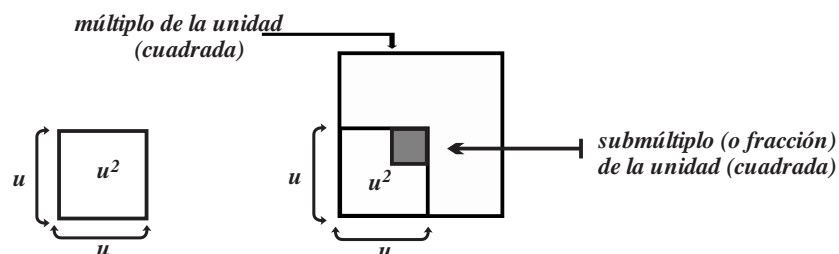


FIGURA 1.44

Otras características de los objetos susceptibles de ser medidos son: la capacidad, la masa, el peso, la temperatura, cada una de estas características tiene asociada una unidad específica de medida que se basa en un patrón de medición definido como una cantidad (estandarizada) de la característica. En muchos casos la unidad patrón se construye arbitrariamente, en otros casos respecto a un fenómeno natural. Así mismo, el sistema internacional de medidas (SI) incluye siete magnitudes físicas fundamentales que permiten expresar cualquier otra magnitud física en sus términos, o como una combinación de ellas. Son magnitudes físicas fundamentales:

- i. El metro (longitud).
- ii. El segundo (tiempo).
- iii. La masa (kilogramo).
- iv. La temperatura (grado Kelvin).

Las magnitudes físicas fundamentales se complementan con dos magnitudes físicas más, denominadas suplementarias:

- v. Ángulo plano.
- vi. Ángulo sólido.

Ejemplos de magnitudes físicas derivadas son: el área y el volumen (se derivan de la unidad de longitud), la velocidad y la aceleración (se derivan de las unidades de longitud y de tiempo), la presión (se deriva de las unidades de longitud y de masa), etc. Por otra parte, los múltiplos de una unidad básica son medidas mayores a ella y se obtienen multiplicándola por un número mayor que la unidad. Los submúltiplos de una unidad básica son medidas más pequeñas a ella y se obtienen multiplicándola por un número mayor que cero y menor que uno.

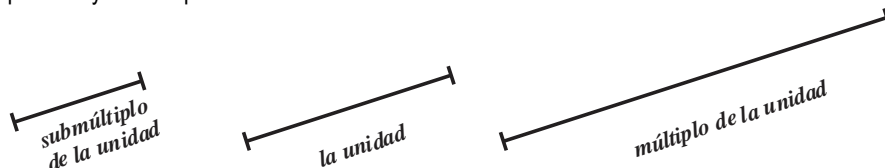


FIGURA 1.45

◆ EJEMPLO 1.45 (MÚLTIPLOS Y SUBMÚLTIPLOS DEL METRO)

En el sistema internacional de medidas (SI), la unidad básica de longitud es el metro (se abrevia como m), de ella se derivan las unidades de área, de capacidad, entre otras. Si consideremos como unidad básica un metro ($1\ m$), entonces:

a. Algunos de sus submúltiplos son:

i. Angstrom, $1\ \text{Angstrom} \left(\overset{\circ}{A} \right) = 0.000\,000\,001\ m$, se obtiene al multiplicar por $\frac{1}{10\,000\,000\,000}$ a un metro.

ii. Nanómetro, $1\ \text{nanómetro} \left(nm \right) = 0.000\,000\,001\ m$, se obtiene al multiplicar por $\frac{1}{1\,000\,000\,000}$ a un metro.

iii. Pixel, $1\ \text{pixel} \left(px \right) = 0.000264583\ m$, se obtiene al multiplicar por $\frac{1}{377957517575025}$ a un metro.

b. Entre sus múltiplos se encuentran:

i. kilómetro, $1\ \text{kilómetro} \left(km \right) = 1000\ m$, se obtiene al multiplicar por 1000 a un metro.

ii. mega metro, $1\ \text{mega metro} \left(M \right) = 1\,000\,000\ m$, se obtiene al multiplicar por $1\,000\,000$ a un metro.

iii. Año luz, $1\ \text{año luz} = 9460000000000000\ m$, se obtiene al multiplicar por 9460000000000000 a un metro.



◆ EJEMPLO 1.46 (MÚLTIPLOS Y SUBMÚLTIPLOS DEL METRO CÚBICO)

En el SI de medidas la unidad básica de longitud es el metro, de ella se deriva la unidad de capacidad, el metro cúbico (se abrevia por m^3).

a. Múltiplos del metro cúbico son:

i. El kilómetro cúbico, equivale a cubo con arista de un kilómetro de longitud, su capacidad es el resultado de multiplicar por $1\,000\,000\,000$ a un metro cúbico.

ii. El decámetro cúbico, equivale a cubo con arista de diez metros de longitud, su capacidad es el resultado de multiplicar por 1000 a un metro cúbico.

b. Sub múltiplos del metro cúbico son:

i. El litro, un *litro* (l) $= 0.001\ m^3$, se obtiene al multiplicar por $\frac{1}{1000}$ a un metro cúbico.

ii. El mililitro, un *mililitro* (ml) $= 0.000\,001\ m^3$, se obtiene al multiplicar por $\frac{1}{1\,000\,000}$ a un metro cúbico.

iii. Decímetro cúbico, un *decímetro cúbico* (dm^3) $= 1\ \text{litro} \left(l \right) = 0.0001\ m^3$, se obtiene al multiplicar por $\frac{1}{10\,000}$ a un metro cúbico.



◆ EJEMPLO 1.47 (MÚLTIPLOS Y SUBMÚLTIPLOS DEL SEGUNDO)

En el SI de medidas la unidad básica de tiempo es el segundo.

i. Un día equivale a veinticuatro horas, una hora equivale a sesenta minutos, un minuto a sesenta segundos, por tanto,

$$1\ \text{día} = (24) \times (60) \times (60)\ s = 86400\ s, \text{ además } 1\ s = \frac{1}{86400}\ \text{día}.$$

ii. Suponiendo que un mes tiene treinta días, entonces equivale a $1 \text{ mes} = (30)(24)(60)(60) \text{ s} = 2592000 \text{ s}$, también

$$1 \text{ s} = \frac{1}{2592000} \text{ mes}.$$

◆ EJEMPLO 1.48 (EQUIVALENCIAS)

a. Un metro cuadrado equivale $(100 \text{ cms})(100 \text{ cms}) = 10000 (\text{cms})^2$.

b. Un metro cúbico equivale $(100 \text{ cms})(100 \text{ cms})(100 \text{ cms}) = 1000000 (\text{cms})^3$.

c. Para determinar el número de segundos transcurridos de las 8:35 a las 12:10 (del mismo día) tengamos en cuenta:

De las 8:35 horas a las 9:00 transcurren $25 \times 60 = 1500$ segundos, de las 9:00 a las 12:00 transcurren $3 \times 60 \times 60 = 10800$ segundos y de las 12:00 a las 12:10 transcurren 600 segundos. El número de segundos transcurridos de las 8:35 a las 12:10 es $1500 + 10800 + 600 = 12900$ segundos.

En los procesos de medición se utilizan prefijos para indicar múltiplos y submúltiplos de las unidades básicas de medida, los más comunes se presentan en la *tabla 1.1*.

PREFIJO	POTENCIA	SÍMBOLO	MÚLTIPLO O SUBMÚLTIPLO
tera	10^{12}	<i>T</i>	1000 000 000 000
giga	10^9	<i>G</i>	1000 000 000
mega	10^6	<i>M</i>	1000 000
kilo	10^3	<i>k</i>	1000
hecto	10^2	<i>h</i>	100
deca	10^1	<i>da</i>	10
	10^0	unidad	1
deci	10^{-1}	<i>d</i>	0. 1
centi	10^{-2}	<i>c</i>	0. 01
mili	10^{-3}	<i>m</i>	0. 001
micro	10^{-6}	μ	0. 000 001
nano	10^{-9}	<i>n</i>	0.000 000 001
pico	10^{-12}	<i>p</i>	0.000 000 000 001

TABLA 1.1

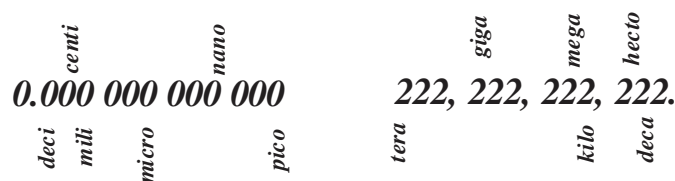


FIGURA 1.46

LA DIVISIÓN, UN CASO PARTICULAR DE LA MULTIPLICACIÓN

En la *sección 1.1* establecimos que todos los números reales (excepto el 0) tienen inverso multiplicativo, parte de la importancia de esta propiedad es que, permite definir la “división” como la operación inversa de la multiplicación de la siguiente forma: “dividir el número real a por el número b (con $b \neq 0$) significa multiplicar el número a por el inverso multiplicativo del número b ”, vea la *figura 1.47*.

$$a : b = a \times b^{-1} = a \cdot \frac{1}{b}$$

FIGURA 1.47

◆ EJEMPLO 1.49 (INTERPRETACIÓN DE LA DIVISIÓN COMO UNA MULTIPLICACIÓN)

a. $20 : 7 = 20 \times 7^{-1} = 20 \times \frac{1}{7}.$

b. $3 : 47 = 3 \times 47^{-1} = 3 \times \frac{1}{47}.$



La división puede interpretarse como un proceso de partición (o de comparación) de un grupo de objetos en subgrupos del mismo tamaño o medida, sin embargo, también se interpreta como el número de veces que el dividendo contiene al divisor; o viceversa como el número de veces que el divisor está contenido en el dividendo (número de partes), vea la *figura 1.48*.

$$a : b = \frac{a}{b} = c \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{tamaño de las partes} \\ \uparrow \text{número de partes} \end{array}$$

FIGURA 1.48

◆ EJEMPLO 1.50 (INTERPRETACIÓN DE LA DIVISIÓN)

a. Sea un grupo compuesto por 40 objetos. El hecho de que $40 : 10 = 4$ se interpreta de las formas:

i. 10 es el tamaño de los subgrupos.

ii. 4 es el número de los subgrupos.

b. Un objeto pesa 35 kilogramos, el hecho de que $35 : 7 = 5$ se interpreta:

i. 7 es el número de partes iguales.

ii. 5 es el peso de las partes.

c. Sea un terreno con área de 15 000 metros cuadrados. La operación $15000 : 100 = 150$ se interpreta como:

i. El terreno puede seccionarse en 100 lotes.

ii. 150 metros cuadrados es el área de cada parte.



LA DIVISIÓN COMO UNA RAZÓN

Con la “división” también se utiliza para comparar cantidades de distinta especie (con unidades distintas), en este caso, recibe el nombre de razón. La razón entre las cantidades a y b se representa por $\frac{a}{b}$ o $a : b$, se leen a es a b ; además en $\frac{a}{b}$, el número a se llama antecedente y el número b es el consecuente, por ejemplo, en $\frac{8}{3}$ se lee “8 es a 3”, 8 es el antecedente y 3 es el consecuente.

◆ EJEMPLO 1.51 (LA DIVISIÓN COMO RAZÓN)

a. Si un rectángulo mide 60 centímetros de largo y 15 centímetros de ancho, entonces las longitudes de sus lados se pueden poner en razón de:

i. $\frac{60}{15}$ (60 a 15), esto significa el largo es cuatro veces el ancho.ii. $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ (15 a 60), esto significa el ancho es la cuarta parte del largo.b. Un jardinero cobra 640 pesos por podar 40 metros cuadrados de césped, entonces, la razón $\frac{640}{40} = 16$:

i. Proporciona el costo (en pesos) por podar un metro cuadrado de césped. Cuarenta son los metros cuadrados que poda por 640 pesos.

ii. La razón $\frac{40}{640} = 0.0625$ representa el área del césped que poda el jardinero por un peso.

- c. La etiqueta de un envase de café indica “contenido neto 660 gramos”. Si su precio es 60 pesos y suponiendo que el envase no tiene costo, entonces la razón $\frac{660}{60}$ proporciona el número de gramos de café que se adquieren por sesenta pesos.
- i. También indica que el costo de 11 gramos es un peso; así como, y que los 660 gramos se pueden seccionar en grupos 60 de once gramos.
- ii. La razón $\frac{60}{660}$ se interpreta como: el costo de un gramo; el “número” de subgrupos en los que se han dividido los 60 pesos.
- d. Una coca cola de “tres litros” tiene un costo de 33 pesos (suponga que el envase carece de costo).
- i. La razón $\frac{33}{3}=11$ proporciona el costo de un litro de coca cola. También indica que la coca cola de “tres litros” se secciona en tres partes.
- ii. La razón $\frac{3}{33}$ proporciona la fracción de coca cola que se puede adquirir por un peso.



LA TASA, CASO PARTICULAR DE UNA RAZÓN

Si en una razón, el denominador (o consecuyente) tiene unidades de tiempo recibe el nombre de tasa, por tanto, son tasas (las comparaciones por medio de una división): los productos elaborados por hora, los metros recorridos por segundo, los litros extraídos por segundo, el cambio de temperatura en un lapso de tiempo, los intereses contraídos por el paso del tiempo, etc.

◆ EJEMPLO 1.52 (TASAS)

- a. El salario que recibe una persona en un mes.
- b. El costo de una llamada, de duración 10 minutos, a través de un celular.
- c. La rapidez (r) con que un objeto se mueve es la tasa (o razón) $r = \frac{d}{t}$, d representa la distancia recorrida por el objeto (en unidades de longitud) y t es la magnitud del tiempo que utilizó en recorrerla.
- d. La rapidez (r) con la que un tinaco se vacía es la tasa (o razón) $r = \frac{v}{t}$, v representa el volumen del tinaco y t el tiempo en que se vacía.
- e. El número de objetos que produce una persona en una semana.
- f. El número de tamales que come una persona en media hora.



EL PORCENTAJE, TAMBIÉN SE RELACIONA CON LA DIVISIÓN

Otro término relacionado con la división es el “porcentaje”, el término porcentaje se utiliza para comparar un todo con una de sus partes utilizando una división bajo la apariencia de una fracción de cien. Para representar esta situación se utiliza el símbolo % y se lee “tanto por ciento”. Por ejemplo: “veinte por ciento” es un porcentaje que se escribe como 20% y se entiende como 20 de cada cien. Si se dice que el 35% de un grupo de cuarenta personas no utiliza celular, la frase supone que

$$\left(\frac{35}{100} \right) (40) = 14 \text{ de las personas no utilizan celular.}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{parte del total} & \longrightarrow & \frac{a}{b} \times 100 \\ & & \uparrow \\ & & \text{total} \end{array}$$

FIGURA 1.49

◆ EJEMPLO 1.53 (PORCENTAJES)

- a. Si una bolsa contiene 80 canicas de las que 20 son rojas y el resto azules, entonces:
- i. El resultado de $\frac{20}{80}$ multiplicado por 100 proporciona el porcentaje de canicas rojas, en este caso, el 25% .
- ii. El resultado de $\frac{60}{80}$ multiplicado por 100 proporciona el porcentaje de canicas azules, en este caso, el 75% .

b. Si un grupo está constituido por 45 personas y de ellos 30 son hombres, entonces:

i. El resultado de $\frac{30}{45}$ multiplicado por 100 proporciona el porcentaje de hombres, en este caso, el 66.6%.

ii. El resultado de $\frac{15}{45}$ multiplicado por 100 proporciona el porcentaje de mujeres, en este caso, el 33.3%.

c. Si el precio de lista de un dispositivo electrónico es \$20000 y se ofrece un descuento del 19.3%, entonces quien lo adquiera pagará $(20000)(0.807) = 16140$ pesos.

d. Si el precio de lista de un artículo es \$1200 y al pagar a plazos este se incrementa en 40%, entonces se tendrá que pagar $(1200)(1.40) = 1680$ pesos.



◆ EJEMPLO 1.54 (PORCENTAJES VARIOS)

a. Visto en una tienda, descuento del 20% más otro descuento de 25%.

Si el precio de un artículo es 2300, entonces su costo después del primer descuento es $(2300)(0.80)$ pesos, y su precio después del segundo descuento es $(2300)(0.80)(0.75)$ pesos, es decir, 1380 pesos. Un precio de 1380 pesos equivale a un descuento del 40% y no del 45% como en ocasiones se piensa.

b. Un trabajador tiene un salario de 10000, recibe dos aumentos, el primero del 30% y el segundo del 20%, entonces su salario después del segundo incremento se calcula como sigue:

$$(10000)(1.30)(1.20) = 15600,$$

por tanto, el incremento en su salario fue superior al 50%; en realidad fue del 56% (verifíquelo).



◆ EJEMPLO 1.55 (PORCENTAJES, LONGITUDES ÁREAS Y CAPACIDADES)

Para responder las preguntas:

a. Para calcular el porcentaje que representan cuatro pulgadas cuadradas (una pulgada equivale a 25.4 milímetros) de 3500 milímetros cuadrados, es necesario que las cantidades a comparar se tengan las mismas unidades. Cuatro pulgadas cuadradas equivalen a $4(25.4)^2 = 2580.64$ milímetros cuadrados, luego $\frac{2580.64}{3500} \approx 0.7373$, por lo que equivalen al 73.73%.

b. Un pie equivale a 0.3048 metros, entonces:

i. Un pie cúbico equivale a $(0.3048)^3 \approx 0.0283168$ metros cúbicos, aproximadamente 2.8317% de un metro cúbico.

ii. Un metro cúbico equivale a $\frac{1}{(0.3048)^3} \approx 35.3147$ pies cúbicos, aproximadamente 3531.47%.

c. Un cuadrado de lado igual a 1 metro encierra un área de 1 metro cuadrado, un círculo de diámetro un metro, tiene área de $\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$ metros cuadrados.

i. El área del cuadrado es $\frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi} \approx 1.2732$ veces el área del círculo, aproximadamente él 127.32%.

ii. El área del círculo es $\frac{\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4}$ veces el volumen del cilindro, aproximadamente él 78.54%.

d. Un cilindro de altura 4 metros y base circular de radio 50 centímetros, tiene volumen (capacidad) $\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2(4) = \pi$ metros cúbicos. Un cono de base circular de radio 50 centímetros y doce metros de altura tiene volumen (capacidad) de $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2(12) = 4\pi$ metros cúbicos.

i. El volumen del cono es $\frac{4\pi}{\pi} = 4$ veces el volumen del cilindro, el 400%.

ii. El volumen del cono es $\frac{\pi}{4\pi} = \frac{1}{4}$ veces el volumen del cilindro, el 25%.



La división (en sus distintas interpretaciones) también se utiliza para identificar propuestas más convenientes, y en su caso, tomar decisiones, revisemos el *ejemplo 1.56*.

◆ EJEMPLO 1.56 (COMPARANDO CON RAZONES)

a. Una coca cola en presentación de “600 mililitros” cuesta 14 pesos y en presentación de “un litro (1000 mililitros)” cuesta 19 pesos, ¿bajo qué presentación es más económico el contenido?

Las razones contenido – precio son:

Para la “de 600 mililitros”, $\frac{600}{14} \approx 42.857$ mililitros por un peso, y para la “de un litro (1000 mililitros)”, $\frac{1000}{19} \approx 52.63$ mililitros por un peso, por tanto, resulta más económica la segunda de las presentaciones.

b. El pan de caja “grande” cuesta 52 pesos y su contenido es 756 gramos, el pan de caja “chico” cuesta 34 pesos y contiene 412 gramos, ¿cuál presentación es más económica?

Las razones peso – precio son:

Para la presentación “grande”, $\frac{756}{52} \approx 14.538$ gramos por un peso, y para la presentación “chico”, $\frac{412}{34} \approx 12.176$ gramos por un peso, por tanto, resulta más económica la presentación “grande”.

c. 24 quilates equivale a “oro puro”, 18 quilates equivale a 18 partes de “oro puro” y 6 partes de aleación. Para responder la pregunta ¿qué contiene más “oro puro”, una joya de oro de 18 quilates y peso de 360 o una joya de “oro puro” con peso de 270 gramos?

La cantidad de oro puro de la pieza de peso 360 gramos es $\frac{18}{24}(360) = 270$, por tanto, ambas piezas contienen la misma cantidad de oro puro.

d. Una yarda equivale a 914 milímetros. Para responder las preguntas:

i. ¿Cuál es la proporción de área de una yarda cuadrada respecto a un metro cuadrado?

ii. ¿Cuál es la proporción de área de un metro cuadrado respecto a una yarda cuadrada?

Procedemos de la siguiente forma.

i. En metros, una yarda equivale a 0.914 metros, por tanto, una yarda cuadrada $(0.914)^2 = 0.835396$ metros cuadrados.

ii. La razón entre una yarda $\frac{1}{0.914} \approx 1.0941$, por tanto, la razón entre un metro cuadrado y una yarda cuadrada es

$$\frac{1^2}{(0.914)^2} \approx 1.1970.$$



Como lo señalamos en la sección previa, la operación “división” es sólo una forma de interpretar la multiplicación (producto), por ejemplo, la división $\frac{5}{8}$, es equivalente al producto $5(0.125)$, la división $\frac{10}{2}$, es equivalente al producto $10(0.5)$, etc. Así, la equivalencia de estas operaciones (en un contexto abstracto) garantiza un mismo resultado.

POTENCIAS

En la sección anterior establecimos el concepto de potencia de un número, la representación de productos en términos de potencias es de gran utilidad en diversas situaciones de la vida, por ejemplo, en el cálculo de áreas, volúmenes, intereses, tamaño de poblaciones etc.

◆ EJEMPLO 1.57 (PORCENTAJES DE PORCENTAJES)

a. Al recibir mensualmente el 3% de intereses por invertir 20 000 pesos, cantidad se ha convertido en:

i. En el primer mes en $20\,000(1.03) = 20\,600$ pesos.

ii. En el segundo mes en $20\,000(1.03)^2 = 21\,218$ pesos.

iii. En el tercer mes en $20\,000(1.03)^3 = 21\,854$ pesos.

b. Si un objeto pierde el 20% anualmente de su valor inicial (que es 8 000 pesos), entonces:

i. Al primer año vale $20\,000(1.03) = 20\,600$ pesos.

ii. Al segundo año vale $20\,000(1.03)^2 = 21\,218$ pesos.

iii. Al tercer año vale $20\,000(1.03)^3 = 21\,854$ pesos.

c. Descuentos consecutivos no equivalen a la suma de los descuentos.

Si un almacén ofrece dos descuentos consecutivos del 15% sobre el costo de un celular, cuyo precio de lista es 10 000 pesos, quién lo quiera adquirir pagaría: $10\,000(0.85) = 8\,500$ pesos con el primero de los descuentos y $8\,500(0.85) = 7\,225$ pesos con la aplicación del segundo de los descuentos (o simplemente $10\,000(0.85)^2 = 7\,225$ pesos). En realidad los dos descuentos representan un único descuento del 28.75% (menos del 30%).

d. Incrementos consecutivos no equivalen a la suma de los incrementos.

Si el precio de la gasolina es veinte pesos por litro y se incrementa tres veces el 12%, en realidad su precio se ha incrementado más del 36%. Veamos:

i. Con el primer incremento su precio queda en $20(1.12) = 22.40$ pesos.

ii. Con el segundo incremento su precio es $22.40(1.12) = 25.088$ pesos.

iii. Al tercer incremento su precio es $25.088(1.12) = 28.09856$ pesos.

El incremento real en pesos es 8.09856, que equivale al $\frac{8.09856}{20} \times 100 = 40.4928\%$ del costo inicial y no al 36% como pudiere pensarse.



RAÍZ ENÉSIMA

En la sección anterior señalamos que una potencia fraccionaria (que es un número racional) puede representarse en términos de del símbolo conocido como radical. Relacionados con los radicales se encuentran la determinación de dimensiones de sólidos geométricos (tales como cubos, conos, cilindros etc.); las longitudes de lados de superficies planas regulares (por ejemplo, cuadrados, triángulos equiláteros, etc.). Sin embargo, debemos señalar que, en función del incremento de la cultura matemática del lector estará la comprensión de la utilidad de las raíces enésimas de los números.

◆ EJEMPLO 1.58 (RAÍCES Y DIMENSIONES)

a. En un terreno de forma cuadrada se han sembrado 324 (en filas y columnas), por tanto, el número árboles en cada fila y en cada columna es $\sqrt{324} = 18$.

b. El piso de una habitación tiene 169 losetas de forma cuadrada, si cada una de ellas mide 33 centímetros de lado, para determinar las dimensiones de la habitación es necesario calcular el número de losetas por lado. Cada lado tiene $\sqrt{169} = 13$ losetas, en consecuencia, cada lado mide $(33)(13) = 429$ centímetros (4.29 metros).

c. En una caja de forma cúbica, se han colocado 343 paquetes, también cúbicos, de longitud de lado igual a 10 centímetros, para responder la pregunta ¿Cuáles son las dimensiones de la caja? Es necesario determinar el número de paquetes por lado, éstos son $\sqrt[3]{343} = 7$.

d. En un terreno se quieren plantar 625 árboles en filas, formando un cuadrado.

i. Para determinar el número de árboles por fila calculamos $\sqrt{625} = 25$.

ii. Para calcular el número de árboles en el borde del terreno, al resultado anterior debemos restar 4 (pertenecen tanto a una fila como a una columna), por tanto son $25 - 4$ árboles.

iii. Si cada par de árboles debe estar separado cuatro metros, entonces se requiere una superficie de área mínima 16 metros cuadrados ¿por qué?

e. 216 latas idénticas se han colocado en una torre, la torre tiene el mismo de latas en su ancho, su largo y su altura; además cada lata mide 12 centímetros de altura y 8 centímetros de diámetro. Para determinar las dimensiones de la torre es necesario calcular el número de latas en cada dimensión, esto es $\sqrt[3]{216} = 6$, por tanto, la torre tiene 6 latas a lo ancho, 6 latas a lo largo y 6 a lo alto, las dimensiones de la torre son $48 \times 48 \times 72$ centímetros cúbicos.



Ejercicios 1.4

1. Una encuesta aplicada a 250 personas arrojó los siguientes resultados:

128 fuman, 160 toman frecuentemente bebidas gaseosas y 90 tienen ambas "virtudes".

Dibuje un diagrama que represente dicha situación y responda:

- ¿Cuántas sólo fuman frecuentemente?
- ¿Cuántas sólo toman frecuentemente bebidas alcohólicas?
- ¿Cuántas no practican éstas virtudes?

2. En un "reventón", 115 de los asistentes consumieron enervantes, 35 consumieron enervantes y bebidas alcohólicas y 105 no consumieron bebidas alcohólicas. ¿Cuántos asistentes asistieron al "reventón"?

3. Se entrevistó a un grupo de 25 estudiantes sobre su consumo referente a dos bebidas: Presidente y Torres 10; se obtuvo la siguiente información: El número de estudiantes que consumieron Presidente pero no Torres 10 fue 6, el número de estudiantes que consumieron ambas bebidas 4. Tres manifestaron no haber consumido bebidas.

- ¿Cuántos de los entrevistados sólo consumieron Torres 10?
- ¿Cuántos de los encuestados consumieron al menos una de las bebidas?

4. Una encuesta acerca del consumo de dos productos *A* y *B* efectuada a 500 personas reveló la siguiente información: 344 personas manifestaron consumir el producto *A*; 206 manifestaron consumir ambos productos *A* y *B*; 44 personas afirmaron no consumir los productos *A* ni *B*.

- ¿Cuántas personas manifestaron consumir sólo el producto *A*?
- ¿Cuántas personas manifestaron consumir sólo el producto *B*?
- ¿Cuántas personas manifestaron consumir el producto *B* pero no el producto *A*?
- ¿Cuántas personas manifestaron consumir por lo menos uno de los dos productos?

5. En una riña participó un número específico de personas, el saldo fue el siguiente:

6 recibieron una patada en los bajos, un garrotazo en la cabeza y una herida punzocortante,

8 recibieron una patada en los bajos y un garrotazo.

10 recibieron una patada en los bajos y una herida punzocortante.

12 recibieron un garrotazo y una herida punzocortante.

36 recibieron sólo una patada.

2 recibieron sólo una herida punzocortante.

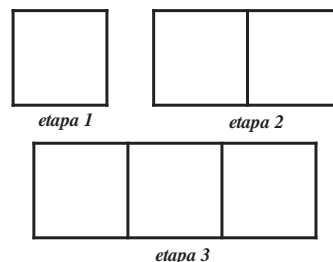
24 recibieron sólo un garrotazo.

32 tuvieron saldo blanco.

Con la información anterior responda:

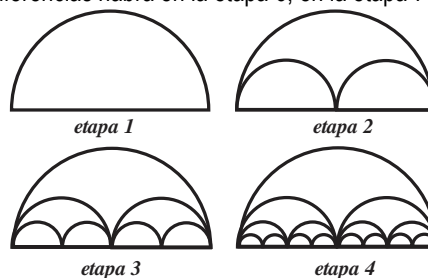
- ¿Cuántas personas participaron en la riña?
- ¿Cuántas personas recibieron garrotazo?
- ¿Cuántas personas recibieron patada en los bajos?
- ¿Cuántas personas recibieron dos o más agresiones?

6. Imagine que para construir la siguiente figura se utilizaron palillos. Determine el número de palillos en las etapas:



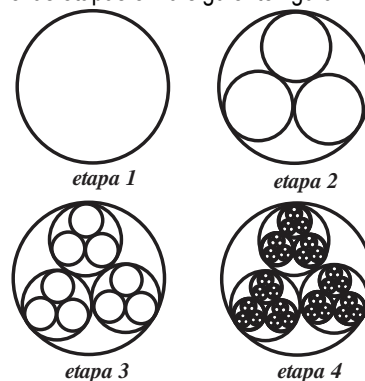
- 10 .
- 15 .
- 20 .

7. Observe la siguiente figura: ¿cuántas semi circunferencias habrá en la etapa 6, en la etapa 7?



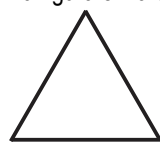
- ¿Cuántas semi circunferencias existen en la etapa 6?
- ¿Cuántas semi circunferencias existen en la etapa 10?

8. Observe las etapas en la siguiente figura:

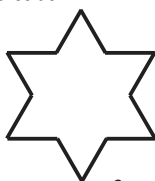


- ¿Cuántas circunferencias existen en la etapa 6?
- ¿Cuántas circunferencias existen en la etapa 8?

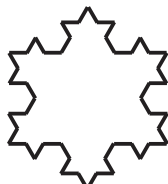
9. Revise la siguiente figura (copo de Koch), cuente los segmentos rectilíneos, ¿Cuántos segmentos de recta componen la figura en la etapa indicada?



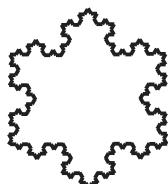
etapa 1



etapa 2



etapa 3



etapa 4

- a. ¿En la etapa 5? b. ¿En la etapa 7?

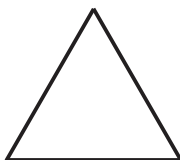
10. (TRIÁNGULO DE SIERSPINSKI)

a. Sea una región triangular y considere el siguiente proceso:

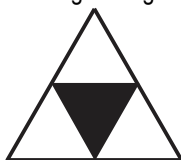
Etapa 1, con segmentos de recta se unen los puntos medios de los lados y así obtiene cuatro triángulos equiláteros semejantes al original pero sólo tres comparten su orientación, seleccionamos y sombreamos el triángulo con orientación diferente (etapa 1) y calculamos su área.

Etapa 2, repetimos el proceso efectuado en la etapa 1 con los tres triángulos orientados en la misma forma que el triángulo original.

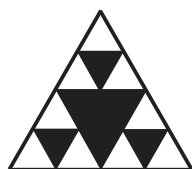
Etapa 3, repetimos el proceso efectuado en la etapa 1 con los nueve triángulos obtenidos en la etapa 2 orientados en la misma forma que el triángulo original.



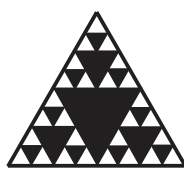
etapa 0



etapa 1



etapa 2



etapa 3

Determine el número de triángulos orientados en la misma dirección en la etapa:

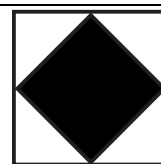
- a. 4.
b. 5.
c. 6.

11. (CUADRADO)

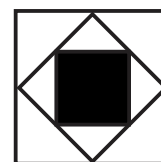
Con base en las etapas del siguiente proceso determine el número de triángulos blancos en la etapa indicada.



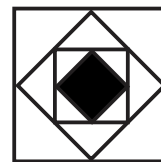
etapa 0



etapa 1



etapa 2



etapa 3

- a. ¿En la etapa 8?
b. ¿En la etapa 10?

12. (FRACTAL DE CESAREO)

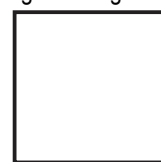
Tome como base las etapas del proceso

Etapa 1. Se traza un cuadrado con lados de longitud igual a la unidad.

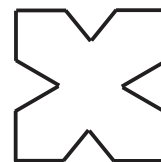
Etapa 2. Los cuatro lados del cuadrado se dividen en tres segmentos y se forma un triángulo equilátero sobre el segmento del medio, que queda como la base, y se borra.

Etapa 3 La iteración de la etapa anterior se repite "varias veces".

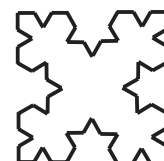
Revise la siguiente figura.



etapa 1



etapa 2



etapa 3

- a. Determine el número de lados en la etapa indicada.
i. Etapa 5. ii. Etapa 6.
b. Determine el número de "triángulos blancos" (concavidades triangulares) en la etapa indicada.
i. Etapa 5.
ii. Etapa 6.

14.

a. ¿Cuántas latas de 5 centímetros de diámetro y 8 centímetros de altura se pueden acomodar (en filas y columnas) en una caja de dimensiones de 40 centímetros de altura, por 60 centímetros de largo y por 40 centímetros de ancho?

b. Si cada lata (con su contenido) pesa 50 gramos, ¿cuál es el peso del contenido de la caja?

15. Los radios de los neumáticos de un automóvil miden 60 centímetros.

- a. Calcule el perímetro de uno de los neumáticos.
- b. Si en un viaje los neumáticos del automóvil rotan 500, ¿cuántos metros se desplazó el automóvil?

16. Ramón va a comprar un terreno de 25×20 metros cuadrados, si cada metro cuadrado tiene un precio de 600 pesos, ¿cuánto pagará Ramón por el terreno?

17. Un litro de pintura rinde 10 metros cuadrados.

- a. Calcule el rendimiento de una cubeta de 19 litros de pintura.
- b. Calcule el número de metros cuadrados de superficie que se pueden pintar con 6 cubetas de pintura.
- c. Si un pintor cobra 25 pesos por metro cuadrado y ha utilizado 6 cubetas de pintura, calcule sus emolumentos.

18. a. Calcule el área de un silo cilíndrico cuya base tiene radio 30 metros y su altura mide 35 metros.

b. Calcule el costo del silo, si el costo del metro cuadrado de base es 500 pesos y el costo de metro cuadrado de pared lateral es 800 pesos.

19. Investigue las equivalencias adecuadas y efectúe las transformaciones:

- a. 4000 metros a millas terrestres.
- b. 4000 pulgadas a metros.
- c. 800 nanómetros a pulgadas.
- d. 1 metro por segundo a kilómetros por hora.
- e. 12 millas por hora a pies por segundo.
- f. 0.60 metros cuadrados a pulgadas cuadradas.
- g. 0.50 yardas cuadradas a metros cuadrados.
- h. 25 litros a pies cúbicos.
- i. 250 litros a galones imperiales.
- j. 3 kilogramos a libras.
- k. 28 gramos a libras.

20. Investigue las equivalencias adecuadas y efectúe las transformaciones:

- a. 1 decímetro a kilómetros.
- b. 1 metro a pies.
- c. 2 segundos luz a kilómetros.
- d. 25 nanómetros a angstroms.
- e. 1 pie a decímetros.
- f. 1 semana a minutos.
- g. 100 a meses.
- h. 12 yardas cuadradas a decímetros cuadrados.

21. Rescriba como una multiplicación (puede utilizar decimales).

- a. $\frac{15}{5}$.
- b. $\frac{17}{2}$.
- c. $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8}$.
- d. $\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{10}}$.

22. Rescriba las frases como una razón.

- a. 12 naranjas por cuarenta pesos.
- b. 10 metros cada 2 segundos.
- c. 3 problema por hora.
- d. 25 pesos bimestrales.
- e. 20 metros cuadrados cada media hora.
- f. 33 litros por minuto.
- g. 12 grados por minuto.
- i. 473 mililitros por 12 pesos.

23. Transforme a las unidades que se indican.

- a. 60 kilómetros por hora a metros por segundo.
- b. 15 metros por segundo a kilómetros por hora.
- c. 1200 pesos por jornada de ocho horas a pesos por minuto.
- d. 0.08 metros cúbicos por minuto a litros por minuto.
- e. 30 litros por minuto a metros cúbicos por segundo.
- f. 60 piezas por ocho horas a piezas por minuto.

24. Determine el aumento o descuento neto.

- a. Dos descuentos, uno tras otro, del 20 y del 10 por ciento.
- b. Dos descuentos, uno tras otro, del 10 y del 30 por ciento.
- c. Dos descuentos, uno tras otro, del 30 y del 20 por ciento.
- d. Dos descuentos, uno tras otro, del 20 y del 30 por ciento.
- e. Dos aumentos, uno tras otro, del 10 y del 20 por ciento.
- f. Dos aumentos, uno tras otro, del 20 y del 80 por ciento.
- g. Dos aumentos, uno tras otro, del 80 y del 20 por ciento.
- h. Dos aumentos, uno tras otro, del 15 y del 15 por ciento.

25. Determine el aumento o descuento neto.

- a. Si al precio de un pastel que cuesta 300 pesos se le hacen dos descuentos sucesivos del 20 por ciento y 10 por ciento, ¿Cuál será su nuevo precio?
- b. El precio de una blusa es 800 pesos. Si al comprador se le hace un descuento del 10 por ciento, y luego un descuento del 30 por ciento, ¿Cuánto pagó el comprador?
- c. Al precio de un objeto se le hacen tres descuentos sucesivos: 20 por ciento, 50 por ciento y 210 por ciento, ¿cuál es el descuento en el precio?
- d. Un medicamento cuesta 100 pesos pero por los gastos de transporte se le hacen dos aumentos sucesivos de 40 por ciento y luego 20 por ciento, ¿Cuál será su nuevo precio?
- e. El Costo de una botella de licor es 240 pesos, pero para venderlo en la vinatería se le hacen dos aumentos

sucesivos del 20 por ciento y 25 por ciento. ¿Cuál será el precio de venta?

f. El salario mínimo recibió a inicio de año un aumento del 20 por ciento. En el mes de julio del mismo año recibe otro aumento del 10 por ciento. ¿En qué porcentaje aumentó el salario mínimo con respecto al salario mínimo del año pasado? (El salario mínimo del año pasado fue 2400 pesos), ¿cuál es el salario mínimo actual?

26. Decida la mejor opción en cuanto a precio más económico por unidad (longitud, peso, área, volumen, etc.).

- a. 473 mililitros por 12 pesos o 600 mililitros por 13 pesos.
- b. 2 litros por 27 pesos o 1.75 litros por 24 pesos.
- c. 900 gramos por 62 pesos o 1000 gramos por 66 pesos.
- d. 1 libra por 20 pesos o 500 gramos por 21 pesos.
- e. 10 onzas por 20 pesos o 250 gramos por 20 pesos.
- f. 10 stones por 200 pesos o 60 kilogramos por 190 pesos.
- g. 40 metros por 25 pesos o 42 yardas por 22 pesos.

27. Una tortillería tiene dos máquinas, M_1 y M_2 , en las que elaboran las tortillas. Suponga una producción diaria de 10000 tortillas.

El 70% de las tortillas las elabora la máquina M_1 y el resto en la máquina M_2 .

El 3% de las tortillas elaboradas por la máquina M_1 están quemadas.

El 8% de las tortillas elaboradas por la máquina M_2 están quemadas.

- a. Calcule el número de tortillas quemadas producidas por la máquina M_1 .
- b. Calcule el número de tortillas no quemadas producidas por la máquina M_2 .

28. En una ciudad la "población adulta" está compuesta por 50000 personas y se sabe que el 4% de ellas es diabético. Una prueba, llamada "glucemia basal", diagnostica correctamente el 95% de los diabéticos, pero da un 2% de falsos positivos (esto es, personas que NO tienen la enfermedad pero la prueba les señala como enfermos de diabetes). Después de realizar la prueba a una persona, se le diagnostica como enfermo de diabetes. Se aplica la prueba a todas las personas de la ciudad.

- a. Calcule el número de pruebas que marcarán a la persona como diabética.
- b. Calcule el número de pruebas que marcarán a la persona como no diabética.
- c. Calcule el número de pruebas que marcarán a la persona como diabética sin que ésta lo sea.

1.5

PATRONES Y FÓRMULAS

El alumno:

8. Reconocerá patrones numéricos y geométricos en situaciones problemáticas y modelará su comportamiento.

La necesidad del hombre de resolver problemas se desarrolló a la par de su evolución, en un principio la resolución de problemas se basó en la construcción de “recetas” que se aplicaron una y otra vez a problemas similares a los ya resueltos. Así, la observación repetida de las características de un problema fue fundamental para establecer conjeturas (en matemáticas, una **conjetura** se refiere a una afirmación que se supone cierta, pero que no ha sido probada ni refutada) sobre su solución. Una vez que se ha establecido una conjetura, posteriormente con estudios más detallados es posible determinar su veracidad, si éste es el caso, se transforma en una proposición (que puede ser clasificada como un teorema) y así utilizarse para construir o justificar otras afirmaciones. Por otra parte, estrechamente relacionado con el establecimiento de conjeturas se encuentra el proceso de razonar (o razonamiento), este proceso puede entenderse como la organización y estructuración de observaciones e ideas en la generación de conclusiones.

Definición 1.11

Una conjetura es un juicio u opinión obtenida sobre una característica de un problema, que se sustenta en observaciones repetidas.

Los procesos de construcción de conjeturas son los razonamientos, mismos que pueden ser clasificados en distintas categorías, sin embargo, los razonamientos que presenta mayor utilidad en la construcción de conjeturas se conocen como “razonamientos inductivos”.

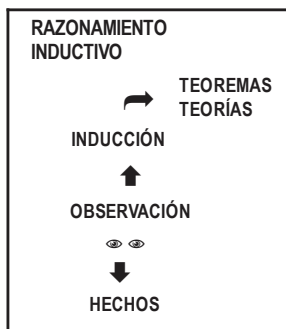


FIGURA 1.50

◆ EJEMPLO 1.59 (ESTABLECIENDO CONJETURAS)

a. Sea la sucesión (conjunto ordenado de números) de números 1, 4, 9, 16, 25. ¿Cuál es el número que sigue en la sucesión? La mayoría de las personas responderíamos que sigue el número 36. ¿Por qué? Porque al observar los números de la sucesión notamos que $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$ y $25 = 5^2$, entonces podemos establecer la conjetura de que sigue $36 = 6^2$. Establecimos como respuesta $36 = 6^2$ observando las características de los números de la sucesión, en particular, notando que los términos de la sucesión son los cuadrados de los números naturales consecutivos.

b. Sea la sucesión de números $3, 5, 7, \dots$, (los puntos suspensivos indican que los números continúan indefinidamente en el patrón en que se hayan establecido), podemos establecer la conjetura (razonando inductivamente) varias cosas, por ejemplo:

- Dado que los números $3, 5, 7, \dots$ son primos, el número que sigue es otro número primo, el 11.
- Dado que los números $3, 5, 7, \dots$ son impares, el número que sigue es otro número impar, el 9.

c. Al observar el patrón de comportamiento del arreglo numérico

```

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

```

Podemos establecer la conjetura: la siguiente línea contiene los números 1 6 15 20 15 6 1 (en ese orden).

d. Al observar el comportamiento de los productos:

```

1×1=1
11×11=121
111×111=12321
1111×1111=1234321
11111×11111=123454321

```

resulta lógico establecer las conjeturas: $111111 \times 111111 = 12345654321$ y $1111111 \times 1111111 = 1234567654321$, que son verdaderas, sin embargo, surge la pregunta ¿será verdadera para números con un mayor de dígitos 1?



A continuación utilizaremos los “números figurados” para ejemplificar razonamientos inductivos y establecimiento de conjeturas.

◆ EJEMPLO 1.60 (RAZONAMIENTOS INDUCTIVOS)

Una sucesión de números figurados, como su nombre lo indica, es un conjunto de números (ordenados) que resultan de contar los puntos (en un plano) necesarios en la construcción de polígonos que crecen de una forma específica.

a. La sucesión de los números triangulares $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36$ se obtuvo a partir del comportamiento de la configuración geométrica mostrada en la figura 1.51.

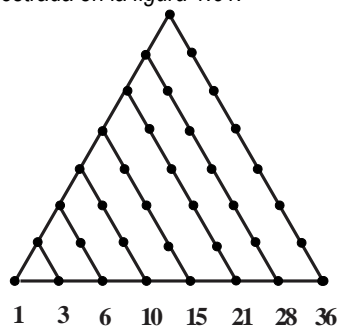


FIGURA 1.51

```

1 = 1
1 + 2 = 3
1 + 2 + 3 = 6
1 + 2 + 3 + 4 = 10
1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36

```

Por tanto, podemos suponer que los siguientes tres números triangulares son $36 + 9 = 45$, $45 + 10 = 55$ y $55 + 11 = 66$.

b. La sucesión de los números cuadrados $1, 4, 9, 16, 25$ se obtuvo a partir del comportamiento de la configuración geométrica mostrada en la figura 1.52.

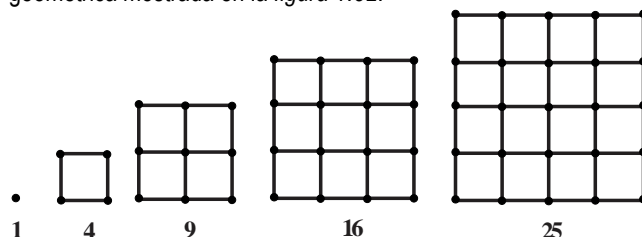


FIGURA 1.52

```

1 = 1
1 + 3 = 4
1 + 3 + 5 = 9
1 + 3 + 5 + 7 = 16
1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25

```

Por tanto, el siguiente par de números cuadrados son $1+3+5+7+9+11=36$ y $1+3+5+7+9+11+13=49$.

c. La sucesión de los números pentagonales 1, 5, 12, 22 se obtuvo a partir del comportamiento de la configuración geométrica mostrada en la figura 1.53.

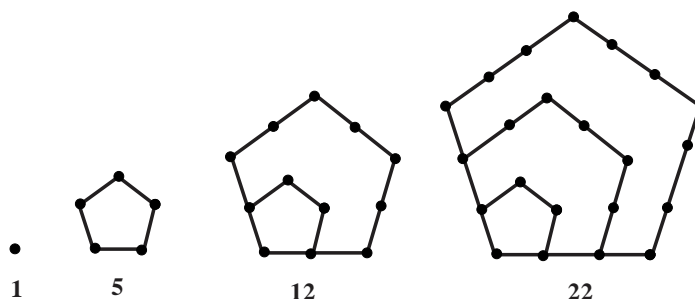


FIGURA 1.53

Los siguientes tres los números pentagonales son 35, 51 y 70.

◆ EJEMPLO 1.61 (CONJETURAS)

- Un número par positivo es un número entero que es divisible entre dos, los primeros números pares positivos son 2, 4, 6, 8, 10, ..., y pueden generarse con la relación $2n$ asignándole a n números enteros positivos.
- Los primeros números impares y positivos son 1, 3, 5, 7, 9, ..., mismos que se generan a partir de $2n-1$ asignando números enteros positivos a n .

En el ejemplo 1.62 se establecen "generalizaciones" a partir de observaciones de patrones de comportamiento.

◆ EJEMPLO 1.62 (CONJETURAS Y GENERALIZACIONES)

- Suma de los primeros n números naturales.

Observe:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1, \quad 1+2 = \frac{2(2+1)}{2} = 3, \quad 1+2+3 = \frac{3(3+1)}{2} = 6, \quad 1+2+3+4 = \frac{4(4+1)}{2} = 10, \quad 1+2+3+4+5 = \frac{5(5+1)}{2} = 15,$$

etc., por tanto, podemos generalizar las operaciones previas por $1+2+3+4+5+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Suma de los primeros n números impares (positivos).

Observe:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 = 1^2 \\ 1+3 &= 4 = 2^2 \\ 1+3+5 &= 9 = 3^2 \\ 1+3+5+7 &= 16 = 4^2 \\ 1+3+5+7+9 &= 25 = 5^2 \end{aligned}$$

Por tanto, la generalización de las observaciones previas es $1+3+5+7+9+11+\dots+(2n-1) = n^2$.

- Suma de los primeros n números pares (positivos).

Suponiendo válida la conjetura $1+2+3+4+5+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, podemos escribir $2(1+2+3+4+5+\dots+n) = n(n+1)$,

es decir, $2+4+6+8+10+\dots+2n = n(n+1)$.

◆ EJEMPLO 1.63 (GENERALIZACIONES)

- Los primeros números triangulares son 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, la figura 1.54 muestra que un número triangular es igual a una suma de números naturales consecutivos.

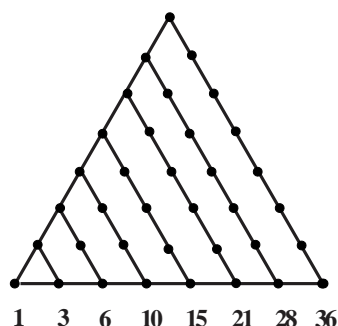


FIGURA 1.54

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+2 &= 3 \\ 1+2+3 &= 6 \\ 1+2+3+4 &= 10 \\ 1+2+3+4+5 &= 15 \\ 1+2+3+4+5+6 &= 21 \\ 1+2+3+4+5+6+7 &= 28 \\ 1+2+3+4+5+6+7+8 &= 36 \end{aligned}$$

Por tanto, si $T(n)$ representa el “enésimo” número triangular, entonces $T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. El sexto número triangular es

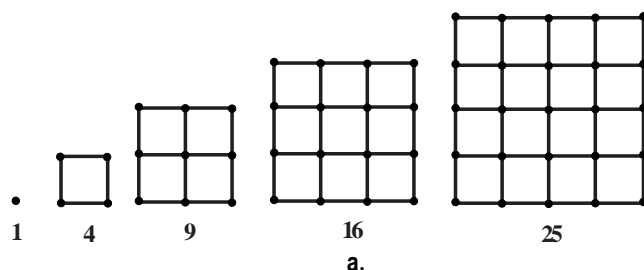
$$T(6) = \frac{6(6+1)}{2} = 21 \text{ y el décimo número triangular es } T(10) = \frac{10(10+1)}{2} = 55.$$

“Para calcular cualquier número triangular basta con multiplicar dos números consecutivos y dividirlos entre dos”.

b. Los primeros números cuadrados son 1, 4, 9, 16, 25, por tanto, si $C(n)$ representa el “enésimo” número cuadrado, entonces

$$C(n) = n^2$$

geométrica mostrada en la figura 1.55.a.



$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \\ 1+3+5+7+9 &= 25 \end{aligned}$$

b.

FIGURA 1.55

c. Los primeros números triangulares son 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, si sumamos pares de números triangulares consecutivos, obtenemos: $1+3=4$, $3+6=9$, $6+10=16$, $10+15=25$, $15+21=36$, etc.

Por tanto, es plausible la conjetura “si sumamos dos números triangulares consecutivos obtenemos un número cuadrado”.

◆ EJEMPLO 1.64 (El patrón I)

En cada una de las etapas del proceso mostrado en la figura 1.56 el número de cuadros se incrementa 5 unidades.

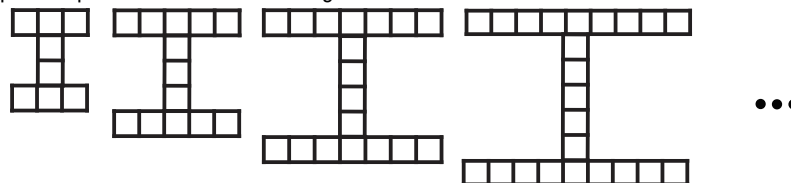


FIGURA 1.56

La secuencia de números que describe el número de cuadros es 8, 13, 18, 23, Note que la etapa posterior difiere de la anterior en 5 por lo que se puede establecer la conjetura “el número de cuadros de la etapa n ” es $5n+3$.

◆ **EJEMPLO 1.65 (CONJETURAS Y GENERALIZACIONES)**

a. Para construir la curva de Koch (descrita por el matemático sueco Helge von Koch en 1904) se triseca un segmento de recta, se elimina la parte central y posteriormente se sustituye por dos segmentos de recta de igual longitud al segmento que se eliminó, vea la *figura 1.57*. En las restantes etapas, se aplica el proceso antes descrito a todos los segmentos de recta.



FIGURA 1.57

Establecer una conjetura respecto al número de segmentos de recta utilizados en cada etapa a partir de la siguiente tabla:

Etapa	Número de segmentos de recta
0	$1 = 4^0$
1	$4 = 4^1$
2	$16 = 4^2$
3	$64 = 4^3$
4	$256 = 4^4$ (conjetura)

La tabla anterior hace suponer que el número de segmentos de recta de la curva de Koch se calcula con la expresión 4^n , en la que n representa el número de etapa.

b. Para establecer una conjetura respecto a la forma en que varía la longitud de cada uno, de los segmentos rectilíneos (de menor tamaño) que integran a la curva de Koch, consideremos la siguiente tabla.

Etapa	Número de segmentos de recta
0	$1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$
1	$\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1$
2	$\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$
3	$\frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$
4	$\frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$ (conjetura)

Podemos generalizar los resultados observados indicando que las longitudes de los segmentos rectilíneos agregados en la etapa n son $\left(\frac{1}{3}\right)^n$.



◆ **EJEMPLO 1.66 (CONJETURAS Y GENERALIZACIONES)**

El matemático polaco Wacław Sierpinski (1882-1969), construyó la figura geométrica conocida como triángulo de Sierpinski en 1919 del modo siguiente:

Etapa inicial (0): Construimos un triángulo equilátero de lado de longitud a .

Etapa 1: Utilizando segmentos de recta se unen los puntos medios de la etapa inicial, se genera otro triángulo y se pinta de negro.

Etapa 2: Utilizando segmentos de recta se unen los puntos medios de los triángulos blancos de la etapa 1, se generan tres triángulos y se pintan de negro.

Etapa 3: Utilizando segmentos de recta se unen los puntos medios de los triángulos blancos de la etapa 2, se generan tres triángulos y se pintan de negro.

El proceso antes descrito continúa indefinidamente.

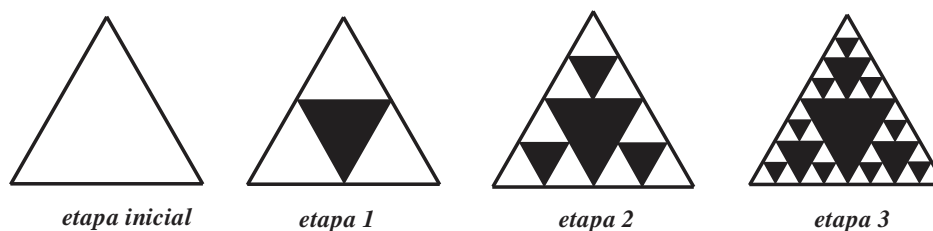


FIGURA 1.58

- Se puede establecer (la conjetura) que la longitud de lado de los triángulos que son construidos en la etapa n es $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- Se puede establecer (la conjetura) de que en la etapa n contiene 3^{n-1} triángulos negros.
- Se puede establecer (la conjetura) de que la etapa n contiene 3^n triángulos blancos.

◆ EJEMPLO 1.67 (CONJETURAS Y GENERALIZACIONES)

El “Triángulo de Pascal” es una sucesión de números naturales que han sido ordenados en forma de triángulo. En esta sucesión el número de cada casilla es la suma de los números de las dos casillas contiguas que se encuentran encima de ella. Las líneas de números inician y se terminan con números 1. El siguiente arreglo numérico es parte del desarrollo del triángulo de Pascal.

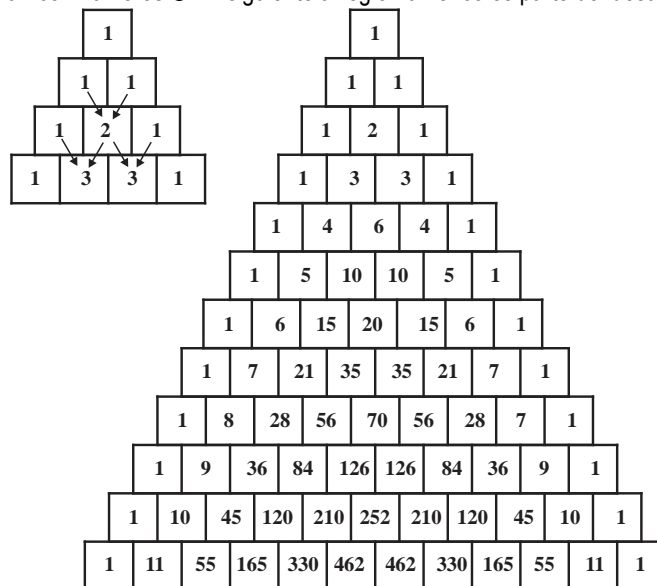


FIGURA 1.59

Se pueden establecer que las siguientes dos líneas de números del triángulo de Pascal son:

1, 12, 66, 220, 495, 792, 924, 792, 495, 220, 66, 12, 1

y

1, 13, 78, 286, 715, 1287, 1716, 1716, 1287, 715, 286, 78, 13, 1

Ejercicios 1.5

1. Establezca una conjetura sobre el número que es más probable que siga. Establezca una relación (fórmula) para determinar los números de la sucesión.

a. 4, 8, 12, 16, 20, 24, ...

b. 1, 3, 7, 15, 31, ...

c. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \dots$

d. -1, 2, -3, 4, -5, 6, ...

2. Observe la siguiente tabla y establezca conjeturas sobre las operaciones que siguen.

$$37 \times 3 = 111$$

$$37 \times 6 = 222$$

$$37 \times 9 = 333$$

$$37 \times 12 = 444$$

¿Qué ocurre cuando el segundo factor es 30?, explique.

3. En cada lista establezca una conjetura sobre la igualdad que sigue.

a.

$$(1 \times 9) + 2 = 11$$

$$(12 \times 9) + 3 = 111$$

$$(123 \times 9) + 4 = 1111$$

$$(1234 \times 9) + 5 = 11,111$$

b.

$$15873 + 7 = 111,111$$

$$15873 + 14 = 222,222$$

$$15873 + 21 = 333,333$$

$$15873 + 28 = 444,444$$

c.

$$34 \times 34 = 1156$$

$$334 \times 334 = 111,556$$

$$3334 \times 3334 = 11,115,556$$

4. La sucesión 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 715, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, ...

recibe el nombre de sucesión de Fibonacci. Establezca una fórmula para determinar cada uno de los números que la componen.

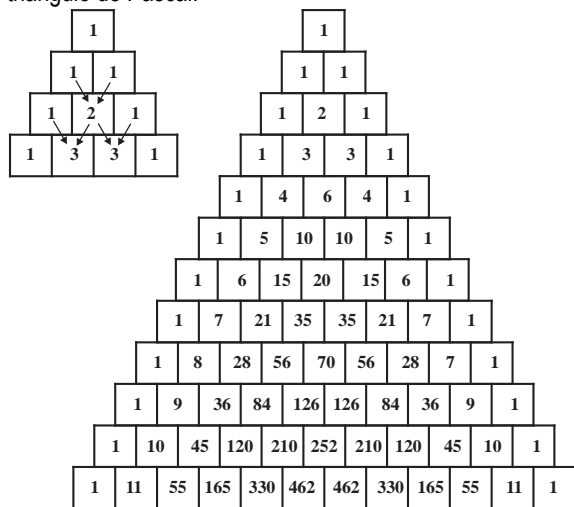
5. Números poligonales

La tabla (que se encuentra incompleta) resume algunas características de los primeros diez grupos de números poligonales, complétela.

NOMBRE	"FÓRMULA"	LOS PRIMEROS DIEZ	SUCESIÓN DE DIFERENCIAS (POSTERIOR MENOS ANTERIOR)
TRIANGULAR (3 lados)	$\frac{1}{2}n(n+1)$	1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
CUADRADO (4 lados)	$\frac{1}{2}n(2n-0)$	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100	
PENTAGONAL (5 lados)	$\frac{1}{2}n(3n-1)$		1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28
HEXAGONAL (6 lados)		1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190	
HEPTAGONAL (7 lados)		1, 7, 18, 34, 55, 81, 112, 148, 189, 235	1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46
OCTOGONAL (8 lados)	$\frac{1}{2}n(6n-4)$		1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55
ENEAGONAL (9 lados)			
DECAGONAL (10 lados)	$\frac{1}{2}n(8n-6)$	1, 10, 27, 52, 85, 126, 175, 232, 297, 370	1, 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57, 65, 73
ENDECAGONAL (11 lados)		1, 11, 30, 58, 95, 141, 196, 260, 333, 415	
DODECAGONAL (12 lados)		1, 12, 33, 64, 105, 156, 217, 288, 369, 460	1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91
TRIDECAGONAL (13 lados)	$\frac{1}{2}n(11n-9)$		
TETRADECAGONAL (14 lados)			

6. Triángulo de Pascal

El siguiente arreglo numérico es parte del desarrollo del triángulo de Pascal.



- Determine una "fórmula" que proporcione la suma de los números por fila.
- Determine una "fórmula" que proporcione la suma de los números de la segunda diagonal (de arriba hacia abajo y derecha a izquierda a izquierda).
- Establezca una conjetura respecto a los números de la tercera diagonal (de arriba hacia abajo y derecha a izquierda), qué tipo de números son ¿Cómo se calculan?
- Establezca una conjetura respecto a la suma de dos números consecutivos de la tercera diagonal (de arriba hacia abajo y derecha a izquierda), qué tipo de números son. ¿Cómo se denominan estas sumas?
- Seleccione las filas en las que el segundo número es primo, ¿Qué observa respecto a los números restantes de cada una de esas filas (establezca una conjetura al respecto)?
- Suponga que cada fila está compuesta por los dígitos de un número, ¿Qué conjetura puede establecer respecto al número 11?
- A partir de un número 1 sume los números de la diagonal y compare su resultado con el número de la fila siguiente que se encuentra en "diagonal contraria", ¿qué puede decir?, establezca una conjetura al respecto.

7. Conjunto de Cantor (Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor matemático ruso 3 de marzo de 1845, San Petersburgo).

Etapa inicial (0): Trace un segmento rectilíneo de longitud uno.

Etapa 1: Divida el segmento rectilíneo en tres partes iguales y elimine el tercio central.

Etapa 2: Divida cada uno de los dos segmentos rectilíneos restantes en tres partes y elimine las partes centrales.

El proceso antes descrito concluye a las n etapas.

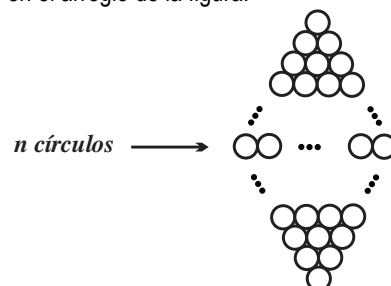
Obtenga (conjeture) fórmulas generales respecto a:

a. Al número de segmentos rectilíneos en términos del número de etapa.

b. La longitud de cada segmento rectilíneo en términos del número de etapa.

8. Círculos

Construya un modelo que proporcione el número de círculos en el arreglo de la figura.

**9. Pares**

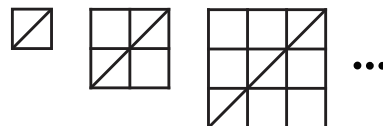
a. Asistieron n personas a una reunión, cada asistente saludó una sola vez a los otros, los saludos se hicieron con un apretón de manos. Construya un modelo matemático que describa el número de apretones de mano.

b. En un torneo participan n equipos, cada equipo juega una sola vez con los otros. Construya un modelo matemático que describa el número de apretones de mano.

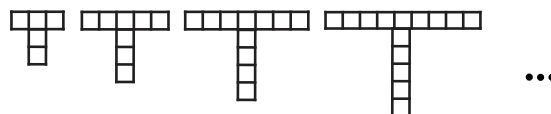
c. Construya un modelo matemático para determinar el número de diagonales de un polígono (convexo) con n lados.

10. Número de triángulos

Construya un modelo que proporcione el número máximo de triángulos en el siguiente proceso: en el arreglo de la figura.

**11. El patrón T**

Construya un modelo que proporcione el número máximo de cuadrados en los arreglos "T".

**12. El patrón T**

Construya un modelo que proporcione el número de segmentos rectilíneos en los arreglos de la forma:

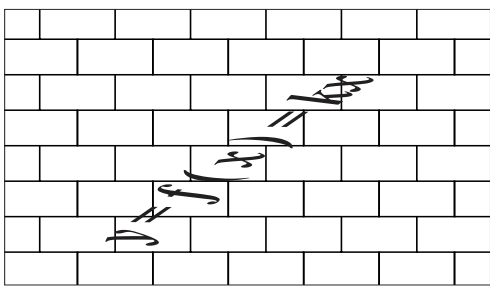


2

VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL Y FUNCIONES LINEALES

PROPÓSITOS

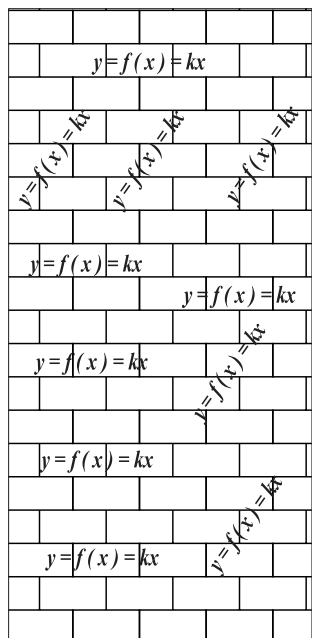
Al finalizar la unidad el alumnado modelará y analizará situaciones que involucren la variación entre dos cantidades en los casos en que la razón de sus incrementos sean proporcionales; utilizando los registros tabular, gráfico y algebraico, con la finalidad de que se inicie en el estudio de la variación, la idea de relación funcional, sus conceptos asociados y, continúe la comprensión del lenguaje algebraico como la representación de la generalidad.

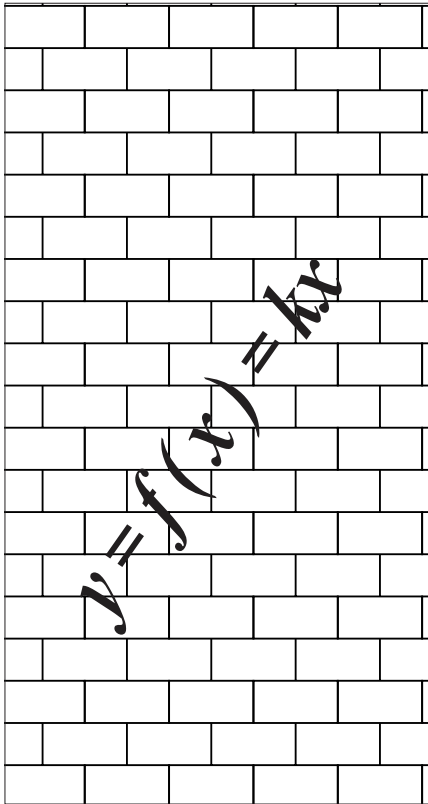


CONTENIDO

2.1 VARIACIÓN, VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL Y EL SISTEMA CARTESIANO

- El concepto de variación entre dos magnitudes
- Variable independiente y variable dependiente
- Razón de cambio entre dos variables correlacionadas
- Representación tabular de la variación directamente proporcional entre dos magnitudes
- El patrón aditivo en una variación directamente proporcional
- El punto como representación de “estados” específicos de la variación
- Convenciones sobre las escalas
- El patrón gráfico de una variación directamente proporcional.
- Interpretación de los puntos del patrón gráfico como estados de la variación no registrados en una representación tabular
- El punto en el origen y la inclinación del gráfico como





indicadores esenciales de una variación directamente proporcional

- $y=kx$ como representación de una variación directamente proporcional
- Análisis contextual de la expresión simbólica $y=kx$
- El parámetro “ k ” como la rapidez de variación o razón de cambio
- El parámetro “ k ” como indicador de la inclinación del gráfico de la variación
- La constancia de “ k ” en una variación directamente proporcional

2.2 LA FUNCIÓN LINEAL Y SU ANÁLISIS

- El concepto de función lineal
- Representación analítica de una función lineal
- Identificación de los elementos definitorios de una función lineal empleando las representaciones gráficas y analíticas:
- Condición inicial.
- Rapidez de variación.

$$y = f(x) = kx$$

2.1

VARIACIÓN, VARIACIÓN
DIRECTAMENTE PROPORCIONAL
Y EL SISTEMA CARTESIANO**El alumno:**

1. Identificará situaciones donde existe variación entre dos magnitudes.
2. Dada una situación donde existe variación entre dos cantidades, el alumno identificará los elementos que corresponden a los conceptos de variable dependiente e independiente, la razón de cambio y su cálculo dado un incremento de la variable independiente.
3. El alumno será capaz de traducir en una tabla de valores algunos “estados” correspondientes a la descripción verbal de la variación directamente proporcional entre dos magnitudes.
4. El alumno será capaz de traducir en una gráfica, la descripción tabular o verbal de la variación relacionada (directamente proporcional) entre dos cantidades y usará esta representación para obtener información sobre la variación.
5. El alumno será capaz de representar algebraicamente la variación directamente proporcional entre dos cantidades y obtener a partir de ella información sobre ésta.

Una característica de, una persona, un objeto o una cosa, es una cualidad que define su naturaleza propia y que la distingue de otras personas, objetos o cosas de su misma especie, como ejemplos de características de una persona son: la estatura, el peso, su volumen, su temperatura, su envergadura, su número de cabellos, su edad, el color de ojos, etc. Entre las características de los objetos destacan: la masa, el peso, el volumen, la densidad, su composición, la dureza, su maleabilidad, el costo, la durabilidad, su forma, su estado de agregación, entre otras.



FIGURA 2.1

Intencionalmente hemos omitido otro tipo de características variables de los objetos (tales como color, el olor, el sabor, el tacto, el dolor, la alegría, la pereza, la estulticia, etc.) que a diferencia de las variables antes señaladas no es posible medirlas en el sentido de que exista un patrón o escala de medición, es decir no podemos asignarles un número. En esta obra no son de nuestro interés este tipo de características y sólo trataremos con aquellas que sean variables (cambien) y que sea posible medirlas. Definamos el término de “variable”.

DEFINICIÓN 2.1 (VARIABLE)

- a. Una característica de un objeto es variable cuando es susceptible de tomar (o es posible asignarle) distintos valores numéricos.
- b. Es común representar a las variables con las últimas letras minúsculas del alfabeto.

$$(x)$$

FIGURA 2.2

◆ EJEMPLO 2.1 (VARIABLES)

Son ejemplos de variables:

- a. x = "tiempo que tarda en comer una persona".
- b. y = "tiempo de duración de una llamada telefónica".
- c. z = "número de caracteres utilizados en un mensaje".
- d. w = "volumen de agua que se gasta en una casa".
- e. z = "volumen de agua consumido por una persona en un día".



En ciertas situaciones una *variable* sólo asume, o si es el caso sólo se le pueden asignar ciertos números, el conjunto constituido por estos números se llama *dominio de la variable*.

◆ EJEMPLO 2.2 (DOMINIO DE UNA VARIABLE)

- a. La variable t = "tiempo que tarda en comer una persona", sólo toma valores positivos ($t > 0$), es decir, su dominio es una (una) parte de los números reales positivos.
- b. La variable y = "número de cigarros que fumados por una persona al día, sólo asume (o en su caso se le asignan) números positivos ($y > 0$); es decir su dominio es (una parte) el conjunto de los números reales positivos.
- c. La variable z = "número de personas que acuden a una sala de cine", sólo tiene sentido para números enteros positivos, por tanto, su dominio son los números naturales".



Frecuentemente, en los objetos, las personas o cosas, las variables están relacionadas, es decir, al cambiar una de ellas pueden cambiar otras (en esta obra sólo se contempla la forma en que se relacionan dos variables).

◆ EJEMPLO 2.3 (PARES DE VARIABLES RELACIONADAS POR UNA IGUALDAD)

Son ejemplos de pares de variables relacionadas:

- a. x = "tiempo que tarda en comer una persona" y y = "cantidad de comida que come".
- b. x = "tiempo que dura una llamada telefónica" y y = "costo de la llamada".
- c. x = "número de caracteres utilizados en un mensaje" y z = "costo del mensaje".
- d. x = "volumen de agua utilizado al día una casa" y z = "costo por el servicio".



◆ EJEMPLO 2.4 (OTROS PARES DE VARIABLES RELACIONADOS)

- a. La longitud l del lado de un cuadrado con su perímetro P , la relación entre ambas variables está dada por $P = 4l$.
- b. El perímetro P de una pizza circular y la longitud de su radio r , así la relación entre ambas variables es $P = 2\pi r$.
- c. La longitud del perímetro (suma de las longitudes de las aristas) P de un cubo y la longitud l de uno de una de sus aristas, así estas variables están relacionadas por $P = 12l$.



Supongamos que dos variables están relacionadas, que asignamos valores (números) a una de ellas y que como consecuencia de ello la otra variable también cambia, es decir, los valores de las variables dependen del número (o valor) que hayamos asignado a la otra variable, por ejemplo:

- i. La longitud del perímetro P de un cuadrado depende de la longitud l de uno de sus lados.
- ii. El área A de una pizza (circular y grueso fijo) depende de la longitud del radio r .
- iii. El volumen V de una tortilla circular (hablando estrictamente, cilíndrica) de radio de longitud constante r_0 depende su grosor (longitud de la altura h).

En una relación entre dos variables, a la variable a la que le son asignados los valores (números) recibe el nombre de variable independiente y la variable (cuyo valor) que depende del número que se haya asignado a la variable independiente, se conoce como variables dependiente.

DEFINICIÓN 2.2 (VARIABLE INDEPENDIENTE Y VARIABLE DEPENDIENTE)

En una relación entre dos variables:

- La variable a la que le son asignados los números se denomina “*variable independiente*”.
- La variable cuyos valores dependen del número asignado a la variable independiente se denomina “*variable dependiente*”.

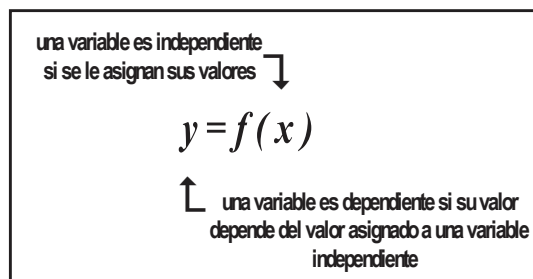


FIGURA 2.3

◆ EJEMPLO 2.5 (OTROS PARES DE VARIABLES RELACIONADAS)

a. La altura de una persona depende de su edad.

Si h representa la altura de una persona y t edad, entonces $h = h(t)$, donde t es la variable independiente y h es la variable dependiente, significa que la altura de una persona depende de su edad.

b. El precio de una torta depende de los costos de los ingredientes utilizados en su elaboración. Si c representa el costo de la torta y x el costo de los ingredientes, entonces $c = c(x)$, x es la variable independiente y c la variable dependiente.

c. El costo por transporte que paga una persona depende de la distancia entre los lugares de origen y de destino. Si c representa el costo por transporte y x la distancia entre los lugares, entonces $c = c(x)$, donde x la variable independiente y c la variable dependiente.

d. El costo de una llamada efectuada desde un celular depende del tiempo de su duración.

Si p representa el costo de la llamada y t el tiempo que dura la llamada, en la relación $p = p(t)$, t es la variable independiente y p la variable dependiente, $p = p(t)$ significa que el costo de una llamada depende del tiempo de su duración.

**NOTA**

El uso de la notación $f(x)$ para relacionar dos variables es de gran utilidad en matemáticas, sin embargo, por el momento la omitiremos.

El cambio o variación de una variable (o característica) de un objeto se puede medir de distintas formas, por ejemplo, si x representa la variable asociada a una característica de un objeto el cambio entre sus valores x_1 y x_2 se puede medir:

i. Restando sus valores x_1 y x_2 , hecho que representamos como $\Delta x = x_2 - x_1$.

ii. Dividiendo sus valores x_1 y x_2 ($\frac{x_2}{x_1}$ siempre que $x_1 \neq 0$).

En el primero de los casos el número x_2 es $x_2 - x_1$ unidades mayor que el número x_1 y en el segundo caso el resultado de

$\frac{x_2}{x_1}$ indica el número de veces que x_1 está contenido en x_2 .

◆ EJEMPLO 2.6 (COMPARACIÓN DEL CAMBIO EN UNA CARACTERÍSTICA)

a. Suponga que la variable x representa el costo del litro de gasolina. Si el precio del litro de gasolina en el mes de abril fue 15 pesos y si actualmente es 20 pesos, entonces la variable x cambia de $x_1 = 15$ a $x_2 = 20$ pesos, así

$\Delta x = 20 - 15 = 5$ pesos, es decir, hubo un incremento de 5 pesos.

$\frac{x_2}{x_1} = \frac{20}{15} = 1.\bar{3}$, el costo final es $1.\bar{3}$ veces el costo inicial.

b. Sea $y =$ “cambio de la estatura de una persona”.

Si la persona pasa de 156 a 176 centímetros en 5 años, entonces $\Delta y = 176 - 156 = 20$ centímetros. La estatura de la persona se ha incrementado en veinte centímetros.

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{176}{156} = \frac{44}{39} = 1.\overline{1282051}, \text{ la estatura final de la persona es } 1.\overline{1282051} \text{ veces la estatura inicial.}$$

c. Sea z = "el peso de una persona".

Si el peso de la persona antes de incluir en su dieta diaria cierto alimento era 60 kilogramos y luego fue 75 kilogramos, entonces el incremento es $\Delta z = 75 - 60 = 15$ kilogramos.

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{75}{60}, \text{ entonces el peso final es } 1.25 \text{ veces el peso inicial.}$$



En muchas situaciones, cuando dos variables se encuentran relacionadas (una de ellas depende de la otra) por una regla específica, al cambiar los números asignados a una de ellas muy probablemente cambiarán los números asignados a la otra, en estos casos el cociente de las diferencias de los cambios recibe el nombre de razón de cambio. Si la variable x cambia del número x_1 al número x_2 y la variable y (que depende de la variable x) lo hace del número y_1 al número y_2 , entonces la

razón de cambio de la variable la variable y respecto al cambio en la variable x es el número $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

DEFINICIÓN 2.3 (RAZÓN DE CAMBIO)

Sean $x_1 \neq 0$ y x_2 asignaciones a la variable x .

a. Si la variable x cambia de x_1 a x_2 , entonces su razón de cambio es $\frac{x_2}{x_1}$.

b. Si la variable x cambia de x_1 a x_2 y la variable y (que depende de la variable x) lo hace de y_1 a y_2 , entonces la razón de cambio entre ambas variables es el número $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, siempre que $x_1 \neq x_2$.

La figura 2.4 muestra la forma en que cambian las dos variables h y r que se encuentran relacionadas.

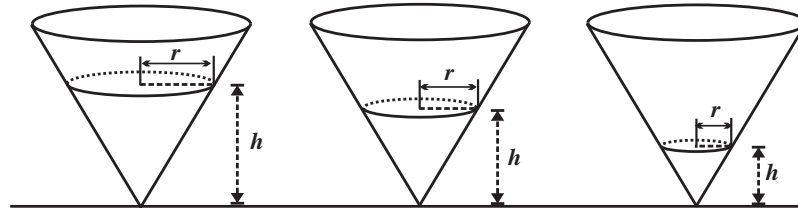


FIGURA 2.4

◆ EJEMPLO 2.7 (CÁLCULO DE RAZONES DE CAMBIO)

a. Si un globo (esférico) tiene inicialmente un radio de longitud $r_1 = 2$ centímetros y posteriormente alcanza un radio de longitud $r_2 = 4$ centímetros, entonces:

i. La razón de cambio en el radio r del globo es $\frac{r_2}{r_1} = \frac{4}{2} = 2$.

ii. La razón de cambio del volumen del globo es $\frac{V(4)}{V(2)} = \frac{\frac{4}{3}\pi(4)^3}{\frac{4}{3}\pi(2)^3} = 8$.

iii. La razón de cambio del volumen al cambiar el radio es $\frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{\frac{4}{3}\pi(4)^3 - \frac{4}{3}\pi(2)^3}{4 - 2} = \frac{2}{3}\pi((4)^3 - (2)^3)$ centímetros cúbicos por centímetro.

b. Un bloque de hielo cúbico tiene aristas de longitud $l_1 = 40$ centímetros, suponiendo que se derrite (sin cambiar su forma) hasta que sus aristas tienen longitud de $l_2 = 10$ centímetros, entonces:

i. La razón de cambio de la longitud de una arista es $\frac{l_2}{l_1} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$.

ii. Puesto que $V(l) = l^3$, entonces $V(40) = (40)^3$ y $V(10) = (10)^3$, por tanto, la razón de cambio del volumen es $\frac{V(10)}{V(40)} = \frac{(10)^3}{(40)^3} = \frac{1}{64}$.

iii. Para calcular la razón de cambio de su área recordemos que ésta se calcula por medio de la relación $A(l) = 6l^2$, entonces $A(40) = 6(40)^2$ y $A(10) = 6(10)^2$, por tanto $\frac{A(10)}{A(40)} = \frac{6(10)^2}{6(40)^2} = \frac{1}{16}$.

iv. La razón de cambio del volumen del cubo respecto al cambio en su área es $\frac{\Delta V}{\Delta A} = \frac{V_2 - V_1}{A_2 - A_1} \frac{4-1}{16-1} = \frac{1}{5}$, centímetros cúbicos por centímetro.

c. Una gota de tinta cae sobre una tela y luego se expande sobre ella en forma circular, si inicialmente el radio de la mancha mide $r_1 = 2$ milímetros y luego aumenta a $r_2 = 5$ milímetros, entonces:

i. La razón de cambio del radio de la mancha es $\frac{r_2}{r_1} = \frac{5}{2}$.

ii. La razón de cambio del área de la mancha es $\frac{A(r_2)}{A(r_1)} = \frac{A(5)}{A(2)} = \frac{\pi(5)^2}{\pi(2)^2} = \frac{25}{4}$.



En esta sección sólo trataremos con dos variables relacionadas, por ejemplo las variables x e y , en donde la variable x es una variable independiente (nosotros le asignaremos los valores) y variable y depende de la variable x , siendo $y = kx$ la forma en que se relacionan (bajo la suposición de que k un número distinto a cero).

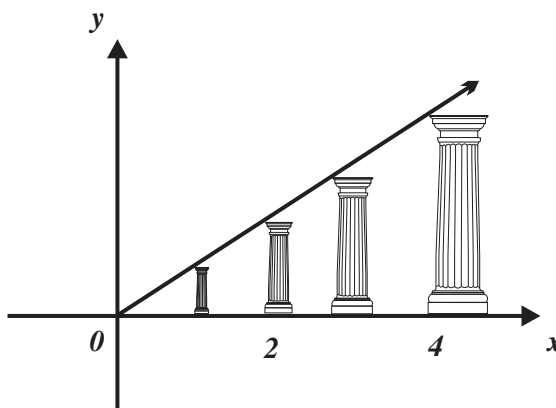


FIGURA 2.5

DEFINICIÓN 2.4 (VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL)

a. Si las variables x y y están relacionadas por medio de la ecuación $y = kx$ para alguna constante $k \neq 0$, se dice que y varía de forma directamente proporcional con x (ó simplemente que y es proporcional a x).

b. El número $k \neq 0$ se conoce como constante de proporcionalidad.

La figura 2.6 muestra un esquema de la relación de variación directamente proporcional.

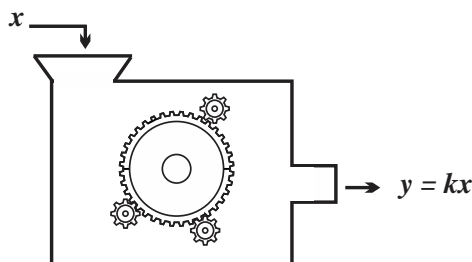


FIGURA 2.6

NOTA

En la literatura resulta común referirse al hecho de que “ y varíe de forma directamente proporcional con x ”, diciendo que las variables son directamente proporcionales o que están en proporción directa.

Utilizaremos la notación $y(x) = kx$ para indicar que las variables x e y están relacionadas directamente, que la variable independiente es x y que la variable dependiente es y . Por otra parte, la expresión $y(x)$ se lee “ y de x ” y no debe interpretarse como una multiplicación.

Explique: ¿Por qué en la relación de variación directa $k \neq 0$? ¿Qué ocurre si $k = 0$? ¿si y varía directamente con la variable x , entonces x varía directamente proporcional con y . ¿Por qué?

◆ EJEMPLO 2.8 (VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL)

- El costo “ y ” por un número específico de “latas de cerveza” (iguales) varía directamente respecto al número “ n ” de latas adquiridas, por tanto, la relación de variación directa es $y(n) = kn$, en donde la constante de proporcionalidad k representa el precio de una lata de cerveza.
- Si un kilogramo de “carnitas” cuesta \$330.00, entonces el monto a pagar (representado por p) es proporcional a la cantidad “ c ” de “carnitas” adquiridas y la relación entre ambas variables es $p(c) = 330c$ pesos. La constante de proporcionalidad es $k = 330$, el precio de un kilogramo de “carnitas”.
- La longitud de una circunferencia es proporcional a la longitud de su radio r y está dado por la relación $p(r) = 2\pi r$, en este caso la constante de proporcionalidad es el número $k = 2\pi$.
- La distancia d recorrida por un móvil (a velocidad constante de 13 kilómetros por minuto) es proporcional al tiempo t que emplea en el recorrido, entonces $d(t) = 13t$, la constante de proporcionalidad $k = 13$ representa la velocidad del móvil.



Una vez que se conoce la constante de proporcionalidad entre dos variables (relacionadas directamente) y se asigna un número a una de ellas, la realización de un producto proporciona el valor correspondiente de la otra.

◆ EJEMPLO 2.9 (OBTENCIÓN DE VALORES EN UNA RELACIÓN DE VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL)

Suponga que un kilogramo de “carnitas” cuesta \$330.00.

- La cantidad a pagar por x gramos de “carnitas” es $p(x) = 330x$, en particular:
 - Por 250 gramos de “carnitas” se pagarán $p(0.250) = 330(0.250) = 82.50$ pesos.
 - Por 318 gramos de “carnitas” se pagarán $p(0.318) = 330(0.318) = 104.94$ pesos.
 - Por 720 gramos de “carnitas” se pagarán $p(0.720) = 330(0.720) = 237.60$ pesos.
 - Por 1.75 kilogramos de “carnitas” se pagarán $p(1.750) = 330(1.750) = 577.50$ pesos.
- También pueden responderse preguntas como ¿qué cantidad de “carnitas” se adquieren con p pesos?, esto se consigue “despejando” la variable de interés.

Si $p = 230x$, entonces $x = \frac{1}{230}p$, suponiendo que la variable x depende de la variable p podemos escribir $x(p) = \frac{1}{230}p$.

Volviendo al problema de las “carnitas”, algunos casos particulares son:

i. Con 80 pesos podemos adquirir $x(80) = \frac{1}{330}80 = 0.242$ kilogramos de “carnitas”.

ii. Con 345 pesos podemos adquirir $x(345) = \frac{1}{330}345 = 1.045$ kilogramos de “carnitas”.

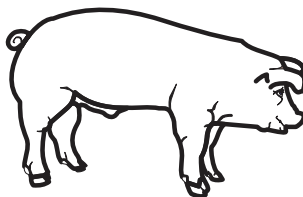


FIGURA 2.7



A Continuación trataremos algunas propiedades de la relación de variación directa.

Asignemos a la variable x de la relación de variación directa $y = kx$ los números x_1 y x_2 , si representamos por y_1 y y_2 los valores respectivos de la variable y obtenemos $y_1 = kx_1$ y $y_2 = kx_2$; si despejamos la constante de proporcionalidad k de

ambas relaciones obtenemos $k = \frac{y_1}{x_1}$ y $k = \frac{y_2}{x_2}$, por tanto, $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$, esta última expresión es equivalente a las proporciones

(igualdad de dos razones) $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}$ o $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

PROPIEDAD 2.1 (RELACIÓN DE VARIACIÓN DIRECTA SIN CONSTANTE)

Supongamos que la variable x cambia de x_1 a x_2 y que la variable y lo hace de y_1 a y_2 , entonces denominaremos relación de variación directa sin constante a la expresión $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}$ o $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$, siempre que x_1 , x_2 , y_1 y y_2 no sean cero.

La expresión $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}$, se lee “ x_1 es a x_2 como y_1 es a y_2 ”, es de gran utilidad cuando se pretende determinar uno de los números x_1 , x_2 , y_1 y y_2 son conocidos los otros tres (bajo la suposición de que las variables involucradas lo hacen directamente).

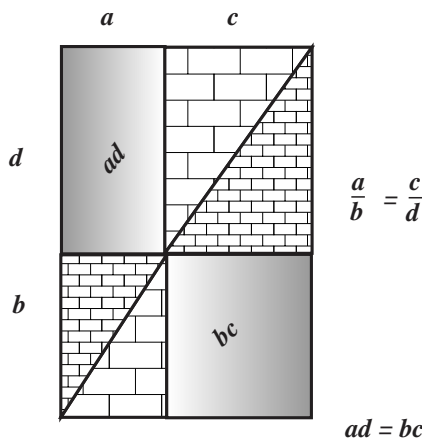


FIGURA 2.8

◆ **EJEMPLO 2.10 (OBTENCIÓN DE UN VALOR EN UNA RELACIÓN DE VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL)**

a. Supongamos que x e y son variables directamente proporcionales y que $y_1 = 40$ cuando $x_1 = 8$. Para determinar y_2 cuándo $x_2 = 10$, conviene sistematizar la información, por ejemplo, con una tabla:

	x	y
Valores iniciales	8	40
Valores finales	10	y_2

Por tanto, si sustituimos en $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}$ obtenemos $\frac{10}{8} = \frac{y_2}{40}$ y en consecuencia $y_2 = 50$.

b. Supongamos que a y b varían en forma directamente proporcional, y que $b_2 = 7$ cuando $a_2 = 2$. Para determinar b_1 cuándo $a_1 = 5$. Sistematizamos la información:

	a	b
Valores iniciales	5	b_1
Valores finales	2	7

Si sustituimos en $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ obtenemos $\frac{5}{2} = \frac{b_1}{7}$, de donde $b_1 = 17.5$.



NOTA

Los símbolos $y(x) = kx$ indican que en una relación de variación directamente proporcional x es la variable independiente y que la variable y depende de la variable x .

Por otra parte, utilizando el par x_1, y_1 es posible determinar la constante de proporcionalidad en $y(x) = kx$, esto se consigue sustituyendo los datos conocidos y realizando un “despeje”.

◆ **EJEMPLO 2.11 (OBTENCIÓN DE LA CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD)**

En cada caso determinaremos la constante de proporcionalidad y la relación de variación directa.

a. Si y varía directamente con x y $y = 6$ cuando $x = 2$, entonces $y = kx$ o $\frac{y}{x} = k$, de dónde $k = \frac{6}{2} = 3$ y en consecuencia $y(x) = 3x$.

b. Si z varía directamente con w y $z = \frac{1}{5}$ cuando $w = \frac{1}{2}$, entonces $z = kw$ o $\frac{z}{w} = k$, luego $k = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$ y $z(w) = \frac{2}{5}w$.

c. Si a varía directamente con b y $a = -\frac{1}{3}$ cuando $b = \frac{2}{5}$, entonces $a = kb$ o $\frac{a}{b} = k$, de dónde $k = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}} = -\frac{5}{6}$ luego $a(b) = -\frac{5}{6}b$.



Un caso particular de la relación de variación directa (entre dos variables) es la “regla de tres”

◆ **EJEMPLO 2.12 (APLICACIONES DE LA RELACIÓN DE VARIACIÓN DIRECTA)**

En todos los casos supondremos que existe una relación de variación directa entre las variables involucradas.

a. Suponga que un abogado cobra a razón de 1000 pesos por hora asesoría. ¿Cuánto tendrá que pagar uno de sus clientes por 50 minutos de asesoría?

Sean las variables: i = “ingresos del abogado” y t = “tiempo de asesoría”, entonces

$i_1 = 1000$ si $t_1 = 1$, debemos calcular i_2 cuando $t_2 = \frac{5}{6}$. Sistematizando la información en la tabla

	i	t
Valores iniciales	1000	1
Valores finales	i_2	$\frac{5}{6}$

Por tanto, $\frac{i_2}{1000} = \frac{\frac{5}{6}}{1}$ o $i_2 = 1000 \frac{5}{6} = 833.\bar{3}$ pesos. Es decir, cobrará 833. $\bar{3}$ pesos.

b. Un banco cobró 140 pesos de interese sobre una deuda de 2000 pesos (a una tasa de interés fija). Para determinar los intereses que cobrará por un adeudo de 3517 pesos, sistematizamos la información en una tabla;

	i	d
Valores iniciales	140	2000
Valores finales	i_2	3517

así $\frac{i_2}{140} = \frac{3517}{2000}$, de donde $i_2 = 140 \frac{3517}{2000} = 246.19$ pesos. Los intereses a cobrar son 246.19 pesos.

c. Un microbús viajó 21 kilómetros a una rapidez constante de 18 kilómetros por hora. Para calcular la distancia que hubiese recorrido en el mismo tiempo a una velocidad constante de 19.1 kilómetros por hora, conviene sistematizar la información.

	d	v
Valores iniciales	21	18
Valores finales	d_2	19.1

Por tanto $\frac{d_2}{21} = \frac{19.1}{18}$ o $d_2 = 21 \frac{19.1}{18} = 22.28\bar{3}$ kilómetros. A la rapidez constante de 19.1 kilómetros por hora recorre 22.28 $\bar{3}$ kilómetros.

d. La dosis absorbida (d) en RADS, de rayos X es directamente proporcional al tiempo de exposición t a una radiación X . Juan Cervantes, quien trabaja diariamente 6 horas con un aparato que emite Rayos X y recibe 354 RADS por jornada de trabajo. Determinemos la dosis absorbida que recibirá si sólo permanece 2.5 horas expuesto a radiación. Vea la siguiente tabla.

	d	t
Valores iniciales	354	6
Valores finales	d_2	2.5

Entonces, $\frac{d_2}{354} = \frac{2.5}{6}$ o $d_2 = 147.5$ RADS. Esto significa que absorberá una dosis de 147.5 RADS en 2.5 horas.



Ahora nos ocuparemos de la obtención de algunas propiedades de la relación de variación directamente proporcional.

a. Si $y(x) = kx$, entonces $y(x_1) = kx_1 = y_1$ y $y(x_2) = kx_2 = y_2$, ahora calculemos $x_1 + x_2$ con la relación $y(x) = kx$, esto da $y(x_1 + x_2) = k(x_1 + x_2) = kx_1 + kx_2 = y_1 + y_2$, es decir $y(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$.

b. Por otra parte, si $y(x) = kx$, entonces $y(x_1) = kx_1$ e $y(cx_1) = ckx_1 = c(kx_1) = cy_1$, es decir $y(cx_1) = cy_1$.

Llamaremos a las propiedades anteriores “patrón lineal” de la relación de variación directa proporcional, propiedades que formalizamos en la *propiedad 2.2*.

PROPIEDAD 2.2 (PATRÓN LINEAL DE LA RELACIÓN DE VARIACIÓN DIRECTA)

Supongamos que si x cambia de x_1 a x_2 e y cambia de y_1 a y_2 , entonces

a. $y(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$.

b. Sea c un número real, entonces $y(cx_1) = cy_1$.

En los ejemplos 2.10, 2.11 y 2.12 utilizamos “tablas” para indicar dos “etapas o estados” de una relación entre dos variables, que de antemano, supusimos era de variación directa; con la misma suposición (o hipótesis) basta utilizar un solo estado (x_1, y_1) para “caracterizar” una relación entre y y x .

NOTA

- i. Los pares ordenados $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ son estados distintos de la relación $y = kx$.
- ii. También nos referiremos a $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_n, y_n)$ como puntos.

Surge la pregunta:

¿Cuántos estados son necesarios para caracterizar una relación de variación directa?

◆ EJEMPLO 2.13 (ESTADOS DE RELACIÓN DE VARIACIÓN DIRECTA)

a. Para determinar la expresión de la relación de variación directa dado el estado (x_1, y_1) , notemos que $y_1 = kx_1$, entonces

$k = \frac{y_1}{x_1}$, que al sustituirla en $y = kx$ da $y = \frac{y_1}{x_1}x$.

b. Suponga que el costo de “900 gramos de arroz” es 14 pesos”, lo que se representa por el “estado” $(14, 900)$, entonces

$k = \frac{900}{14}$, por tanto, la relación $y = \frac{900}{14}x$ representa número de gramos de arroz obtenidos por x pesos.

c. Si el costo de “750 mililitros de brandy es 150 pesos”, se representarse por el estado $(150, 750)$, entonces $k = \frac{750}{150}$ y la relación $y = 5x$ representa el número mililitros de brandy adquiridos por x pesos.



El concepto de “estado” en una relación de variación directa es equivalente al concepto de punto en el plano cartesiano, por esta razón, a cada estado, se le asigna una representación en el plano cartesiano. Recuerde que el plano cartesiano incluye dos rectas numéricas perpendiculares que tienen en común el número 0 y que cada uno de sus puntos tiene asociado un par ordenado de la forma (x, y) llamado punto, vea la figura 2.9.

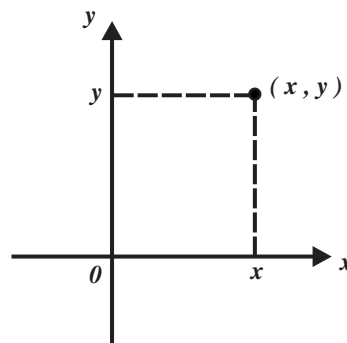


FIGURA 2.9

En lo sucesivo, a un estado de la forma (x, y) lo denominaremos punto y a los números que determinan al punto (estado) los reconoceremos como coordenadas, siendo la primera de ellas la abscisa y la segunda la ordenada.

¿Por qué una relación de variación directa contiene al punto (estado) $(0, 0)$?

Toda relación de variación directa de la forma $y = kx$ puede representarse en el plano cartesiano, para ello basta con conocer uno de sus puntos (distinto al estado $(0, 0)$), su representación depende del contexto y pueden ser:

- i. Una recta (contexto abstracto).
- ii. Un conjunto de puntos alineados en una recta (contexto abstracto).
- iii. Una semi recta.
- iv. Un conjunto de puntos alineados en una semi recta.
- v. Un segmento de recta (segmento rectilíneo).

La figura 2.10 muestra la representación de una la relación de variación directa $y = kx$ en diversos contextos.

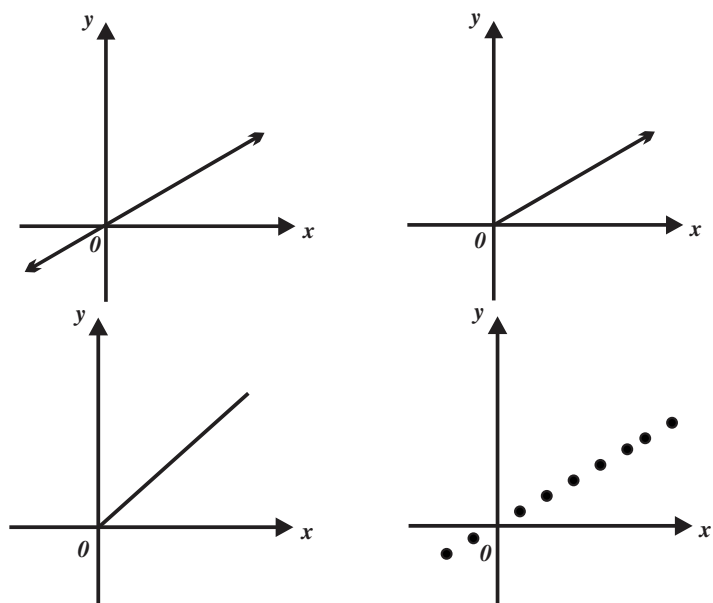


FIGURA 2.10

Para construir la representación gráfica de la relación $y = kx$ utilice la siguiente estrategia.

- i. Asigne el número x_1 a la variable x y obtenga el valor y_1 que corresponde a la variable y .
- ii. En el plano cartesiano marque el punto (estado) (x_1, y_1) .
- iii. Dependiendo del contexto, trace una recta, un segmento de recta o una semirrecta que contenga al origen y al punto (estado) (x_1, y_1) .

◆ **EJEMPLO 2.14 (REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA RELACIÓN DE VARIACIÓN DIRECTA)**

En todos los casos supondremos que existe una relación de variación directa.

a. Representemos en el plano cartesiano la relación $y(x) = \frac{2}{3}x$.

i. Si $x = 3$, entonces $y(3) = \frac{2}{3}(3) = 2$ y tenemos el punto (o estado) $p(3, 2)$.

ii. y iii. Vea la figura 2.11.

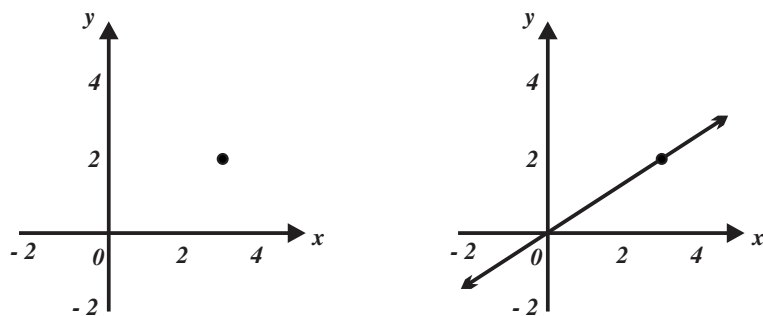


FIGURA 2.11

b. Representemos en el plano cartesiano la relación $y(x) = 4x$.

i. Si $x = 1$, entonces $y(1) = 4(1) = 4$ y obtenemos el punto (o estado) $p(1, 4)$.

ii. y iii. Vea la figura 2.12.

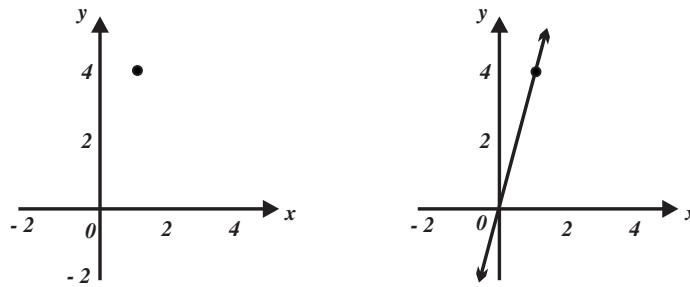


FIGURA 2.12

c. Representemos en el plano cartesiano la relación $y(x) = -\frac{2}{5}x$.

i. Si $x = 5$, entonces $y = -2$ y obtenemos el punto (o estado) $p(5, -2)$.

ii. y iii. Vea la figura 2.13.

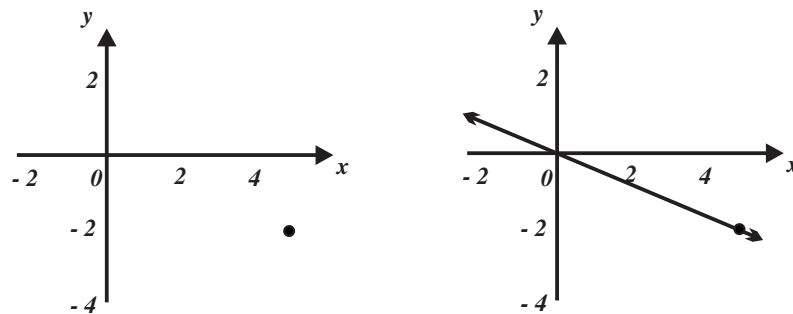


FIGURA 2.13

d. Representemos en el plano cartesiano la relación $y(x) = -3x$.

i. Sea $x = 1$, entonces $y(1) = -3(1) = -3$ y obtenemos el punto $p(1, -3)$.

ii. y iii. Vea la figura 2.14.

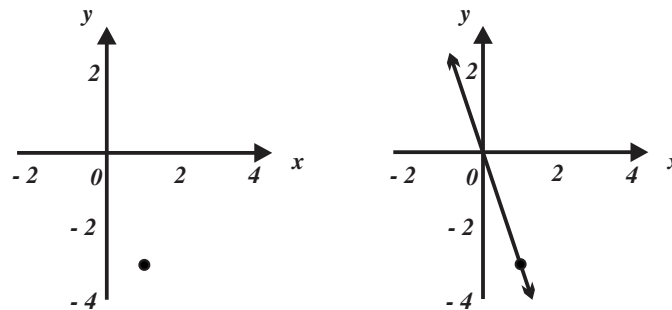


FIGURA 2.14

¿Qué efecto tiene el parámetro k (suponga que k es positivo) en la representación gráfica de $y(x) = kx$ en el plano cartesiano?

¿Qué efecto tiene el parámetro k (suponga que k es negativo) en la representación gráfica de $y(x) = kx$ en el plano cartesiano?

¿Qué efecto tiene el parámetro k en la representación gráfica de $y(x) = kx$ en el plano cartesiano?

Bajo la suposición de que un gráfico (o representación gráfica) pertenece a una relación de variación directa en un contexto específico, es posible interpretar algunos de sus puntos (o estados) intermedios de la recta.

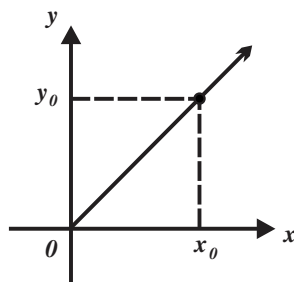


FIGURA 2.15

En la figura 2.15 el número x_0 tiene asociado el número $y_0 = kx_0$ bajo la regla $y(x) = kx$ con la condición de que x_0 es no negativa.

◆ **EJEMPLO 2.15 (INTERPRETACIÓN DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA RELACIÓN DE VARIACIÓN DIRECTA)**

a. Suponga que el gráfico de la figura 2.16 corresponde a un objeto móvil, el eje horizontal representa el tiempo y el eje vertical representa la distancia.

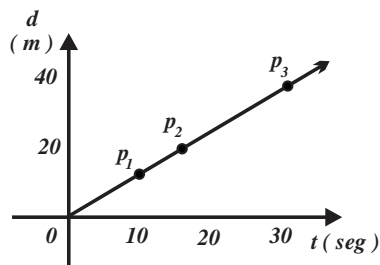


FIGURA 2.16

- i. El punto (o estado) p_1 indica que a los 10 segundos el móvil ha recorrido aproximadamente 17 metros.
 - ii. El punto (o estado) p_2 indica que aproximadamente a los 17 segundos el objeto móvil ha recorrido aproximadamente 21 metros.
 - iii. El punto (o estado) p_3 indica que aproximadamente a los 32 segundos el móvil ha recorrido aproximadamente 38 metros.
- b. El diagrama de la figura 2.17 muestra el comportamiento de la temperatura de un objeto cuando se introduce a un refrigerador en términos del tiempo.
- i. Inicialmente el objeto se encuentra a una temperatura de cero grados centígrados.
 - ii. El punto (o estado) p_1 indica que (aproximadamente) a los 2 segundos la temperatura del objeto es (aproximadamente) -2 grados centígrados.
 - iii. El punto (o estado) p_2 muestra que (aproximadamente) a los 5 segundos el objeto se encuentra a una temperatura de -8 grados centígrados.
 - iv. El punto (o estado) p_3 indica que (aproximadamente) a los 14 segundos el cuerpo se encuentra a una temperatura de -22 grados centígrados.

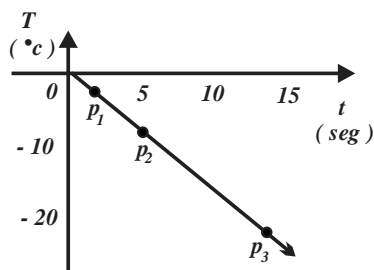


FIGURA 2.17



La relación de variación directa $y(x) = kx$ incluye al punto (o estado) $P(0, 0)$ puesto que $y(0) = k(0) = 0$, ahora surge la pregunta ¿Qué papel desempeña la constante de proporcionalidad k ? La figura 2.18 muestra las líneas rectas asociadas a $y(x) = kx$ para distintos valores de k .

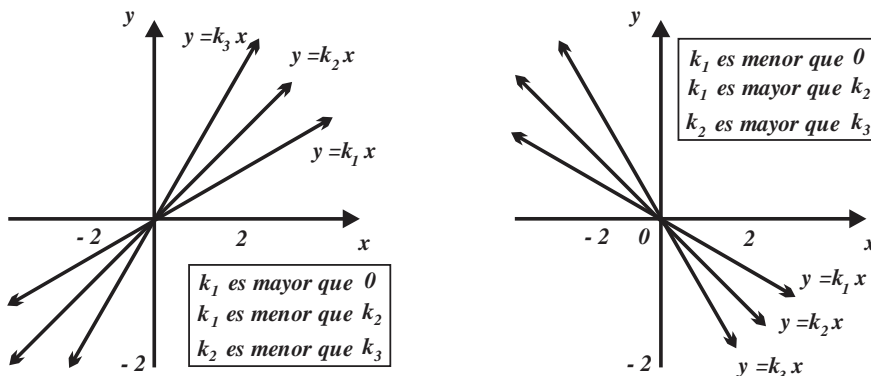


FIGURA 2.18

¿Puede describir el comportamiento de $y(x) = kx$ en términos de k y de la inclinación (respecto a la parte positiva del eje coordenado horizontal)? ¿Qué representación tiene la relación $y(x) = kx$ en un sistema cartesiano cuando $k = 0$?

La figura 2.19 corresponde a un diagrama de tiempo contra distancia recorrida por un objeto móvil, en él se observa un segmento de recta, los puntos (o estados) que lo constituyen son pares ordenados de la forma $v(t, d)$; además, para un segmento de recta específico, todos los cocientes $v = \frac{d}{t}$ tienen el mismo valor y representan la rapidez del móvil.

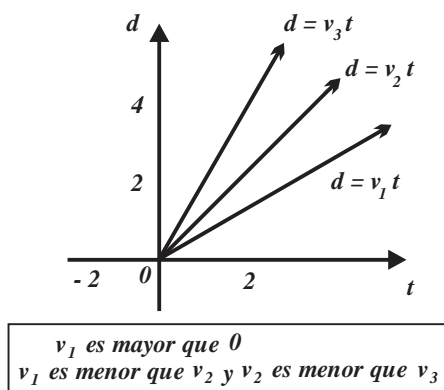


FIGURA 2.19

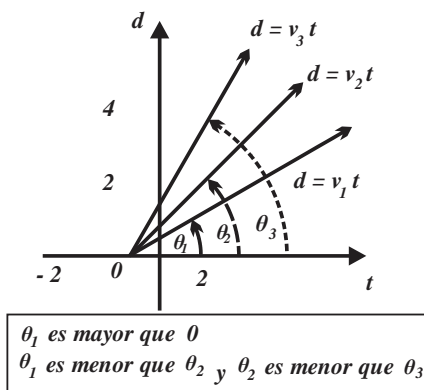


FIGURA 2.20

Note que si suponemos que cada segmento de recta representa la trayectoria de un objeto, entonces el objeto de mayor rapidez es aquél que describe un segmento de recta que presenta mayor inclinación respecto a la parte positiva del eje coordenado horizontal. En la figura 2.20 cada segmento de recta define un ángulo de inclinación respecto a la parte positiva del eje coordenado horizontal y que cuando es mayor el valor de la constante de proporcionalidad k el ángulo de inclinación tiene mayor amplitud.

◆ EJEMPLO 2.16 (VARIACIÓN DIRECTA)

En cada caso supondremos variación directa y determinaremos: la constante de proporcionalidad, la relación de variación directa y su representación gráfica.

- a. Suponga que un albañil persona tarda $\frac{3}{4}$ de hora en cubrir 2 metros cuadrados de muro con loseta.

i. El punto (o estado) que se proporciona es $A\left(\frac{3}{4}, 2\right)$, por tanto, la constante de proporcionalidad es $k = \frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3}$ y la expresión relación de variación directa es $A(t) = \frac{8}{3}t$, siempre que t sea mayor o igual que cero.

ii. La figura 2.21 presenta la representación gráfica de esta situación.

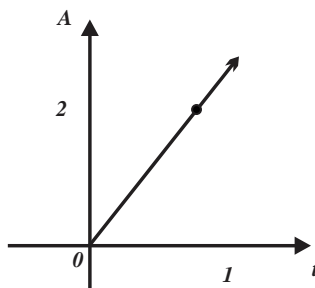


FIGURA 2.21

iii. Transcurrida $\frac{1}{2}$ hora el albañil habrá cubierto una superficie de $A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}$ metros cuadrados.

iv. El albañil cubrirá 5 metros cuadrados del muro, con la loseta, en un tiempo de $t = \frac{15}{8}$ horas (solución de la ecuación $5 = \frac{8}{3}t$).

b. Una máquina expendedora de gasolina utiliza 3 minutos en llenar hasta el tope un tanque de volumen 120 litros.

i. El punto (o estado) que corresponde a los datos anteriores es $V(3, 120)$, por tanto, la constante de proporcionalidad es $k = \frac{120}{3} = 40$ y la expresión que relaciona las variables tiempo y volumen es $V(t) = 40t$, siempre que t sea mayor o igual que cero y menor o igual que 3.

ii. La figura 2.22 muestra la representación gráfica de esta situación.

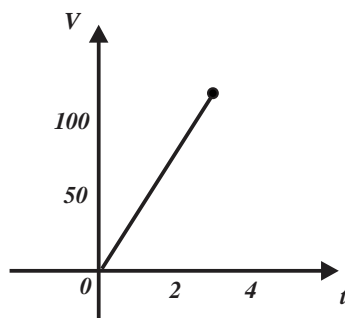


FIGURA 2.22

iii. En 1 minuto la máquina depositará $V(1) = 40(1) = 40$ litros de gasolina en el tanque.

iv. El tanque tendrá 10 litros de gasolina cuando $10 = 40t$, es decir, cuando haya transcurrido $\frac{1}{4}$ de minuto.



Ejercicios 21

1. Suponga que $y = kx$ y determine:

- La constante de proporcionalidad.
- La relación de variación directa (ambas).
- Trace los gráficos correspondientes (ambos).

a.

x	y
2	6

b.

x	y
3	2

c.

x	y
-4	-2

d.

x	y
-6	4

e.

x	y
3	-3

f.

x	y
-1	-3

2. Suponga que $y = kx$.

- Determine k si $y = 42$ cuando $x = 21$.
- Determine k si $y = 6$ cuando $x = 27$.
- Determine y si $x = 13$ y $k = 3.5$.
- Determine x si $y = -2.8$ y $k = 4$.

3. Suponga que $y = kx$.

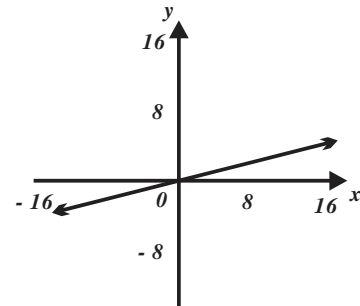
- $y_2 = 1$ cuando $x_2 = 6$, si $y_1 = 5$ determine x_1 .
- $x_1 = 4$ cuando $y_1 = -3$, si $x_2 = \frac{1}{8}$ determine y_2 .
- $y_1 = 5$ cuando $y_2 = -12$, si $x_2 = \frac{1}{3}$ determine x_1 .
- $y_1 = \frac{1}{3}$ cuando $x_1 = -2$, si $x_2 = \frac{1}{8}$ determine y_2 .

4. Suponga que:

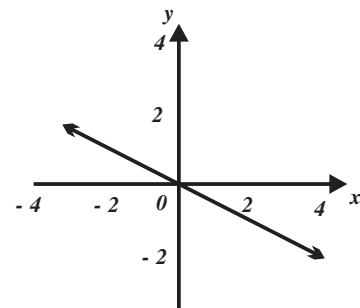
- y varía en forma directamente proporcional con x , si $y = 9$ cuando $x = -2$, escriba la relación de variación directa y trace la gráfica asociada.
- d varía en forma directamente proporcional a t , $d = 12.6$ cuando $t = 1.3$, escriba la relación de variación y dibuje la gráfica.
- w varía en forma directamente proporcional a t , $w = 0.6$ cuando $t = 0.01$, escriba la relación de variación y dibuje la gráfica asociada.
- c varía en forma directamente proporcional a t , $c = \frac{3}{8}$ cuando $t = \frac{1}{3}$, escriba la relación de variación y trace la gráfica asociada.

5. Los siguientes gráficos corresponden a relaciones de variación directa, determine la relación entre las variables.

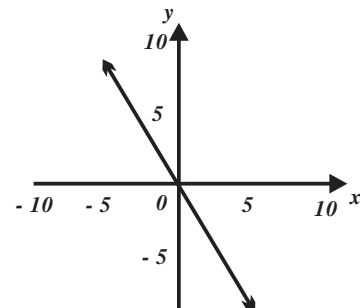
a.



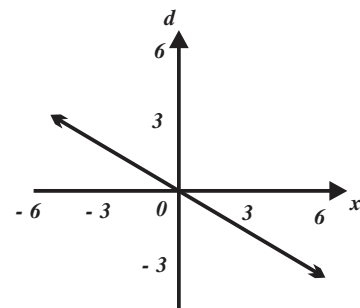
b.



c.



d.



6. Responda según sea el caso.

- Suponga que c varía en forma directamente proporcional con t , si t se duplica, ¿qué ocurre con c ?
- Suponga que p varía directamente proporcional

con proporcional con d , si d se reduce a la tercera parte. ¿Qué ocurre con p ?

c. Suponga que v varía en forma directamente proporcional con r , si r se reduce a la mitad, ¿qué ocurre con v ?

d. Suponga que y varía en forma directamente proporcional con x , si y se triplica, ¿qué ocurre con k ?

7. El Doctor Castor Vega estima que la dosis recomendada (D) de un medicamento es directamente proporcional al peso de la persona que se le administra.

a. Si a Juan Brown cuyo peso es de 65 kilogramos se le administran 260 miligramos, determine la dosis recomendada a Franco Rea cuyo peso es 88 kilogramos.

b. Determine la relación de variación directa entre las variables involucradas.

8. El Doctor Castor Vega estima que la dosis recomendada (D) de un medicamento es directamente proporcional al peso de la persona que se le administra.

a. Si a Juan Brown cuyo peso es de 65 kilogramos se le administran 260 miligramos, determine la dosis recomendada a Franco Rea cuyo peso es 88 kilogramos.

b. Determine la relación de variación directa entre las variables involucradas.

9. Una masa de 20 gramos alarga un resorte 5 centímetros, suponga proporcionalidad directa entre las variables involucradas.

a. Determine la relación entre las variables involucradas.

b. ¿Qué masa alargará el resorte 12 centímetros?

c. Si la masa utilizada es 8 gramos, ¿cuánto se alargó el resorte?

10. La utilidad por la venta de "teléfonos celulares" es una relación de variación directa respecto al número de teléfonos celulares vendidos. Cuando se venden 88 teléfonos celulares la utilidad obtenida es de 15840 pesos.

a. Determine la relación de variación directa entre el número de teléfonos celulares vendidos y la utilidad.

b. Si se venden 125 teléfonos celulares, ¿de cuánto es la utilidad?

c. Determine la relación de variación directa entre la utilidad y el número de teléfonos celulares vendidos.

11. Han sido mezclados caramelos sabor albóndiga con caramelos sabor salchicha, por cada dos

caramelos sabor albóndiga hay tres caramelos sabor salchicha.

a. Determine la relación de variación proporcional en una mezcla de los caramelos antes señalados.

b. Si en una caja se han colocado cien caramelos sabor albóndiga, ¿cuántos caramelos sabor salchicha deben ponerse?

12. La conversión de pesos mexicanos a dólares sigue una relación de variación de proporción directa. Juan Cervantes recibió 42000 pesos por 2000 dólares.

a. Determine la relación de variación proporcional para convertir pesos a dólares.

b. Determine la relación de variación proporcional para convertir dólares a pesos.

13. En las siguientes relaciones (fórmulas) establezca las posibles relaciones de variación de proporcionalidad directa, haga las hipótesis adecuadas.

a. El área de un rectángulo de base de longitud x y altura de longitud y se calcula con $A = xy$.

b. El volumen de un cono de radio de longitud r y altura de longitud h se calcula con $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

c. El volumen de un cilindro de radio de longitud r y altura de longitud h se calcula con $V = \pi r^2 h$.

d. El área de un sector circular de radio de longitud r y amplitud θ radianes se calcula con $A = \frac{1}{2}r^2\theta$.

14. En un contenedor, por cada 50 litros de agua hay 1200 gramos de sal.

a. Determine la relación de variación directa entre las variables involucradas.

b. ¿En qué volumen de agua habrá 200 gramos de sal?

c. 320 litros de agua, ¿qué cantidad de sal contienen?

15. Un disco gira 78 veces por minuto.

a. Determine la relación de variación directa entre el número de revoluciones y los segundos transcurridos.

b. ¿En cuántos segundos el disco dará 215 revoluciones?

c. Han transcurrido 5 minutos, ¿cuántas revoluciones ha dado el disco?

16. Por cada 24 kilogramo de maíz se obtienen 6 litros de aceite.

a. Determine la relación de variación directa del número de kilogramos de maíz utilizados en términos del número de litros de aceite.

b. ¿Cuántos litros de aceite se obtienen con 50 kilogramos de maíz?

c. Se han obtenido 38 litros de aceite, ¿qué cantidad de maíz se utilizó?

17. Un automóvil recorre 300 kilómetros con 25 litros de gasolina.

a. Determine la relación de variación directa del número de kilómetros recorridos por el automóvil en términos de los litros de gasolina consumidos.

b. El automóvil ha recorrido 1150 kilómetros, ¿cuántos litros de gasolina consumió?

c. Se han obtenido 38 litros de aceite, ¿qué cantidad de maíz se utilizó?

18. Demuestre que la relación variación de proporcionalidad directa es:

a. Reflexiva (toda variable es proporcional a sí misma, con el constante de proporcionalidad uno).

b. Simétrica (cuando y es proporcional a x , entonces x lo es a y , con la constante de proporcionalidad recíproca).

c. Transitiva (si x es proporcional a y e y a z , entonces x lo es con z , multiplicando los coeficientes).

19. Demuestre que si $y(x) = kx$, entonces:

a. $y(x_1 + x_2 + x_3) = y(x_1) + y(x_2) + y(x_3)$.

b. $y(x_1 + cx_2) = y(x_1) + cy(x_2)$.

20. Demuestre que si x_1 , x_2 y x_3 son asignaciones a

x en $y(x) = kx$, entonces $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3}$.

2.2

FUNCIONES LINEALES
Y SU ANÁLISIS

El alumno:

6. Será capaz de identificar entre una serie de variaciones entre dos variables aquellas que correspondan al concepto de función lineal.
7. Será capaz de modelar con la expresión $y=mx+b$, una variación relacionada entre dos variables con rapidez de variación constante y condición inicial $(0, b)$. Transitando en la etapa de exploración, por representaciones tabulares y gráficas.
8. Dada una variación que se modela con una función lineal, el alumno será capaz de calcular estados específicos de la variación, su rapidez de cambio y estado inicial, empleando sus representaciones gráfica y analítica.

En la *sección 2.1* estudiamos y caracterizamos el comportamiento de la relación de variación directa (o proporcional) entre dos variables, es decir caracterizamos la relación $y = kx$ cuando $x \in \mathbb{R}$ (equis es un número real) y $k \neq 0$. En la presente sección generalizaremos esta expresión agregando la constante b a $y = kx$, es decir, analizaremos la relación

$$y = mx + b, \text{ específicamente } y(x) = mx + b.$$

Suponga que un comerciante adquiere cierto volumen de maíz y luego lo transporta a un molino. Para llevar a cabo la operación necesita envasarlo y posteriormente pesarlo (colocándolo el envase con el maíz sobre una balanza), el resultado de pesarlo es el “peso bruto”, que incluye el peso del envase y el peso del maíz (el peso del envase se denomina tara),

$$\text{peso bruto} = \text{peso del envase} + \text{peso del maíz} \quad \text{o} \quad \text{peso bruto} = \text{tara} + \text{peso del maíz}.$$

Para adquirir el maíz junto con el envase ha de pagar y pesos. Por otra parte, si x representa la cantidad de maíz (kilogramos a ser adquiridos), por m el precio de un kilogramo de maíz y por b el costo del envase (que lo suponemos fijo), entonces la relación $y(x) = mx + b$ proporciona el total a pagar por los x kilogramos de maíz, indudablemente m y b son positivas por lo que $y(x)$ también lo es. Debemos tener en cuenta que el total a pagar (representado por $y(x)$) depende de la cantidad de maíz que se desea adquirir, para indicar esto, utilizamos la notación $y(x)$ con la intención señalar que la variable y (costo del maíz que se adquiere) depende de la variable x (cantidad de maíz que se adquiere).

NOTA

La expresión $y(x)$ se lee “ y de *equis*” y de ninguna forma se refiere a un producto (o multiplicación).

Lo antes descrito lo generalizamos y formalizamos con la *definición 2.5*.

DEFINICIÓN 2.5 (FUNCIÓN LINEAL)

- a. La relación $y(x) = mx + b$, siempre que $x \in \mathbb{R}$, se denomina función lineal, m y b son sus parámetros.
- b. El número m recibe el nombre de pendiente.
- c. El número b recibe el nombre de ordenada al origen.

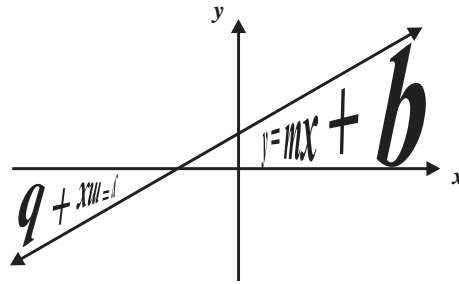


FIGURA 2.23

El hecho de que la relación $y(x) = mx + b$ reciba el nombre de función lineal se fundamenta en que su representación en el plano cartesiano es una línea recta (bajo la condición de que a la variable independiente le sean asignados todos los números reales). Por otra parte, si asignamos a x el número 0, entonces $y(0) = m(0) + b = b$ y obtenemos el punto o estado $(0, b)$, punto que indica donde la línea recta asociada a $y(x) = mx + b$ interseca al eje vertical del plano cartesiano, vea la figura 2.24.

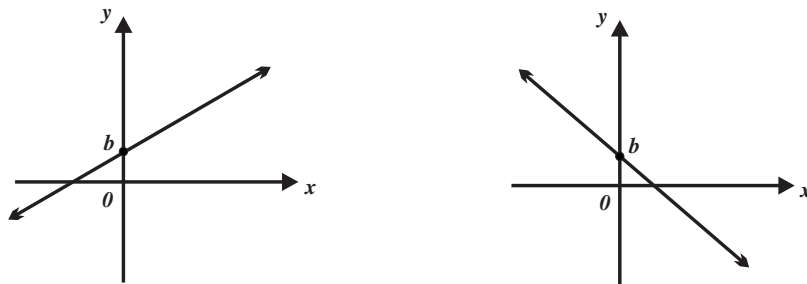


FIGURA 2.24

Por otra parte, en $y(x) = mx + b$ el número m (la pendiente) define qué tan inclinada está la línea recta asociada a $y(x) = mx + b$ respecto a la parte positiva del eje cartesiano horizontal, vea la figura 2.25.

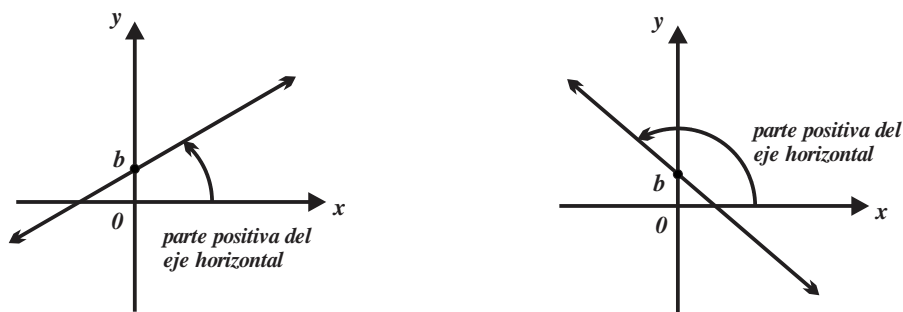


FIGURA 2.25

Puesto que los números m y b definen las características de $y(x) = mx + b$ en el plano cartesiano se les llama parámetros.

NOTA

Observe que la función lineal $y(x) = mx + b$ cuando $b = 0$ equivale a la relación de variación directa.

Dado que por dos puntos sólo es posible trazar una línea recta, para representar la línea recta asociada (el plano cartesiano) a la función lineal $y(x) = mx + b$ se utilizan los puntos $(0, b)$ y $(x_1, y(x_1))$, vea la figura 2.26.

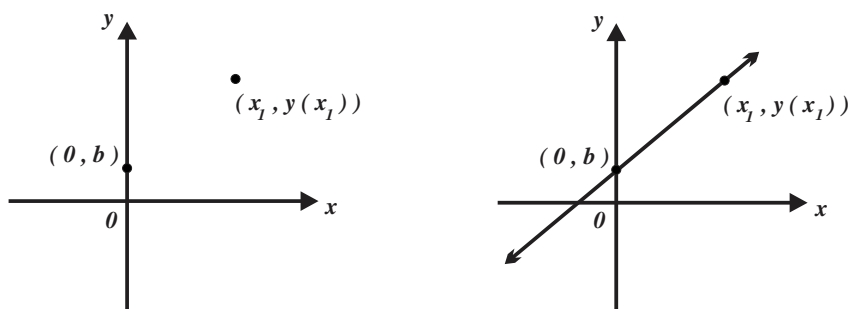


FIGURA 2.26

Otra forma de representar la función lineal $y(x) = mx + b$ (en el plano cartesiano) consiste en hacer dos asignaciones x_1 y x_2 a la variable independiente x en $y(x) = mx + b$ y posteriormente obtener los números $y(x_1)$ y $y(x_2)$ para así generar los puntos (o estados) $(x_1, y(x_1))$ y $(x_2, y(x_2))$, vea la figura 2.27.

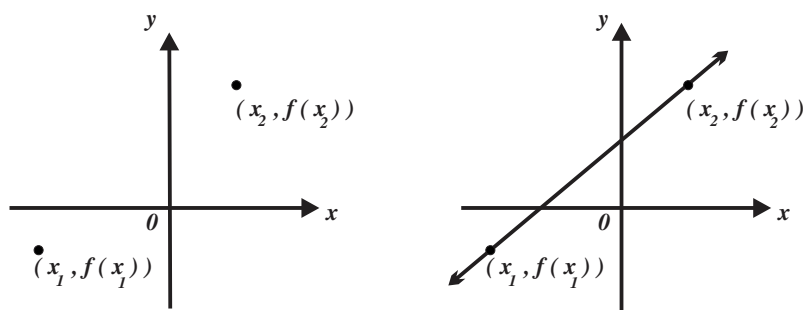


FIGURA 2.27

◆ **EJEMPLO 2.17 (TRAZO DE LÍNEA RECTA ASOCIADA A $y(x) = mx + b$ UTILIZANDO EL PUNTO $(0, b)$)**

a. La línea recta asociada a $f(x) = 3x - 2$ contiene al punto $(0, -2)$. Para obtener otro de sus puntos, sea $x = 1$, entonces $y(1) = 3(1) - 2 = 1$, luego el punto $(1, 1)$ también pertenece a la línea recta. Por los puntos $(0, -2)$ y $(1, 1)$ trazamos la línea recta correspondiente, vea la figura 2.28.

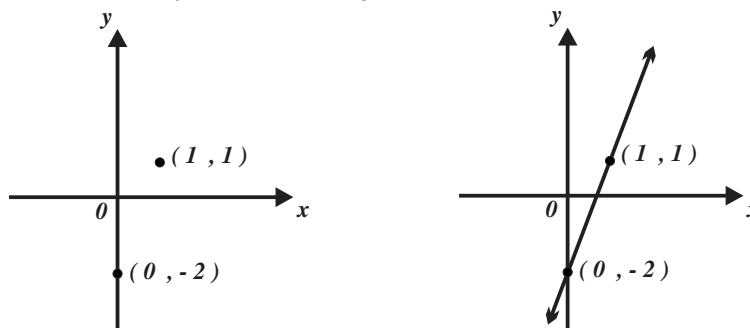


FIGURA 2.28

b. La línea recta asociada a $y(x) = -6x + 4$ contiene al punto $(0, 4)$. Para obtener otro de sus puntos, sea $x = 1$, entonces $y(1) = -6(1) + 4 = -2$, luego el punto $(1, -2)$ también pertenece a la línea recta. Por los puntos $(0, 4)$ y $(1, -2)$ trazamos la línea recta correspondiente, vea la figura 2.29.

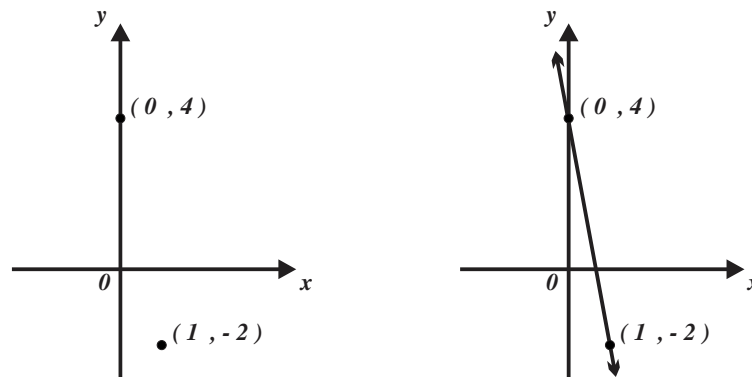


FIGURA 2.29

c. La línea recta asociada a $y(x) = -5x - 1$ contiene al punto $(0, -1)$, para obtener otro de sus puntos, sea $x = -1$, entonces $y(-1) = -5(-1) - 1 = 4$, luego el punto $(-1, 4)$ también pertenece a la línea recta. Por los puntos $(0, -1)$ y $(-1, 4)$ trazamos la línea recta correspondiente, vea la figura 2.30.

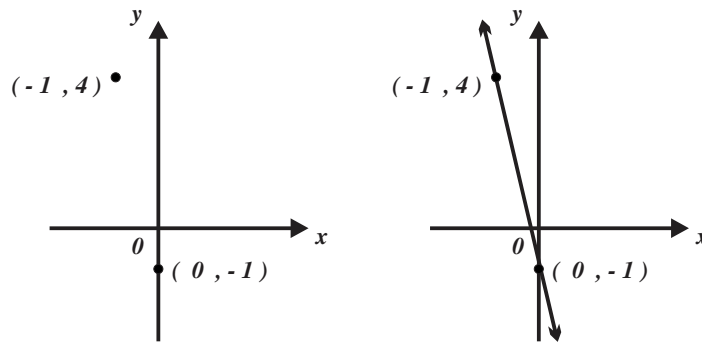


FIGURA 2.30

◆ **EJEMPLO 2.18 (TRAZO DE $y(x) = mx + b$ UTILIZANDO DOS PUNTOS)**

a. Para trazar la línea recta asociada a $y(x) = 3x - 2$, sean: $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$, entonces $y(-1) = 3(-1) - 2 = -5$ y $y(1) = 3(1) - 2 = 1$. Por tanto, los puntos $(-1, -5)$ y $(1, 1)$ determinan la línea recta, vea la figura 2.31.

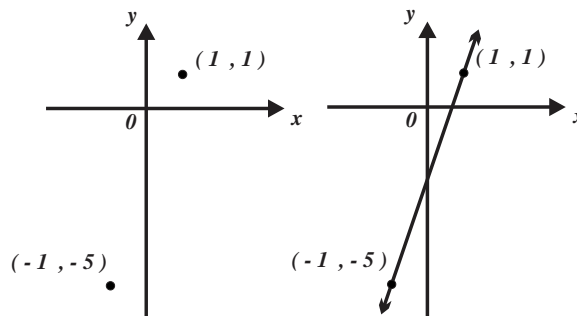


FIGURA 2.31

b. Para trazar la línea recta asociada a $y(x) = \frac{1}{4}x - 2$, sean las asignaciones $x_1 = 4$ y $x_2 = 8$, entonces $y(4) = \frac{1}{4}(4) - 2 = -1$ y $y(8) = \frac{1}{4}(8) - 2 = 0$. Los puntos $(4, -1)$ y $(8, 0)$ determinan la línea recta, vea la figura 2.32.

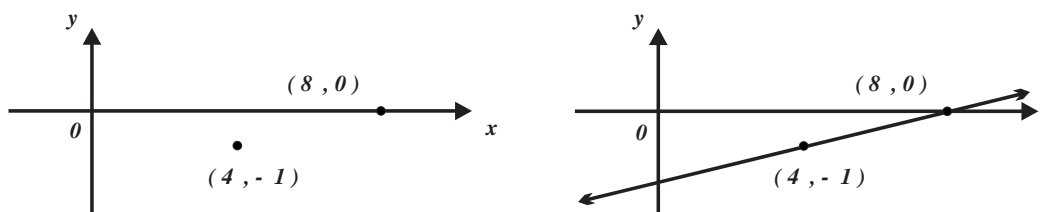


FIGURA 2.32

Preguntas

¿Qué condición deben cumplir dos funciones lineales para que las líneas rectas que tienen asociadas sean paralelas?

¿Qué condición deben cumplir una función lineal para que la línea recta que tiene asociada sea paralela al eje coordenado horizontal?

En ocasiones es necesario determinar la regla de correspondencia de una función lineal conocidos dos de sus puntos.

◆ EJEMPLO 2.19 (OBTENCIÓN DE $y(x) = mx + b$ CONOCIDOS DOS PUNTOS)

Para determinar la regla de correspondencia de la línea recta que contiene a los puntos $(-2, -4)$ y $(2, 6)$, sustituimos las coordenadas de cada uno de ellos en $f(x) = mx + b$, esto da $-4 = -2m + b$ y $6 = 2m + b$. Si multiplicamos por -1 la primera ecuación y sumamos el resultado a la segunda ecuación obtenemos $10 = 4m$ por lo que $m = \frac{5}{2}$. La sustitución de este valor de m en la segunda ecuación da $6 = 2\left(\frac{5}{2}\right) + b$ de dónde $b = 1$. La regla de

correspondencia es $y(x) = \frac{5}{2}x + 1$.

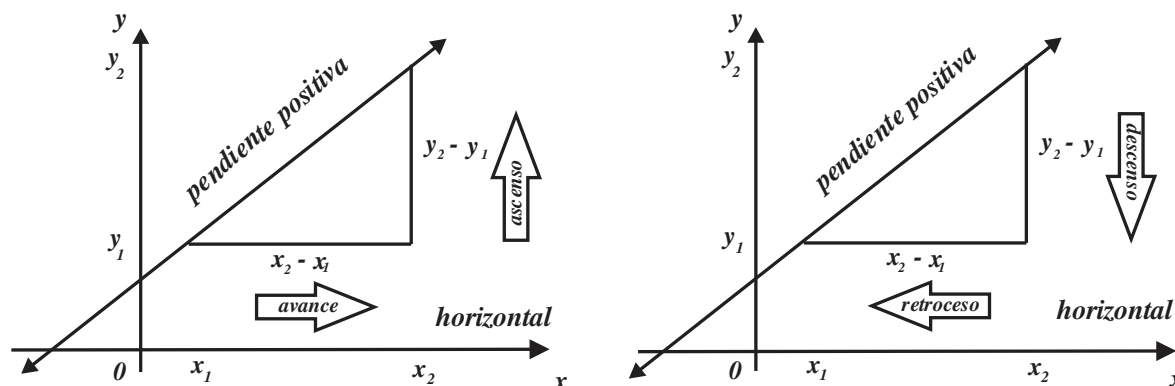
El razonamiento empleado en el ejemplo 2.18 se puede aplicar para obtener los valores de m y b en la función lineal $y(x) = mx + b$ conocidos dos de sus puntos (estados).

Por otra parte, en la función lineal, $y(x) = mx + b$, el parámetro m también se interpreta como el cambio de la variable $f(x) = y$ respecto al cambio de la variable x .

PROPIEDAD 2.3 (PENDIENTE O RAZÓN)

Sean: la función lineal $y(x) = mx + b$, si $x_1 \neq x_2$ y $(x_1, y(x_1))$, $(x_2, y(x_2))$ son dos de sus puntos (o estados), entonces el número $m = \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1}$ se conoce como pendiente.

En la propiedad 2.33, ¿Por qué $x_1 \neq x_2$? ¿Qué significaría el hecho de que $x_1 = x_2$?



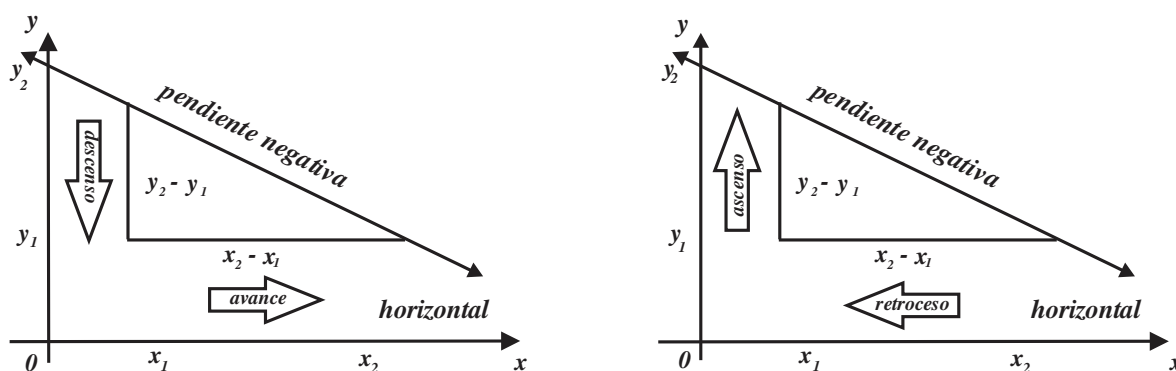


FIGURA 2.33

◆ **EJEMPLO 2.20 (OBTENCIÓN DE LA FUNCIÓN LINEAL A PARTIR DE DOS DE SUS ESTADOS)**

- a. Si los puntos (estados) $(1, 6)$ y $(4, -3)$ pertenecen a la línea recta asociada a la función lineal $y(x) = mx + b$, entonces $m = \frac{-3-6}{4-1} = -3$ y $y(x) = -3x + b$. Para obtener el valor de b , sustituimos uno de los estados (puntos en $y(x) = -3x + b$), por ejemplo, $(1, 6)$, obtenemos $6 = -3(1) + b$ y $b = 9$. Por tanto la función lineal a la que pertenecen los puntos (estados) $(1, 6)$ y $(4, -3)$ es $y(x) = -3x + 9$.
- b. Si los puntos (estados) $(-2, 5)$ y $(6, -1)$ pertenecen a la línea recta asociada a la función lineal $y(x) = mx + b$, entonces $m = \frac{-1-5}{6-(-2)} = -\frac{3}{4}$ y $y(x) = -\frac{3}{4}x + b$. Para obtener el valor de b , sustituimos $(6, -1)$ en $y(x) = -\frac{3}{4}x + b$, obtenemos $-1 = -\frac{3}{4}(6) + b$, de donde $b = \frac{7}{2}$. La función lineal que contiene a los puntos (estados) es $(-2, 5)$ y $(6, -1)$ es $y(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{2}$.



En un contexto específico, el dominio (asignaciones plausibles a la variable independiente) de una función lineal, es sólo parte del conjunto de los números reales, por ejemplo, cuando se utilizan funciones lineales como modelos en los que la variable independiente es el tiempo o representa dimensiones de figuras geométricas (longitud, área, volumen, etc.) o dimensiones físicas como presión, peso, masa, entre otras.

Las asignaciones numéricas (dominio) a la variable independiente dependen del contexto del problema.

En situaciones en las que la variable independiente representa al tiempo (o alguna otra variable que no acepte valores negativos), la función lineal adquiere la forma $y(t) = mt + b$ bajo la condición $t \geq 0$ (esta última expresión significa que t es mayor o igual que 0), observe que si $t = 0$, entonces $y(0) = m(0) + b = b$ por lo que el punto $(0, b)$ se conoce como condición inicial, vea la figura 2.34.

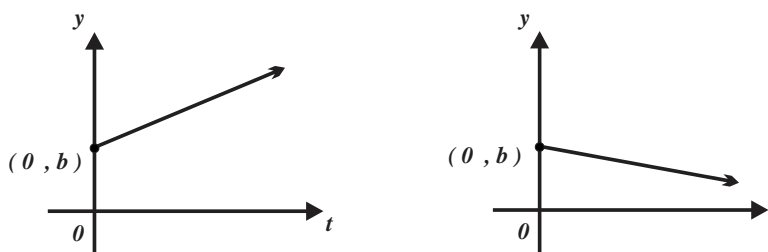


FIGURA 2.34

DEFINICIÓN 2.6 (CONDICIÓN INICIAL)

Sea la función lineal $y(t) = mt + b$ sujeta a la condición $t \geq 0$, entonces:

El punto (o estado) $(0, b)$ se conoce como condición inicial.

El “parámetro” m está relacionado con el ángulo de inclinación de la recta (semirrecta o segmento de recta) asociada a $y(t) = mt + b$ respecto a la parte positiva del eje horizontal. También se interpreta, como la razón de cambio promedio de la variable independiente respecto a la variable t , vea la figura 2.35.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \quad y(0) = b$$

FIGURA 2.35

La figura 2.36 muestra el efecto del “tamaño” del parámetro m .

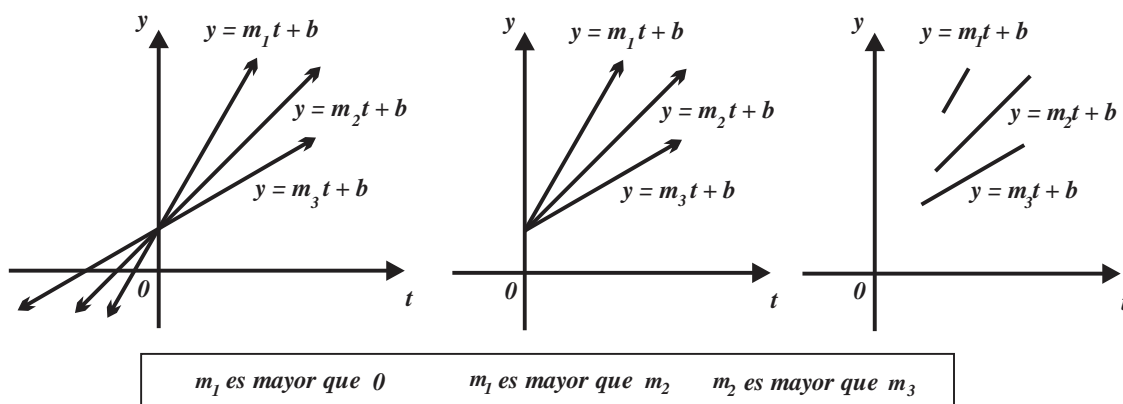


FIGURA 2.36

Los ejemplos 2.21, 2.22, y 2.23 incluyen diversas situaciones cuyo modelo es una función lineal definida sobre un intervalo de los números reales.

◆ EJEMPLO 2.21 (COSTOS)

- a. El costo de x kilogramos de tortillas, a un precio 14 pesos por kilogramo, se puede modelar con la función $c(x) = 14x + 2$ donde el precio de la “bolsa” es 2 pesos.
- b. El costo de adquirir x litros de gasolina, a un precio de 24 pesos por litro, se puede modelar con la función $c(x) = 24x + 5$ donde 5 pesos es la propina que se proporciona al empleado.
- c. El costo de efectuar una llamada, por celular, de duración de t minutos, a un precio de 1.25 pesos por minuto, se puede modelar con la función $c(x) = 1.25x + 0.6$ donde 0.6 pesos es el costo de interconexión.
- d. La tarifa de un viaje en autobús depende de la distancia recorrida, si inicialmente se pagan 10 pesos y luego 40 centavos por kilómetro recorrido, entonces el modelo que describe esta situación es $c(x) = 0.40x + 10$.



En el ejemplo 2.21 denominado “modelos lineales 1” la variable independiente, ya sea x o t , sólo acepta asignaciones positivas y el conjunto de números que toma la variable dependiente están acotados.

◆ EJEMPLO 2.22 (MODELOS LINEALES 1)

- a. Un porcicultor decidió proporcionar una dieta, alta en cereales, a un “cerdo pochilon” para engordarlo rápidamente. Inicialmente el cerdo tenía un peso de 20 kilogramos y aumentó a una razón constante. Transcurridos 8 meses pesaba 160 kilogramos.

- i. Las variables involucradas son: el tiempo t (en meses) como variable independiente y el peso p como variable dependiente, por tanto $p(t)$.
- ii. La condición inicial es el estado $(0, 20)$, otro de sus estados $(8, 160)$ y la razón entre el incremento del peso y el tiempo es $m = \frac{160-20}{8-0} = \frac{35}{2}$.
- iii. La función lineal (restringida a un intervalo) que describe el peso del cerdo en función del tiempo es $p(t) = 20 + \frac{35}{2}t$; también puede representarse por la tabla (bajo la suposición de que corresponde a una función lineal).

Tiempo (meses)	Peso (kilogramos)
0	20
8	160

Debemos tener en cuenta que t es mayor o igual que cero y que $p(t) = 20 + \frac{35}{2}t$ está acotada.

- iv. El gráfico que correspondiente a la evolución del “cerdo pochilon” se muestra en la figura 2.37 (note que las escalas en los ejes son diferentes).

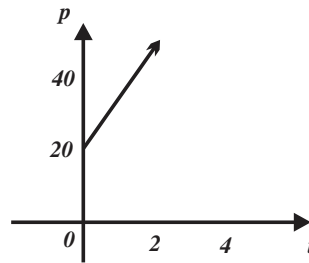


FIGURA 2.37

- b. Una persona baja desde la cima de un cerro, lo hace a una rapidez constante de metros 30 por minuto. Transcurridos 15 minutos la persona se encuentra en el pie del cerro.

- i. Las variables involucradas son: el tiempo t (en minutos) como variable independiente y la distancia d que ha descendido como variable dependiente, esto se escribe como $d(t)$. Para determinar la función de la forma $d(t) = mt + d_0$, en particular la condición inicial es el estado $(0, d_0)$.

- iii. Una tabla equivalente a la función lineal que describe esta situación es

Tiempo (minutos)	Distancia (metros)
0	d_0
15	0

- iv. La rapidez con que desciende la persona es $m = -\frac{30}{1} = -30$, uno de los estados del descenso es $(15, 0)$, al sustituir en $d(t) = mt + d_0$ obtenemos $0 = (15)(-30) + d_0$, de donde $d_0 = 450$. Finalmente $d(t) = -30t + 450$. Puesto que t representa al tiempo, entonces es positiva, esto se cumple cuando $0 \leq t \leq 15$ (léase “entre los 0 y los 15 minutos”).

- v. La figura 2.38 describe esta situación (note que las escalas en los ejes son diferentes).

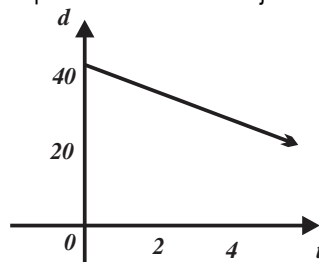


FIGURA 2.38

c. Un jardinero se dedica a podar céspedes en sus ratos de ocio. En cada podada de césped cobra una cuota inicial de 30 pesos, más 40 pesos por cada hora de trabajo.

i. Las variables involucradas son: el tiempo t (en horas) como variable independiente y el cobro c que efectúa por podar como variable dependiente, así $i(t)$. La condición inicial es el estado $(0, 30)$.

ii. La razón entre el peso y el tiempo es $m = \frac{40}{1} = 40$ y también es equivalente a la tabla.

Tiempo (horas)	Ingresos (pesos)
0	30

iii. La función que describe los ingresos del jardinero en función del tiempo es $i(t) = 30 + 40t$ pesos. Debemos tener en cuenta que t es mayor o igual que cero y que $i(t) = 30 + 40t$ está acotada.

iv. La figura 2.39 describe esta situación (note que las escalas en los ejes son diferentes).

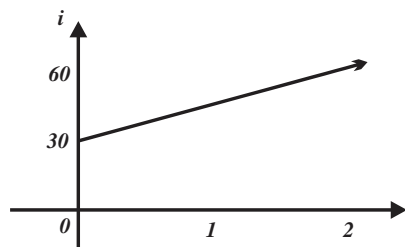


FIGURA 2.39

◆ EJEMPLO 2.23 (MODELOS LINEALES 2)

a. En un plan de renta telefónica cierta empresa cobra, mensualmente, una tarifa fija de 48 pesos más 1.20 pesos (o la proporción correspondiente) por cada 2 de minutos de comunicación.

i. Las variables involucradas son: el tiempo t (en minutos) variable independiente y el cobro C que efectúa la empresa telefónica como variable dependiente.

ii. La condición inicial es el estado $(0, 48)$ y la razón entre los minutos de comunicación y el costo es $m = \frac{1.20}{2} = 0.6$

iii. Por tanto, la función que determina la tarifa de renta telefónica es $C(t) = 48 + 0.6t$, con $t \geq 0$ minutos y limitado a un mes.

iv. La siguiente tabla muestra el costo para algunos “estados” de la renta telefónica.

Tiempo (minutos)	Costo (pesos)
0	48
5	51
10	54

v. La figura 2.40 describe el comportamiento de la renta telefónica en función del tiempo transcurrido.

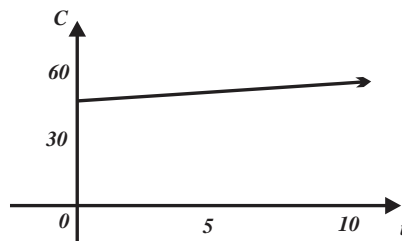


FIGURA 2.40

b. Un tanque se encuentra a un nivel de agua de 120 centímetros, al iniciar su purga el nivel de agua disminuye a razón de 6 centímetros por minuto.

i. Las variables involucradas son: variable dependiente el nivel del agua h (en centímetros) y variable independiente el tiempo t que transcurrido hasta que se vacía el tanque.

ii. La condición inicial es el estado $(0, 120)$ y la razón con la que disminuye el nivel del agua es $m = \frac{6}{1} = 6$ centímetros por minuto.

iii. Por tanto, la función que determina el nivel de agua del tanque es $h(t) = 120 - 6t$, bajo la condición $0 \leq t \leq 20$ minutos.

iv. La siguiente tabla muestra el nivel del tanque para algunos tiempos.

Tiempo (minutos)	Nivel (centímetros)
0	120
10	60
20	0

v. La figura 2.41 (note la diferencia de escala en los ejes coordenados) describe el comportamiento del nivel del agua del tanque en función del tiempo

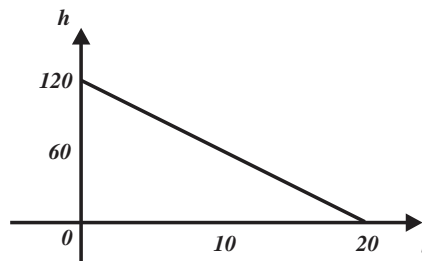


FIGURA 2.41

c. Un contenedor tiene inicialmente 120 litros de un cierto líquido. Se introduce más líquido al contenedor (a razón constante) y cinco segundos después ya contiene 360 litros del líquido.

i. Las variables involucradas son: el volumen V (en litros) variable dependiente y el tiempo t que transcurre como variable independiente.

ii. La condición inicial es $(0, 120)$ y uno de sus "estados" es $(5, 360)$. La razón con la que aumenta el volumen del líquido es

$$m = \frac{360 - 120}{5 - 0} = 48$$

litros por segundo.

iii. La función que describe el líquido en el contenedor es $h(t) = 120 + 48t$, bajo la condición $t \geq 0$ minutos.

iv. La figura 2.42 (note la diferencia de escala en los ejes coordenados) ilustra el comportamiento líquido en el contenedor.

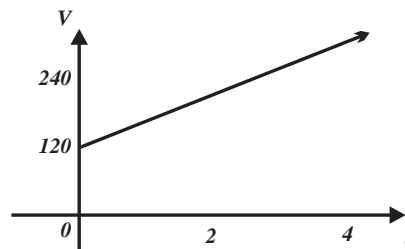


FIGURA 2.42



◆ EJEMPLO 2.24 (MODELOS LINEALES 3)

- a. Una alberca tiene capacidad para 25 000 litros. Se llena utilizando un motor que bombea el agua al ritmo constante de 500 litros por minuto. La bomba inicia su trabajo cuando la alberca contiene 2500 litros de agua.
- i. Para determinar la función que representa el volumen V en función del tiempo t , de agua en la alberca notemos que la condición inicial es el estado $(0, 2500)$ y que la razón de bombeo es $m = 500$ litros por minuto, por tanto $V(t) = 2500 + 500t$ siempre que $t \geq 0$ y esté acotada a 25 000 litros.
- ii. Para determinar el número de litros de agua en la alberca a los 3 minutos de que el motor empezó la bombear agua a la alberca debemos calcular $V(3)$, entonces $V(3) = 2500 + 500(3) = 4000$.
- iii. Para determinar el número de litros de agua en la alberca a los 8 minutos de que el motor inició a bombear agua debemos calcular $V(8)$, así $V(8) = 2500 + 500(8) = 6500$ litros.
- iv. Podemos responder preguntas como: ¿es cierto que a los 10 minutos habrá 6000 litros de agua en la alberca?, lo que resulta falso puesto que $V(10) = 2500 + 500(10) = 7500$.
- v. La alberca se encontrará llena cuando $25\,000 = 2500 + 500t$, es decir, a los $t = \frac{22\,500}{500} = 45$ minutos.
- b. El dueño de un local comercial cobra 1200 pesos más el 5 % de la recaudación total por mes de renta, esto por permitir la instalación en su local una máquina tragamonedas.
- i. Las variables involucradas son: el ingreso I (en pesos) que cobra el dueño del local como variable independiente y el dinero d depositado en la máquina tragamonedas.
- ii. Para determinar la función que representa el ingreso I del dueño del local en función del dinero depositado en la máquina tragamonedas d , utilizamos la condición inicial $(0, 1200)$ y como pendiente $m = 0.05$, por tanto, $I(d) = 1200 + 0.05d$, siempre que $d \geq 0$ y esté acotado.
- iii. Para determinar el ingreso del dueño del local cuando en la máquina tragamonedas han sido depositados 3600 pesos debemos calcular $I(3600)$, así $I(3600) = 1200 + 0.05(3600) = 1380$. Entonces, 1380 pesos son los ingresos en este caso.
- iv. Podemos "conocer" el dinero depositado en la máquina tragamonedas conocido el ingreso del dueño del local, si por ejemplo el dueño del local recibió 2300 pesos, entonces $2300 = 1200 + 0.05d$ y $d = \frac{1100}{0.05} = 22000$, es decir, se depositaron 22000 pesos.



Ejercicios 22

- Obtenga la regla de correspondencia de la función lineal que cumple con las características indicadas.
 - Condición inicial $(0, -3)$, razón de cambio -2 .
 - Condición inicial $(0, -2)$, razón de cambio $-\frac{2}{3}$.
 - Condición inicial $(0, 4)$, razón $\frac{2}{5}$.
 - Condición inicial $(0, \frac{2}{7})$, razón $-\frac{1}{3}$.
- Obtenga la regla de correspondencia de la función lineal que cumple con las características indicadas.
 - Contiene a los puntos (estados) $(1, -1)$ y $(2, -1)$.
 - Contiene a los puntos (estados) $(-2, 4)$ y $(-3, -3)$.
 - Contiene a los puntos (estados) $(-\frac{1}{2}, \frac{4}{3})$ y $(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4})$.

- Contiene a los puntos (estados) $(-5, -\frac{2}{3})$ y $(4, -\frac{4}{3})$.
- Obtenga la regla de correspondencia de la función lineal que cumple con las características indicadas.
 - Contiene al punto $(1, -1)$ y $f(2) = 1$.
 - Contiene al punto $(4, 0)$ y $y(-1) = -1$.
 - Contiene al punto $(4, -3)$ y $y(\frac{2}{5}) = 0$.
 - Contiene al punto $(-6, 2)$ y $y(2) = 1$.
 - En un mismo sistema cartesiano trace la línea recta asociada y explique el papel que desempeña el término constante.
 - $y(x) = -\frac{4}{3}x - 6$.
 - $y(x) = -\frac{4}{3}x + 2$.
 - $y(x) = -\frac{4}{3}x + 5$.

d. $y(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{2}$.

5. En un mismo sistema cartesiano trace la línea recta asociada y explique el papel que desempeña la pendiente (o razón).

a. $y(x) = -2x - 3$.

b. $y(x) = -5x - 3$.

c. $y(x) = -7x - 3$.

d. $y(x) = -11x - 3$.

6. Identifique si los puntos pertenecen o no pertenecen a la misma línea recta (explique su respuesta).

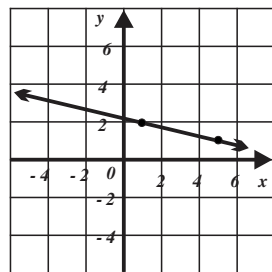
a. $(1, -20)$, $(3, -2)$ y $(4, 7)$.

b. $(4, 0)$, $(1, 1)$ y $(-3, 0)$.

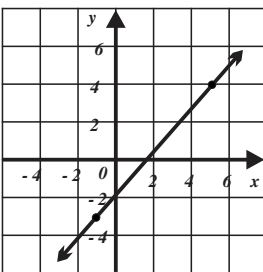
c. $(1, 0)$, $(-5, 4)$ y $(-8, 6)$.

7. Determine la regla de correspondencia asociada a la línea recta.

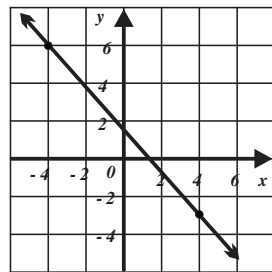
a.



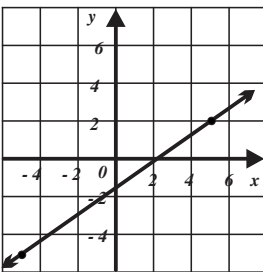
b.



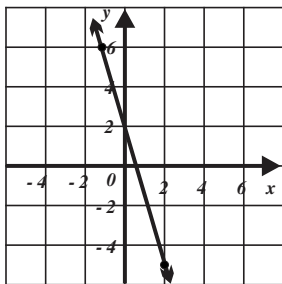
c.



d.



e.



8.

a. Verifique que, si $y(x) = 4x + 2$, entonces $y(2+3)$ es diferente a $y(2) + y(3)$.

b. Verifique que, si $y(x) = x + 5$, entonces

$y((2)(3))$ es diferente a $(2) \cdot y(3)$.

c. Generalice los resultados anteriores para una función lineal con condición inicial distinta de cero.

9. En cada caso determine un registro equivalente (una representación gráfica, la regla de correspondencia o en su caso una tabla con un máximo de tres filas), haga las suposiciones adecuadas.

a. $y(x) = 2x - 3$.

b. $y(x) = -3x + 4$.

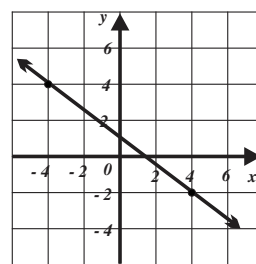
c.

x	$y(x)$
-4	0
6	-2

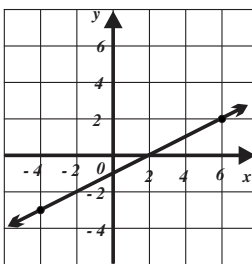
d.

x	$y(x)$
1	-5
3	9

e.



f.



10. En cada caso determine un registro equivalente (una representación gráfica, la regla de correspondencia o en su caso una tabla con un máximo de tres filas), haga las suposiciones adecuadas.

a. $y(x) = 4x - 3$.

b. $y(x) = -3x - 4$.

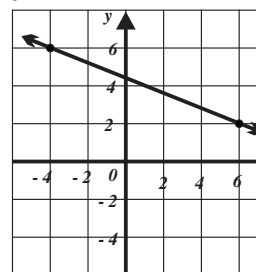
c.

x	$y(x)$
4	-2
5	-3

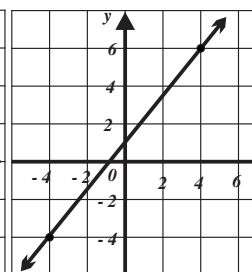
d.

x	$y(x)$
-1	6
3	0

e.



f.



11. Identifique la función que crece con mayor rapidez, justifique su respuesta (suponga que $t \geq 0$, es decir t es no negativa).

a. $y_1(t) = 2t + 2$, $y_2(t) = t + 2$, $y_3(t) = 4t + 2$ e $y_4(t) = \frac{1}{8}t + 2$.

b. $y_1(t) = -2t + 4$, $y_2(t) = -t + 4$, $y_3(t) = -3t + 4$ e $y_4(t) = -5t + 4$.

12. a. Identifique las asignaciones a la variable independiente en las que la función es positiva.

b. Identifique las asignaciones a la variable independiente en las que la función es negativa.

i. $y(t) = 4t - 2$.

ii. $y(t) = -3t + 6$.

iii. $y(t) = \frac{1}{4}t + 3$.

iv. $y(t) = -\frac{3}{4}t - 2$.

13. El salario anual de un profesor se modela por una función lineal del número de años que ha laborado. Un profesor con 12 años de antigüedad recibe 14,400 pesos; un profesor que ha laborado 17 recibe 18,300 pesos.

a. Expresé el salario del profesor en función del tiempo laborado.

b. Determine los salarios de profesores con 5, 8.3 y 27 años de antigüedad.

c. Calcule el tiempo laborado por profesores que cobran 21,500, 18,500 y 19,300 pesos.

14. El número n de latidos del corazón de un gato se relaciona linealmente con la temperatura en que éste animal se encuentra. Un gato a una temperatura de 35° centígrados tuvo una frecuencia cardiaca de 210 y a una temperatura de 32° centígrados su frecuencia cardiaca es de 150 latidos.

a. Expresé la frecuencia cardiaca en términos de la temperatura.

b. Determine la frecuencia cardiaca para una temperatura de 27° centígrados.

c. Expresé la temperatura en términos de la frecuencia cardiaca.

15. Suponga que, en las panaderías "El Elefante", el costo c para producir 10 virotes es 20 pesos y la producción de 40 unidades tiene un costo de 70 pesos. Suponga que existe una relación lineal entre las variables involucradas y que $2 \leq n \leq 40$.

a. Expresé el costo c como una función del número n de virotes.

b. Determine el costo de producir 27 virotes.

c. Determine el costo inicial de producir los virotes.

16. Suponga que el precio p de un automóvil disminuye cada año 5% de su precio original. Si el precio original de un auto de esa clase es 200,000. Suponga que existe una relación lineal entre las variables involucradas.

a. Expresé el precio p del automóvil como función de t , el tiempo transcurrido, con $0 \leq t \leq 15$.

b. Calcule el precio del automóvil a los 7 años.

c. Si el valor de un automóvil es de 190,000 pesos, ¿qué tiempo ha transcurrido?

17. Cierta clase víboras nacen midiendo 5 centímetros e incrementan su longitud l a una razón de 2 centímetros por día. Suponga que existe una relación lineal entre las variables involucradas.

a. Expresé la longitud de las víboras en términos del número n de días transcurridos $0 \leq n \leq 150$.

b. Calcule la longitud de una víbora a los 23 días de nacida.

c. Si una víbora mide 105 centímetros, ¿cuántos días han transcurrido?

18. Vicente Sánchez Camalote tiene un salario s , de 80 pesos diarios más el 8% de las ventas v , de carnitas que realice. Suponga que existe una relación lineal entre las variables involucradas.

a. Determine una relación que indique el salario de Juan en términos de las ventas de carnitas.

b. Si vende 12000 pesos en carnitas, ¿de cuánto son sus emolumentos?

c. ¿Qué cantidad de carnitas necesita vender para ganar 250 pesos?

19 En un contenedor se encuentran inicialmente 100 centímetros cúbicos de un líquido y luego se pone más líquido en él. Transcurridos cinco segundos, contiene 300 centímetros cúbicos de este líquido. Si n representa la cantidad de líquido en el contenedor (en centímetros cúbicos) y t representa el tiempo (en segundos) y ambas variables se relacionan linealmente:

a. Determine la función correspondiente.

b. Si el contenedor tiene una capacidad de 10 litros, ¿en cuánto tiempo se llenará?

c. ¿Qué representan la pendiente y la condición inicial en el contexto del problema?

20. Cada una de las cubiertas tiene un grueso de 5 milímetros. Sabiendo que el grueso de 200 páginas es 1 centímetro, determine la función que describe el número de páginas en función del grueso del libro.

21. Suponga que un robot camina a una razón constante de 25 metros cada dos minutos. Si el robot se ha puesto a caminar desde hace dos minutos, ¿a qué distancia del punto inicial se encuentra en el tiempo t ?

22. La tarifa que cobra una empresa de mensajería con entrega a domicilio es de una cuota fija de 12 pesos más 25 pesos por cada 100 gramos.

- a. Determine la función "costo del envío" como función de su peso en kilogramos.
 b. Representarla gráficamente.
 c. ¿Cuánto costará enviar un paquete que pesa 750 gramos?
 d. Si se pretendemos invertir sólo 92 pesos, ¿cuál es el peso del paquete que se deberá enviar?

23. Considere la tabla

Altura (metros)	0	360	720	990
Temperatura (grados centígrados)	10	8	6	4.5

- a. Trace el gráfico correspondiente.
 b. Obtenga la función lineal que mejor se ajusta.
 c. ¿A partir de qué altura la temperatura será menor a cero grados centígrados?

24. En una vulcanizadora los trabajadores tienen un sueldo diario formado por una cuota fija más 30 pesos por cada llanta reparada. En cierto día del mes después de que un trabajador había reparado 15 llantas, el empleado recibió su un salario de 600 pesos.

- a. Obtenga la función que describe el salario diario de un trabajador en términos del número de llantas reparadas.
 b. ¿Puede un trabajador recibir un salario de 500 pesos? Explique.
 c. ¿Cuántas llantas debe reparar un trabajador para recibir un salario de 900 pesos?

25. Un vareador recolecta 30 kilogramos de peras por hora, también utiliza media hora preparándose al inicio de la jornada.

- a. Obtenga la función que describe el número de kilogramos de peras recolectadas por el vareador.
 b. ¿Cuál es el número de kilogramos de peras máximo que puede recolectar el vareador en un día?

26. El Cibercafé "La Web @ Total", cobra una cuota inicial de 6 pesos, más 8 pesos por hora (o la parte proporcional) por el uso de una de sus computadoras.

- a. Expresé la cantidad a pagar c , por un usuario que utiliza una de las máquinas, en términos del tiempo t .
 b. ¿Cuánto debe pagar una persona que utilizó una de las computadoras 3.4 horas?
 c. Una persona pagó 35 pesos, ¿qué tiempo utilizó la computadora?

27. En la colonia "Venus" al oriente del D.F., los "moto taxistas" cobran una cuota fija de 5.20 pesos más 3.50 pesos por kilómetro recorrido.

- a. Expresé la cantidad a pagar p por un usuario en términos del número x de kilómetros que recorre.
 b. ¿Cuánto debe pagar un usuario que recorre en un taxi de esa ciudad 23 kilómetros?
 c. ¿Qué distancia puede recorrer una persona que cuenta con 83 pesos?

28. "Don Tamales" ofrece a cada uno de sus posibles trabajadores un salario de 60 pesos diarios más una comisión de 50 centavos por cada tamal vendido.

- a. Expresé el salario s , que pagaría "Don Tamales" a uno de sus posibles trabajadores, en términos del número n de tamales que éste venderá.
 b. ¿Cuánto debería pagar a uno de sus posibles trabajadores si éste vendiese 73 tamales?
 c. Uno de los posibles trabajadores aspira a ganar 110 pesos ¿cuántos tamales tendría que vender?

3

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA



PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad el alumno será capaz de modelar y resolver situaciones problemáticas que conduzcan a una ecuación de primer grado con una incógnita, esto lo hará manipulando algebraicamente el modelo, con la finalidad de que la representación algebraica sea una herramienta en la resolución de tales situaciones.

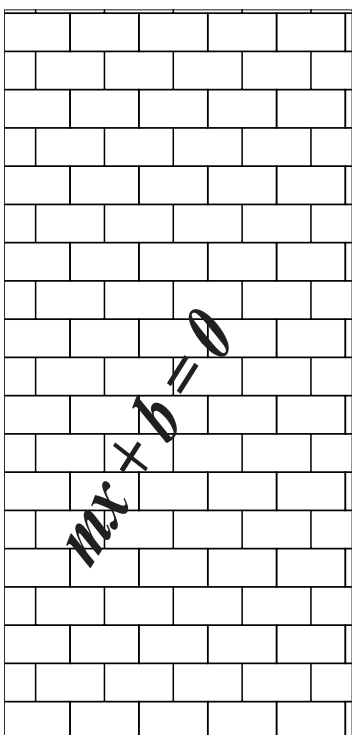
CONTENIDO

3.1 EL LENGUAJE ALGEBRAICO COMO REPRESENTACIÓN DE LA GENERALIDAD

- La ecuación como la expresión simbólica de un estado específico de una función lineal.
- El concepto de ecuaciones equivalentes.
- Las reglas algebraicas que producen ecuaciones equivalentes: Las reglas de transposición o las propiedades de la igualdad y las condiciones para su aplicación.
- La propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma.
- Resolución de una ecuación de primer grado con una incógnita transformándola a la forma $mx + b = 0$.
- El uso del paréntesis en la representación algebraica.
- Reducción de una ecuación de primer grado con una incógnita a la forma: $mx + b = 0$.

3.2 EL ÁLGEBRA COMO SISTEMA SIMBÓLICO Y ABSTRACTO QUE SE UTILIZA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

- La ecuación como la condición simbólica que debe satisfacer la incógnita en un problema.



3.1

EL LENGUAJE ALGEBRAICO COMO REPRESENTACIÓN DE LA GENERALIDAD

El alumno:

1. Comprenderá el concepto de “ecuación” en el contexto de la resolución de problemas y lo expresará en el lenguaje algebraico.

Los modelos matemáticos asociados a la descripción y resolución de problemas relacionan expresiones algebraicas y/o cantidades. En matemáticas, entre las diversas formas de relacionar expresiones algebraicas (entendidas como grupos de símbolos que incluyen números, letras, súper índices, sub índices, entre otros) se utiliza el símbolo “=” (llamado relación de igualdad o simplemente igualdad), mismo genera una ecuación. Así, las expresiones $3x + 8 = 0$, $8x - 4(x - 2) = 7x + 1$, etc. se conocen como ecuaciones y en una ecuación el signo “=” es equivalente a una afirmación, la veracidad de esta afirmación dependerá de la asignación que se haga a la incógnita (o incógnitas) presentes en las expresiones algebraicas que se encuentran a sus lados.

DEFINICIÓN 3.1 (Ecuación)

- a. Una ecuación es una afirmación que establece que dos expresiones algebraicas son iguales, las dos expresiones que constituyen la ecuación se llaman lados o miembros y están separados por la relación de igualdad “=”.
- b. El número (o números) asignado a una incógnita (o incógnitas) que transforma (o transforman) a una ecuación en una identidad se conoce como solución o raíz.

La figura 3.1 interpreta la ecuación $mx = b$ como una balanza en equilibrio.

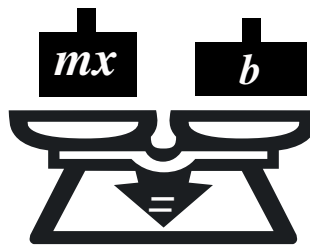


FIGURA 3.1

NOTA

Una ecuación es una afirmación que se hace sobre la igualdad de dos expresiones algebraicas.

◆ EJEMPLO 3.1 (IDENTIDADES Y ECUACIONES)

a. Las relaciones $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, $10 = 7 + 2 + 1$ y $4^2 = 16$, son identidades y siempre son verdaderas.

b. Mientras que $8x - 4(x - 2) = 7x + 1$, $8x - 4(x - 2) = 7x + 1$ y $\frac{2}{3}a - 6 = 12$ son ecuaciones condicionales (o simplemente ecuaciones).



NOTA

1. Tenga en cuenta que el concepto de igualdad en matemáticas es característico de la rama o parte de la matemática que se toma como contexto, por ejemplo, aunque sea utilizado el signo "=" tanto en relaciones de variación directa como en ecuaciones algebraicas su significado no es el mismo.

2. En la presente unidad utilizaremos "la igualdad algebraica" en el sentido de que en una ecuación con una sola una incógnita, digamos x , todos los números asignados a x que al ser sustituidos en la ecuación generan una identidad serán iguales.

◆ EJEMPLO 3.2 (IGUALDAD DE NÚMEROS)

a. En la ecuación $x-2=2$ es evidente que $x=4$ es una solución, pero también lo son $x=2+2$, $x=3+1$, $x=5-1$, etc. por tanto se cumple que $4=2+2=3+1=5-1$, etc.

b. En la ecuación $3x-15=0$, $x=5$ es una solución, pero también lo son $x=7-2$, $x=10-5$, $x=5-0$, etc. por lo que $5=10-5=5-0$, etc.

c. La expresión $x^2+2x+1=x(x+2)+1$ es una identidad puesto que la igualdad se cumple independientemente de la asignación que se haga a x .

d. La expresión $x^2-4=(x+2)(x-2)$ es una identidad puesto que la igualdad se cumple independientemente de la asignación que se haga a x .

e. La expresión $x-4=x-3$ no es una ecuación, la igualdad no se cumple independientemente de la asignación que se haga a x .

**◆ EJEMPLO 3.3 (SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN)**

a. Sea la ecuación $5x-2=2x+7$.

i. La ecuación $5x-2=2x+7$ tiene como solución el número $x=3$. Si sustituimos $x=3$ en $5x-2=2x+7$ obtenemos $5(3)-2=2(3)+7$, es decir generamos la identidad $13=13$.

ii. El número $x=1$ no es solución de la ecuación $5x-2=2x+7$. Si sustituimos $x=1$ en $5x-2=2x+7$ obtenemos $5(1)-2=2(1)+7$, es decir obtenemos $3=9$ lo que es falso.

b. Sea la ecuación $\frac{5x-2}{2}=\frac{5x+4}{4}$.

i. La ecuación $\frac{5x-2}{2}=\frac{5x+4}{4}$ tiene como solución el número $x=\frac{8}{5}$. Si sustituimos $x=\frac{8}{5}$ en $\frac{5x-2}{2}=\frac{5x+4}{4}$ obtenemos

$$\frac{5\left(\frac{8}{5}\right)-2}{2}=\frac{5\left(\frac{8}{5}\right)+4}{4}, \text{ si luego simplificamos obtenemos la identidad } 3=3.$$

ii. El número $x=1$ no es solución de la ecuación $\frac{5x-2}{2}=\frac{5x+4}{4}$. Si sustituimos $x=1$ en $\frac{5x-2}{2}=\frac{5x+4}{4}$ obtenemos

$$\frac{5(1)-2}{2}=\frac{5(1)+4}{4} \text{ o } \frac{3}{2}=\frac{9}{4}, \text{ lo que es falso.}$$

**NOTA**

El lector no debe confundirse, la solución de una ecuación es única, si "supuestamente existen otras soluciones" al ser simplificadas serían iguales a la primera.

DEFINICIÓN 3.2 (ECUACIÓN LINEAL)

a. Toda ecuación que pueda transformarse en la forma $mx+b=0$ (siempre que $m \neq 0$) mediante un proceso algebraico recibe el nombre de ecuación lineal.

b. En el caso anterior x recibe el nombre de incógnita.

La figura 3.2 representa a una ecuación lineal en términos de una balanza.

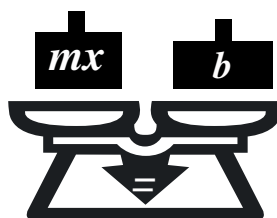


FIGURA 3.2

◆ **EJEMPLO 3.4 (COMPARACIÓN ENTRE UNA FUNCIÓN LINEAL Y UNA ECUACIÓN)**

En la unidad anterior analizamos la expresión $f(x) = mx + b$ a la que llamamos función lineal, note que incluye la relación de igualdad (o simplemente el signo "="), ahora estamos analizando expresiones de la forma $0 = mx + b$. Aunque ambas expresiones incluyen el signo "=" su significado no es el mismo. (Suponiendo que $m \neq 0$).

$mx + b = 0$	$f(x) = mx + b$
Ecuación lineal	Función lineal
x es la incógnita (no se le asignan valores)	x es una variable (la variable independiente) por lo que se le asignan valores.
Sólo un valor de x genera una afirmación verdadera en $0 = mx + b$.	Para cualquier asignación a x se obtiene un número real.
No admite representación en el plano cartesiano.	Admite una representación en el plano cartesiano.



Pese a las diferencias entre la ecuación lineal $0 = mx + b$ y la función lineal $f(x) = mx + b$, algunos autores las vinculan considerando como un caso particular de la función lineal a la ecuación lineal. En efecto, si en $f(x) = mx + b$ efectuamos el cambio $f(x) = 0$ obtenemos $0 = mx + b$. Los autores de esta obra consideraremos el contexto de trabajo por tanto, consideraremos a las ecuaciones y las funciones como objetos ajenos.

Las "herramientas" utilizadas en la resolución de las ecuaciones lineales son las propiedades de los números reales junto con las propiedades de la relación de igualdad, estas "herramientas" se combinan con el propósito de transformar la ecuación que se desea resolver en ecuaciones equivalentes de menor complejidad hasta obtener $ax + b = 0$ (con $a \neq 0$), cuya solución es el número $x = -\frac{b}{a}$.

PROPIEDAD 3.1 (PROPIEDADES DE LA IGUALDAD)

Supongamos que a , b y c representan tres números reales, entonces:

- La propiedad reflexiva de la igualdad garantiza que $a = a$. (PRF)
- La propiedad recíproca de la igualdad garantiza que, si $a = b$, entonces $b = a$. (PRC)
- La propiedad transitiva de la igualdad garantiza que, si $a = b$ y $a = c$, entonces $b = c$. (PT)

La figura 3.3 ilustra las propiedades de la igualdad en términos de balanzas.



FIGURA 3.3

Entre las propiedades de los números reales que destacan por su utilidad en la resolución de ecuaciones se encuentran:

PROPIEDADES 3.2 (ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES)

Supongamos que a es un número real.

i. EXISTENCIA DEL NEUTRO ADITIVO (PNA)

Existe un único número real (representado por 0) tal que, para todo número real a se cumple que $a + 0 = a$.

ii. EXISTENCIA DEL NEUTRO MULTIPLICATIVO (PNM)

Existe un único número real (representado por 1) tal que, para todo número real a se cumple que $a \cdot 1 = a$.

iii. EXISTENCIA DEL INVERSO ADITIVO (PIA)

Para todo número real a existe un único número real, representado por $-a$, tal que $a + (-a) = 0$, el número $-a$ se denomina inverso aditivo del número a (también el número $-a$ se considera el inverso aditivo del número a).

iv. EXISTENCIA DEL INVERSO MULTIPLICATIVO (PIM)

Para todo número real a (excepto para el cero) existe un único número real, representado por $\frac{1}{a}$ (o también por a^{-1}), tal que

$a \left(\frac{1}{a} \right) = 1$, el número $\frac{1}{a}$ se denomina inverso multiplicativo del número a (también, el número a es el inverso multiplicativo del número $\frac{1}{a}$).

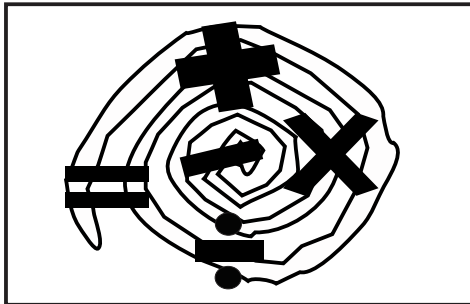


FIGURA 3.4

En la resolución de ecuaciones lineales también es importante el concepto de “ecuaciones equivalentes”.

DEFINICIÓN 3.3 (ECUACIÓN EQUIVALENTE A UNA ECUACIÓN LINEAL)

Una ecuación es equivalente a la ecuación $mx + b = 0$.

a. Si tiene la misma solución que $mx + b = 0$.

b. Podemos describirla en la forma $mx + b = 0$ aplicándole un número finito de propiedades de los números reales.

Utilicemos las propiedades anteriores en la resolución de algunas ecuaciones lineales.

◆ EJEMPLO 3.5 (RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN UTILIZANDO LAS PROPIEDADES 3.1 y 3.2)

a. Sea la ecuación $5x - 2 = 2x + 7$.

Para resolver la ecuación

$$5x - 2 = 2x + 7,$$

conviene agrupar los términos que contienen a la incógnita en uno de sus miembros y los términos que no la contienen en el otro miembro, lo que se consigue aplicando (PIA) y (PNA).

ECUACIÓN	ECUACIONES EQUIVALENTES	FUNDAMENTACIÓN
$5x - 2 = 2x + 7$	$5x - 2x - 2 = 7 + 2$	(PIA)
	$3x = 9$	(PNA)
	$3x \left(\frac{1}{3} \right) = 9 \left(\frac{1}{3} \right)$	(PIM)
	$x = 3$	(PNM)

b. Sea la ecuación $\frac{2}{x} - 8 = 4 + \frac{1}{6}$.

Para resolver la ecuación

$$\frac{2}{x} - 8 = 4 + \frac{1}{6}.$$

Inicialmente conviene simplificar términos semejantes, posteriormente reagrupar términos de forma que aquellos que contienen la incógnita se encuentren en uno de sus miembros de la ecuación; los términos que no la contienen la incógnita en el otro miembro de la ecuación, esto se consigue aplicando las propiedades **(PIA)** y **(PNA)**.

ECUACIÓN	ECUACIONES EQUIVALENTES	FUNDAMENTACIÓN
$\frac{2}{x} - 8 = 4 + \frac{1}{6}$	$\frac{2}{x} = 4 + 8 + \frac{1}{6}$	(PIA) y (PNA)
	$\frac{2}{x} = \frac{73}{6}$	SIMPLIFICACIÓN
	$\frac{2}{x}(x) = \frac{73}{6}(x)$	(PIM)
	$2 = \frac{73}{6}x$	(PNM)
	$2\left(\frac{6}{73}\right) = \frac{73}{6}\left(\frac{6}{73}\right)x$	(PNM) y (PIM)
	$x = \frac{12}{73}$	(PR)

c. Para resolver la ecuación $\frac{2}{3}x - 4x - 5 = 3x - \frac{1}{2} + 4 - 8x$,

simplifiquemos términos semejantes, a continuación los agrupamos de manera que los términos que incluyen la incógnita se encuentren en uno de sus miembros, los restantes términos deben estar en el otro miembro de la ecuación; esto se consigue aplicando las propiedades **(PIA)** y **(PNA)**.

ECUACIÓN	ECUACIONES EQUIVALENTES	FUNDAMENTACIÓN
$\frac{2}{3}x - 4x - 5 = 3x - \frac{1}{2} + 4 - 8x$	$-\frac{10}{3}x - 5 = -5x + \frac{7}{2}$	SIMPLIFICACIÓN
	$5x - \frac{10}{3}x = \frac{7}{2} + 5$	(PIA) y (PNA)
	$\frac{5}{3}x = \frac{17}{2}$	SIMPLIFICACIÓN
	$\frac{5}{3}\left(\frac{3}{5}\right)x = \frac{17}{2}\left(\frac{3}{5}\right)$	(PIA)
	$x = \frac{51}{10}$	(PNM)

NOTAS

En el lenguaje coloquial:

1. Se hace referencia al uso simultáneo de las propiedades **(PIA)** y **(PNA)** como “transposición de términos” o “propiedad de la suma de la igualdad”.
2. Se hace referencia al doble uso simultáneo de las propiedades **(PIM)** y **(PNM)** como “propiedad del producto de la igualdad”.
3. Otras propiedades de los números reales imprescindibles en la resolución de ecuaciones son aquellas que involucran símbolos de agrupamiento (o agrupación), estas propiedades reciben los nombres de “propiedades asociativas”, “propiedad distributiva”. Parte de su importancia consiste en que sugieren la “operación algebraica” que debe efectuarse en primer término.

PROPIEDADES 3.3 (ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES)

Supongamos que a , b y c representan tres números reales, entonces:

i. ASOCIATIVA DE LA SUMA (PAS)

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

ii. ASOCIATIVA DE LA MULTIPLICACIÓN (PAM)

$$a(bc) = (ab)c.$$

iii. DISTRIBUTIVA (PD)

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Los símbolos de agrupamiento de términos son los “paréntesis ()”, los “corchetes []” y las “llaves { }”, entre otros, éstos símbolos sugieren el orden en que han de efectuarse o simplificarse las operaciones involucradas en una ecuación; esto bajo la sugerencia de que, en general, conviene iniciar con las operaciones contenidas en un número mayor de estos símbolos.

◆ EJEMPLO 3.6 (APLICACIÓN DE PROPIEDADES EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES)

a. Sea la ecuación $3(x - 1) + 2 = 2(1 - x)$.

Una forma de resolver $3(x - 1) + 2 = 2(1 - x)$ es:

ECUACIÓN	ECUACIONES EQUIVALENTES	FUNDAMENTACIÓN
$3(x - 1) + 2 = 2(1 - x)$	$3x - 3 + 2 = 2 - 2x$	(PD)
	$3x - 1 = 2 - 2x$	SIMPLIFICACIÓN
	$3x + 2x - 1 + 1 = 2 - 2x + 2x + 1$	(PIA)
	$5x = 3$	(PNA)
	$5x\left(\frac{1}{5}\right) = 3\left(\frac{1}{5}\right)$	(PIM)
	$5x\left(\frac{1}{5}\right) = 3\left(\frac{1}{5}\right)$	(PNM))
	$x = \frac{3}{5}$	SIMPLIFICACIÓN

b. Sea la ecuación $4x - 2 = \frac{5x + 4}{4}$.

Una forma de resolverla ecuación se muestra en el siguiente cuadro:

ECUACIÓN	ECUACIONES EQUIVALENTES	FUNDAMENTACIÓN
$4x - 2 = \frac{5x + 4}{4}$	$(4)(4x - 2) = \frac{5x + 4}{4}(4)$	(PIM) Y (PNM)
	$16x - 8 = 5x + 4$	(PD)
	$16x - 5x = 4 + 8$	(PIA)
	$11x = 12$	SIMPLIFICACIÓN
	$11\left(\frac{1}{11}\right)x = 12\left(\frac{1}{11}\right)$	(PIM) Y (PNM)
	$x = \frac{12}{11}$	SIMPLIFICACIÓN

c. Sea la ecuación $\frac{3}{2y - 3} = \frac{2}{\frac{1}{4}y + 9}$.

Una forma de resolverla es como sigue:

ECUACIÓN	ECUACIONES EQUIVALENTES	FUNDAMENTACIÓN
$\frac{3}{2y-3} = \frac{2}{\frac{1}{4}y+9}$	$\frac{3}{2y-3} (2y-3) \left(\frac{1}{4}y+9 \right) = \frac{2}{\frac{1}{4}y+9} (2y-3) \left(\frac{1}{4}y+9 \right)$	(PIM)
	$3 \left(\frac{1}{4}y+9 \right) = 2(2y-3)$	(PNM)
	$\frac{3}{4}y + 27 = 4y - 6$	(PD)
	$\frac{3}{4}y - \frac{3}{4}y + 27 + 6 = 4y - \frac{3}{4}y - 6 + 6$	(PIA)
	$27 + 6 = 4y - \frac{3}{4}y$	(PNA)
	$33 = \frac{13}{4}y$	SIMPLIFICACIÓN
	$33 \left(\frac{4}{13} \right) = \frac{13}{4}y \left(\frac{4}{13} \right)$	(PIM) y (PNM)
	$\frac{132}{13} = y \quad \text{o} \quad y = \frac{132}{13}$	(PR)

Familiarizados con el uso y manejo de las propiedades de los números reales en la resolución de ecuaciones lineales, cuando resolvamos ecuaciones lineales ya no será de utilidad mencionaras, sin embargo, el lector debe tener en cuenta que en resolución de ecuaciones pueden ser aplicadas una o más propiedades de los números reales simultáneamente, y que cuando se cuenta con cierta experiencia resulta innecesario indicar el nombre de la propiedad o propiedades utilizadas.

◆ EJEMPLO 3.7 (RESOLUCIÓN DE ECUACIONES)

<p>a. En $\frac{2w+1}{2w+7} = 4$, multipliquemos ambos miembros por $(2w+7)$</p> <p>simplifiquemos</p> <p>desarrollemos el producto</p> <p>agrupemos términos semejantes</p> <p>simplifiquemos</p> <p>despejemos w</p>	$(2w+7) \frac{2w+1}{2w+7} = (2w+7) 4,$ $2w+1 = (2w+7) 4,$ $2w+1 = 8w+28,$ $1-28 = 8w-2w,$ $-27 = 6w,$ $w = -\frac{27}{6} \quad \text{o} \quad w = -\frac{9}{2}.$
<p>b. Sea $\frac{2f+3}{5} = \frac{1-4f}{2}$, multipliquemos por $(5)(2)$</p> <p>simplifiquemos</p> <p>desarrollemos los productos</p> <p>agrupemos términos semejantes</p> <p>simplifiquemos y despejemos f</p>	$(5)(2) \frac{2f+3}{5} = (5)(2) \frac{1-4f}{2},$ $2(2f+3) = 5(1-4f),$ $4f+6 = 5-20f,$ $4f+20f = 5-6,$ $24f = -1, \text{ entonces } f = -\frac{1}{24}.$
<p>c. En $(x+7)^2 = x^2 - 5x + 2$, desarrollemos el binomio del miembro izquierdo</p> <p>posteriormente agrupamos términos semejantes</p> <p>luego simplificamos</p> <p>despejamos x.</p>	$x^2 + 14x + 49 = x^2 - 5x + 2,$ $x^2 - x^2 + 14x + 5x = 2 - 49,$ $19x = -47,$ $x = -\frac{47}{19} \quad \text{o} \quad x = -3.$
<p>d. En $(x+1)(x+3) = x^2 + 2$, desarrollemos el producto de binomios del miembro izquierdo.</p> <p>Posteriormente agrupamos términos semejantes</p> <p>luego simplificamos</p> <p>despejamos x</p>	$x^2 + 4x + 3 = x^2 + 2,$ $x^2 - x^2 + 4x = 2 - 3,$ $4x = -1,$ $x = -\frac{1}{4}.$

◆ EJEMPLO 3.8 (RESOLUCIÓN DE ECUACIONES)

<p>a. En $(1-x)(1+x) = -(3+x)(x+9)$ desarrollamos los productos en ambos lados posteriormente agrupamos términos semejantes luego simplificamos por último despejamos x</p>	$1-x^2 = -x^2 - 12x - 27,$ $x^2 - x^2 + 12x = -27 - 1,$ $12x = -28,$ $x = -\frac{7}{3}.$
<p>b. En $\frac{y+4}{y+7} = \frac{y-3}{y-4}$ multipliquemos ambos miembros por $(y+7)(y-4)$ simplifiquemos desarrollemos los productos posteriormente agrupamos términos semejantes luego simplificamos y ordenamos y despejamos y</p>	$(y+7)(y-4)\frac{y+4}{y+7} = (y+7)(y-4)\frac{y-3}{y-4},$ $(y-4)(y+4) = (y+7)(y-3),$ $y^2 - 16 = y^2 + 4y - 21,$ $y^2 - y^2 - 16 + 21 = 4y,$ $4y = 5,$ $y = \frac{5}{4}.$
<p>c. En $\frac{a-\frac{1}{2}}{a+\frac{1}{4}} = \frac{a+\frac{1}{4}}{a-\frac{1}{2}}$ multipliquemos ambos lados por $\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{1}{4}\right)$ simplifiquemos desarrollemos los productos posteriormente agrupamos términos semejantes luego simplificamos y finalmente despejamos a</p>	$\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{1}{4}\right)\frac{a-\frac{1}{2}}{a+\frac{1}{4}} = \left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{1}{4}\right)\frac{a+\frac{1}{4}}{a-\frac{1}{2}},$ $\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a-\frac{1}{2}\right) = \left(a+\frac{1}{4}\right)\left(a+\frac{1}{4}\right),$ $a^2 - a + \frac{1}{4} = a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{16},$ $a^2 - a^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2}a + a, \quad \frac{3}{15} = \frac{3}{2}a, \quad a = \frac{1}{8}.$

Las ecuaciones lineales presentan gran utilidad e importancia para aquellas personas que requieren resolver problemas algebraicos de su entorno. Dependiendo del problema a resolver o analizar, surge la necesidad de construir ecuaciones lineales como modelos de solución de problemas específicos, de forma que al resolver estas ecuaciones se obtienen cantidades o se conocen características específicas. En las siguientes líneas presentaremos parte del lenguaje básico y su representación simbólica de la construcción de modelos matemáticos relacionado con el álgebra y en particular con las ecuaciones lineales. El lector debe tener en cuenta que las representaciones que proponemos no son únicas, y que en consecuencia existen gran cantidad de representaciones equivalentes a las que nosotros proponemos.

EL LENGUAJE RELACIONADO CON PROBLEMAS QUE CONDUCE A LA CONSTRUCCIÓN DE UNA ECUACIÓN LINEAL CON UNA INCÓGNITA.

FRASE	REPRESENTACIÓN
i. Un número cualquiera	x , o cualquier otra del alfabeto.
ii. Un número se incrementa a unidades	$x+a$.
iii. Un número disminuye a unidades	$x-a$
iv. La suma de dos números es s	El primer número es x , el otro número es $s-x$.
v. El doble de un número	Si el número es x , su doble es $2x$.
vi. El número que supera al triple de otro número en diez.	Si uno de los números es x , el otro número es $3x+10$.
vii. Dos números enteros consecutivos.	x y $x+1$, también $x-1$ y x .

vii. El producto de dos números cuya suma es otro número.	$x(s-x) = a$.
viii. El cociente de dos números cuya suma es s	$\frac{x}{s-x}$ o $\frac{s-x}{x}$.
ix. Una fracción de un número.	$\frac{x}{a}$.
x. El 37% de una cantidad.	$0.37x$ o $\frac{37}{100}x$.
xi. Una cantidad se incrementa en 37%	$x + 0.37x = 1.37x$.
xii. Una cantidad disminuye en 37%	$x - 0.37x = 0.63x$.
xiii. Concentración de una sustancia al 35%.	$0.35x$, siendo x el total de la sustancia.
xiv. El incremento en un porcentaje de un objeto.	$x + (p)x$, donde p el porcentaje de incremento.

Al inicio, el proceso de resolver un problema algebraico suele presentar dificultades a quien lo intente, sin embargo, las siguientes observaciones pueden resultar de gran apoyo.

- Un primer paso es el comprender el problema, en parte, esto consiste en identificar la incógnita y los datos que se proporcionan.
- Elaboración de un plan, establecer relaciones entre datos e incógnitas, identificar y relacionar el significado de las operaciones aritméticas con los datos del problema y con la incógnita. ¿
- Ejecutar el plan
- Examinar la solución obtenida, verificar el resultado, verificar los pasos ejecutados.

Respecto a la pregunta ¿qué tipo de problemas se modelan y resuelven con una ecuación lineal y luego obteniendo su solución?, la respuesta es una gran cantidad, sin embargo, muchos de ellos siguen los patrones que presentamos en el *ejemplo 3.9*.

◆ EJEMPLO 3.9 (MODELOS GENERALES)

a. TAREA REALIZADA POR DOS MÁQUINAS

Supongamos que tenemos dos máquinas para efectuar una tarea y que algún factor opera retardando la tarea realizada por ambas máquinas.

Así, en una hora la máquina A realiza la fracción $\frac{1}{t_A}$ de la tarea, la máquina B realiza la fracción $\frac{1}{t_B}$ de la tarea y el factor de retardo deshace $\frac{1}{t_R}$ de la tarea.

- En una hora, las dos máquinas trabajando simultáneamente y evitando el factor de retardo, habrán realizado la fracción $\frac{1}{T} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}$ de la tarea.

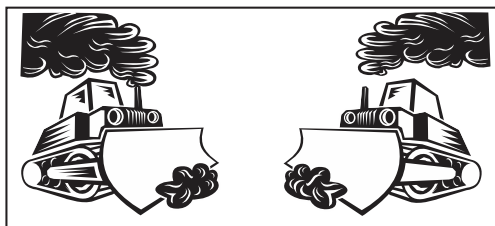


FIGURA 3.5

- En una hora, las dos máquinas trabajando simultáneamente, habrán realizado la fracción $\frac{1}{T} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_3}$ de la tarea.

b. PROBLEMAS DE ALEACIONES

Una aleación es una mezcla de dos metales, se obtiene fundiéndolos y solidificándolos. La proporción en peso en que el metal precioso puro se encuentra en una aleación se denomina ley de la aleación.

Suponga que deseamos hacer una aleación con los dos metales M y N con una ley de aleación diferente (proporción de metal).

Sean:

T la cantidad total de metal en la aleación. L_N la ley de aleación del metal resultante.

$C_M = x$ la cantidad de metal M . L_M la ley de aleación del metal M .

$C_N = T - x$ la cantidad de metal N . L_N la ley de aleación del metal N .

La información anterior se puede representar en una tabla

	CANTIDAD	LEY	METAL
METAL M	$C_M = x$	L_M	$x \cdot L_M$
METAL N	$C_N = T - x$	L_N	$(T - x) \cdot L_N$
ALEACIÓN	T	L_T	$x \cdot L_M + (T - x) \cdot L_N$

Por tanto

$$T \cdot L_T = x \cdot L_M + (T - x) \cdot L_N.$$

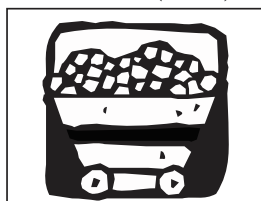


FIGURA 3.6

c. PROBLEMAS DE MEZCLAS

Una mezcla es el agregado de varias sustancias, objetos o cuerpos que no se combinan químicamente entre sí. Suponga que deseamos hacer una mezcla con dos sustancias A y B .

Sean:

T la cantidad total de mezcla. P_M es el precio total de la mezcla.

$x_A = x$ la cantidad de sustancia A . P_A es el precio de la sustancia A .

$x_B = T - x$ la cantidad de sustancia B . P_B es el precio de la sustancia B .

La información anterior se puede representar en una tabla

	CANTIDAD	PRECIO	COSTO
SUSTANCIA A	$x_A = x$	P_A	$x \cdot P_A$
SUSTANCIA B	$x_B = T - x$	P_B	$(T - x) \cdot P_B$
MEZCLA	T	P_M	$T \cdot P_M$

Por tanto,

$$xP_A + (T - x)P_B = T \cdot P_M.$$



FIGURA 3.7

d. PROBLEMAS DE MONEDAS

Suponga que se tienen almacenadas monedas de dos denominaciones y que se conoce el monto de todas ellas.

Sean:

T la cantidad de monedas.

V_M el monto de las monedas.

x la cantidad total de monedas de la denominación A .

V_A el monto de las monedas de denominación A .

$T - x$ la cantidad total de monedas de la denominación B . V_B el monto de las monedas de denominación B . La información anterior se puede representar en una tabla:

	CANTIDAD	DENOMINACIÓN	MONTO DE LAS MONEDAS
MONEDAS DE DENOMINACIÓN A	x	V_A	$x \cdot V_A$
MONEDAS DE DENOMINACIÓN B	$T - x$	V_B	$(T - x)V_B$
CANTIDAD DE MONEDAS	T		V_T

Por tanto,

$$V_M = xV_A + (T - x)V_B.$$

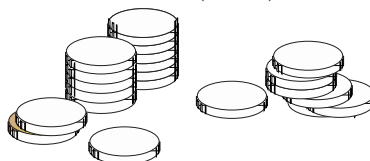


FIGURA 3.8

NOTA: Seguramente el lector observó la similitud del proceso de construcción del modelo y del modelo obtenido en los tres primeros incisos del problema anterior.

e. PROBLEMAS DE OBJETOS EN MOVIMIENTO

La rapidez (suponiendo que es constante), el desplazamiento y el tiempo son tres magnitudes físicas relacionadas entre sí. Si v representa la rapidez, d el desplazamiento y t el tiempo, entonces $v = \frac{d}{t}$ o $d = v \cdot t$. Tenga en cuenta:

- El desplazamiento d y la rapidez v son cantidades directamente proporcionales (a mayor rapidez, mayor desplazamiento, en un mismo tiempo).
- El tiempo t y la rapidez v son magnitudes inversamente proporcionales (a mayor rapidez, es necesario menos tiempo en recorrer un mismo desplazamiento).
- El desplazamiento d y el tiempo t son magnitudes directamente proporcionales (para un mayor desplazamiento se requiere mayor tiempo en recorrerlo (suponiendo rapidez constante)).

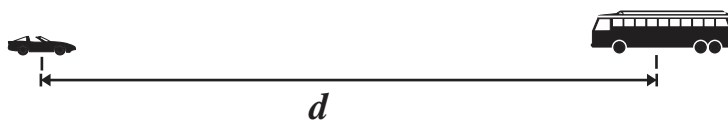


FIGURA 3.9

iv. La distancia recorrida por uno de los móviles al punto de encuentro más la distancia que ha recorrido el segundo móvil es igual a la distancia que los separa.

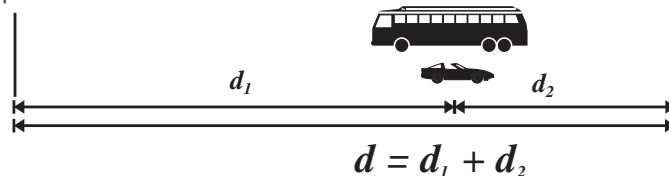


FIGURA 3.10

v. La velocidad a la que se aproximan dos móviles, en sentidos opuestos es la suma de sus velocidades.

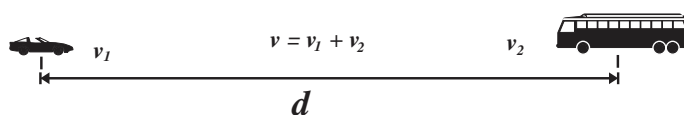


FIGURA 3.11

vi. Si dos móviles viajan en la misma dirección a distintas velocidades, en el punto de encuentro han recorrido la misma distancia.

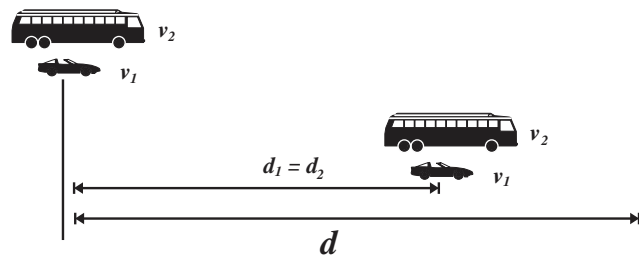


FIGURA 3.12

Ejercicios 3.1

1. Resuelva.

- $3x + 5 = 95$.
- $x + 2(x - 4) + 5 = 2$.
- $4x - 3 = 5 - 4x$.
- $x - 1 - 2(x - 5) = 2(3x - 1)$.
- $x + 4 = -3(5 - x) + 3(4x - 2)$.
- $2x - 3x - 7 = -3(5 - 2x) - 3(x - 2)$.

2. Determine la solución y verifique su respuesta

- $4x + 5 = 8$.
- $8x - 6x = 22$.
- $4x - 7x + 9x = 100$.
- $-7x - 11x + x = -16 - 2x$.
- $14x + 4x - x = -7$.
- $3y - 4(1 + 3y) = 9 - 5(y - 2)$.

3. Resuelva las ecuaciones.

- $\frac{1}{4}x + \frac{3}{8}x = 8$.
- $\frac{1}{4}x - \frac{5}{6}x = 4$.
- $\frac{1}{8}x + \frac{3}{24}x = \frac{1}{12}$.
- $\frac{1}{4}x - 2 = -\frac{7}{8}x + 2$.
- $\frac{2}{5}x - x - 4x = 4 + 3x$.
- $\frac{4}{3}a - 2a - 4a = 5 + 3a + 9$.

4. Resuelva y verifique su respuesta

- $\frac{1}{7}x - 3x = 8$.
- $\frac{1}{8}x - \frac{1}{6}x = 4 + \frac{1}{12}$.

- $2x - \frac{3}{10}x + \frac{1}{6}x = 6$.
- $\frac{1}{5}x - 2 = -\frac{3}{5}x + 2$.
- $2x - \frac{1}{4}(x - 2) = \frac{7}{2}$.
- $\frac{1}{4}(w - 6) + 4w = 9 - 3w + 35$.

5. Resuelva y verifique su respuesta

- $9(x - 3) + 4 = 5 - 4(x - 1)$.
- $-3(x + 4) - 7 = 5(x + 2) - 3(x + 3)$.
- $4 - (2x + 3) = 3 - 6(x + 1) - (x + 1)$.
- $2(5x - 1) - (x - 4) = 3(x - 4) - 4(x - 2)$.
- $\frac{2}{5}(x - 3) = \frac{5}{2}(4x - 7)$.
- $4(g - 13) = \frac{2}{7}(4g - 10)$.

6. Resuelva y verifique su respuesta

- $0.6x + 4.9x = 0.2(x - 1)$.
- $2.1(x + 2) - 3.1 = -1.3(x + 2)$.
- $1.5 - (x + 3) = 3.2 - 6(x + 1.1) - 2.3(x + 1)$.
- $0.2(5x - 1) + 0.2x = 3.1(x + 2) - 4.1$.
- $7.3x - 1.6 = 1.8(4x - 7)$.
- $0.01(g - 10) = 1.02(2g - 5)$.

7. Resuelva y verifique su respuesta

- $\frac{11.2}{0.1x} = 4$.
- $\frac{3.2}{x} = \frac{1.7}{x} + 3.4$.
- $\frac{4.1}{y} - 3.7 = 2.2$.
- $\frac{2.9}{w - 4.3} = 1$.
- $\frac{1.04}{x - 1.1} = 5.1$.

$$\begin{array}{ll} \text{f. } \frac{2.5}{0.2w+3.13} = 6. & \text{j. } \frac{9}{12t+1.5} - 2 = 0. \\ \text{g. } \frac{x}{x-6.6} - 5.6 = 0. & \text{k. } \frac{5.2x+3.1}{5.2x} - 1.3 = 0. \\ \text{h. } \frac{3x}{x+8.8} + 6.4 = 0. & \text{l. } \frac{9.3x+18.5}{19.3} = 4.1. \end{array}$$

8. Resuelva y verifique su respuesta

$$\begin{array}{l} \text{a. } \frac{2}{5}(x-3)+1=1-\frac{1}{10}(x-1). \\ \text{b. } \frac{1}{6}(x-12)-\frac{1}{3}(3x-9)=1. \\ \text{c. } \frac{1}{4}(8x-16)-\frac{1}{2}(3x-39)=\frac{1}{8}(5x-40). \\ \text{d. } \frac{1}{4}(4x+8)-\frac{1}{5}(15x-45)=\frac{1}{20}(8x+48). \\ \text{e. } 3\left(x+\frac{1}{4}\right)-5\left(-x-\frac{3}{4}\right)=6\left(x+\frac{1}{6}\right). \\ \text{f. } \frac{3}{5}(g+14)=\frac{3}{10}(4g-24)+2(g+4). \end{array}$$

9. Resuelva y verifique su respuesta

$$\begin{array}{l} \text{a. } x(x-3)-x^2=5-\frac{1}{2}(2x-2). \\ \text{b. } (x-16)(x-1)=(x-4)(x-2). \\ \text{c. } (x+3)(x-4)=(x-3)(x+7). \\ \text{d. } (x-3)(x-3)=(x+3)(x+6). \\ \text{e. } (x+1)(x+1)=(x+3)(x-3). \\ \text{f. } (x-3)^2=(x+7)(x-6). \\ \text{g. } a(a-1)=(a-2)(a+2). \\ \text{h. } 4+b(b+1)=(b-2)(b+2)+3b. \\ \text{i. } 2b(b+1)+3b=b^2+(b-2)(b+2)-7b. \\ \text{j. } (p-3)^2=(p-4)(p-2). \\ \text{k. } (p+1)(p+1)=p^2+7(p-3). \\ \text{l. } (2x-1)^2=(2x+3)(2x-4). \end{array}$$

10. Resuelva y verifique su respuesta.

$$\begin{array}{l} \text{a. } (a-4)^2-(a-6)^2=3(a-5). \\ \text{b. } b(b+7)-(b-2)(b+2)+3b=7. \\ \text{c. } (r+1)^2-(r-7)(r+2)=3(r+12). \\ \text{d. } (t+3)^2=(t-4)^2+4(t-2). \\ \text{e. } \left(\frac{1}{4}p+2\right)^2=\frac{1}{16}p^2-6(4-p). \\ \text{f. } (3x-8)^2=(3x+7)(3x-7). \\ \text{g. } (a-1)^2=(a-2)^2+10a-6. \\ \text{h. } 4(b+2)+2b(b+1)=(b-4)(b+1)+b(b-1). \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{i. } 6-(c+3)^2=c(3-c)+c. \\ \text{j. } \left(p+\frac{1}{2}\right)^2=\left(p-\frac{1}{4}\right)\left(p-\frac{3}{4}\right). \\ \text{k. } \left(p+\frac{1}{4}\right)\left(p-\frac{1}{5}\right)=\left(p-\frac{3}{2}\right)^2. \\ \text{l. } \left(2p+\frac{3}{4}\right)\left(2p-\frac{3}{4}\right)=(2p-3)^2. \end{array}$$

11. Resuelva y verifique su respuesta.

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \frac{a-1}{a-4}=\frac{1}{8}. & \text{j. } \frac{3}{2b-3}=\frac{-6}{b+10}. \\ \text{b. } \frac{b-6}{2b-3}=\frac{3}{4}. & \text{k. } \frac{3}{5a-3}=-5a-\frac{2}{a+11}. \\ \text{c. } \frac{3a-6}{5a+3}=-\frac{2}{3}. & \text{l. } \frac{e+5}{e-7}=\frac{e-7}{e+3}. \\ \text{d. } \frac{\frac{1}{4}a-8}{\frac{1}{5}a+3}=-\frac{2}{4}. & \text{m. } \frac{e-12}{e+3}=\frac{e+5}{e+12}. \\ \text{e. } \frac{2e+6}{2e+3}=-\frac{2}{3}. & \text{n. } \frac{3}{2b-3}=\frac{-6}{b+10}. \\ \text{f. } \frac{4e+10}{4e-5}=\frac{1}{8}. & \text{o. } \frac{r+3}{r-13}=\frac{r-4}{r-3}. \\ \text{g. } \frac{1-4e}{4e-12}=\frac{2}{5}. & \text{p. } \frac{s+1}{s-8}=\frac{s+8}{s-5}. \\ \text{h. } \frac{4+2e}{6e+5}=\frac{1}{10}. & \text{q. } \frac{c}{8}-6=4-\frac{c-7}{2}. \\ \text{i. } \frac{5}{a-4}=\frac{8}{a-4}. & \text{r. } \frac{c-7}{8}-6=4-\frac{c+1}{4}. \end{array}$$

12. En cada caso despeje la incógnita indicada.

$$\begin{array}{l} \text{a. } h = \frac{A}{\frac{1}{2}b}, b. \\ \text{b. } c = \frac{5}{9}(f-32), f. \\ \text{c. } A = \frac{1}{2}(B+b)h, b. \\ \text{d. } A = \frac{1}{2}(B+b)h, h. \\ \text{e. } s = 2\pi r h + 2\pi r^2, h. \\ \text{f. } \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}. \end{array}$$

13. Números.

Suponga que la suma de dos números es cierta cantidad fija A .

- ¿Cuáles son los números?
- Si además uno de ellos es un múltiplo del otro, ¿cuáles son los números?
- Si además uno de ellos es un múltiplo del otro, ¿cuáles son los números?
- Construya un modelo con el que sea posible determinar los números.

14. Números.

Suponga que la suma de dos números es cierta cantidad fija A .

a. ¿Cuáles son los números?

b. Si además el mayor de ellos se divide por el menor el cociente es C y el residuo es R , construya un modelo con el que sea posible determinar los números.

15. Números.

Suponga que la suma de dos números es cierta cantidad fija A .

a. ¿Cuáles son los números?

b. Si además el mayor de ellos se divide por el menor el cociente es C y el residuo es R , construya un modelo con el que sea posible determinar los números.

16. Números.

Suponga que la suma de dos números es cierta cantidad fija A y que su diferencia es B , construya un modelo con el que sea posible determinar los números.

17. Edades.

Suponga que la edad de una persona es A y la de su hijo es B . Si transcurren x años la edad del padre es un múltiplo entero de la edad del hijo, construya un modelo que permita determinar los números.

18. Edades.

Suponga que hace M años la edad de una persona era K veces la edad de otra, y que actualmente sólo es $\frac{1}{2}K$ veces. Construya un modelo que permita determinar los números.

3.2

EL ÁLGEBRA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

El alumno:

2. Una vez expresada algebraicamente la condición que satisface la incógnita en un problema, el alumno será capaz de utilizarla para resolverlo, empleando las reglas de transposición o las propiedades de la igualdad.

Aunque no existe un proceso o procedimiento general para resolver un problema de índole algebraica, algebraica, consideramos importante reflexionar la utilidad de los siguientes elementos o aspectos que pueden resultar de un gran apoyo:

- Leer cuidadosamente el problema o situación varias veces hasta entender lo que se pide y así poder extraer los datos o información que contiene.
- Expresar el problema o situación de manera simbólica, lo que puede requerir del planteamiento de una ecuación.
- Efectuar los cálculos adecuados que requiere la resolución de la ecuación.
- Un análisis de la respuesta obtenida con el objeto de ver si esta tiene sentido en el contexto del problema o situación real de interés.
- Finalmente verificar que se obtuvo la respuesta correcta y verificarla.

Ahora veamos algunos problemas algebraicos en los que de manera, ya sea explícita o implícita, utilizamos los consejos antes señalados.

◆ EJEMPLO 3.10 (PROBLEMAS RELACIONADOS CON NÚMEROS A)

a. La diferencia entre dos números es 30 y el doble del menor de los números es 26. ¿Qué números son?

- Se desea determinar dos números de manera que uno sea 30 unidades mayor que el otro.
- Dado que x el menor de los números, entonces su doble es 26 y $2x = 26$. Por tanto $x = 13$.
- El mayor de ellos es $x + 30$, es decir, $13 + 30 = 43$
- La diferencia entre 43 y 13 es 30 y el doble del menor es 26.

b. Tres números enteros consecutivo suman 66. ¿Qué números son?

- Los números enteros consecutivos difieren en una unidad.
- Sea x el menor de los números, entonces los otros números se representan por $x + 1$ y $x + 2$.
- La suma de los tres números es 66, entonces $x + (x + 1) + (x + 2) = 66$.

Si $x + x + 1 + x + 2 = 66$, entonces $3x + 3 = 66$, de donde $3x = 63$ y finalmente $x = 21$.

Por tanto, los números son 21, 22 y 23.

iv. La suma de los números 21, 22 y 23 es 66.

c. ¿Qué número cumple con la condición?, "al restarle 5 a $\frac{2}{3}$ del número, se obtiene el mismo resultado que al sumar 2 a los

$\frac{3}{5}$ del número?

i. Deseamos conocer tres números enteros consecutivos (difieran en uno).

ii. Representemos por x al número que desconocemos.

iii. Los dos tercios del número desconocido se representan por $\frac{2}{3}x$ y el restarle 5 se escribe como $\frac{2}{3}x - 5$. Por otra parte, $\frac{3}{5}$

del número desconocido se representan por $\frac{3}{5}x$, el sumarle 2 se escribe como $\frac{3}{5}x + 2$. Puesto que en ambos casos se

obtiene el mismo resultado $\frac{2}{3}x - 5 = \frac{3}{5}x + 2$.

Si $\frac{2}{3}x - 5 = \frac{3}{5}x + 2$, entonces $\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}x = 2 + 5$ y en consecuencia $\frac{1}{15}x = 7$. El número que cumple con las condiciones señaladas es $x = 105$.

iv. Notemos que $\frac{2}{3}(105) - 5 = \frac{3}{5}(105) + 2$.

d. ¿Qué número debe sumarse, tanto al numerador como al denominador, de $\frac{1}{2}$ para obtener $\frac{8}{9}$?

i. Deseamos conocer un número que ha de ser sumado tanto al numerador como al denominador.

ii. Representemos por x el número que desconocido.

iii. El sumar el número x al numerador y al denominador de $\frac{1}{2}$ conduce a la expresión $\frac{1+x}{2+x}$, esta última expresión debe ser

igual a ocho novenos, por tanto, $\frac{1+x}{2+x} = \frac{8}{9}$. Si $\frac{1+x}{2+x} = \frac{8}{9}$, entonces $9(1+x) = 8(2+x)$ o $9 + 9x = 16 + 8x$, de donde obtenemos $x = 7$.

iv. Note que $\frac{1+7}{2+7} = \frac{8}{9}$.



FIGURA 3.13

◆ EJEMPLO 3.11 (PROBLEMAS RELACIONADOS CON NÚMEROS B)

Determine los números a los que hace referencia el enunciado.

a. Dos números suman cuarenta y uno de ellos es 12 unidades menores que el otro.

i. Es necesario determinar dos números que sumen cuarenta.

ii. Si x representa al mayor, el otro número es $x - 12$.

iii. La suma de los dos números es cuarenta unidades se escribe como $x + x - 12 = 40$, entonces $2x = 52$ o $x = 26$. Por tanto, número mayor $x = 26$ y número menor $x - 12 = 26 - 12 = 14$.

iv. Notemos que $26 + 14 = 40$ y que $26 - 14 = 12$.

b. Dados tres números cuya suma es 156, el menor es la mitad del intermedio y éste es la quinta parte del mayor.

i. Se desea conocer tres números, sea a el número intermedio.

ii. Si a representa al número intermedio, entonces el número mayor es $5a$, y el número menor es $\frac{1}{2}a$.

iii. La suma de los tres números es 156 se representa por la ecuación $\frac{1}{2}a + a + 5a = 156$, entonces $\frac{13}{2}a = 156$, de donde

$a = 24$, así: número menor $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(24) = 12$, número intermedio $a = 24$ y número mayor $5a = 5(24) = 120$.

iv. Notemos que $12 + 24 + 120 = 156$.

c. Un número es 18 unidades menor que otro; tres medios del número mayor supera en tres unidades al número menor.

i. Se requiere determinar dos números.

ii. Sea x el número mayor, entonces el número menor es $x - 18$.

iii. Puesto que tres medios del número mayor supera en tres unidades al número menor, la diferencia entre estos dos números es $\frac{3}{2}x - (x - 18) = 3$. De $\frac{3}{2}x - (x - 18) = 3$, obtenemos $\frac{1}{2}x + 18 = 3$, es decir, $x = -30$ es el número mayor. El número menor es $x - 18 = -30 - 18 = -48$.

iv. Notemos que $\frac{3}{2}(-30) - 3 = -48$.

◆ EJEMPLO 3.12 (PROBLEMAS RELACIONADOS CON PORCENTAJES)

a. La renta actual mensual por un apartamento con dos recamaras en la Colonia Tijerina es 3500 pesos. Si el dueño del apartamento incrementará en 500 pesos la renta el próximo año, ¿qué porcentaje extra deberá pagar quien lo habite?

i. Se desea conocer el porcentaje en que se incrementará la renta.

ii. Representemos por x el porcentaje en que se incrementará la renta.

iii. Entonces $3500 + 3500x = 4000$, por consiguiente, $3500x = 500$ o $x = \frac{500}{3500} = 0.1429$, por tanto, el incremento de la renta será del 14.29%.

iv. Notemos que el 14.29% de 3500 es $3500(0.1429) \approx 500$.

b. Actualmente el precio de un kilogramo de tortillas es 14 pesos y si el precio fue incrementado un 20%, ¿cuál era su precio anterior?

i. Se desea conocer el precio anterior del kilogramo de tortillas.

ii. Sea x el precio anterior de un kilogramo de tortillas, al precio actual debe agregarse el 20%.

iii. Entonces $x + 0.20x = 14$, por consiguiente, $1.20x = 14$ o $x = \frac{14}{1.2}$, así, el precio del kilogramo de tortillas era de $x \approx 11.67$ pesos.

iv. Notemos que $11.67 + 0.20(11.67) \approx 14$.

c. El costo de producción de un litro de leche es 6 pesos, si se pretende una utilidad del 210%, ¿en cuánto debe venderse?

i. Se desea conocer el precio de venta de un litro de leche.

ii. Representemos por p al precio de venta del litro de leche.

iii. Puesto que, el *precio de venta = costo de producción + utilidad*

$$p \qquad 6.00 \qquad 210\% \text{ de } 6.00,$$

Entonces debe venderse a $p = 6.00 + 2.10(6.00) = 18.60$ pesos.

iv. Note que $6 + 2.1(6) = 18.6$.



◆ EJEMPLO 3.13 (PROBLEMAS RELACIONADOS CON MEZCLAS)



FIGURA 3.14

a. Un comerciante mezcló dos tipos de granos de café, del tipo A con precio de 100 pesos por kilogramo y del tipo B a 150 pesos el kilogramo, obtuvo 30 kilogramos de granos de café a un precio de 120 pesos el kilogramo. ¿Qué cantidad de cada tipo de grano de café utilizó?

i. Se desea conocer el número de kilogramos de cada grano de café en la mezcla.

ii. Sean:

x la cantidad del grano de café del tipo A . 100 es el precio del grano de café del tipo A .
 $30 - x$ la cantidad del grano de café del tipo B . 150 es el precio del grano de café del tipo B .
 30 kilogramos es la cantidad total de mezcla. 120 es el precio total de la mezcla.

La información anterior está representada en la siguiente tabla:

	CANTIDAD	PRECIO	COSTO
GRANO DE CAFÉ TIPO A	x	100	$100x$
GRANO DE CAFÉ TIPO B	$30 - x$	150	$(30 - x)150$
MEZCLA	30	120	3600

iii. Por tanto,

$100x + (30 - x)(150) = 3600$, ecuación que es equivalente a $100x - 150x + 4500 = 3600$, de donde, $50x = 900$ y $x = 18$.

El comerciante utiliza 18 kilogramos de granos de café del tipo A y 12 kilogramos de granos de café del tipo B.

iv. Notemos que $18(100) + 12(150) = 3600$.

b. Un recipiente contiene 12 litros de una mezcla de coca cola con aguardiente. Si la concentración de aguardiente en la mezcla es del 25 %, ¿qué cantidad de coca cola debe agregarse en el recipiente para disminuir la concentración de aguardiente al 15 % ?

i. Se desea agregar una cantidad de coca cola (en litros) a una mezcla para disminuir su concentración.

ii. Así:

x son los litros de coca cola que deben agregarse. $12 + x$ representa la cantidad final de coca cola.

$12(0.25)$ litros es la cantidad inicial de aguardiente. $(12 + x)(0.15)$ litros es la concentración final de aguardiente.

La información anterior está representada en la siguiente tabla:

	CANTIDAD INICIAL	CANTIDAD AGREGADA	TOTAL
MEZCLA TOTAL	12	x	$12 + x$
AGUARDIENTE	$12(0.25)$	0	$(12 + x)(0.15)$

iii.

$$0.15(12 + x) = (12)(0.25) + 0(x) \text{ o } 3 = 0.15(12 + x), \text{ de donde, } x = 8.$$

Deben agregarse 8 litros de coca cola a la mezcla.

iv. La nueva mezcla contiene 17 litros de coca cola. Observe que la proporción de coca cola en la mezcla es $\frac{17}{20} = 0.85$, el 85% y la de aguardiente el 15%.

c. Un contenedor A tiene 1000 kilogramos de azúcar; 34% de azúcar estándar y 66% de azúcar refinada. Un contenedor B tiene 400 kilogramos de una mezcla de azúcar, 26% de azúcar estándar y 74% de azúcar refinada. Si se revuelven los contenidos en un nuevo contenedor C, ¿cuál es el porcentaje de azúcar estándar?

i. Se desea conocer el porcentaje de azúcar morena en el contenedor C.

ii. Sea x el porcentaje de azúcar estándar. La siguiente tabla sistematiza la información contenida en el problema.

	CONTENEDOR A	CONTENEDOR B	CONTENEDOR C
CONTENIDO EN KILOGRAMOS	1000	400	1400
AZÚCAR ESTÁNDAR	34 %	26%	x %

iii. Por tanto, $34\%(1000) + 26\%(400) = x\%(1400)$ o $340 + 104 = 14x$, por consiguiente $x = 29.143$.

iv. El contenedor C tiene el 29.143% de azúcar estándar, aproximadamente 420 kilogramos.

◆ EJEMPLO 3.14 (PROBLEMAS RELACIONADOS CON MONEDAS)



FIGURA 3.15

a. Al romper su “cochinito”, un niño contó un total de 70 monedas con denominaciones de 5 pesos y 2 pesos, observó que el monto de las monedas es 269 pesos. ¿Cuántas monedas de cada denominación había en el “cochinito”?

i. Se desea conocer el número de monedas de cada denominación.

ii. Sea x el número de monedas de dos pesos, entonces hay $70 - x$ monedas de 5 pesos. La siguiente tabla sistematiza la información contenida en el problema.

	MONEDAS DE 2 PESOS	MONEDAS DE 5 PESOS	TOTAL
NÚMERO	x	$70 - x$	70
MONTO	$2x$	$5(70 - x)$	269

iii. En consecuencia $2x + 5(70 - x) = 269$ o $2x + 350 - 5x = 269$, entonces $x = 27$.

iv. El cochinito tiene $x = 27$ monedas de dos pesos y $70 - x = 70 - 27 = 43$ monedas de cinco pesos.

b. Una fajilla contiene 100 billetes, con denominaciones de 20, 50 y 100 pesos indica un monto de 4750 pesos, si la cantidad de billetes de 20 pesos es el doble de la cantidad de billetes de 50 pesos, y la cantidad de billetes de 50 pesos es la misma que la de billetes de 100 pesos, ¿cuál es el número de billetes de cada denominación?

i. Se desea conocer el número de billetes de cada denominación.

ii. Sea x el número de billetes de veinte pesos. La siguiente tabla sistematiza la información contenida en el problema.

	BILLETES DE 20 PESOS	BILLETES DE 50 PESOS	BILLETES DE 100 PESOS	TOTAL
NÚMERO DE BILLETES	x	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	100
MONTO	$20x$	$50\left(\frac{x}{2}\right)$	$100\left(\frac{x}{2}\right)$	4750

iii. Así, $20x + 50\left(\frac{x}{2}\right) + 100\left(\frac{x}{2}\right) = 4750$ o $20x + 25x + 50x = 4750$, entonces $95x = 4750$ y $x = 50$. Por consiguiente, son:

$x = 50$ billetes de 20 pesos, $\frac{x}{2} = 25$ billetes de 50 pesos y $\frac{x}{2} = 25$ billetes de 100 pesos.

iv. Además $20(50) + 50(25) + 100(25) = 4750$.



◆ EJEMPLO 3.15 (PROBLEMAS RELACIONADOS CON TRABAJO)

a. Si Pancho hace un “trabajito” en 1.5 horas y Juancho tarda en hacerlo 2 horas, ¿qué tiempo utilizan ambos personajes en hacer ese “trabajito”?

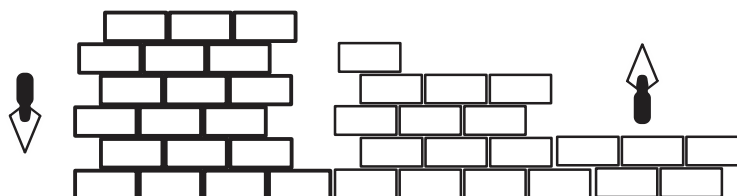


FIGURA 3.16

i. Sea t el tiempo empleado por ambos trabajadores en realizar el “trabajito”.

ii. La siguiente tabla sistematiza la información dada en el problema.

	PANCHO	JUANCHO	AMBOS
TIEMPO EMPLEADO	1.5	2	x
FRACCIÓN DEL “TRABAJITO” ELABORADA POR HORA	$\frac{1}{1.5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{t}$

iii. Entonces $\frac{1}{1.5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{t}$, si multiplicamos ambos miembros de la ecuación por $3t$ obtenemos

$$2t + 1.5t = 3 \text{ o } t = \frac{3}{3.5} = \frac{6}{7} \text{ de hora, aproximadamente } 51.43 \text{ minutos.}$$

b. Un quemador A utilizó un tiempo t en hervir el agua contenida en un tinaco. Un quemador B utilizó $\frac{5}{7}$ del tiempo t en hervir el agua de ese mismo tinaco. Si ambos quemadores, calentando el agua simultáneamente, la hicieron hervir en 2 horas, ¿qué tiempo tarda cada quemador en hacer hervir el agua contenida en el tinaco?

i. Sea t el tiempo empleado por el quemador A en hervir el agua del tinaco.

ii. La información dada en el problema la resume la siguiente tabla.

	QUEMADOR A	QUEMADOR B	QUEMADORES A Y B
TIEMPO EMPLEADO	t	$\frac{5}{7}t$	2
FRACCIÓN	$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{\frac{5}{7}t}$	$\frac{1}{2}$

iii. Entonces $\frac{1}{\frac{5}{7}t} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2}$ o $\frac{7}{5t} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2}$, al multiplicar ambos lados de la ecuación por $10t$ obtenemos $14 + 10 = 5t$ o

$t = \frac{24}{5} = 4.8$, así, el quemador A tarda 4.8 horas en hacer hervir el agua (aproximadamente 4 horas 48 minutos).

El quemador B tarda $\frac{5}{7}(4.8) = 3.43$ horas en hacer hervir el agua (aproximadamente 3 horas 26 minutos).

d. Un tinaco tiene un grifo g_1 que lo llena en 3 horas; también tiene otro grifo g_2 que tarda en llenarlo 4 horas y tiene un desagüe d que lo vacía en 5 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse el tinaco si trabajan simultáneamente los grifos y el desagüe?

i. Se desea determinar el tiempo transcurrido en llenar el tinaco.

ii. Sea t el tiempo en que se llena el tinaco.

Si el grifo g_1 tarda $t_1 = 3$ horas en llenar el tinaco, entonces en una hora llenará $\frac{1}{t_1} = \frac{1}{3}$ del tinaco.

Si el grifo g_2 tarda $t_2 = 4$ horas en llenar el tinaco, entonces en una hora llenará $\frac{1}{t_2} = \frac{1}{4}$ del tinaco.

El desagüe d lo vacía en 5 horas, entonces en una hora vaciará $\frac{1}{t_3} = \frac{1}{5}$ del tinaco.

iii. Por tanto, $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{t}$ o $\frac{23}{60} = \frac{1}{t}$, de donde $t = \frac{60}{23}$, aproximadamente 2 horas 36 minutos.



◆ EJEMPLO 3.16 (PROBLEMAS RELACIONADOS CON EDADES)



FIGURA 3.17

a. En el Zoológico de Zacango, actualmente un león tiene $\frac{1}{6}$ de la edad del oso pardo, dentro de 8 años la edad del león será

la mitad de la edad del oso pardo, ¿cuál es la edad actual de ambos animales?

i. Se desea determinar la edad del león y la edad del oso pardo.

ii. Representemos por x la edad actual del león, entonces la edad actual del oso pardo es $6x$, la siguiente tabla muestra las condiciones del problema en términos de la edad del león.

	LEÓN	OSO PARDO
EDAD ACTUAL	x	$6x$
DENTRO DE 8 AÑOS	$x + 8$	$6x + 8$

Puesto que dentro de 8 años edad del león será la mitad de la edad del oso pardo, entonces

$$x + 8 = \frac{1}{2}(6x + 8) \text{ o } 2x + 16 = 6x + 8.$$

iii. Simplificando obtenemos $4x = 8$ y $x = 2$. El león tiene $x = 2$ años y el oso pardo $6x = 6(2) = 12$ años.

b. La edad actual de un árbol de tejocote es el doble que la edad de un manzano. Hace 12 años el tejocote era tres veces mayor que el manzano. ¿Cuáles son las edades actuales?

i. Se desean determinar la edad del árbol de tejocotes y la edad del manzano.

ii. Representemos por x la edad actual del manzano, en la siguiente tabla se encuentra sistematizada y organicemos la información como lo muestra la siguiente tabla

	TEJOCOTE	MANZANO
EDAD ACTUAL	$2x$	x
EDAD ANTERIOR	$2x-12$	$x-12$

Considerando que hace 12 años el árbol de tejocotes era tres veces mayor que el manzano, se cumple $2x-12=3(x-12)$.

iii. Por tanto $2x-12=3x-36$ ó $36-12=3x-2x$, de donde $x=24$. Lo anterior significa que la edad actual del manzano es $x=24$ años y la del árbol de tejocotes es $2x=2 \times 24=48$ años.

◆ EJEMPLO 3.17 (PROBLEMAS DE RELOJES)

En la resolución de este tipo de problemas debe tenerse en cuenta que la manecilla minuterio tiene una velocidad 12 veces mayor que la manecilla horario. Por tanto, el camino recorrido por el minuterio es 12 veces mayor que el que recorre el horario.



FIGURA 3.18

a. Un reloj señala las 6 de la tarde. ¿A qué hora volverán a estar, por primera vez, las manecillas sobre una línea recta?

i. Se desea determinar la hora en que las manecillas del reloj están sobre una línea recta.

ii. Sea x los minutos recorridos por la manecilla horario. Cuando las manecillas del reloj estén en línea recta, la manecilla horario habrá recorrido x minutos y la manecilla minuterio $60+x$ minutos.

iii. Por la relación entre espacios recorridos obtenemos $12x=60+x$, de donde $x=\frac{60}{11}$ minutos, es decir, 5 minutos con $27\frac{3}{11}$ segundos. La hora es: 7 horas, 5 minutos y $27\frac{3}{11}$ segundos.

b. Un reloj señala las 3 de la tarde. ¿A qué hora se superponen las manecillas?

i. Se desea determinar la hora en que las manecillas del reloj están superpuestas.

ii. Sea x los minutos recorridos por la manecilla horario. Cuando las manecillas del reloj estén superpuestas, la manecilla minuterio que marca las doce recorrerá $15+x$ minutos.

iii. Por la relación entre espacios recorridos obtenemos $12x=15+x$, de donde $x=\frac{15}{11}$ minutos, es decir 1 minuto con $21\frac{9}{11}$ segundos.

Así, la hora de superposición de manecillas es 3 horas, 16 minutos, y $21\frac{9}{11}$ segundos.

◆ EJEMPLO 3.18 (PROBLEMAS DE MÓVILES)

a. Dos ciudades A y B distan 600 y están unidas por una carretera recta. De la ciudad A , rumbo a la ciudad B , parte un automóvil a una velocidad constante de 120 kilómetros por hora. A la misma hora, de la ciudad B parte un autobús a una velocidad constante de 80 kilómetros por hora hacia la ciudad A . ¿Cuánto tiempo tardan en encontrarse? y ¿Qué distancia ha recorrido cada móvil?

i. Se desea determinar el tiempo t que los móviles tardan en encontrarse.

ii. Los móviles se aproximan a una velocidad de $120+80=200$ kilómetros por hora, por tanto, el tiempo que tardan en encontrarse es $t=\frac{d}{v}=\frac{600}{200}=3$ horas.

iii. A las tres horas, el automóvil ha recorrido $d=v \cdot t=(120 \frac{kms}{h})(3h)=360$ kilómetros y el autobús ha recorrido $d=v \cdot t=(80 \frac{kms}{h})(3h)=240$ kilómetros.

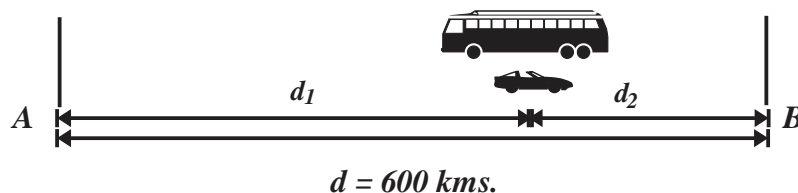


FIGURA 3.19

b. Un delincuente huye del lugar del crimen en un automóvil con velocidad constante de 60 kilómetros por hora. Cinco minutos más tarde parte un policía en una motocicleta a una velocidad constante de 90 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo tarda el policía en alcanzarlo? y ¿A qué distancia del sitio del crimen lo alcanza?

i. Se desea determinar el tiempo t que uno de los móviles alcanza al otro.

Transcurridos cinco minutos el delincuente ha recorrido $d = v \cdot t = 60 \left(\frac{\text{kms}}{\text{h}} \right) \frac{1}{12} \text{ h} = 5 \text{ kilómetros}$, es decir, le lleva una ventaja de 5 kilómetros.

Los móviles se aproximan a una velocidad de $90 - 60 = 30 \text{ kilómetros por hora}$.

El tiempo que tarda en alcanzarlo $t = \frac{5 \text{ kms}}{30 \left(\frac{\text{kms}}{\text{h}} \right)} = \frac{1}{12} \text{ hora}$, es decir, 5 minutos.

La distancia a la que lo alcanza es $d = \left(90 \frac{\text{kms}}{\text{hora}} \right) \left(\frac{1}{12} \text{ hora} \right) = 7.5 \text{ kilómetros}$.

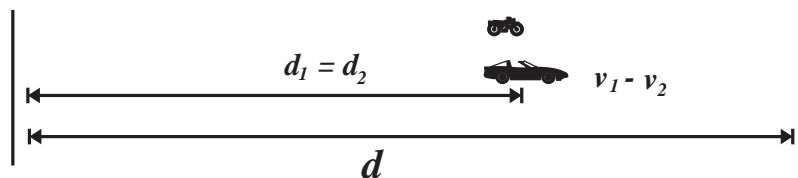


FIGURA 3.20

Ejercicios 32

1. La suma de dos números pares consecutivos es 102. Determine los números.

2. La suma de dos números pares consecutivos es 210. Determine los números.

3. La suma de dos números es 32 y uno de ellos es la séptima parte del otro, determine los números.

4. La suma de dos números consecutivos es 107. Determine los números.

5. La suma de dos números impares consecutivos es 36. Determine los números.

6. Determine dos números sabiendo que uno es triple que el otro y su suma es 20.

7. Determine dos números sabiendo que uno excede al otro en 6 unidades y su suma es 40.

8. Si dos números son tales que uno es el cuádruplo del otro y su suma es 125. ¿Cuáles son esos números?

9. El denominador de una fracción excede en 6 al numerador, se le agregan 7 al numerador y 10 al denominador y se obtiene $\frac{15}{23}$, ¿Cuál es la fracción original?

10. Un comerciante tiene dos clases de alfalfa, la primera de 6 pesos el kilogramo y la segunda de 7.20 el kilogramo. ¿Cuántos kilogramos de cada clase deben utilizarse para obtener 60 kilogramos de mezcla de mezcla a un precio de 7 pesos por kilogramo?

11. En un estacionamiento hay 110 vehículos entre autos y bicicletas, sus llantas suman 360, ¿cuántas motos y cuantos autos hay?

12. En un salón hay el doble de niñas que de niños y la mitad de adultos que de niños. Si en total hay 35 personas ¿Cuántos niños, niñas y adultos hay?

13. En un avión viajan el cuádruple de hombres adultos que de mujeres adultas y la mitad de niños que de mujeres adultas, en total viajan 165 personas. ¿Qué número corresponde a cada tipo de persona?

14. ¿Qué cantidad de agua que debe evaporarse de 40 kilogramos de una solución salina al 20 % para que aumente su concentración al 50 %?

15. Se tomará parte de dos lingotes de oro de purezas del 80 % y 95 % de pureza. ¿Cuánto debe tomarse de cada uno de ellos para construir un lingote de 5 kilogramos con un 86 % de pureza?

16. Se quiere mezclar un solvente cuyo precio por litro es 60 pesos con otro solvente cuyo litro vale 35 pesos, para obtener una mezcla de solventes con un precio de 50 pesos por litro. ¿Cuántos litros de cada clase de solvente deben mezclarse para obtener 200 litros de dicha mezcla?

17. Se mezcla una cierta cantidad de frijol de 34 pesos el kilogramo, con 80 kilogramos de otro tipo de frijol cuyo precio es 50 pesos el kilogramo, para obtener una mezcla que se pueda vender a 44 pesos el kilogramo. ¿Qué cantidad de frijol de a 34 el kilogramo debe emplearse en la mezcla?

18. Se tienen 16 litros de una mezcla con vinagre al 25 % contenidos en un depósito. ¿Cuántos litros de vinagre puro deben agregarse al depósito para reducir la concentración de la mezcla al 50 %?

19. Se van a mezclar jitomates de 20 pesos por kilogramo, con jitomates de 8 pesos por kilogramo para venderlos a 12.50 pesos por kilogramo. Si se desean vender 400 kilogramo de la mezcla de jitomates. ¿Cuántos kilogramos de cada precio se tienen que utilizar?

20. Determine el número de kilogramos que se deben tomar de dos ingredientes cuyos precios son 45 y 85 pesos por kilogramo, respectivamente, para obtener 40 kilogramos a un precio de 60 pesos por kilogramo.

21. Un fabricante de bombillas gana 60 centavos por cada botella que sale de su taller, pero pierde ochenta centavos por cada botella que sale defectuosa. Un determinado día en el que fabricó 2100 botellas y obtuvo un beneficio de 966 pesos. ¿Cuántas botellas buenas fabricó ese día?

22. Un panadero vendió 84 bizcochos a dos precios distintos: unos a 18 pesos y otros a 14.40 pesos. Obtuvo venta 1242, ¿Cuántos bizcochos de cada precio vendió?

23. Se mezclan 300 kilogramos de habas con un precio de 30 pesos el kilogramo con 200 kilogramos de habas más económicas. De esta forma, la mezcla cuesta a 24 pesos por kilogramo. ¿Cuál es el precio del kilogramo de las habas más económicas?

24. Una caja contiene 57 pesos en monedas de 2 pesos y en monedas de cinco pesos. ¿Cuántas monedas de dos pesos y monedas de cinco pesos hay en el cajón, si hay tres monedas de cinco pesos más que monedas de dos pesos?

25. Se tienen un total de 26 monedas, entre monedas de 5 centavos y monedas de 20 centavos. En total se tienen 2.65 pesos. ¿Cuántas monedas de cada denominación son? 15 de cinco centavos y 9 de veinte centavos.

26. Una máquina de cambiar monedas, cambia los billetes de 1000 pesos en billetes de 20 pesos y de 50 pesos. Si usted recibe 29 billetes, después de introducir un billete de 1000 pesos, ¿cuántas monedas de cada tipo recibe? 14 de cincuenta pesos y 15 de veinte pesos.

27. Un cajero ha entregado 3100 pesos, entre billetes de 20 y 50 pesos. Si ha entregado 110 billetes, ¿cuántos billetes de cada denominación incluyó?

28. Una bolsa contiene 50 monedas, de 5 pesos y de 20 pesos, si en total contiene 775 pesos, ¿cuántas monedas de cada denominación contiene?

29. Una caja contiene 25 monedas, de 1 peso y de 2 pesos. En total contiene 40 pesos. ¿Cuántas monedas de cada denominación contiene?

30. En una tienda, cada botella de tequila tiene un precio de 310 pesos y cada botella de ron cuesta 200 pesos. Una persona compró 8 botellas. Por las botellas de ron pagó en total 70 pesos más que las botellas de tequila. ¿Cuántas botellas de tequila y cuántas botellas de ron compraron?

31. En una jaula hay perros y gansos. En total hay 14 cabezas y 38 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos perros hay en el corral?

32. Un albergue tiene habitaciones con literas de dos y de cuatro camas. Sabiendo que tiene 80 habitaciones y 270 camas, ¿Cuántas habitaciones de cada clase tiene?

33. En un almacén hay dos tipos de lámparas. Las del tipo A utilizan tres bombillas y las del tipo B utilizan cuatro bombillas. En el almacén hay en total 60 lámparas y 220 bombillas. ¿Cuántas lámparas hay de cada clase?

34. En un examen de 30 preguntas se asignan $\frac{3}{4}$ de punto por cada respuesta correcta y se resta $\frac{1}{4}$ de punto por cada respuesta incorrecta. Si un alumno obtuvo 10.5 puntos ¿Cuántos preguntas contestó correctamente y cuántas contestó incorrectamente?

35. Trabajando juntos, dos obreros tardan en hacer un trabajo 14 horas. ¿Cuánto tiempo tardaran en hacerlo por separado si uno es el doble de rápido que el otro?

36. Juan, Pina y Lorenzo, trabajando juntos pueden pintar una pared en 2 horas. Si Pina hace el trabajo sola puede pintar la pared en 5 horas. Si Pina trabaja sola, puede pintar la pared en 6 horas. Si Juan trabaja solo, ¿cuánto tiempo le tomará pintar la habitación?

37. Una persona puede limpiar una alberca 1.5 veces más rápido que una segunda persona. Si ambas personas trabajan simultáneamente limpian la alberca en 6 horas. Si sólo la persona más lenta limpia la alberca, ¿cuánto tiempo le tomará limpiarla?

38. Dos grifos tardan en llenar un estanque 18 horas. Hallar el tiempo en que lo haría cada uno, sabiendo que el primero, trabajando solo, tardaría en hacerlo 27 horas menos que el segundo.

39. La velocidad a la que trabaja el operador A es tres veces mayor que la velocidad de trabajo del operario B. Los operadores A y B empiezan a trabajar juntos durante 4 horas, al cabo de las cuales el operador A se retira y continúa solo el operador B, que termina el trabajo en 2 horas. Hallar el tiempo que tardaría el operador B en hacer todo el trabajo si estuviese él sólo.

40. Fulgencio tiene 16 años más que Matías y dentro de 4 años tendrá el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?

41. La hermana de Tarsicio tiene 13 años más que él y dentro de 6 años tendrá el doble ¿Qué edad tiene cada uno?

42. El padre tiene 25 años más que el hijo y dentro de 5 años tendrá el doble ¿Qué edad tiene cada uno?

43. Diana tiene 7 años más que Pánfilo y hace 1 año tenía el doble ¿Qué edad tiene cada uno?

44. Mariana tiene 30 años más que Luis y dentro de 7 años tendrá el triple. ¿Qué edad tiene cada uno?

45. La abuela de Deborah tiene 5 veces su edad y su madre tiene la mitad de edad que su abuela. Dentro de 6 años, la edad de la Deborah es la mitad que la de su madre, ¿qué edad tiene cada una?

46. Actualmente, la edad de Ausencio es 9 años y la de su padre es 35. Calcular cuántos años tienen que pasar para que la edad de Manuel sea la mitad que la de su padre.

47. Dentro de 5 años la edad de Jesús será el triple que la que tenía hace 3 años, ¿qué edad tendrá dentro de 10 años?

48. Aldo tiene 42 años y su hijo 10 años. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será triple que la del hijo?

49. Las edades de cuatro hermanos suman 50 años. Determine sus edades sabiendo que cada uno tiene 3 años menos que el que le sigue en edad.

50. La diferencia de edad entre dos hermanos es de 5 años y dentro de 2 años uno tendrá doble que el otro. ¿Qué edad tiene cada uno?

51. La diferencia de edad entre un abuelo y su nieto es de 48 años y hace 4 años el abuelo tenía 5 veces la edad del nieto. ¿Qué edad tiene cada uno?

52. Un reloj marca las 2 en punto. ¿A qué hora formarán sus agujas por primera vez un ángulo recto?

53. ¿A qué hora después de las 12, forman las manecillas un ángulo de 30° por primera vez?

54. Suponga que los centros de las ciudades A y B se encuentran a 300 kilómetros. A las 9 de la mañana parte del centro de la ciudad A parte una persona en un automóvil, a una velocidad constante de 90 km/h, hacia el centro de la ciudad B. A esa misma hora, de

la ciudad B parte otra persona en automóvil, a una velocidad constante de 60 km/h. al centro de la ciudad A . Determine:

- a. El tiempo que tardarán los automóviles en encontrarse.
- b. La hora de encuentro de los automóviles.
- c. La distancia recorrida por cada automóvil en el punto de encuentro.

55. Los centros de las ciudades A y B se encuentra a una distancia de 180 kilómetros. A las 9 de la mañana parte un automóvil de cada ciudad y los dos automóviles van en la misma dirección y el mismo sentido. El automóvil que parte del centro de la ciudad A lleva una velocidad constante de 90 km/h, y el que parte del centro de la ciudad B lleva una velocidad constante de 60 km/h. Determine:

- a. El tiempo que transcurrido hasta que se encuentran.
- b. La hora a la que se encuentran.
- c. La distancia recorrida por cada uno hasta el punto de encuentro.

56. Un camión parte del centro de la ciudad A con una velocidad constante de 90 km/h. Tres horas más tarde parte del mismo lugar un segundo camión, en persecución del primero, a una velocidad constante de 120 km/h. Determine:

- a. El tiempo en que el segundo camión alcanza al primero.
- b. La distancia recorrida por los camiones cuando el segundo de ellos alcanza al primero.

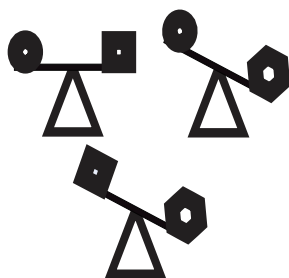
57. Un peatón y un ciclista marchan por la misma vía. El peatón lo hace con velocidad constante de 4 km/h y el ciclista a velocidad constante de 20 km/h.

- a. Si parten al mismo tiempo, desde lugares opuestos que se encuentran a 12 kilómetros de distancia, ¿cuánto tardarán en encontrarse? ¿Qué distancia habrán recorrido?
- b. Si parten del mismo punto y el peatón ya ha recorrido de 4 kilómetros, ¿en cuánto tiempo lo alcanza el ciclista? ¿Qué distancia habrá recorrido cada uno?

58. De los centros de dos ciudades, distantes 84 kilómetros, parten a encontrarse dos ciclistas, uno con velocidad de 9 kilómetros por hora, y otro con velocidad de 13 kilómetros por hora. Si el primer automóvil partió 2 horas antes que el segundo, ¿qué tiempo tardarán en encontrarse?

4

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES



PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad el alumnado será capaz de modelar y resolver situaciones problemáticas que conduzcan a sistemas de ecuaciones lineales de orden 2x2 y 3x3, a fin de que se avance en la utilización de la representación algebraica como un sistema de símbolos útiles en la resolución de tales situaciones.

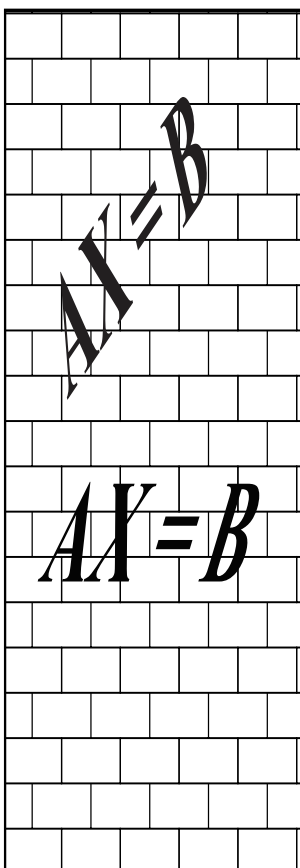
CONTENIDO

4.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DOS POR DOS Y MÉTODOS DE SOLUCIÓN

- Soluciones de una ecuación lineal con dos variables.
- Representación tabular de las soluciones a un problema con dos variables que satisfacen una sola condición.
- Exploración gráfica de las soluciones a un problema con dos variables que deben satisfacer una sola condición.
- Las coordenadas $\left(x, \frac{c-ax}{b}\right)$ o $\left(\frac{c-by}{a}, y\right)$ como la expresión general de los puntos que pertenecen a la recta que representa las soluciones de un problema que lleva a una ecuación lineal con dos variables y que se reduce a la forma $ax + by = c$.
- Solución gráfica de un problema con dos variables y dos condiciones que potencialmente se puedan representar con ecuaciones lineales con dos variables.
- El método de igualación.
- El método de sustitución.

4.2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES TRES POR TRES

- Sistemas de ecuaciones equivalentes.
- El método de suma o resta y la multiplicación de una de las ecuaciones por un escalar para obtener sistemas de ecuaciones equivalentes a partir de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 y 3x3.
- Transformación de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 o 3x3 a un sistema triangular equivalente de ecuaciones.
- Problemas de aplicación.



4.1

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DOS POR DOS Y MÉTODOS DE SOLUCIÓN

El alumno:

1. Ante un problema que potencialmente lleve a una ecuación con dos variables, el alumno comprenderá que existe una infinidad de soluciones que satisfacen la condición.
2. Graficará las soluciones a un problema con dos variables e identificará el patrón geométrico que siguen las representaciones gráficas de las soluciones y su utilidad.
3. Expresará algebraicamente las coordenadas de las soluciones a un problema con dos variables y una sola condición.
4. Con el conocimiento anterior, el alumno resolverá gráficamente un problema que potencialmente lleve a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, aplicando la heurística de tratar cada una de las condiciones por separado.
5. Resolverá algebraicamente problemas que lleven a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.
6. Resuelve algebraicamente problemas que lleven a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.

En la sección 3.1 señalamos que una ecuación es una afirmación que establece la igualdad de dos expresiones algebraicas son iguales, las dos expresiones que constituyen la ecuación se llaman lados o miembros y están separados por la relación de igualdad, el signo " $=$ ". En las siguientes líneas trataremos con ecuaciones que involucran incógnitas en ambos lados o miembros.

NOTA

A diferencia de la unidad anterior, ahora consideramos ecuaciones con variables y no incógnitas.

◆ EJEMPLO 4.1 ("SISTEMAS DE ECUACIONES" COMO MODELO)

- a. Se tiene un segmento de alambre de longitud 40 unidades, con él se construirá un rectángulo ¿qué modelo describe las posibles dimensiones del perímetro del rectángulo?
 - i. Representemos por x e y las longitudes de los lados del rectángulo.
 - ii. Las dimensiones de los lados de un rectángulo son no negativas.
 - iii. La longitud del perímetro del rectángulo se obtiene sumando las longitudes de sus lados, entonces $2x + 2y = 40$ o $x + y = 20$.
 - iv. Existe un número indeterminado de asignaciones tanto a x como a y que satisfacen la relación $x + y = 20$, por tanto, los pares ordenados (x, y) justifican el segmento de recta de la figura 4.1.

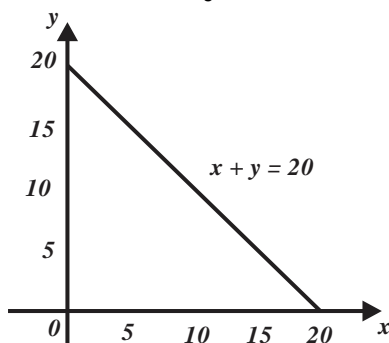


FIGURA 4.1

b. Un primer costal contiene 50 kilogramos de cemento, un segundo costal contiene 50 kilogramos de cal. Se desea formar una mezcla con peso de 40 en un tercer costal, tomando parte de los materiales contenidos en los dos primeros costales. Construya un modelo que describa esta situación.

i. Representemos por x e y las cantidades de cemento y de cal en el costal a mezclar.

ii. Las cantidades de material tomadas de los costales son no negativas.

iii. El peso de la mezcla se obtiene sumando los pesos de los materiales extraídos de los costales, entonces $x + y = 40$.

iv. Existe un número indeterminado de asignaciones a las variables x e y que satisfacen la relación $x + y = 40$, si representamos como pares ordenados de la forma (x, y) a las asignaciones que satisfacen la relación $x + y = 40$ observaremos el segmento de recta de la figura 4.2.

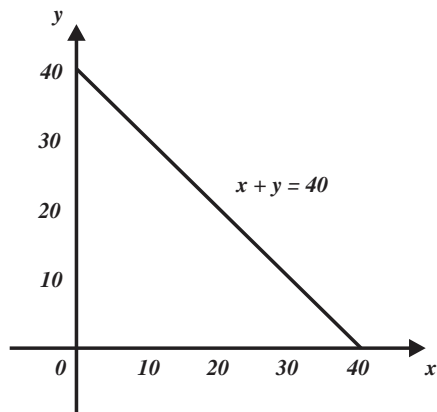


FIGURA 4.2

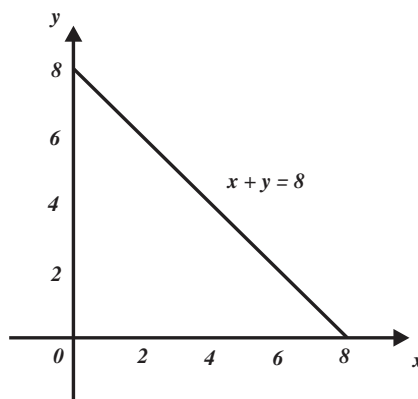


FIGURA 4.3

c. Suponga que un primer garrafón contiene 20 litros de coca cola y que un segundo garrafón contiene 15 litros de alcohol. Se hará una mezcla con parte de los contenidos en un recipiente con capacidad de 8 litros que se llenará totalmente. Construya un modelo que describa esta situación.

i. Sean x e y los volúmenes de coca cola y alcohol en la mezcla.

ii. Los volúmenes en la mezcla son no negativos.

iii. El volumen de la mezcla se obtiene sumando los volúmenes de los líquidos extraídos de los contenedores, entonces $x + y = 8$.

iv. Existe una infinidad de asignaciones a las variables x e y que satisfacen la ecuación $x + y = 8$. Los pares ordenados (x, y) , que satisfacen la condición antes señalada, tienen como representación el segmento de línea recta de la figura 4.3.



En la sección 2.2 estudiamos y analizamos el comportamiento de la función lineal, establecimos que la regla de correspondencia tiene la forma $y(x) = mx + b$, donde x representa la variable independiente (a la que se le asignan los números o valores) y que $y(x)$ es el número obtenido por tal asignación a la variable x , sin embargo, debemos tener en cuenta que, en el contexto de las funciones, tanto x como y representan variables y que el par ordenado (x, y) corresponde a un estado específico de la función. Para un estado específico desconocido de una función lineal, el par ordenado $I(x, y)$ puede interpretarse como un par de incógnitas, y en consecuencia, la regla de correspondencia $y = mx + b$ se interpreta como una ecuación con dos incógnitas. En el contexto antes señalado, para un primer estado específico, podemos describir la ecuación $y = mx + b$ en la forma $A_1x + B_1y = C_1$, y para un segundo “estado específico” tendremos la ecuación $A_2x + B_2y = C_2$. Así, el par de ecuaciones $A_1x + B_1y = C_1$ y $A_2x + B_2y = C_2$ constituyen un sistema de ecuaciones lineales con

dos incógnitas, este sistema se representa en la forma
$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}.$$

NOTA

La expresión $\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$ admite las siguientes interpretaciones:

- a. Como dos ecuaciones lineales cuya solución es el par de **números reales** x e y , números que al sustituirse simultáneamente en ella generan un par de identidades.
- b. Qué relaciones entre las variables x e y , de manera que cada una de ellas admite una representación (específicamente una línea recta) en el plano cartesiano.

Conviene señalar que la expresión

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

interpretada en los contextos antes señalados (como sistema de relaciones y como sistema de ecuaciones) tienen características comunes, entre ellas destaca el hecho de que las coordenadas del punto de intersección de las líneas rectas asociadas al sistema de relaciones:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

son la solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}.$$

◆ **EJEMPLO 4.2 (INTERSECCIÓN DE DOS LÍNEAS RECTAS Y SOLUCION DE SISTEMA DE ECUACIONES)**

- a. La *figura 4.4* muestra que las líneas rectas asociadas a $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 3 \end{cases}$ se intersecan en el punto $I(1, 2)$. Observe que la sustitución $x=1$ y $y=2$ en

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

genera las identidades

$$\begin{cases} -1 = -1 \\ 3 = 3 \end{cases}.$$

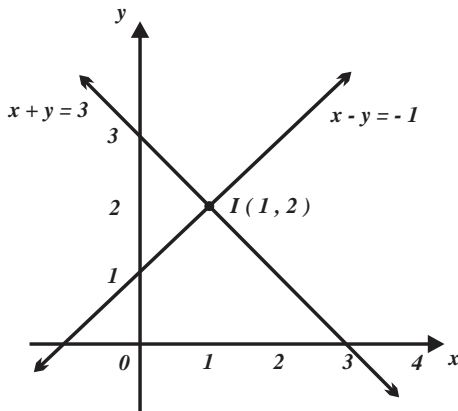


FIGURA 4.4

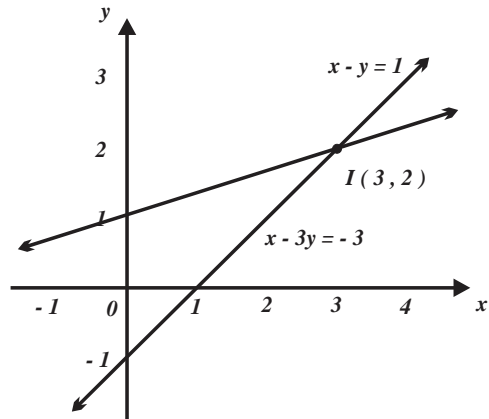


FIGURA 4.5

- b. La *figura 4.5* muestra que las líneas rectas asociadas a $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$ se intersecan en el punto $I(3, 2)$.

Observe que la sustitución $x=3$ y $y=2$ en

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 3y = -3 \end{cases} \text{ genera las identidades } \begin{cases} 1 = 1 \\ -3 = -3 \end{cases}.$$

◆

No todos los pares de líneas rectas asociadas a dos ecuaciones lineales se intersecan.

◆ **EJEMPLO 4.3 (LÍNEAS RECTAS QUE NO SE INTERSECAN Y SISTEMAS DE ECUACIONES SIN SOLUCIÓN)**

a. La figura 4.6 muestra que las líneas rectas de ecuaciones $\begin{cases} x - y = -2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ no se intersecan, observe que si aplicamos la ley transitiva de la igualdad (cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí) obtenemos una contradicción (en este caso obtenemos $-2=1$).

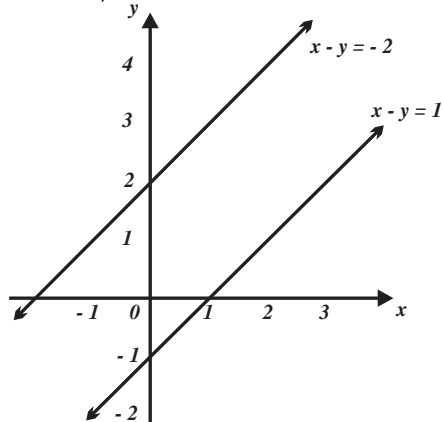


FIGURA 4.6

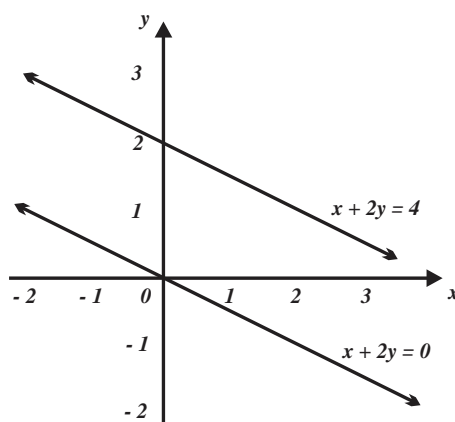


FIGURA 4.7

b. La figura 4.7 muestra que las líneas rectas de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

no se intersecan, note que si aplicamos la ley transitiva de la igualdad (cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí) obtenemos una contradicción (en este caso $0=4$).

En ocasiones las líneas rectas asociadas a ecuaciones (relaciones entre variables) coinciden.

◆ **EJEMPLO 4.4 (LÍNEAS RECTAS QUE COINCIDEN Y DE SISTEMAS CON SOLUCIÓN MÚLTIPLE)**

a. La figura 4.8 muestra que las líneas rectas de ecuaciones $\begin{cases} 3x + 3y = 6 \\ x + y = 2 \end{cases}$ no se intersecan, note que al simplificar la primera de las ecuaciones obtenemos la segunda ecuación.

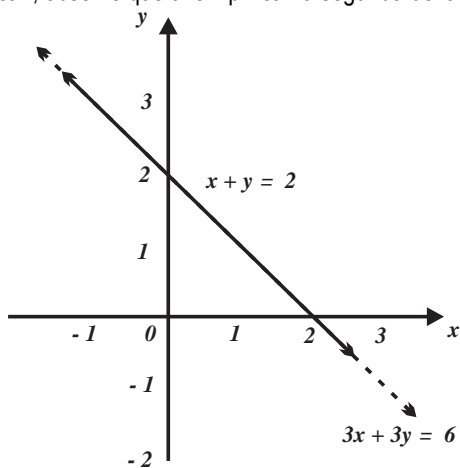


FIGURA 4.8

b. La figura 4.9 muestra que las líneas rectas de ecuaciones $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 4x - 2y = -2 \end{cases}$

no se intersecan; observe que al simplificar la segunda de las ecuaciones obtenemos la primera ecuación.

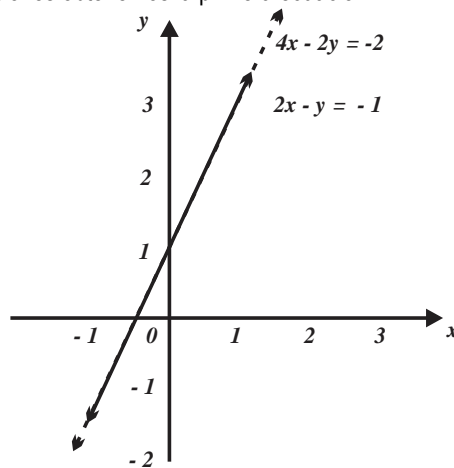


FIGURA 4.9

continuación revisaremos ciertas situaciones cuyo análisis requiere de la construcción de un sistema de ecuaciones lineales.

◆ EJEMPLO 4.5 (MEZCLA DE LENTEJAS)

Un abarrotero mezcló dos tipos de lentejas: “verdinas” con un precio de 30 pesos el kilogramo y “crimson” de precio 50 pesos por kilogramo, obtuvo 50 kilogramos de lentejas a un precio de 50 pesos por kilogramo.

Si representamos con x a la cantidad de kilogramos de lentejas verdinas y por y a la cantidad de kilogramos de lentejas crimson en la mezcla, entonces la siguiente tabla resume la información contenida en el problema.

	PRECIO POR KILOGRAMO	NÚMERO DE KILOGRAMOS	VALOR EN \$.
VERDINAS	30	x	$30x$
CRIMSON	50	y	$50y$
MEZCLA	40	50	2000

La relación $30x + 50y = 2000$ o $3x + 5y = 200$ es el costo de la mezcla, y la relación $x + y = 50$ representa el número de kilogramos de la mezcla.

Por consiguiente, el modelo

$$\begin{cases} 3x + 5y = 200 \\ x + y = 50 \end{cases}$$

describe la situación correspondiente.



◆ EJEMPLO 4.6 (CONSTRUCCIÓN DE ARRACADAS)

Un joyero fabrica dos tipos de arracadas. En las arracadas del tipo A utiliza 1 gramo de oro y 1.5 gramos de plata, y en las arracadas del tipo B emplea 1.5 gramos de oro y 1 gramo de plata. Si solo tiene 750 gramos de cada metal, construya las relaciones (ecuaciones) que describen el número de arracadas de cada tipo que puede elaborar. ¿Cuántas arracadas de cada tipo puede fabricar?

i. Se desea construir un modelo (relación o ecuación) entre el número de arracas de cada tipo y la cantidad de metal que dispone.

Representemos por: x la cantidad de arracadas del tipo A e y la cantidad de arracadas del tipo B .

ii. Tenga en cuenta que tanto x como y deben ser números enteros positivos.

La siguiente tabla sistematiza la información contenida en el problema.

	ARRACADA TIPO A	ARRACADA TIPO B	AMBOS
CANTIDAD DE ORO	1	1.5	750
CANTIDAD DE PLATA	1.5	1	750

iii. Por tanto, $x + 1.5y = 750$ representa el número de arracadas del tipo A y del tipo B en las que puede utilizar los 750 gramos de oro. La ecuación $1.5x + y = 750$ representa el número de arracadas del tipo A y del tipo B en las que puede utilizar los 750 gramos de plata. El “sistema”

$$\begin{cases} x + 1.5y = 750 \\ 1.5x + y = 750 \end{cases}$$

modela la situación antes descrita., tenga en cuenta que tanto x como y sólo están definidas para números enteros positivos ¿por qué? Si graficamos las relaciones (ecuaciones) del modelo

$$\begin{cases} x + 1.5y = 750 \\ 1.5x + y = 750 \end{cases}$$

obtenemos *figura 4.10*.

iv. En la *figura 4.10* observamos que las líneas rectas se intersecan en el punto $(300, 300)$. Esto significa que si el joyero optimiza los materiales puede fabricar 300 arracadas de cada tipo

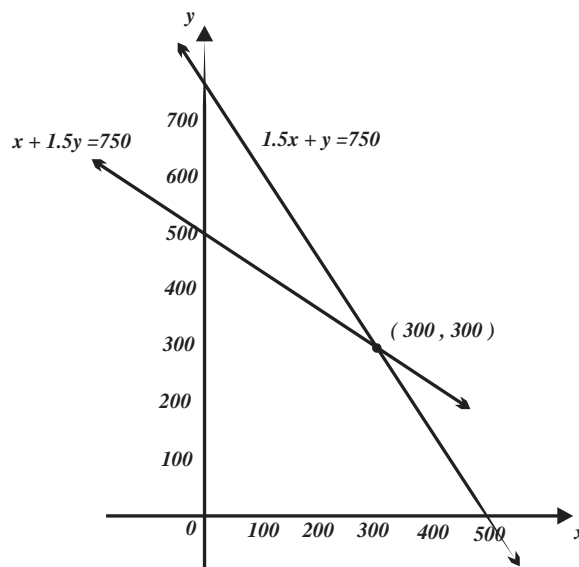


FIGURA 4.10

El sistema (conjunto de ecuaciones)

$$\begin{cases} x + 1.5y = 750 \\ 1.5x + y = 750 \end{cases}$$

modela la situación antes descrita., tenga en cuenta que, tanto x como y sólo están definidas para números enteros positivos ¿por qué?



◆ EJEMPLO 4.7 (PASTELES)

Un pastelero es famoso por sus pasteles de fresa y manzana que elabora. En la elaboración de un pastel de fresa utiliza medio kilogramo de azúcar y 8 huevos. En el pastel de manzana utiliza 1 kilogramo de azúcar y 8 huevos. Si en el almacén sólo tiene 10 kilogramos de azúcar y 120 huevos:

- ¿Qué combinaciones de ingredientes puede hacer para elaborar un número entero de pasteles?
- ¿Cuántas unidades de cada pastel pueden producir?

Suponga que utiliza el total de los ingredientes.

i. Debemos construir un modelo (relación o ecuación) entre el número de pasteles de los dos tipos y los ingredientes disponibles.

Sean: x la cantidad de pasteles de fresa e y la cantidad de pasteles de manzana.

ii. Debemos tener en cuenta que tanto x como y deben ser números enteros positivos.

La siguiente tabla sistematiza la información dada en el problema.

REQUERIMIENTOS	PASTEL DE FRESA	PASTEL DE MANZANA	TOTAL DE INGREDIENTES
CANTIDAD DE AZÚCAR	0.5	1	10
CANTIDAD DE HUEVOS	8	8	120

iii. Por tanto, la ecuaciones $0.5x + y = 10$ relacionan las cantidades de pasteles de fresa y manzana que puede elaborar y la ecuación $8x + 8y = 120$ los ingredientes disponibles en su elaboración. Así, el “sistema de ecuaciones”

$$\begin{cases} 0.5x + y = 10 \\ 8x + 8y = 120 \end{cases}, \text{ que es equivalente a } \begin{cases} x + 2y = 20 \\ x + y = 15 \end{cases},$$

modela la situación antes descrita, recordemos que las variables x e y sólo están definidas para números enteros positivos ¿por qué?

Las posibles combinaciones de los números de pasteles que se pueden elaborar, corresponden con los puntos de coordenadas enteras dentro de la región mostrada en la figura 4.11 dado por las restricciones, incluyendo también los segmentos de recta.

iv. En la figura 4.11 observamos que las líneas rectas se intersecan en el punto $(10, 5)$. Esto significa que si el pastelero optimiza los ingredientes puede fabricar 10 pasteles de fresa y 5 pasteles de manzana.

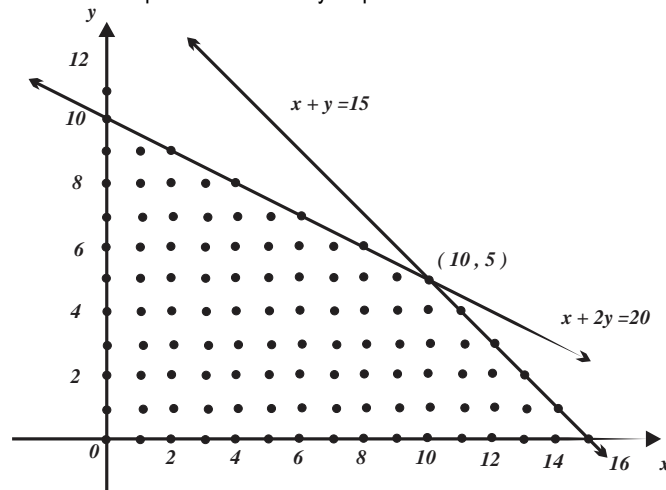


FIGURA 4.11

Una vez que hemos descrito las características geométricas básicas de sistemas de la forma

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases},$$

nos corresponde hacer un estudio algebraico respecto al tipo de sus soluciones.

DEFINICIÓN 4.1 (Sistema de ecuaciones lineales 2 por 2)

Sea el sistema de ecuaciones lineales “dos por dos”, en donde x e y son las incógnitas, y A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , C_1 y C_2 son números reales.

Si el par de asignaciones $x = x_0$ e $y = y_0$ transforman al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

en dos identidades, entonces $x = x_0$ e $y = y_0$ es la solución del sistema de ecuaciones lineales.

Continuamos el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales (dos por dos); dos de los métodos algebraicos más comunes en su resolución son los conocidos como: “igualación” y “sustitución”:

Dos de los métodos algebraicos más comunes en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (dos por dos) son los conocidos como: “igualación” y “sustitución”, veamos en que consisten.

EL MÉTODO DE IGUALACIÓN

I. El método de igualación consiste en seleccionar una de las incógnitas (la misma en ambas ecuaciones), luego “despejarla” (en ambas ecuaciones) y con los resultados generar una ecuación lineal con una incógnita, misma que luego se resuelve aplicando las propiedades correspondientes. El proceso se repite con la otra incógnita de las ecuaciones del sistema, vea la figura 4.12.

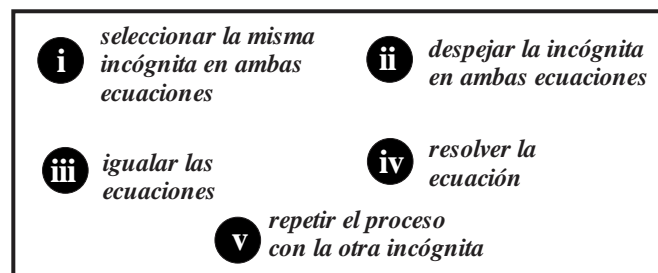


FIGURA 4.12

ALGORITMO: EL MÉTODO DE IGUALACIÓN

- i. Seleccione una de las incógnitas y depéjela de ambas ecuaciones.
- ii. Iguale los miembros de las ecuaciones antes obtenidas (aquellos que no contienen a la incógnita que ha sido despejada).
- iii. Resuelva la ecuación lineal obtenida en el paso ii.
- iv. Repita el proceso anterior con la otra incógnita.

NOTA

Una variante del proceso antes descrito consiste en sustituir el valor de la incógnita obtenida en el paso iii. en alguna de las ecuaciones del paso i. y posteriormente simplificar.

◆ EJEMPLO 4.8 (EL MÉTODO DE IGUALACIÓN)

a. Resolvamos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ x + y = 6 \end{cases}$ por el método de igualación.

i. Seleccionamos la incógnita x y la despejamos de ambas ecuaciones, obtenemos $x = 10 - 2y$ y $x = 6 - y$.

ii. Si igualamos los miembros derechos de las ecuaciones anteriores obtenemos $10 - 2y = 6 - y$.

iii. Por tanto $10 - 6 = -y + 2y$, entonces $y = 4$.

iv. Si repetimos el proceso anterior con la incógnita y , obtenemos $y = \frac{1}{2}(10 - x)$ e $y = 6 - x$, de donde $\frac{1}{2}(10 - x) = 6 - x$, cuya solución es $x = 2$.

En resumen, la solución de

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

es $x = 2$ e $y = 4$.

b. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases} \text{ por el método de igualación.}$$

i. Seleccionamos la incógnita y y depéjmosla de ambas ecuaciones, obtenemos $y = \frac{1}{2}(4 - 3x)$ y $y = 2x - 2$.

ii. Si igualamos los miembros derechos de las ecuaciones anteriores obtenemos $\frac{1}{2}(4 - 3x) = 2x - 2$.

iii. Por tanto, $4 - 3x = 4x - 4$ o $7x = 8$, entonces $x = \frac{8}{7}$.

iv. Repetimos el proceso anterior con la incógnita x , despejando x obtenemos $x = \frac{1}{3}(4 - 2y)$ y $x = \frac{1}{2}(2 + y)$, de donde

$\frac{1}{3}(4 - 2y) = \frac{1}{2}(2 + y)$ ó $8 - 4y = 6 + 3y$, cuya solución es $y = \frac{2}{7}$.

En resumen, la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

es

$$x = \frac{8}{7} \text{ e } y = \frac{2}{7}.$$

**EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN**

II. El método de sustitución, de resolución de un sistema de ecuaciones lineales, consiste en seleccionar una de las incógnitas de una de las ecuaciones (se sugiere que se seleccionada aquella ecuación con la incógnita que requiera de menos esfuerzo para ser despejada), posteriormente "despejarla", luego sustituir la incógnita ya despejada en la ecuación del sistema que no ha sido utilizada, así obtendremos una ecuación lineal con una sola incógnita, cuya resolución proporciona el "valor de una de las incógnitas". Finalmente, se sustituye el valor de la incógnita que ha sido determinado en la ecuación que se generó al despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones, vea la *figura 4.13*.

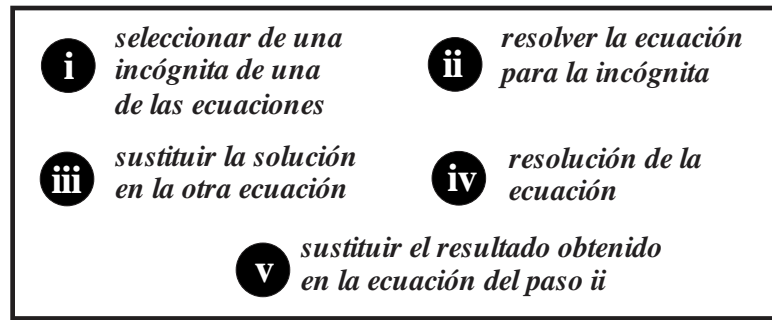


FIGURA 4.13

ALGORITMO: EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

- i. Seleccione de una de las ecuaciones de una de las incógnitas, la que considere más fácil de despejar.
- ii. Despeje la incógnita que seleccionó.
- iii. Sustituya el valor de la incógnita obtenido en ii. en la ecuación que no ha utilizado y simplifique; con este proceso obtiene una ecuación lineal con una incógnita, resuélva esta ecuación.
- iv. Sustituya el valor de la incógnita obtenida en el paso iii. en la ecuación obtenida en el paso ii. y simplifique.

◆ EJEMPLO 4.9 (RESOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN)

a. Resolvamos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 4y = 10 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$ aplicando el método de sustitución:

- i. Seleccionamos la incógnita x de la primera ecuación (presenta menos dificultades para ser despejada).
- ii. Despejamos la incógnita seleccionada y obtenemos $x = 10 - 4y$.
- iii. Sustituamos $x = 10 - 4y$ en la ecuación $3x + 2y = 6$, obtenemos $3(10 - 4y) + 2y = 6$, de dónde $30 - 12y + 2y = 6$, entonces

$$10y = 24 \text{ o } y = \frac{12}{5}.$$

iv. Ahora sustituimos $y = \frac{12}{5}$ en $x = 10 - 4y$, obtenemos

$$x = 10 - 4\left(\frac{12}{5}\right) \text{ o } x = \frac{2}{5}.$$

Así, la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$, es $x = \frac{2}{5}$ e $y = \frac{12}{5}$.

b. Para resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \frac{3}{4}x + 4y = -1 \\ \frac{1}{2}x - 2y = 4 \end{cases}$, por el método de sustitución:

- i. Seleccionamos la incógnita x de la segunda ecuación (presenta menos dificultades para ser despejada).
 - ii. Despejamos la incógnita seleccionada y obtenemos $x = 8 + 4y$.
 - iii. Sustituamos la ecuación $x = 8 + 4y$ en la primera ecuación obtenemos $\frac{3}{4}(8 + 4y) + 4y = -1$, de dónde $6 + 3y + 4y = -1$, por lo que $y = -1$.
 - iv. Ahora sustituimos $y = -1$ en la ecuación $x = 8 + 4y$, obtenemos $x = 8 + 4(-1)$ o $x = 4$.
- La solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x + 4y = -1 \\ \frac{1}{2}x - 2y = 4 \end{cases},$$

es $x = 4$ e $y = -1$.

En el proceso de resolución de sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

puede obtenerse una contradicción o una identidad, veamos el *ejemplo 4.10*.

◆ **EJEMPLO 4.10 (CONTRADICCIÓN E IDENTIDAD EN SISTEMAS DE ECUACIONES)**

a. Intentemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 4y = 10 \\ 3x + 12y = 6 \end{cases}$$

utilizando el método de sustitución.

i. Seleccionemos la incógnita x de la primera ecuación (presenta menos dificultades para ser despejada).

ii. Despejamos la incógnita seleccionada y obtenemos $x = 10 - 4y$.

iii. Ahora sustituimos $x = 10 - 4y$ en la ecuación $3x + 12y = 6$, obtenemos $3(10 - 4y) + 12y = 6$ o $30 - 12y + 12y = 6$, es decir, $30 = 6$!, esta última expresión es falsa (se denomina contradicción), por tanto, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 4y = 10 \\ 3x + 12y = 6 \end{cases}$$

no tiene solución (y se denomina inconsistente o incompatible).

b. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$$

utilizando el método de sustitución.

i. Seleccionemos la incógnita y de la primera ecuación (presenta menos dificultades para ser despejada).

ii. Despejamos la incógnita seleccionada y obtenemos $y = 2x - 2$.

iii. Ahora sustituimos $y = 2x - 2$ en la ecuación $4x - 2y = 4$ y obtenemos $4x - 2(2x - 2) = 4$ o $4x - 4x + 4 = 4$, es decir la identidad $0 = 0$. Como consecuencia, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$$

tiene solución múltiple (o una infinidad de soluciones).

DEFINICIÓN 4.2 (Sistema de ecuaciones inconsistentes y con solución múltiple)

a. Un sistema de ecuaciones lineales dos por dos, en el que su proceso de solución conduce a una contradicción se denomina inconsistente y no tiene solución.

b. Un sistema de ecuaciones lineales dos por dos, el que su proceso de solución conduce a identidades, se dice que tiene solución múltiple (o una infinidad de soluciones).

El esquema de la *figura 4.14* muestra relaciona los tipos sistemas de ecuaciones lineales con su tipo de solución.

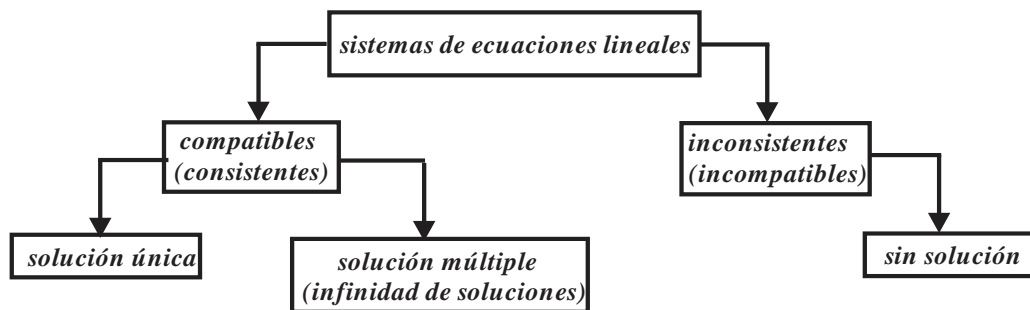


FIGURA 4.14

Seguramente, el lector notó que un sistema de ecuaciones lineales dos por dos tiene solución múltiple cuando “una de las ecuaciones es un múltiplo de la otra ecuación”.

Concluimos la presente sección señalando que hemos estudiado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

en dos distintos contextos, y que para un sistema compatible:

a. En un contexto geométrico x e y representaron variables y en consecuencia asumían un número indefinido de valores y las ecuaciones (con más precisión, la relación entre variables) $A_1x + B_1y = C_1$ y $A_2x + B_2y = C_2$ admitían una línea recta como representación en el plano cartesiano. La intersección de las líneas rectas (si esto ocurría) era el punto (x_0, y_0) cuyas coordenadas al ser sustituidas en

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

generaban un par de identidades.

b. En el contexto algebraico, los símbolos x e y representan incógnitas, y que, de todos los pares de asignaciones numéricas x_0, y_0 que es posible hacerles, sólo uno de ellos generan dos identidades.



Ejercicios 4.1

1. Determine gráficamente las coordenadas del punto en que se intersecan los pares de líneas rectas asociadas.

a. $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -x + y = 2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = -3 \end{cases}$

2. Verifique gráficamente los pares de líneas rectas asociados no se intersecan.

a. $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = 5 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$

3. ¿Qué condiciones deben cumplir los coeficientes de

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

para que las líneas rectas que tiene asociadas no se intersequen?

4. Verifique gráficamente que las líneas rectas asociadas a los sistemas coinciden.

a. $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$ c. $\begin{cases} -2x + y = -1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \frac{1}{3}x + y = 1 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases}$

5. ¿Qué condiciones deben cumplir los coeficientes de

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

para que las líneas rectas que tiene asociadas coincidan?

6. Utilice el método de igualación y resuelva.

a. $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$ j. $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ -2x + y = -4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -x + y = 5 \\ x + 4y = 10 \end{cases}$ k. $\begin{cases} 7a + 2b = 5 \\ 2a - b = 3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 6x + y = 1 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$ l. $\begin{cases} x = -5y + 16 \\ -2x + 10y = -4 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ -4x + 10y = -1 \end{cases}$ m. $\begin{cases} 8p - q = 2 \\ 4 - q = 3p \end{cases}$

e. $\begin{cases} 4p - q = 6 \\ -5p + q = -3 \end{cases}$ n. $\begin{cases} 8a - 6b = 4 \\ 2a + b = 8 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 8a - 6b = 4 \\ 2a + b = 8 \end{cases}$ o. $\begin{cases} 2 = r - 3s \\ 7 - 5r = 2s \end{cases}$

g. $\begin{cases} 4p + 10q = 2 \\ 3p - 4q = 2 \end{cases}$ p. $\begin{cases} 10s = -5w \\ -s + 2w = 2 \end{cases}$

h. $\begin{cases} 2s - 3w = 8 \\ 6s - 12w = 2 \end{cases}$ q. $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 2y = 1 \\ \frac{2}{5}x + 6y = 7 \end{cases}$

i. $\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$ r. $\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y = -4 \end{cases}$

$$\text{s. } \begin{cases} 3a + \frac{1}{5}b = 0 \\ \frac{1}{8}a - 2b = 4 \end{cases}$$

$$\text{t. } \begin{cases} \frac{2}{5}x = -5y + 3 \\ -2x + \frac{3}{5}y = 3 \end{cases}$$

$$\text{u. } \begin{cases} 1.8p - 0.2q = 1 \\ 4.1 - 1.1q = 5p \end{cases}$$

$$\text{v. } \begin{cases} 1.7a - 0.2b = 1.2 \\ 3.1a + 2.5b = -1.4 \end{cases}$$

$$\text{w. } \begin{cases} 2.3 = -1.8r + s \\ 7 - 0.5r = 3.4s \end{cases}$$

$$\text{x. } \begin{cases} 0.8s = 4.1w \\ -3s + w = 0.2 \end{cases}$$

7. Utilice el método de sustitución y resuelva.

$$\text{a. } \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} -3x + y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ -3x + 5y = -4 \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} 3p - 2q = 3 \\ -p + q = -4 \end{cases}$$

$$\text{f. } \begin{cases} 2a - 6b = 5 \\ 2a + 3b = 5 \end{cases}$$

$$\text{g. } \begin{cases} p - 5q = 1 \\ -3p + 2q = 2 \end{cases}$$

$$\text{h. } \begin{cases} -s - 3w = 10 \\ 2s - 5w = 2 \end{cases}$$

$$\text{i. } \begin{cases} -8x - 2y = 16 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$$

$$\text{j. } \begin{cases} 4x + y = 2 \\ -2x - 3y = -2 \end{cases}$$

$$\text{k. } \begin{cases} -4a + b = 5 \\ 2a - b = 4 \end{cases}$$

$$\text{l. } \begin{cases} 3x = -2y + 8 \\ -2x + 6y = -5 \end{cases}$$

$$\text{m. } \begin{cases} 3p - q = 7 \\ 4 - 3q = -2p \end{cases}$$

$$\text{n. } \begin{cases} 5a + 3b = -3 \\ 2a + 2b = 5 \end{cases}$$

$$\text{o. } \begin{cases} 3 = r - 2s \\ 8 - 5r = s \end{cases}$$

$$\text{p. } \begin{cases} 7s = -6w \\ -3s + 9w = 0 \end{cases}$$

$$\text{q. } \begin{cases} \frac{2}{3}x + 7y = 2 \\ \frac{2}{5}x + 3y = -2 \end{cases}$$

$$\text{r. } \begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}y = 9 \end{cases}$$

$$\text{s. } \begin{cases} 3a + \frac{4}{5}b = 0 \\ \frac{2}{3}a - 2b = 1 \end{cases}$$

$$\text{t. } \begin{cases} \frac{2}{3}x = -5y + 3 \\ -2x + \frac{3}{2}y = 3 \end{cases}$$

$$\text{u. } \begin{cases} 1.8p + 0.2q = 1.5 \\ 6.1 + 1.1q = 2p \end{cases}$$

$$\text{v. } \begin{cases} 1.7a - 0.2b = 1.2 \\ 3.1a + 2.5b = -1.4 \end{cases}$$

$$\text{w. } \begin{cases} 2.8 = -3.8r + s \\ 4 - 2.5r = 3.4s \end{cases}$$

$$\text{x. } \begin{cases} 0.8s = 5.2w \\ -5s + 4w = 0.2 \end{cases}$$

8. Utilice el método de eliminación por igualación y resuelva.

$$\text{a. } \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} -4x + y = 6 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} 8x + y = 9 \\ x + 4y = 11 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} 2x - y = 8 \\ -x + 5y = 4 \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} p - 2q = 9 \\ -6p + q = -8 \end{cases}$$

$$\text{f. } \begin{cases} 5a - 6b = 3 \\ -8a + b = 5 \end{cases}$$

$$\text{g. } \begin{cases} 7p - 2q = 4 \\ -4p + 9q = 8 \end{cases}$$

$$\text{h. } \begin{cases} -5s - w = 7 \\ s - 8w = 2 \end{cases}$$

$$\text{i. } \begin{cases} -2x + 4y = 10 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$\text{j. } \begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ -2x - 4y = -2 \end{cases}$$

$$\text{k. } \begin{cases} -4a + 3b = 5 \\ 5a - 3b = 4 \end{cases}$$

$$\text{l. } \begin{cases} 8x = -2y + 6 \\ -4x - 3y = -4 \end{cases}$$

$$\text{m. } \begin{cases} 3p - 8q = 1 \\ 2 - 4q = -6p \end{cases}$$

$$\text{n. } \begin{cases} 4a + 3b = -5 \\ a + 2b = 1 \end{cases}$$

$$\text{o. } \begin{cases} 3 = r - 2s + 4 \\ 6 - 5r = 2s \end{cases}$$

$$\text{p. } \begin{cases} 4 - 7s = -6w + 1 \\ 3s + 9w - s = 4 + s \end{cases}$$

$$\text{q. } \begin{cases} \frac{2}{5}x + 7y = 2 \\ \frac{2}{5}x + 3y = -2x \end{cases}$$

$$\text{r. } \begin{cases} 3x - 2y = -4 + 3y \\ -\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}y = x - 2 \end{cases}$$

$$\text{s. } \begin{cases} 3a + \frac{4}{5}b = 0 \\ a - 2b = 1 \end{cases}$$

$$\text{t. } \begin{cases} \frac{2}{3}x = -5y + 3 \\ -2x + \frac{3}{2}y = 3 \end{cases}$$

9. Determine si el sistema de ecuaciones tiene solución única, solución múltiple o si es incompatible.

$$\text{a. } \begin{cases} -x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} -2x + y = 6 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} 8x + 4y = 9 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ -x + 5y = 4 \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} p - 2q = 9 \\ -3p + 6q = -24 \end{cases}$$

$$\text{f. } \begin{cases} 4a - 2b = 3 \\ -8a + 4b = -6 \end{cases}$$

$$\text{g. } \begin{cases} p - \frac{9}{4}q = 2 \\ -4p + 9q = 8 \end{cases}$$

$$\text{h. } \begin{cases} -5s - w = 7 \\ 10s + 2w = -14 \end{cases}$$

$$\text{i. } \begin{cases} -2x + 4y = 1 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$\text{j. } \begin{cases} x - 2y = 6 \\ -2x + 4y = -12 \end{cases}$$

$$\text{k. } \begin{cases} -4a + 3b = 4 \\ 2a + \frac{3}{2}b = 2 \end{cases}$$

$$\text{l. } \begin{cases} 8x = -2y + 1 \\ -4x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$10. \text{ a. Sea } \begin{cases} Ax + 4y = 1 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$$

i. ¿Para qué valor (es) de A se obtiene un sistema de ecuaciones sin solución?

ii. ¿Para qué valor(es) de A se obtiene un sistema de ecuaciones con solución única?

$$\text{b. Sea } \begin{cases} x + 5y = 2 \\ 2x + By = 0 \end{cases}$$

i. ¿Para qué valor(es) de B se obtiene un sistema de ecuaciones sin solución?

ii. ¿Para qué valor(es) de B se obtiene un sistema de ecuaciones con solución única?

$$\text{c. Sea } \begin{cases} x + 5y = 2 \\ Cx + 4y = 4 \end{cases}$$

i. ¿Para qué valor(es) de C se obtiene un sistema de ecuaciones sin solución?

ii. ¿Para qué valor(es) de C se obtiene un sistema de ecuaciones con solución única?

11.

a. Utilice el método de sustitución y verifique que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$,

tiene como solución

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \text{ y } y = \frac{A_1C_2 - A_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

b. ¿Qué condiciones deben cumplir los coeficientes de

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases} \text{ para tener solución única?}$$

c. ¿Qué condiciones deben cumplir los coeficientes de

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases} \text{ para no tener solución?}$$

d. ¿Qué condiciones deben cumplir los coeficientes de

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases} \text{ para tener solución múltiple?}$$

12. a. El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = 0 \\ A_2x + B_2y = 0 \end{cases} \text{ se denomina homogéneo.}$$

i. ¿Por qué siempre tiene solución?

ii. ¿Bajo qué condiciones tiene solución única?

iii. ¿Bajo qué condiciones tiene solución múltiple?

13. Determine un número sabiendo que la suma de sus dos cifras es 10 ; y que, si invertimos el orden de las cifras, se obtiene un número que es 36 unidades mayor que el inicial.

14. Determine el número de dos cifras cuya suma de las mismas es 7 y el número es 2 unidades menor que el triple del producto de sus cifras.

15. Determine un número de dos cifras sabiendo que la primera cifra es igual a la tercera parte de la segunda, y que si invertimos el orden de sus cifras, obtenemos un número que excede en 54 unidades al número inicial.

16. La distancia entre dos ciudades, A y B , es 255 kilómetros. Un automóvil parte de la ciudad A hacia la ciudad B a velocidad constante de 90 kilómetros por hora. Simultáneamente, sale otro automóvil de la ciudad B hacia la ciudad A a una velocidad constante 80 kilómetros por hora. Calcule el tiempo que tardan los automóviles en encontrarse y la distancia que ha recorrido cada uno en el momento del encuentro.

17. La distancia entre dos ciudades, A y B , es 360 kilómetros. Un automóvil parte de la ciudad A hacia la

ciudad B a velocidad constante de 70 kilómetros por hora. Simultáneamente, a la misma hora parte un camión de la ciudad B hacia la ciudad A a una velocidad constante 50 kilómetros por hora. Calcule el tiempo que tardan los automóviles en encontrarse, y la distancia que ha recorrido cada uno en el momento del encuentro.

18. Un automóvil tarda dos horas en recorrer la distancia entre dos ciudades. Si su velocidad hubiera sido superior en 30 kilómetros por hora habría tardado una hora y cuarto. ¿Cuál es la distancia entre las dos ciudades?

19. Hace un mes tres agujas y 2 alfileres costaron 1.45 pesos. Actualmente 2 alfileres y 5 agujas cuestan 1.70 pesos. Determine el precio de una aguja y de un alfiler.

20. Un número excede en 12 unidades a otro; y si restáramos 4 unidades a cada número, entonces el primer número sería igual al doble del segundo número. Determine los números.

21. La razón entre las edades de dos personas es de $\frac{2}{3}$. Sabiendo que las edades difieren en 15 años, ¿cuál es la edad de cada una de ellas?

22. Seis kilogramos de manzanas y cinco kilogramos de plátanos cuestan 227 pesos. Cinco kilogramos de manzanas y cuatro kilogramos de plátanos cuestan 188 pesos. Determine el precio de un kilogramo de manzanas y el precio de un kilogramo de plátanos.

23. En una papelería el paquete de hojas tiene un precio de 12 pesos. Si el precio de una hoja se incrementa 0.10 pesos, para mantener el precio del paquete cada uno debería tener 4 hojas menos. ¿Cuál es el precio de una hoja y cuántas trae cada paquete?

24. Con dos tipos de cloro, el de 3.50 pesos por litro y el de 1.50 pesos por litro, se desea obtener una mezcla cloro con precio de 2.22 por litro. ¿Cuántos litros se deben poner de cada tipo de cloro para obtener 50 litros de la mezcla?

25. Entre Pedro y Alberto cargan 160 pesos. Si Alberto le da 10 pesos a Pedro, ambos tendrán la misma cantidad. ¿Cuánto dinero carga cada uno?

26. En un estacionamiento hay 39 vehículos, entre coches y motos, en total son 126 llantas. ¿Cuántos vehículos de cada clase había en el estacionamiento?

27. Un hotel tiene habitaciones dobles y sencillas. En total hay 50 habitaciones y 87 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

28. Un examen contiene de 16 preguntas. Por cada respuesta correcta se acumulan 5 puntos y por cada respuesta incorrecta se restan 3 puntos. Si una persona obtuvo 32 puntos en el examen, ¿cuántas preguntas respondió correctamente?

29. Alvarado ha comprado una botella de licor que estaba rebajado un 15 %. Garcés ha seleccionado otra botella de licor con un precio de 25 pesos mayor, pero le han rebajado el 20 %, por lo que solo ha pagado 8 pesos más que Alvarado. ¿Cuál es el precio de cada botella de licor?

30. Se pretende repartir cierta cantidad de dinero entre cierto número de niños. Si a cada uno de ellos se les dan 80 pesos sobran 20 pesos, y si a cada uno se le dan 90 pesos hacen falta 40 pesos. ¿Cuántos niños son?, ¿cuántos pesos se van a repartir?

31. Se tienen dos grifos A y B . Si se abre el grifo A durante 3 minutos y el grifo B durante 1 minuto, se almacena un volumen de 50 litros de agua. Si se abre el grifo B durante 2 minutos y el grifo A durante 1 minuto, se almacenan 40 litros de agua. ¿Cuántos litros de agua aporta cada grifo en 1 minuto?

32. En un grupo, la asignatura de matemáticas la ha aprobado el 62.5 % de las alumnas y el 80 % de los alumnos, mientras que la asignatura de historia la ha aprobado 87.5 % de las alumnas y el 60 % de los alumnos. Calcule el número de alumnas y de alumnos que hay en el grupo, si el total de aprobados es 26 en matemáticas y 26 en historia.

4.2

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES TRES POR TRES

El alumno:

6. Comprenderá el concepto de sistemas equivalentes de ecuaciones lineales en el caso de sistemas lineales 3×3 .
7. Obtendrá sistemas equivalentes de ecuaciones lineales.
8. Resolverá sistemas de ecuaciones lineales 2×2 y 3×3 a través de obtener un sistema triangular equivalente de ecuaciones.
10. Resolverá problemas en diversos contextos empleando los métodos algebraicos vistos con anterioridad.

Los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales descritos en la sección anterior pueden utilizarse en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con un mayor número de ecuaciones e incógnitas, sin embargo, es más común utilizar el método Gauss. El método de Gauss (de resolución de sistemas de ecuaciones lineales) consiste en “escalonar” (o en su caso triangular) el sistema de ecuaciones lineales; la descripción de los detalles, conceptos y fundamentos de escalonamiento (triangulación) de un sistema de ecuaciones lineales $\text{tres} \times \text{tres}$ los trataremos en las siguientes líneas.

DEFINICIÓN 4.3 (SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES TRE POR TRES)

a. El conjunto de ecuaciones lineales

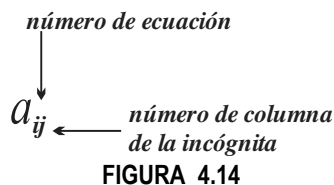
$$S : \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Se conoce como sistema de ecuaciones lineales $\text{tres} \times \text{tres}$ (tres ecuaciones con tres incógnitas).

b. Los números reales: $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ y a_{33} son los coeficientes y los números b_1, b_2 y b_3 son los términos independientes.

NOTA

En el sistema de ecuaciones lineales S de la definición anterior, en el coeficiente a_{ij} el subíndice i indica el número de ecuación y el subíndice j indica el número de columna de la incógnita, vea la figura 4.14.



◆ EJEMPLO 4.11 (SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES ESCALONADOS)

Los sistemas de ecuaciones lineales $\text{tres} \times \text{tres}$ se encuentran escalonados.

$$\text{a. } S_1 : \begin{cases} b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z = c_1 \\ \phantom{b_{11}x} b_{22}y + b_{23}z = c_2 \\ \phantom{b_{11}x} \phantom{b_{22}y} b_{33}z = c_3 \end{cases} \qquad \text{b. } S_2 : \begin{cases} b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z = c_1 \\ \phantom{b_{11}x} b_{22}y + b_{23}z = c_2 \end{cases}$$

$$\text{c. } S_3 : \begin{cases} b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z = c_1 \\ b_{23}z = c_2 \end{cases}$$

$$\text{d. } S_4 : \begin{cases} b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z = c_1 \end{cases}$$

$$\text{e. } S_5 : \begin{cases} b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z = c_1 \\ b_{22}y + b_{23}z = c_2 \\ b_{33}z = c_3 \end{cases}$$

$$\text{f. } S_6 : \begin{cases} b_{11}x + b_{12}y = c_1 \\ b_{22}y = c_2 \end{cases}$$

En particular, los sistemas de ecuaciones lineales de los *incisos* e. y f. se encuentran triangulados.



Para escalar un sistema de ecuaciones lineales se utilizan las “operaciones elementales entre filas”, que tienen como fundamento las propiedades de la igualdad (reflexiva, simétrica transitiva).

DEFINICIÓN 4.4 (OPERACIONES ELEMENTALES Y SISTEMAS EQUIVALENTES)

Si en un sistema de ecuaciones lineales los índices i y j representan a las ecuaciones i y j respectivamente, entonces:

- $E_i \leftrightarrow E_j$ significa intercambiar las ecuaciones i y j .
- $k \times E_i \rightarrow E_i$ significa multiplicar por un número $k \neq 0$ la ecuación E_i .
- $k \times E_i + E_j \rightarrow E_j$ significa sumar un múltiplo constante de la ecuación E_i a la ecuación E_j .
- Dos sistemas de ecuaciones lineales *tres* \times *tres* (o de cualquier ser de cualquier dimensión) son equivalentes si uno de ellos se obtiene a partir del otro mediante un número específico de operaciones elementales.
- Dos sistemas de ecuaciones lineales equivalentes tienen la misma solución.
- Indicaremos que dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes utilizando el símbolo \sim .

Para indicar que los sistemas de ecuaciones lineales *tres* \times *tres*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z = d_1 \\ c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z = d_2 \\ c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z = d_3 \end{cases}$$

son equivalentes escribiremos

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \sim \begin{cases} c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z = d_1 \\ c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z = d_2 \\ c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z = d_3 \end{cases}$$

Para identificar (o hacer referirnos) una ecuación específica utilizaremos la notación E_i , por ejemplo, la ecuación 1 se representará por E_1 , la ecuación 2 se representará E_2 , etc.

◆ EJEMPLO 4.12 (SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EQUIVALENTES *dos* \times *dos*)

El lector puede verificar que las soluciones del sistema de ecuaciones $S : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$ son $x = 2$ e $y = -1$.

Observe:

- Si en el sistema de ecuaciones $S : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$, intercambiamos las posiciones de las ecuaciones obtenemos

$S_1 : \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$, en este sistema de ecuaciones las soluciones son también $x = 2$ e $y = -1$, por tanto,

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

- Ahora multipliquemos una de las ecuaciones de $S : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$ por un número distinto de cero, por ejemplo, la ecuación E_2

por 2, obtenemos el sistema $S_2 : \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$ cuya solución es nuevamente $x = 2$ e $y = -1$ (verifíquelo), por tanto,

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y=1 \\ 2x-2y=6 \end{cases}.$$

c. Finalmente, si multiplicamos por tres la ecuación E_1 de S : $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases}$ y la sumamos a la ecuación E_2 obtenemos

$$S_3: \begin{cases} x+y=1 \\ 4x+2y=6 \end{cases}$$

cuya solución también es $x=2$ e $y=-1$ (verifíquelo), por tanto,

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y=1 \\ 4x+2y=6 \end{cases}.$$



En el *ejemplo 4.11* mostramos la aplicación de operaciones elementales a un sistema de ecuaciones lineales.

◆ EJEMPLO 4.13 (APLICACIÓN DE OPERACIONES ELEMENTALES)

a. Si aplicamos las operaciones (1) $-2E_1 + E_2 \rightarrow E_2$, (2) $4E_1 + E_3 \rightarrow E_3$ y (3) $E_2 \leftrightarrow E_3$ (en ese orden) al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+4y-z=1 \\ -4x-y+z=2 \end{cases}$$

obtenemos:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+4y-z=1 \\ -4x-y+z=2 \end{cases} \xrightarrow{-2E_1 + E_2 \rightarrow E_2} \begin{cases} x+2y+z=0 \\ -3z=1 \\ -4x-y+z=2 \end{cases} \xrightarrow{4E_1 + E_3 \rightarrow E_3} \begin{cases} x+2y+z=0 \\ -3z=1 \\ 7y+5z=2 \end{cases} \xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_3} \begin{cases} x+2y+z=0 \\ 7y+5z=2 \\ -3z=1 \end{cases}.$$

b. Si aplicamos las operaciones elementales: (1) $E_1 \leftrightarrow E_2$, (2) $4E_1 + E_3 \rightarrow E_3$ y (3) $-4E_1 + E_2 \rightarrow E_2$ al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 4x+2y+z=3 \\ x+2y-z=1 \\ -4x-y+z=2 \end{cases}$$

obtenemos

$$\begin{cases} 4x+2y+z=3 \\ x+2y-z=1 \\ -4x-y+z=2 \end{cases} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 4x+2y+z=3 \\ -4x-y+z=2 \end{cases} \xrightarrow{4E_1 + E_3 \rightarrow E_3} \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 4x+2y+z=3 \\ 7y-3z=6 \end{cases} \xrightarrow{-4E_1 + E_2 \rightarrow E_2} \begin{cases} x+2y-z=1 \\ -6y-3z=-1 \\ 7y-3z=6 \end{cases}.$$

c. Si aplicamos: (1) $-E_2 + E_1 \rightarrow E_1$, (2) $4E_1 + E_3 \rightarrow E_3$ y (3) $-3E_1 + E_2 \rightarrow E_2$ al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 4x+2y+z=3 \\ 3x+2y-z=1 \\ -4x-y+z=2 \end{cases}$$

obtenemos

$$\begin{cases} 4x+2y+z=3 \\ 3x+2y-z=1 \\ -4x-y+z=2 \end{cases} \xrightarrow{-E_2 + E_1 \rightarrow E_1} \begin{cases} x+2z=2 \\ 3x+2y-z=1 \\ -4x-y+z=2 \end{cases} \xrightarrow{4E_1 + E_3 \rightarrow E_3} \begin{cases} x+2z=2 \\ 3x+2y-z=1 \\ -y+9z=10 \end{cases} \xrightarrow{-3E_1 + E_2 \rightarrow E_2} \begin{cases} x+2z=2 \\ 2y-7z=-5 \\ -y+9z=10 \end{cases}.$$



El propósito de aplicar operaciones elementales a un sistema de ecuaciones lineales es “triangularlo”, una vez que ha sido triangularlo, la determinación de los valores de las incógnitas se obtiene haciendo sustituciones “de abajo hacia arriba y de derecha a izquierda” (lo que se denomina “sustitución hacia atrás”) ilustremos lo antes dicho con el *ejemplo 4.14*.

◆ EJEMPLO 4.14 (SOLUCIÓN DE SISTEMAS TRIANGULARES)

a. En el sistema de ecuaciones lineales triangular

$$\begin{cases} 2x - y = 3 & \cdots E_1 \\ y = 5 & \cdots E_2 \end{cases},$$

Se observa en la ecuación E_2 que $y = 5$, si sustituimos $y = 5$ en la ecuación E_1 obtenemos $2x - 5 = 3$, por tanto, $x = 4$. La solución del sistema de ecuaciones es $x = 4$ y $y = 5$.

b. En el sistema triangular

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 & \cdots E_1 \\ 4y = 8 & \cdots E_2 \end{cases},$$

De $4y = 8$ se sigue $y = 2$. Al sustituir $y = 2$ en la ecuación E_1 obtenemos $3x - 2(2) = 5$, por tanto, $3x = 9$ o $x = 3$. La solución del sistema de ecuaciones es $x = 3$ y $y = 2$.

c. En el sistema triangular

$$\begin{cases} x + 4y - 2z = 8 & \cdots E_1 \\ y + 6z = 20 & \cdots E_2 \\ z = 5 & \cdots E_3 \end{cases},$$

tenemos $z = 5$, si sustituimos $z = 5$ en la ecuación E_2 obtenemos $y + 6(5) = 20$, por tanto, $y = -10$. Ahora, al sustituir $z = 5$ y $y = -10$ en la ecuación E_1 obtenemos $x + 4(-10) - 2(5) = 8$, luego $x = 58$. La solución del sistema de ecuaciones es la terna $x = 58$, $y = -10$ y $z = 5$.

d. La última ecuación del sistema triangular

$$\begin{cases} x - 3y - 2z = -1 \\ y - 7z = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

indica que $z = -2$, al sustituir $z = -2$ en la ecuación E_2 obtenemos $y - 7(-2) = 4$, por tanto, $y = 6$. Finalmente, al sustituir $z = -2$ y $y = 6$ en la ecuación E_1 obtenemos $x - 3(6) - 2(-2) = -1$ o bien $x = 13$. La solución del sistema de ecuaciones es el par $x = 13$, $y = 6$ y $z = -2$.



Los ejemplos 4.13 y 4.14 muestran parte del método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando un “proceso de triangulación” que es un caso especial del método general de resolución de sistemas de ecuaciones lineales conocido como “Método o proceso” de Gauss – Jordan, mismo que presentamos a continuación.

ESCALONAMIENTO O TRIANGULACIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

i. Verifique que incógnitas se encuentren en columnas iguales.

Aplique operaciones elementales hasta conseguir que el coeficiente de la primera incógnita 1.

ii. Tome como base (pivote) el número 1 antes obtenido, aplique operaciones elementales y transforme los coeficientes de esa misma incógnita (de las restantes ecuaciones) en ceros.

iii. Aplique operaciones elementales a la segunda ecuación y transforme en 1 su primer coeficiente distinto de cero de la segunda ecuación.

iv. Repita el proceso hasta que el sistema sea triangular (o escalonado).

Nota

Recuerde que $1 \cdot x = x$, $1 \cdot y = y$, etc.

◆ EJEMPLO 4.15 (RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES POR TRIANGULACIÓN)

a.
$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 5 \end{cases}.$$

Primero efectuamos la operación elemental $E_2 \leftrightarrow E_1$ (intercambio de ecuaciones), obtenemos

$$\begin{cases} 2x - y = 4 & E_1 \leftrightarrow E_2 \\ x + 3y = 5 & \sim \end{cases} \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases},$$

al aplicar la operación $-2E_1 + E_2 \rightarrow E_2$, obtenemos el sistema de ecuaciones triangular

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \quad E_1 \leftrightarrow E_2 \quad \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} -2E_1 + E_2 \rightarrow E_2 \\ \sim \end{matrix} \quad \begin{cases} x + 3y = 5 \\ -7y = -6 \end{cases}.$$

Por tanto, $y = \frac{6}{7}$ y $x + 3\left(\frac{6}{7}\right) = 5$, la solución es $x = \frac{17}{7}$ y $y = \frac{6}{7}$.

b. Si $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$, entonces

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases} \quad 2E_1 \leftrightarrow E_1 \quad \begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} -E_2 + E_1 \rightarrow E_1 \\ \sim \end{matrix} \quad \begin{cases} x + 6y = 2 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} -3E_1 + E_2 \rightarrow E_2 \\ \sim \end{matrix} \quad \begin{cases} x + 6y = 2 \\ -22y = -4 \end{cases}$$

Por tanto, de la ecuación E_2 obtenemos $y = \frac{2}{11}$, si sustituimos en la primera ecuación obtenemos $x + 6\left(\frac{2}{11}\right) = 2$, de

dónde $x = \frac{10}{11}$. La solución del sistema de ecuaciones es $x = \frac{10}{11}$ y $y = \frac{2}{11}$.

c. Resolvamos el sistema de ecuaciones utilizando "sustitución hacia arriba".

$$\begin{cases} x - y - 3z = -4 \\ 2x - y - 4z = -7 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

El coeficiente de la primera incógnita de la ecuación E_1 es 1, por tanto, se utiliza como pivote en la eliminación de los términos que se encuentran debajo de él; esto se consigue al aplicar las operaciones $-2E_1 + E_2 \rightarrow E_2$ y $-E_1 + E_3 \rightarrow E_3$.

$$\begin{cases} x - y - 3z = -4 \\ 2x - y - 4z = -7 \\ x + y - z = -2 \end{cases} \quad \begin{matrix} -2E_1 + E_2 \rightarrow E_2 \\ \sim \end{matrix} \quad \begin{cases} x - y - 3z = -4 \\ y + 2z = 1 \\ x + y - z = -2 \end{cases} \quad \begin{matrix} -E_1 + E_3 \rightarrow E_3 \\ \sim \end{matrix} \quad \begin{cases} x - y - 3z = -4 \\ y + 2z = 1 \\ 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

Si tomamos como pivote el coeficiente 1 de la incógnita y de la segunda ecuación, la operación $-2E_2 + E_3 \rightarrow E_3$ triangula al sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x - y - 3z = -4 \\ y + 2z = 1 \\ 2y + 2z = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} -2E_2 + E_3 \rightarrow E_3 \\ \sim \end{matrix} \quad \begin{cases} x - y - 3z = -4 \\ y + 2z = 1 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

Como consecuencia de lo anterior $z = 0$; si sustituimos $z = 0$ en la ecuación E_2 obtenemos $y + 2(0) = 1$ o $y = 1$. Si sustituimos tanto $z = 0$ como $y = 1$ en la ecuación E_1 obtenemos $x - (1) - 3(0) = -4$, de donde $x = -3$.

La solución del sistema de ecuaciones es la terna $x = -3$, $y = 1$ y $z = 0$.

d. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x - 3y + 2z = 14 \\ 3x + y - z = -2 \end{cases}$$

triangulándolo.

El coeficiente 1 de la primera incógnita de la ecuación E_1 se utiliza como pivote en la eliminación de los primeros términos de las ecuaciones E_2 y E_3 , esto se consigue con las operaciones $-2E_1 + E_2 \rightarrow E_2$ y $-3E_1 + E_3 \rightarrow E_3$.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x - 3y + 2z = 14 \\ 3x + y - z = -2 \end{cases} \quad \begin{matrix} -2E_1 + E_2 \rightarrow E_2 \\ \sim \end{matrix} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ -7y - 4z = 2 \\ 3x + y - z = -2 \end{cases} \quad \begin{matrix} -3E_1 + E_3 \rightarrow E_3 \\ \sim \end{matrix} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ -7y - 4z = 2 \\ -5y - 10z = -20 \end{cases},$$

A continuación multiplicamos la ecuación E_1 por $-\frac{1}{5}$ (operación $-\frac{1}{5}E_3 \rightarrow E_3$) y luego intercambiamos las ecuaciones E_2 y E_3 (operación $E_2 \leftrightarrow E_3$) obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x+2y+3z=6 \\ -7y-4z=2 \\ -5y-10z=-20 \end{array} \right. \xrightarrow{\frac{1}{5}E_3 \rightarrow E_3} \sim \left\{ \begin{array}{l} x+2y+3z=6 \\ -7y-4z=2 \\ y+2z=4 \end{array} \right. \xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_3} \left\{ \begin{array}{l} x+2y+3z=6 \\ y+2z=4 \\ -7y-4z=2 \end{array} \right.$$

Si multiplicamos la ecuación E_2 por 7 y la sumamos a la ecuación E_3 (operación $7E_2 + E_3 \rightarrow E_3$) el sistema de ecuaciones queda triangulado.

$$\left\{ \begin{array}{l} x+2y+3z=6 \\ y+2z=4 \\ -7y-4z=2 \end{array} \right. \xrightarrow{7E_2 + E_3 \rightarrow E_3} \sim \left\{ \begin{array}{l} x+2y+3z=6 \\ y+2z=4 \\ 10z=30 \end{array} \right.,$$

por tanto, de la ecuación E_3 obtenemos $z=3$. Ahora $z=3$ en la ecuación E_2 , esto da $y+2(3)=4$ o $y=-2$. Sustituimos $z=3$ y $y=-2$ en la ecuación E_1 obtenemos $x+2(-2)+3(3)=6$ o $x=1$.

Como consecuencia de lo anterior, la solución del sistema de ecuaciones es la terna $x=1$, $y=-2$ y $z=3$.

e. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x+y-3z=5 \\ 3x-2y+2z=5 \\ 5x-3y-z=16 \end{array} \right.$$

triangulándolo.

La ecuación E_1 se multiplica por -1 se suma a la ecuación E_2 ($-1E_1 + E_2 \rightarrow E_2$) y después se intercambian las ecuaciones ($E_2 \leftrightarrow E_1$), se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x+y-3z=5 \\ 3x-2y+2z=5 \\ 5x-3y-z=16 \end{array} \right. \xrightarrow{-1E_1 + E_2 \rightarrow E_2} \sim \left\{ \begin{array}{l} 2x+y-3z=5 \\ x-3y+5z=0 \\ 5x-3y-z=16 \end{array} \right. \xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_1} \left\{ \begin{array}{l} x-3y+5z=0 \\ 2x+y-3z=5 \\ 5x-3y-z=16 \end{array} \right. \sim$$

Posteriormente multiplicamos por -2 la ecuación E_1 y la sumamos a la ecuación E_3 ; multiplicamos por -5 la E_1 y la sumamos a la ecuación E_3 (operaciones $-2E_1 + E_2 \rightarrow E_2$ y $-5E_1 + E_3 \rightarrow E_3$).

$$\left\{ \begin{array}{l} x-3y+5z=0 \\ 2x+y-3z=5 \\ 5x-3y-z=16 \end{array} \right. \xrightarrow{-2E_1 + E_2 \rightarrow E_2} \sim \left\{ \begin{array}{l} x-3y+5z=0 \\ 7y-13z=5 \\ 5x-3y-z=16 \end{array} \right. \xrightarrow{-5E_1 + E_3 \rightarrow E_3} \sim \left\{ \begin{array}{l} x-3y+5z=0 \\ 7y-13z=5 \\ 12y-26z=16 \end{array} \right.$$

Multiplicamos por $-\frac{1}{2}$ la ecuación E_3 y la sumamos a la ecuación E_2 (operación $-\frac{1}{2}E_3 + E_2 \rightarrow E_2$):

$$\left\{ \begin{array}{l} x-3y+5z=0 \\ 7y-13z=5 \\ 12y-26z=16 \end{array} \right. \xrightarrow{-\frac{1}{2}E_3 + E_2 \rightarrow E_2} \sim \left\{ \begin{array}{l} x-3y+5z=0 \\ y-0=-3 \\ 12y-26z=16 \end{array} \right.$$

Por tanto, $y=-3$. Sustituimos $y=-3$ en la ecuación E_3 y obtenemos $12(-3)-26z=16$, de donde $-26z=52$ o $z=-2$.

Finalmente sustituimos $z=-2$ y $y=-3$ en la ecuación 1, obtenemos $x-3(-3)+5(-2)=0$ o $x=1$.

La solución del sistema de ecuaciones es la terna $x=1$, $y=-3$ y $z=-2$.



El uso del “método de triangulación (triangulación también llamado método de Gauss)” en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales permite identificar su tipo de solución y por tanto clasificarlo como “de solución única, de solución múltiple o como inconsistente.

Si al aplicar el método de triangulación obtenemos:

- La identidad $0 \equiv 0$ (o cualquier otra que sea equivalente), entonces el sistema de ecuaciones lineales tiene solución múltiple.
- Una contradicción de la forma $0 = a$ (con $a \neq 0$) significa que el sistema es inconsistente y que carece de solución.

c. Una solución (o solución única).

◆ **EJEMPLO 4.16 (IDENTIFICACIÓN DEL TIPO DE SOLUCIÓN)**

a. Sea $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2x-3y+2z=14 \\ 3x+6y+9z=0 \end{cases}$, observe que:

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2x-3y+2z=14 \\ 3x+6y+9z=0 \end{cases} \xrightarrow{-2E_1+E_2 \rightarrow E_2} \begin{cases} x+2y+3z=6 \\ -7y-4z=2 \\ 3x+6y+9z=0 \end{cases} \xrightarrow{-3E_1+E_3 \rightarrow E_3} \begin{cases} x+2y+3z=6 \\ -7y-4z=2 \\ 0=-18 \end{cases},$$

de la expresión (contradicción) $0 = -18$ concluimos que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2x-3y+2z=14 \\ 3x+6y+9z=0 \end{cases} \text{ es inconsistente (no tiene solución).}$$

b. Sea $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x-3y+2z=4 \\ 3x-2y+3z=5 \end{cases}$, note que

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x-3y+2z=4 \\ 3x-2y+3z=5 \end{cases} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \begin{cases} x-3y+2z=4 \\ 2x+y+z=1 \\ 3x-2y+3z=5 \end{cases} \xrightarrow{-2E_1+E_2 \rightarrow E_2} \begin{cases} x-3y+2z=4 \\ 7y-3z=-7 \\ 3x-2y+3z=5 \end{cases} \xrightarrow{-3E_1+E_3 \rightarrow E_3} \begin{cases} x-3y+2z=4 \\ 7y-3z=-7 \\ 0=-18 \end{cases} \dots$$

$$\dots \sim \begin{cases} x-3y+2z=4 \\ 7y-3z=-7 \\ 7y-3z=-7 \end{cases} \xrightarrow{-E_2+E_3 \rightarrow E_3} \begin{cases} x-3y+2z=4 \\ 7y-3z=-7 \\ 0=0 \end{cases}.$$

La expresión (identidad) $0 = 0$ garantiza que el sistema

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x-3y+2z=4 \\ 3x-2y+3z=5 \end{cases}$$

tiene solución múltiple.



Utilizando sistemas de ecuaciones lineales tres por tres se pueden modelar y resolver diversos problemas, veamos algunas de ellas.

◆ **EJEMPLO 4.17**

Una compañía elabora tres tipos de sillas, digamos, de las clases A , B y C . En el proceso de fabricación se emplean tres máquinas, la máquina M_1 puede ser utilizada durante 17 horas, la máquina M_2 durante 13 horas y la máquina M_3 por 20 horas. Los requerimientos de tiempo de máquina para la construcción de cada una de las sillas las muestra la siguiente tabla:

Tipo	Tiempo de uso de M_1 (Horas)	Tiempo de uso de M_2 (Horas)	Tiempo de uso de M_3 (Horas)
A	1	2	3
B	3	1	2
C	2	1	1
Tiempo	17	13	20

¿Cuántas sillas de cada clase se pueden fabricar?

- Se desea determinar el número de sillas de cada clase que es posible fabricar, el número de sillas de cada clase es entero.
- Representemos por x , y y z las cantidades de sillas de las clases A , B y C respectivamente que es posible construir.

iii. Dado que la máquina M_1 puede utilizarse por 17 horas en la construcción de x , y y z sillas de las clases A , B y C respectivamente, entonces $1x + 3y + 2z = 17$ (la suma de los tiempos es igual al tiempo total).

Similarmente, la máquina M_2 se utiliza por 13 horas en la construcción de las sillas x , y y z , de las clases A , B y C respectivamente, entonces $2x + 1y + 1z = 13$.

La máquina M_3 se utiliza por 20 horas en la construcción de sillas x , y y z , de las clases A , B y C respectivamente, entonces $3x + 2y + 1z = 20$.

Por consiguiente, el modelo que describe el problema es $S: \begin{cases} x + 3y + 2z = 17 \\ 2x + y + z = 13 \\ 3x + 2y + z = 20 \end{cases}$.

iv. Si el lector resuelve el sistema de ecuaciones lineales obtendrá que $x=4$, $y=3$ y $z=2$, esto significa que, con los recursos antes señalados, es posible fabricar $x=4$ sillas del tipo A , $y=3$ sillas del tipo B y $z=2$ sillas del tipo C .

◆ EJEMPLO 4.18

Tres personas: A , B y C desayunaron en el puesto de la esquina, con la siguiente tabla se describe el consumo y el gasto de cada uno de ellos.

Persona	Tamales	Atoles	Tortas de tamal	Consumo
A	3	1	0	15
B	2	1	0	11
C	0	1	1	9

Construyamos el modelo con el que es posible obtener el precio unitario de cada alimento.

i. Deseamos determinar el modelo a partir del que es posible determinar los precios unitarios de los elementos.

ii. Representamos por x , y y z los precios de un tamal, un atole y una torta de tamal respectivamente, entonces

A pagó por 3 tamales, 1 atole, 0 tortas de tamal \$15.00, entonces $3x + 1y + 0z = 15$.

B pagó por 2 tamales, 1 atole, 0 tortas de tamal \$11.00, entonces $2x + 1y + 0z = 11$.

C pagó por 0 tamales, 1 atole, 1 torta de tamal \$9.00, entonces $0x + 1y + z = 9$.

iii. Por tanto, el modelo con el que es posible determinar los precios unitarios de los alimentos es el sistema de ecuaciones.

$$S: \begin{cases} 3x + y + 0z = 15 \\ 2x + y + 0z = 11 \\ 0x + y + z = 9 \end{cases}$$

iv. Si el lector resuelve el sistema de ecuaciones lineales obtendrá la solución $x=4$, $y=3$ y $z=6$, esto significa que los precios unitarios de los alimentos antes señalados son: $x=4$ tamales, $y=3$ los atoles y $z=6$ las tortas de tamal.

◆ EJEMPLO 4.19

Suponga que una economía consta de los sectores: "alimentos", "energéticos" y "servicios", y que el rendimiento de uno de ellos se distribuye entre los otros sectores de acuerdo a la tabla:

Rendimiento del sector			
Alimentos	Energéticos	Servicios	Adquisición
0	0.4	0.6	Alimentos
0.6	0.1	0.2	Energéticos
0.4	0.5	0.2	Servicios

En la tabla, las entradas de una columna son las fracciones de la producción total del sector. Por ejemplo, la primera columna de la tabla indica que la producción total del sector de alimentos se distribuye como sigue: 0% en alimentos, 60% en energéticos y 40% en servicios. Las fracciones decimales por columna suman 1, puesto que se toma en cuenta toda la producción. Determinemos un modelo que describa los precios de equilibrio que hacen que los ingresos de cada sector igualen a los gastos.

i. Construyamos un modelo a partir del que sea posible conocer los precios de equilibrio que hacen que los ingresos de cada sector igualen a los gastos de cada sector.

ii. Representamos por x , y y z los gastos anuales totales de producción de los sectores: alimentos, energéticos y servicios respectivamente.

iii. Para el sector de alimentos se tiene $x = 0.0x + 0.4y + 0.6z$, es decir, el sector alimentos invierte el 40% de sus recursos en energéticos y el 60% en servicios. Similarmente, para los otros dos sectores tenemos: $y = 0.6x + 0.1y + 0.2z$ y $z = 0.4x + 0.5y + 0.2z$, el conjunto de las tres ecuaciones anteriores es el sistema de ecuaciones

$$S: \begin{cases} x - 0.4y - 0.6z = 0 \\ -0.6x - 0.9y - 0.2z = 0 \\ -0.4x - 0.5y + 0.8z = 0 \end{cases}$$

Ejercicios 4.2

1. Resuelva triangulando.

a. $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ -3x + 6y = 4 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$

d. $\begin{cases} -4x + y = 0 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 4x + y = -2 \end{cases}$

f. $\begin{cases} -2x + y = -1 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$

h. $\begin{cases} -2x + y = 2 \\ 3x + \frac{1}{2}y = 2 \end{cases}$

i. $\begin{cases} -2y + x = 2 \\ 4x + 2y = 4 \end{cases}$

2. Resuelva triangulando.

a. $\begin{cases} 2x_1 = -1 \\ 3x_1 - 5x_2 = -8 \\ 3x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 13 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -6x = -2 \\ 3x - y = 1 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ -7x + 3y = 1 \\ -6z = 1 \end{cases}$

g. $\begin{cases} x + 4y + 3z = -1 \\ 2x - 3y - 2z = 1 \\ -x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$

h. $\begin{cases} 2x + y + z = 55 \\ x + 2y + z = 45 \\ x + y + 2z = 40 \end{cases}$

i. $\begin{cases} x + y + z = 45 \\ 13x + 12y + 8z = 430 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$

j. $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + 2b = 1 \\ a - c = 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 2x - z = 1 \\ 3x - y - 2z = 3 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ x + 2y + z = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - z = 1 \\ 5y + z = 0 \end{cases}$

k. $\begin{cases} r - 2s + t = 7 \\ s - 2t = -7 \\ 2r - 2s - t = 3 \end{cases}$

l. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + 3y + 2z = 1 \\ x - 6z = 1 \end{cases}$

m. $\begin{cases} m - 3p + 4q = 13 \\ 8m + p + q = -4 \\ 4m + 6p + 10q = 4 \end{cases}$

n. $\begin{cases} -3a + b - 2c = -11 \\ a + 5b - 4c = -3 \\ a - 3b - 2c = 5 \end{cases}$

3. Clasifique los sistemas de ecuaciones de acuerdo a su solución.

a. $\begin{cases} 2x - 4y = 3 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} a - 3b + c = 4 \\ -a + 2b - 5c = 3 \\ 5a - 13b + 13c = 8 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 7x + 2y = 2 \\ -7x - 2y = -2 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 4x + 5y - 4z = -3 \\ 3x - 4y + 2z = 8 \\ 10x - 3y = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ 3x - 3y - 3z = 0 \\ 4x + 8y - 2z = 3 \end{cases}$

4. Suponga que un estadio de fútbol tiene una capacidad de 7200 fanáticos y que se encuentra lleno durante la celebración de un juego entre los equipos A y B. Entre los espectadores, una cantidad de ellos son socios del equipo A, otro cantidad lo son del equipo B, y los restantes no son socios de estos equipos. A través de la venta de localidades se sabe:

i. No hay espectadores que sean socios de ambos equipos simultáneamente.

ii. Que asistieron el mismo número espectadores socios de los equipos A y B que aquellos que no son socios de esos equipos.

iii. Los socios del equipo A superan en 600 a los socios del equipo B.

¿Cuántos socios de cada equipo hay en el estadio?

5. Por tres objetos A, B y C se pagaron 117 pesos, se recibió un descuento del 10% sobre el precio total. El precio del objeto C es el doble que el del objeto A y el objeto C es 20 pesos más caro que el objeto B. ¿Cuál es el costo de cada objeto?

6. Julia, Clara y Miguel reparten hojas de propaganda. Clara reparte el 20% del total, Miguel reparte 100 hojas más que Julia. Entre Clara y Julia reparten 850 hojas. Plantee un sistema de ecuaciones que permita saber cuántas hojas reparte cada uno. Sabiendo que la empresa paga 1 céntimo por cada hoja repartida,

calcule el dinero que ha recibido cada uno de los tres repartidores.

7. Una fábrica produce tres tipos de herramientas: A , B y C . En la fábrica trabajan tres obreros, 8 horas diarias cada uno, además un revisor para comprobar las herramientas durante una hora diaria. Para fabricar una herramienta de tipo A se emplean 2 horas de mano de obra y se necesitan 6 minutos de revisión, para la fabricación de una de tipo B se emplean 4 horas de mano de obra y 4 minutos de revisión y para una de tipo C se necesitan una hora de mano de obra y 4 minutos de revisión. Por limitaciones en la producción, se deben producir exactamente 12 herramientas al día. Calcule el número de herramientas de cada tipo que se elaboran cada día en la fábrica.

8. Se tienen tres lingotes de diferentes aleaciones de tres metales A , B y C . El primer lingote tiene 20 gramos del metal A , 20 gramos del metal B y 60 del C . El segundo contiene 10 gramos del metal de A , 40 gramos del metal B y 50 gramos del metal C . El tercero contiene 20 gramos de A , 40 gramos del metal A y 40 gramos del metal C . Con estos tres lingotes se pretende elaborar un nuevo lingote que contenga 15 gramos del metal A , 35 gramos del metal B y 50 gramos del metal C . ¿Cuántos gramos se deben tomar de cada lingote?

9. En una oficina, los trabajadores consumen, semanalmente un total de 110 paletas (de los sabores vainilla, chocolate y naranja). El presupuesto destinado para tal consumo es 540 pesos y el precio de cada paleta es: 4 pesos la de vainilla, 5 pesos la de chocolate y 6 pesos la de naranja. Se sabe que entre paletas de chocolate y de naranja se consumen 20% más que paletas de vainilla. Determine el número de paletas de cada sabor que se consumen.

10. La suma de los dígitos de un número de tres cifras es 13. Si se intercambian las unidades y las centenas, el número disminuye en 198; y, si se intercambian las de la unidades y decenas, el número aumenta en 36. Determine el número.

11. El Globo S. A. elabora tres tipos de pasteles: nuez, fresa y amaretto. En el proceso de elaboración usa tres batidoras B_1 por 14 horas, B_2 por 8 horas y B_3 por 14 horas. Las necesidades de tiempo para la elaboración de los pasteles se muestran en la tabla.

Tipo	B_1	B_2	B_3
Nuez	1	0.3	1
Fresa	1.2	0.8	0.3
Amaretto	1.8	0.5	1
Total	14	8	14

Construya el modelo matemático que describa tal situación.

12. Bacardí S. A. envasa ron en botellas con capacidades de $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ y 1 litro. En el proceso de llenado la máquina M_1 puede ser utilizada por 18 horas, la máquina M_2 (que coloca las etiquetas) por 17 horas y la máquina M_3 (que tapa las botellas) por 20 horas. Los requerimientos de tiempo de uso de máquina para completar el proceso (llenado, etiquetado y tapado) se encuentran en la siguiente tabla.

Volumen	M_1	M_2	M_3
$\frac{1}{2}$	1 (seg)	1 (seg)	1 (seg)
$\frac{3}{4}$	2 (seg)	1 (seg)	1 (seg)
1	3 (seg)	1 (seg)	1 (seg)
Total	18 (hrs)	17 (hrs)	20 (hrs)

Construya el sistema de ecuaciones que describe la situación.

13. Pepe, Leo y Adán celebraron el viernes social en la cantina "El Nervión", la siguiente tabla muestra el consumo y los gastos de cada uno de ellos.

	RON	BRANDY	VODKA	GASTO
Pepe	3	5	4	203
Leo	2	4	3	221
Adán	2	7	4	312

Construya el sistema de ecuaciones que describa la situación.

14. En el balneario "Olimpico", los niños pagan al entrar 25 pesos, los adultos 50 pesos y las personas de la tercera edad 75 pesos. En un día específico, 1400 visitantes pagaron un total de 74000 pesos por concepto de entradas. El número de niños que asistieron más 250 iguala al resto de los visitantes. Construya el sistema de ecuaciones que describa la situación.

15. La economía de un restaurante consta de tres sectores: "alimentos", "bebidas" y "diversión", el rendimiento de cada sector se relaciona con los otros como lo ilustra la siguiente tabla

Distribución del rendimiento			
Alimentos	Bebidas	Diversión	
0.3	0.2	0.5	Alimentos
0.4	0.6	0.4	Bebidas
0.3	0.2	0.1	Diversión

En ella, las entradas de una columna son las fracciones del rendimiento total del sector. Construya el sistema de ecuaciones que describa la situación.

16 Determine el sistema de ecuaciones lineales de manera que la curva asociada a $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ contenga los puntos indicados (Sugerencia: sustituya las coordenadas de los puntos en la regla de correspondencia respectiva y luego ordene los sumandos de las ecuaciones).

a. $(-2, -37)$, $(-1, -11)$, $(0, -5)$ y $(2, 19)$.

b. $(0, 0)$, $(5, 0)$, $(-5, 0)$ y $(10, 10)$.

17. Pepe Botella acaba de regresar de Sudamérica, por concepto de hospedaje gastó 30 dólares diarios en Argentina, 20 dólares diarios en Paraguay y 20 dólares diarios en Chile. En comida gastó 20 dólares diarios en Argentina, 30 dólares diarios en Paraguay y 20 dólares diarios en Chile. Sus gastos en transporte fueron de 10 dólares en cada país. Pepe Botella asegura que gastó un total de 340 dólares en hospedaje, 320 dólares en comida y 140 dólares en transporte. ¿Es correcta su afirmación? Justifique su respuesta.

RESPUESTAS DE EJERCICIOS SELECCIONADOS

SECCIÓN 1.2

3. a. 12 . b. 45 . c. 81 . d. 180 . e. 108 . f. 210 . 4. Dentro de 380 días. 5. 24 metros, 5 y 4 trozos respectivamente. 6. a. 32 cm. b. 24 . 7. Cada 48 tiempos. 8. Cada 56 días. Ninguno de los dos. 9. 18 litros. 10. 4 litros 13 botes. 11. 60 botellas de leche. 12. A los 11 minutos. 13. 72 litros, 3 para A y 5 para B. 14. Cada 168 horas. 15. 120 . 16. a. 5 . b. 5 blancas, 3 azules y 18 rojas. 17. 9 azules y 11 rojos. 18. 8 veces. 19. 18 litros. 20. 41 días. 21. a. $\frac{11}{24}$. b. $\frac{11}{2}$. c. $-\frac{82}{63}$. d. $\frac{25}{144}$. e. $\frac{3}{20}$. f. $-\frac{613}{2772}$. 22. a. $\frac{7}{144}$. b. $\frac{69}{40}$. c. $\frac{1124}{125}$. d. $\frac{517}{3}$. e. $\frac{33}{50}$. f. $-\frac{360}{2201}$. g. $\frac{11}{2}$. h. $-\frac{14467}{4032}$. i. $-\frac{3}{2485}$. 23. a. $\frac{157}{30}$. b. $\frac{20}{3}$. c. $-\frac{500}{27}$. d. $\frac{211}{120}$. e. $\frac{245}{39}$. f. $-\frac{147}{13}$. g. $-\frac{675}{407}$. h. $\frac{256}{21}$. i. $\frac{31}{4}$. 24. a. $-\frac{25}{22}$. b. $\frac{205}{84}$. c. $\frac{50}{11}$. d. $-\frac{59}{60}$. e. $\frac{88}{25}$. f. $\frac{25}{33}$. g. $\frac{211}{92}$. h. $-\frac{119}{9}$. i. $-\frac{29}{40}$. j. $\frac{25}{9}$. k. $\frac{48}{11}$.

SECCIÓN 1.3

1. a. 256, -256, 1, 4, $\frac{25}{4}$ y $\frac{1}{16}$. b. $\frac{1}{4}$, 5, $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$. c. 16, $\frac{1}{64}$, 81 y 4 . d. 10000, $\frac{1}{512}$, $\frac{1}{4096}$, $\frac{256}{6561}$ y 1 . e. 1, 1 y 1 .
2. a. $\frac{4}{3}$. b. 142 . c. $\frac{104}{25}$. d. 1 . e. 1083 . f. 32805 . g. $\frac{2209}{8664}$. h. 101 . i. 32 . j. -3 . k. -231 .
3. a. $\frac{20736}{44521}$. b. $-\frac{63895024}{102515625}$. c. $\frac{1040}{961}$. d. $1.061334053 \times 10^{28}$. e. $-\frac{27}{250000}$. f. $\frac{1226}{1225}$.
4. a. $-\frac{5179}{9}$. b. $\frac{1946}{27}$. c. $\frac{144}{145}$. d. $\frac{841}{4096}$. e. $\frac{15625}{512}$. f. $-\frac{3}{4}$.
5. a. $\frac{19}{8}$. b. $\frac{5}{16}$. c. $\frac{27}{64}$. d. $\frac{23}{16}$. e. $\frac{25}{4}$. f. 64 . g. $\frac{4096}{27}$. h. $\frac{1}{5184}$.
6. a. $\frac{15}{256}$. b. $\frac{12167}{2592}$. c. $\frac{1}{9}$. d. $\frac{297}{900}$. e. $\frac{28}{289}$.
8. a. 27 . b. 27 . c. $\frac{2197}{1728}$. d. $\frac{11390625}{16777216}$. e. $\frac{1}{1048576}$. f. $\frac{4826809}{11390625}$. g. 10 .

151 RESPUESTAS A EJERCICIOS SELECCIONADOS

9. a. 2 . b. 18 . c. 10 . d. 9 . e. 10000 . f. $\frac{9}{512}$. g. $\frac{25}{512}$. 10. a. $\frac{13}{6}$. b. $-\frac{7}{4}$. c. $\frac{31}{7}$. d. $\frac{18}{19}$. e. $-\frac{5}{4}$.
f. $-\frac{45}{29}$.
11. a. $-\frac{9}{2}$. b. $-\frac{1}{7}$. c. - 905 .

SECCIÓN 1.4

1. a. 38 . b. 70 . c. 52 . 2. 220 asistentes. 3. a. 12 . b. 22 . 4. a. 138 . b. 318 . c. 112 . d. 456 . 5. a. 130 . b. 50 . c. 60 . d. 36 . 6. a. 31 . b. 46 . c. 61 . 7. a. 63 . b. 1023 . 8. a. 364 . b. 1093 . 9. a. $3 \cdot 4^5$. b. $3 \cdot 4^7$. 10. a. 81 . b. 243 . c. 729 . 11. a. 32 . b. 40 . 12. a. i. 1024 , ii. 256 . b. i. 4096 , ii. 1024 . 13. a. 2560 . b. 5120 pesos. 14. a. 480 . b. 24 kilogramos. 15. a. 0.60π metros. b. 300π metros. 16. 300 000 pesos. 17. a. 190 . b. 1140 metros cuadrados. c. 28500 pesos. 19. 2.485485 . b. 101.6 . c. 0.00003937 . d. 3.6 . e. 17.6 . f. 930.002 . g. 0.418064 . h. 0.882867 . i. 54.9923 . j. 6.61387 . k. 0.0617294 . 20. a. 0.00001 . b. 3.28 . c. 299 792.36 . d. 250 . e. 3.05 . f. 10080 . g. 0.14 . h. 1003.35 . 21. a. $15 \cdot \frac{1}{5} = (15)(0.2)$. b. $17 \cdot \frac{1}{2} = (17)(0.5)$. c. $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} = (0.25)(3)(0.125)$. d. $\frac{1}{5} = (0.2)(0.2)$. 23. a. 16.6667 . b. 54 . c. 1.6667 . d. 80 . e. 0.0005 . f. $\frac{1}{8}$. 24. a. 28 por ciento. b. 37 por ciento. c. 44 por ciento. d. 44 por ciento. e. 32 por ciento. f. 116 por ciento. g. 116 por ciento. h. 32.25 por ciento. 25. a. 216 pesos. b. 504 pesos. c. 64 por ciento. d. 168 pesos. e. 360 pesos. f. 32 por ciento, 3168 pesos. 26. a. Segunda opción. b. Primera opción. c. Segunda opción. d. Segunda opción. e. Primera opción. f. Primera opción. g. Segunda opción. 27. a. 210 . b. 2760 . 28. a. 2860 . b. 47140 . c. 960 .

SECCIÓN 1.5

1. a. $2n$. b. $2n - 1$. c. $\frac{n}{n+1}$. d. $(-1)^n(2n+1)$. 4. b. $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

5.

NOMBRE	"FÓRMULA"	LOS PRIMEROS DIEZ	SUCESIÓN DE DIFERENCIAS (POSTERIOR MENOS ANTERIOR)
TRIANGULAR (3 lados)	$\frac{1}{2}n(1n+1)$	1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
CUADRADO (4 lados)	$\frac{1}{2}n(2n-0)$	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19
PENTAGONAL (5 lados)	$\frac{1}{2}n(3n-1)$	1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28
HEXAGONAL (6 lados)	$\frac{1}{2}n(4n-2)$	1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190	1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37
HEPTAGONAL (7 lados)	$\frac{1}{2}n(5n-3)$	1, 7, 18, 34, 55, 81, 112, 148, 189, 235	1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46
OCTOGONAL (8 lados)	$\frac{1}{2}n(6n-4)$	1, 8, 21, 40, 65, 96, 133, 176, 225, 279	1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55
ENEAGONAL (9 lados)	$\frac{1}{2}n(7n-5)$	1, 9, 24, 46, 75, 111, 154, 204, 260, 321	1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57, 64

DECAGONAL (10 lados)	$\frac{1}{2}n(8n - 6)$	1, 10, 27, 52, 85, 126, 175, 232	1, 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57
ENDECAGONAL (11 lados)	$\frac{1}{2}n(9n - 7)$	1, 11, 30, 58, 95, 141, 196, 260	1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64
DODECAGONAL (12 lados)	$\frac{1}{2}n(10n - 8)$	1, 12, 33, 64, 105, 156, 217, 288	1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71
TRIDECAGONAL (13 lados)	$\frac{1}{2}n(11n - 9)$	1, 13, 36, 70, 115, 171, 238, 316	1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78
TETRADECAGONAL (14 lados)	$\frac{1}{2}n(12n - 1)$	1, 14, 39, 76, 125, 186, 259, 344	1, 13, 25, 37, 49, 61, 73, 85

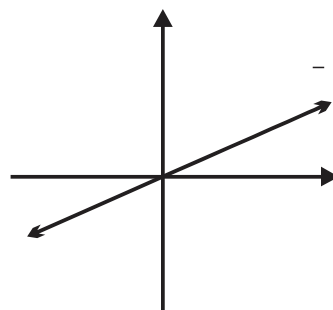
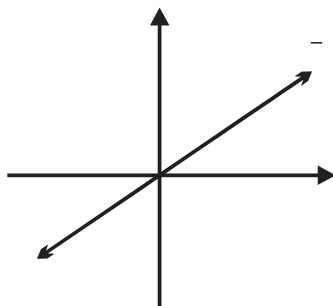
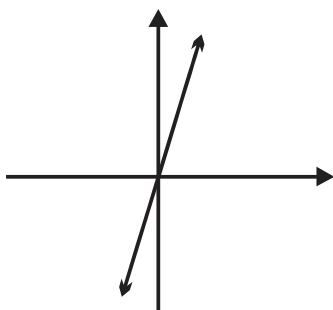
7. a. 2^n . b. $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. 8. n^2 . 9. a. $\frac{1}{2}n(n-1)$. b. $\frac{1}{2}n(n-1)$. c. $\frac{1}{2}n(n-3)$. 10. $\frac{1}{2}n(n+1)$. 11. $3n+2$.

12. $3n+1$.

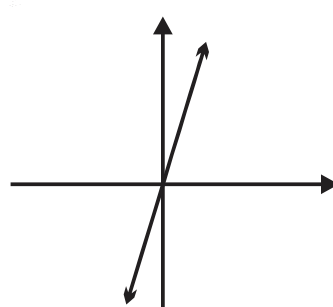
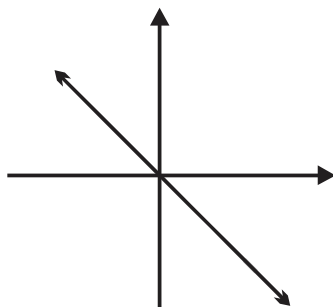
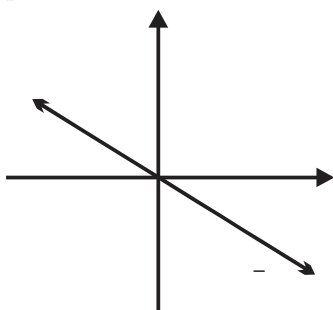
13. a. $2n-1$ y $4n-3$. b. n^2 , $2n^2-n$. 14. a. $3(4^n)$. b. $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. 15. a. 8^{n-1} . b. $\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

SECCIÓN 2.1

1. a. i. $k=3$. ii. $y=3x$ y $x=\frac{1}{3}y$. 1. b. i. $k=\frac{2}{3}$. ii. $y=\frac{2}{3}x$ y $x=\frac{3}{2}y$. 1. c. i. $k=\frac{1}{2}$. ii. $y=\frac{1}{2}x$ y $x=2y$.



1. d. i. $k=-\frac{2}{3}$. ii. $y=-\frac{2}{3}x$ y $x=-\frac{3}{2}y$. 1. e. i. $k=-1$. ii. $y=-x$ y $x=-y$. 1. f. i. $k=3$. ii. $y=3x$ y $x=\frac{1}{3}y$.



2. a. $k=2$. b. $k=\frac{2}{9}$. c. $y=45.5$. d. $x=0.7$.

3. a. $x_1=30$. b. $y_2=-\frac{3}{32}$. c. $x_1=-\frac{5}{36}$. d. $y=-\frac{1}{48}$.

153 RESPUESTAS A EJERCICIOS SELECCIONADOS

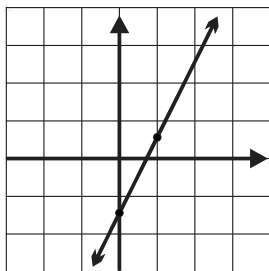
6. a. Se duplica. b. Se reduce a la tercera parte. c. Se reduce a la mitad. d. Se reduce a la tercera parte.
7. a. $D(p) = 4p$, p no negativo y acotado. b. 352 miligramos.
8. a. $D(p) = 4p$, p no negativo y acotado. b. 352 miligramos.
9. a. $l(m) = \frac{1}{4}m$, m no negativa y acotada. b. 48 gramos. c. 2 centímetros.
10. a. $U(n) = 180n$, n entero no negativo y acotado. b. 22500 pesos. c. $n(U) = \frac{1}{180}U$, U no negativa y acotada.
11. a. $s(a) = \frac{3}{2}a$, a no negativo y par. b. 150.
12. a. $D(p) = 21p$, p no negativo y acotado. b. $p(D) = \frac{1}{21}D$, D no negativo y acotado.
13. a. Si $x = k$ es constante, entonces $A(y) = ky$. Si $y = k$ es constante, entonces $A(x) = kx$. b. Si $\frac{1}{3}\pi r^2 = k$ es constante, entonces $V(h) = kh$. c. Si $\pi r^2 = k$ es constante, entonces $V(h) = kh$. d. Si $\frac{1}{2}r^2 = k$ es constante, entonces $A(\theta) = k\theta$.
14. a. $s(v) = \frac{120}{5}v$, v no negativo y acotado. b. $\frac{25}{3}$ litros. c. 7680 gramos.
15. a. $r(t) = \frac{13}{10}t$. b. En $\frac{2150}{13}$ segundos. c. 390.
16. a. $m(a) = 4a$. b. 12.5 kilogramos. c. 152 kilogramos.
17. a. $d(c) = 12c$. b. En $\frac{2150}{13}$ segundos. c. 95.83 litros.

SECCIÓN 2.2

1. a. $y(x) = -2x - 3$. b. $y(x) = -\frac{2}{3}x - 2$. c. $y(x) = \frac{2}{5}x + 4$. d. $y(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{7}$.
2. a. $y(x) = -1$. b. $y(x) = 7x + 18$. c. $y(x) = -\frac{25}{12}x + \frac{19}{8}$. d. $y(x) = -\frac{2}{27}x - \frac{28}{27}$.
3. a. $y(x) = 2x - 3$. b. $y(x) = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}$. c. $y(x) = -\frac{5}{6}x + \frac{1}{3}$. d. $y(x) = -\frac{1}{8}x + \frac{5}{4}$.
6. a. Sí. b. No. c. Sí.
7. a. $y(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$. b. $y(x) = x - 2$. c. $y(x) = -x + 1$. d. $y(x) = \frac{1}{2}x - 1$. e. $y(x) = -\frac{7}{2}x + 2$.

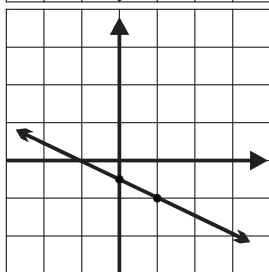
9.
a.

x	$y(x)$
0	-3
2	1



b.

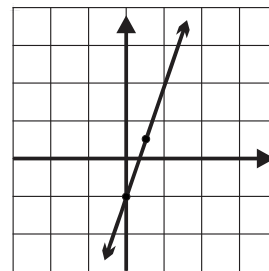
x	$y(x)$
0	1
2	-2



10.

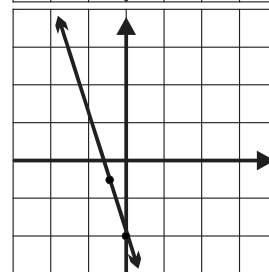
a.

x	$y(x)$
0	-2
1	1

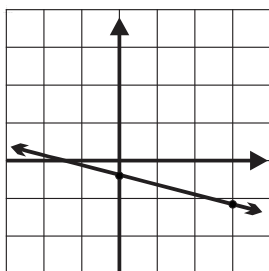


b.

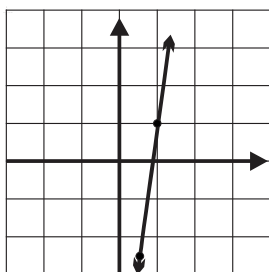
x	$y(x)$
0	-4
-1	-1



c. $y(x) = -\frac{1}{5}x - \frac{4}{5}$



d. $y(x) = 7x - 12$



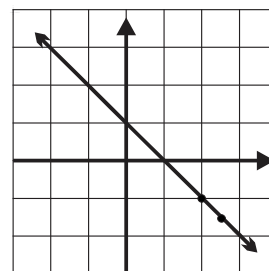
e. $y(x) = -\frac{3}{4}x + 1$

x	$y(x)$
0	1
4	-2

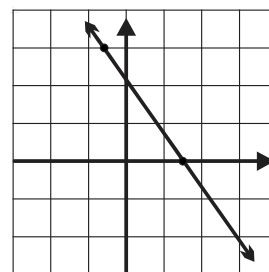
f. $y(x) = \frac{1}{2}x - 1$

x	$y(x)$
0	-1
2	0

c. $y(x) = -x + 2$



d. $y(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$



e. $y(x) = -\frac{4}{9}x + \frac{38}{9}$

x	$y(x)$
-4	6
5	2

f. $y(x) = \frac{5}{4}x + 1$

x	$y(x)$
4	6
-4	-4

11. a. $y_3(t) = 4t + 2$. b. $y_2(t) = -t + 4$.

12. a. i. Asignaciones a t mayores a un medio. ii. Asignaciones a t menores a dos.

iii. Asignaciones a t mayores a menos doce. iv. Asignaciones a t menores a menos ocho tercios.

b. i. Asignaciones a t menores a un medio. ii. Asignaciones a t mayores a dos.

iii. Asignaciones a t menores a menos doce. iv. Asignaciones a t mayores a menos ocho tercios.

13. a. $s(n) = 5040 + 780n$. b. $s(5) = 8940$, $s(8.3) = 11514$ y $s(27) = 26100$. c. $t_{21,500} \approx 21.1021$ años, $t_{18,500} \approx 17.2564$ años y $t_{19,300} \approx 15.7179$ años

14. a. $f(T) = -490 + 20T$. b. $f(27) = 50$. c. $T(f) = \frac{490}{20} + \frac{1}{20}f$.

15. a. $c(n) = \frac{10}{3} + \frac{5}{3}n$. b. $c(27) = 48.\bar{3}$ pesos. c. $c(0) = 3.\bar{3}$ pesos.

16. a. $p(t) = 200000 - 10000t$, con $0 \leq t \leq 15$. b. $p(7) = 130000$. c. $t_{100000} = 1$ año.

17. a. $l(n) = 5 + 2n$, con $0 \leq t \leq 150$. b. $l(23) = 51$ centímetros. c. $n = 50$ días.

18. a. $s(p) = 80 + 0.08p$. b. $s(12000) = 1760$ pesos. c. $n = 2125$ pesos.

19. a. $n(t) = 40t + 100$. b. $t = 247.5$ segundos. c. La pendiente indica que el contenedor se llena a razón de 40 centímetros cúbicos por segundo. La condición inicial señala la cantidad de líquido en el contenedor.

20. $f(x) = \frac{1}{20}x + 10$.

21. $f(t) = \frac{25}{2}t + 25$.

22. a. $f(p) = 250p + 12$. c. 199.50 pesos. d. 320 gramos.

23. b. $T(h) = -\frac{1}{80}h + 10$. c. $h = 1800$ metros.

24. a. $s(x) = 30x + 150$. b. No. c. 25 .

25. a. $p(t) = 30t + 0.5$ con $0 \leq t \leq 24$. b. 715 kilogramos

26. a. $c(t) = 6 + 8t$ con $t > 0$ y acotado. b. $c(3.4) = 6 + 8(3.4) = 33.2$ pesos. c. $t = 3.625$ horas.

27. a. $p(x) = 5.20 + 3.50x$ con $x > 0$ y acotada. b. 85.7 pesos. c. $x \approx 22.23$ kilómetros.

28. a. $s(n) = 60 + 0.50n$ con $n \in \mathbb{N}$. b. 96.50 pesos. c. $n = 100$ tamales.

SECCIÓN 3.1

1. a. $x = 30$. b. $x = \frac{5}{3}$. c. $x = 1$. d. $x = \frac{11}{7}$. e. $x = \frac{25}{14}$. f. $x = \frac{1}{2}$.

2. a. $x = \frac{3}{4}$. b. $x = 11$. c. $x = \frac{50}{3}$. d. $x = \frac{16}{15}$. e. $x = -\frac{7}{17}$. f. $y = -\frac{23}{4}$.

3. a. $x = \frac{64}{5}$. b. $x = -\frac{48}{7}$. c. $x = \frac{1}{3}$. d. $x = \frac{32}{9}$. e. $x = -\frac{10}{19}$. f. $a = -\frac{42}{23}$.

4. a. $x = -\frac{14}{5}$. b. $x = -98$. c. $x = \frac{45}{14}$. d. $x = 5$. e. $x = \frac{12}{7}$. f. $w = \frac{182}{29}$.

5. a. $x = \frac{32}{13}$. b. $x = -4$. c. $x = -1$. d. $x = -\frac{3}{5}$. e. $x = -\frac{163}{96}$. f. $g = \frac{86}{5}$.

6. a. $x = -\frac{2}{53}$. b. $x = -\frac{37}{34}$. c. $x \approx -0.57534$. d. $x = -\frac{64}{19}$. e. $x = -110$. f. $g = \frac{500}{203}$.

7. a. $x = 28$. b. $y = \frac{125}{198}$. c. $y = \frac{41}{59}$. d. $x = \frac{15}{34}$. e. $x \approx 1.30392$. f. $w \approx -13.56667$. g. $x \approx 8.03478$.

h. $x \approx -5.99149$. i. $w = 7.2$.

j. $x = \frac{1}{4}$. k. $x \approx 0.70385$. l. $x \approx 6.51935$.

8. a. $x = \frac{13}{5}$. b. $x = 0$. c. $x = 164$. d. $x = \frac{23}{12}$. e. $x = -\frac{7}{4}$. f. $g = \frac{38}{13}$.

9. a. $x = -3$. b. $x = \frac{8}{11}$. c. $x = \frac{9}{5}$. d. $x = -\frac{3}{5}$. e. $x = -5$. f. $x = -43$. g. $a = 4$. h. $b = 4$. i. $b = -\frac{1}{2}$. j. Sin

solución. k. $p = -\frac{22}{5}$.

l. $x = \frac{13}{2}$.

10. a. $a = \frac{17}{5}$. b. $b = \frac{3}{10}$. c. $r = \frac{21}{4}$. d. $t = \frac{5}{6}$. e. $p = \frac{28}{5}$. f. $x = \frac{113}{48}$. g. $a = \frac{3}{8}$. h. $b = -\frac{6}{5}$. i. $c = -\frac{3}{10}$. j.

Sin solución.

k. $p = \frac{46}{61}$. l. $p = \frac{51}{64}$.

11. a. $a = \frac{4}{7}$. b. $b = -\frac{15}{2}$. c. $a = \frac{12}{19}$. d. $a = \frac{130}{7}$. e. $e = -\frac{12}{5}$. f. $e = -\frac{85}{28}$. g. $e = \frac{29}{28}$. h. $x = -\frac{5}{2}$. i. Sin
 solución. j. $b = -\frac{4}{5}$. k. $a \approx -10.96355$. l. $e = \frac{17}{11}$. m. $e = -\frac{159}{8}$. n. $b = -\frac{4}{5}$. o. $r = \frac{607}{59}$. p. $s = \frac{59}{4}$. q.
 $c = \frac{108}{5}$. r. $c = \frac{85}{3}$.
 12. a. $b = \frac{2A}{h}$. b. $f = \frac{9}{5}c + 32$. c. $b = \frac{2A}{h} - B$. d. $h = \frac{2A}{B+b}$. e. $h = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r}$. e. $r_2 = \frac{r \cdot r_1}{r + r_1}$.

SECCIÓN 3.2

1. 50 y 52 . 2. 104 y 106 . 3. 4 y 28 . 4. 53 y 54 . 5. 17 y 19 . 6. 5 y 15 . 7. 17 y 23 . 8. 25 y
 100 . 9. $d = \frac{79}{8}$. 10. 10 y 50 kilogramos. 11. 40 bicicletas y 70 autos. 12. Niños 10 , Niñas 20 , Adultos 5 .
 13. Hombres adultos 120 , mujeres adultas 30 y niños 14 . 14. 24 kilogramos. 15. 3 kilogramos del 80 % y 2
 kilogramos del 95 % . 16. 120 y 80 litros. 17. 48 kilogramos. 18. 8 litros. 19. 150 del de 20 pesos por kilogramo
 y 250 kilogramos del de 8 pesos por kilogramo. 20. 25 kilogramos del de 45 pesos por kilogramo y 15 kilogramos
 del de 85 pesos por kilogramo. 21. 1890 . 22. 9 y 75 . 23. 15 pesos. 24. 6 de dos pesos y 9 de cinco pesos. 25.
 15 de cinco centavos y 9 de veinte centavos. 26. 14 de cincuenta pesos y 15 de veinte pesos. 27. 30 de cincuenta
 pesos y 80 de veinte pesos. 28. 15 de 5 pesos y 35 de 20 pesos. 29. 10 de un peso y 15 de dos pesos. 30. 3
 de tequila y 5 de ron. 31. 9 gansos y 5 perros. 34. 18 correctamente y 12 incorrectamente. 35. 21 y 42 horas.
 36. 7.5 horas. 37. 15 horas. 38. 27 y 54 horas. 39. 22 horas. 40. 12 y 28. 41. 7 y 20 .
 42. 20 y 45 . 43. Pánfilo 8 años y Diana 15 . 44. Mariana 38 años y Luis 8 . 45. 12 , 30 y 60 . 46. 17 años.
 47. 17 años.
 48. 6 años. 49. 11 , 14 y 17 años. 50. 3 y 8 . 51. 16 y 64 .
 52. 2 : 27 : 16 . 53. 12 : 5 : 27 . 54. a. 2 horas. b. A las 11 de la mañana. c. 180 y 120 Kilómetros. 55. a. 6
 horas. b. 3 de la tarde c. 540 kilómetros y 360 kilómetros. 56. a. 12 horas. b. 1080 kilómetros. 57. a. 0.5 horas.
 b. 0.25 horas. 58. a. El tiempo que tardan en encontrarse es de 16 horas. b. 240 y 280 kilómetros.

SECCIÓN 4.1

1. a. $x = 5$ e $y = 1$. b. $x = -2$ e $y = 3$. c. $x = \frac{11}{9}$ e $y = -\frac{19}{3}$. d. $x = \frac{11}{9}$ e $y = -\frac{19}{3}$.
 6. a. $x = 5$ e $y = 1$. b. $x = -2$ e $y = 3$. c. $x = \frac{11}{9}$ e $y = -\frac{19}{3}$. d. $x = \frac{11}{2}$ e $y = \frac{21}{10}$. e. $p = -3$ y
 $q = -18$. f. $a = \frac{13}{5}$ y $b = \frac{14}{5}$.
 g. $p = \frac{19}{23}$ y $q = -\frac{3}{23}$. h. $s = 15$ y $w = \frac{22}{3}$. i. $x = \frac{20}{17}$ e $y = \frac{63}{34}$. j. $x = -1$ e $y = -6$. k. $a = 1$ y $b = -1$
 . l. $x = 9$ e $y = \frac{7}{5}$. m. $p = \frac{6}{11}$ y $q = \frac{26}{11}$. n. $a = \frac{13}{5}$ y $b = \frac{14}{5}$. o. $\begin{cases} 2 = r - 3s \\ 7 - 5r = 2s \end{cases}$. $r = \frac{25}{17}$ y $s = -\frac{3}{17}$. p.
 $s = -\frac{2}{5}$ y $w = \frac{4}{5}$. q. $x = -\frac{20}{3}$ e $y = \frac{29}{18}$. r. $x = \frac{23}{2}$ e $y = 22$. s. $a = \frac{32}{241}$ y $b = -\frac{480}{241}$. t. $x = -\frac{165}{128}$ e
 $y = \frac{45}{64}$. u. $p \approx 0.6721311$ e $q \approx -1.04918$. v. $a \approx 0.5585216$ e $b = -1.252567$. w.
 $r \approx -0.1238671$ e $s \approx 2.077039$. x. $s \approx -0.07130435$ e $w \approx -0.01391304$.
 7. a. $x = 5$ e $y = 1$. b. $x = -2$ e $y = 3$. c. $x = \frac{11}{9}$ e $y = -\frac{19}{3}$. d. $x = \frac{11}{2}$ e $y = \frac{21}{10}$. e. $p = -3$ y
 $q = -18$. f. $a = \frac{13}{5}$ y $b = \frac{14}{5}$.

157 RESPUESTAS A EJERCICIOS SELECCIONADOS

g. $p = \frac{19}{23}$ y $q = -\frac{3}{23}$. h. $s = 15$ y $w = \frac{22}{3}$. i. $x = \frac{20}{17}$ e $y = \frac{63}{34}$. j. $x = -1$ e $y = -6$. k. $a = 1$ y $b = -1$. l. $x = 9$ e $y = \frac{7}{5}$.

m. $p = \frac{6}{11}$ y $q = \frac{26}{11}$. n. $a = \frac{13}{5}$ y $b = \frac{14}{5}$. o. $r = \frac{25}{17}$ y $s = -\frac{3}{17}$. p. $s = -\frac{2}{5}$ y $w = \frac{4}{5}$. q. $x = -\frac{20}{3}$ e $y = \frac{29}{18}$. r. $x = \frac{23}{2}$ e $y = 22$.

s. $a = \frac{32}{241}$ y $b = -\frac{480}{241}$. t. $x = -\frac{165}{128}$ e $y = \frac{45}{64}$. u. $p \approx 0.6721311$ e $q \approx -1.04918$. v. $a \approx 0.5585216$ y $b \approx -1.252567$. w. $r \approx -0.1238671$ y $s \approx 2.077039$. x. $s \approx -0.07130435$ y $w \approx -0.01391304$.

8. a. $x = 1$ e $y = -2$. b. $x = -\frac{1}{5}$ e $y = \frac{26}{5}$. c. $x = \frac{75}{31}$ e $y = \frac{79}{31}$. d. $x = \frac{44}{9}$ e $y = \frac{16}{9}$. e. $p = \frac{7}{11}$ y $q = -\frac{46}{11}$. f. $a = -\frac{33}{43}$ y $b = -\frac{49}{335}$. g. $p = \frac{19}{23}$ y $q = -\frac{3}{23}$. h. $s = -\frac{54}{41}$ y $w = -\frac{17}{41}$. i. $x = \frac{1}{4}$ e $y = \frac{21}{8}$. j. $x = \frac{15}{11}$ e $y = -\frac{2}{11}$. k. $a = 9$ y $b = \frac{41}{3}$. l. $x = \frac{5}{8}$ e $y = \frac{1}{2}$. m. $p = -\frac{5}{9}$ y $q = -\frac{1}{3}$. n. $a = -\frac{13}{5}$ y $b = \frac{9}{5}$. o. $r = \frac{5}{6}$ y $s = \frac{11}{12}$. p. $s = \frac{17}{23}$ y $w = \frac{25}{69}$. q. $x = -\frac{15}{37}$ e $y = \frac{12}{37}$. r. $x = -\frac{32}{5}$ e $y = -\frac{76}{5}$. s. $a = \frac{2}{17}$ y $b = -\frac{15}{34}$. t. $x = -\frac{21}{22}$ e $y = \frac{8}{11}$.

9. a. Incompatible. b. Incompatible. c. Incompatible. d. $x = 4$ e $y = \frac{8}{5}$. e. $p = \frac{7}{11}$ y $q = -\frac{46}{11}$. f. Solución múltiple. g. Incompatible. h. Solución múltiple. i. $x = \frac{11}{8}$ e $y = \frac{15}{16}$. j. Solución múltiple. k. Incompatible. l. $x = \frac{5}{16}$ e $y = -\frac{3}{4}$.

13. 37. 14. 34 y 16. 15. 39. 16. 1.5 horas, 135 y 120 kilómetros. 17. 3 horas, 210 y 150 kilómetros. 18. 100 kilómetros. 19. 20 y 35 centavos. 20. 28 y 16 años. 21. 30 y 45 años. 22. 32 pesos el kilogramo de manzanas y 7 pesos el kilogramo de plátanos. 23. 50 centavos y trae 24. 24. 18 y 32. 25. 70 y 90 pesos. 26. 24 autos y 5 motos. 27. 13 sencillas y 37 dobles. 28. 6 incorrectas y 10 correctas. 29. 240 y 265 pesos. 30. 6 niños y 500 pesos. 31. 12 y 14 litros por minuto. 32. 16 alumnas y 20 alumnos.

SECCIÓN 4.2

1. a. $x = 2$, $y = -2$. b. $x = 0$, $y = \frac{2}{3}$. c. $x = -2$, $y = 4$. d. $x = \frac{2}{9}$, $y = \frac{26}{9}$. e. $x = -2$, $y = 6$. f. $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$. g. $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$. h. $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{5}{2}$. i. $x = \frac{6}{5}$, $y = -\frac{2}{5}$. 2. a. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{13}{10}$, $x_3 = -\frac{119}{60}$. b. $x = \frac{1}{3}$, $y = 0$, $z = \frac{11}{3}$. c. $x = \frac{3}{26}$, $y = \frac{47}{78}$, $z = -\frac{1}{6}$. d. $x = 3$, $y = -4$, $z = 5$. e. $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$. f. $x = 3$, $y = -1$, $z = 5$. g. $x = 0$, $y = -1$, $z = 1$. h. $x = 20$, $y = 10$, $z = 5$. i. $x = 10$, $y = 5$, $z = 30$. j. $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$. k. $r = 2$, $s = -1$, $t = 3$. l. $x = \frac{13}{25}$, $y = \frac{14}{25}$, $z = -\frac{2}{25}$. m. $m = -\frac{8}{17}$, $p = -\frac{35}{17}$, $q = \frac{31}{17}$. n. $a = \frac{31}{10}$, $b = -\frac{9}{10}$, $c = \frac{2}{5}$. 3. a. Incompatible. b. Solución múltiple. c. Solución única. d. Incompatible. e. Solución múltiple. f. Incompatible. 4. $x = 1830$, $y = 1770$ y $z = 3600$. 5. $x = 30$, $y = 40$ y $z = 60$. 6. $x = 550$, $y = 300$ y $z = 650$. 7. $x = 6$, $y = 2$ y $z = 4$. 8. 25 gramos del primer lingote, 50 gramos del segundo y 25 gramos del tercero. 9. 50 paletas de vainilla, 20 de chocolate y 40 de naranja. 10. El número es 715.

11.
$$\begin{cases} x + 1.2y + 1.8z = 14 \\ 0.3x + 0.8y + 0.5z = 8 \\ x + 0.3y + z = 14 \end{cases}$$
12.
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1080 \\ x + y + z = 1020 \\ x + y + z = 1200 \end{cases}$$
13.
$$\begin{cases} 3x + 5y + 4z = 203 \\ 2x + 4y + 3z = 221 \\ 2x + 7y + 4z = 312 \end{cases}$$
14.
$$\begin{cases} x + y + z = 1400 \\ 25x + 50y + 75z = 74000 \\ x - y - z = -250 \end{cases}$$
16. a. $f(x) = 3x^3 - x^2 + 2x - 5$. b. $f(x) = \frac{1}{75}x^3 - \frac{1}{3}x - 5$.