U N A M

Colegio de Ciencias y Humanidades
Plantel Oriente

“GUÍA PARA EL PROFESOR QUE IMPARTE MATEMÁTICAS IV”

AUTORES:

PANTALEÓN GÓMEZ CARRANZA
FRANCISCO HERNÁNDEZ REYES
FERMAN ARELLANO CABEZAS
OSCAR LÓPEZ GARCÍA
JOSÉ ADOLFO RENDÓN ORTÍZ
FERNANDO TOVAR CHÁVEZ
MIGUEL ÁNGEL RODRÍGUEZ CHÁVEZ
JESÚS LECHUGA ANAYA
MAURICIO ENRIQUE RODRÍGUEZ PÉREZ
HÉCTOR GONZÁLEZ PÉREZ
ALDO NICOLÁS ARENAS GARCÍA

Ciclo Escolar 2018 - 2019

COORDINACIÓN DE:

PANTALEÓN GÓMEZ CARRANZA
MIGUEL ÁNGEL RODRÍGUEZ CHÁVEZ

Presentación

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en el Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM, constituye hoy en día uno de los principales retos para sus docentes. Los indicadores educativos, existentes sobre esta materia muestran la necesidad de mejorar los mismos y procurar que el proceso educativo conlleve a desarrollar en el estudiante un proceso reflexivo, práctico, sistemático y contextualizado con las características del perfil del egresado que señalan los planes y programas de estudio respectivos. En virtud de lo anterior y como una contribución a la solución de la problemática que corresponde al desarrollo de los aprendizajes inmersos en el programa de la asignatura de Matemáticas IV, los integrantes del grupo de trabajo "Elaboración de materiales para cursos ordinarios y de nivelación académica", elaboramos y presentamos el documento "Guía para el Profesor de Matemáticas IV".

Poner descripción según el protocolo.
"GUÍA PARA EL PROFESOR. RUBRO III-C. Son los documentos emanados de un grupo de trabajo, que sirven para orientar y facilitar el desarrollo de un curso de acuerdo con el programa de estudios de las asignaturas y su enfoque, cubriendo todas las unidades del curso con: a) introducción, b) presentación por unidad, indicando los conceptos clave, c) sugerencias de estrategias didácticas, d) actividades de enseñanza aprendizaje, e) materiales de apoyo, f) identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución, g) bibliografía básica y complementaria, y cualquier otro elemento que facilite el impartir la asignatura. Debe estar revisada y avalada por un comité de pares y publicada para su uso".

En consecuencia, cada unidad está estructurada de la siguiente forma:
a. Una **sección con el número cero.** En éstas secciones incluimos los propósitos, la introducción y la presentación por unidad; los posibles puntos problemáticos con las respectivas sugerencias de apoyo para su resolución; contiene una propuesta de tiempo requerido para su desarrollo; la bibliografía básica y la bibliografía complementaria con diversos sitios web. Incluye los posibles dispositivos a utilizar, así como el software de apoyo. En la parte final de la sección se encuentra un diagrama que indica la forma disciplinaria en que fue estructurada la sección.
b. Dos o más secciones de desarrollo de aprendizajes y de contenidos temáticos con:
Conceptos clave.
Tiempo estimado.
Procesos y algoritmos básicos.
Desarrollo en tres columnas con las siguientes características:
i. La columnna 1. Observaciones y sugerencias; contiene indicaciones de apoyo en el desarrollo de la sección.
ii. La columnna 2. Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo. Contiene el desarrollo de los aprendizajes y contenidos temáticos del plan de estudios de la asignatura y son los materiales que el docente puede implementar en el desarrollo de su curso.
iii. La columnna 3. Señala las dificultades con que el docente puede toparse en el desarrollo de su docencia
iv. Ejercicios y actividades adicionales. Son actividades que el docente puede implementar con el objeto de reforzar los aprendizajes alcanzados por los estudiantes, o bien, que el docente también puede utilizar para fortalecer los aprendizajes de los alumnos.
v. Recursos. Se refiere a los recursos educativos tales como bibliografía, uso de dispositivos electrónicos, etc.
c. La **última sección** cuenta con un número suficientes de "secuencias didácticas" que son el apoyo al docente en el ámbito didáctico de la unidad.

Unidad I, "Funciones Polinomiales", incluye cuatro secciones (además de las señaladas en el párrafo previo):

PRESENTACIÓN

En la **Sección I.1 "La noción de función",** desarrollamos los primeros cinco aprendizajes que señalan los Planes de Estudio institucionales de la asignatura Matemáticas IV, y que están correlacionados con la temática: relación, relación entre dos variables, regla de correspondencia, dominio y rango. Esta sección inicia tratando el concepto de variable, clasifica a las variables en dependientes e independientes, y luego, las relaciona para dar lugar al concepto y definición formal de relación, posteriormente les asocia su representación en el plano cartesiano. A continuación, estudiamos el símbolo conocido como relación de orden y lo relacionamos con segmentos de la recta real, generando las definiciones de los distintos tipos de intervalos, resaltando su utilidad en la representación del dominio y del rango de las relaciones entre dos variables. Posteriormente, hacemos hincapié en la importancia de las funciones en nuestro entorno, señalamos que existen casos particulares de relaciones entre dos variables que se conocen como funciones, para así definir formalmente función. En la parte final de la sección desarrollamos el método gráfico para identificar relaciones que son funciones de aquellas que no lo son, método conocido como "regla de la recta vertical", concluimos la sección proporcionando la definición de función polinomial, sus elementos y simplificaciones.

La **sección I.2**, "El álgebra en las funciones polinomiales", incluye los elementos algebraicos necesarios en el trazo de la curva asociada a una función polinomial, tales como: la determinación de raíces, el algoritmo de la división, la división sintética (regla de Ruffini), el teorema del residuo, el teorema del factor, el teorema de las raíces racionales y el teorema de factorización lineal. Su desarrollo es una guía para el lector en la construcción y formalización de las propiedades algebraicas de los polinomios y que son útiles en el trazo de la curva que una función polinomial tiene asociada.

La **sección I.3**, "Funciones polinomiales y sus gráficas", da sentido geométrico a los elementos algebraicos desarrollados en la sección I.2, aquí relacionamos las raíces de una ecuación polinomial con los ceros de la función polinomial. Incluye el proceso a seguir en la identificación de los intervalos en los que una función es positiva (y en los que es negativa), relaciona el comportamiento extremo de una función polinomial con su término dominante (o término líder), correlaciona la multiplicidad de los ceros con su comportamiento en la recta real y establece el proceso del bosquejo de la curva asociada a una función polinomial. Esta sección concluye proporcionando actividades de construcción de funciones polinomiales a partir de algunas de sus características algebraicas.

En la **sección I.4**, "Las funciones polinomiales como modelos", incluye figuras geométicas (sólidos y supeficies) que son utilizadas frecuentemente en el diseño y construcción de estructuras arquitectónicas y cuya modelación requiere del uso o construcción de una función polinomial.

La Unidad I concluye con la **sección 1.5** cuyo título es "Secuencias didácticas", con las secuecias didácticas entendidas como las unidades estructurales que guían tanto al docente como al estudiante en la obtención de los aprendizajes y apropiación de la temática señalados en la unidad y que incluyen los aspectos didácticos sugeridos en los programas indicativos de la asignatura de Matemáticas IV. Esta unidad incluye un total de siete secuencias didácticas.

La **Unidad II, "Funciones racionales y Funciones con radicales"**, incluye dos secciones en su desarrollo:

La **sección II.1**, "Funciones racionales", en su parte inicial presenta actividades que conducen a funciones racionales , estas actividades relacionan el área o volumen de un cuerpo geométrico con una de sus dimensiones y rescata las características de los modelos obtenidos para dar paso a la definición de función racional y clasificarlas como propias e impropias, reducibles e irreducibles, destacando que al pasar de una de ellas a las otras se preserva el dominio. El desarrollo de la sección continúa con la definición de los elementos que son útiles en el trazo de un bosquejo de la curva que tiene asociada una función polinomia irreducible, como son: los ceros, las interseciones con los ejes coordenados, las asíntotas verticales, la parte positiva, la parte negativa y el comportamiento extremo. Posteriormente, en el trazo de la curva asociada a una función racional, se incluye el hueco que es efecto de la simplificación algebraica de la regla de correspondencia. Se termina la sección tratando con situaciones cuya estudio requiere del uso de una función racional.

La **sección II.2**, "Funciones con radicales de índice dos", propone la construcción de funciones con radical a partir de áreas de figuras geométricas. Posteriormente, utilizando los ceros, las intersecciones con los ejes coordenados y el signo del radicando se traza la curva correspondiente. Para trazar la curva asociada a una fución con radical de índice dos y radicando cuadrático se toma como base el número de ceros, las intersecciones con los ejes

coordenados, el tipo de dominio y el comportamiento extremo (si es que existe). En la parte final propone situaciones cuya solución requiere de la construcción o el uso de una función de las características antes señaladas.
La **sección II.3**, "Secuencias didácticas", contiene siete secuencias que tratan sobre aspectos diversos de las funciones objeto de estudio de la presente unidad.

La **Unidad III, "Funciones exponenciales y Funciones logarítmicas"**, se trata en cuatro secciones.
La **sección III.1**, **"La función exponencial"**, inicia presentando situciones de crecimiento o decaimiento exponencial, cuyos modelos son funciones exponenciales para formalizar el concepto de función exponencial e identificar el dominio y rango de esta familia de funciones. En esta sección también se identifica patrones de cambio involucrados en el crecimiento o decrecimiento de una función exponencial, con el objeto de bosquejar su gráfica, esto, en función de la magnitud de su base, sin dejar de lado la función exponencial natural. Esta sección concluye con la presentación de la resolución de problemas en diferentes contextos, que se modelen con funciones exponenciales.
La **sección III.2**, **"La función logaritmo"**, trata somerameramente la existencia de la función inversa a una función específica con ciertas características y establece la relación entre las curvas correspondientes. Define función logarítmica como la función inversa de la función exponencial y muestra la relación entre este tipo de funciones utilizando varios diagramas, incluye tablas en las que realiza la comparación de una función exponencial con una función logarítmica para obtener las propiedades de estas últimas.
En la **sección III.3**, **"Exponentes y logaritmos"**, se establecen las propiedades de los exponentes y a partir de ellas las propiedades de los logaritmos; propiedades que luego se emplean en la reescritura (compresión y expansión) de expresiones algebraicas. Posteriormente, se induce el cambio de base, tanto logarítmico como exponencial (lo que mostramos con diagramas), posteriormente presentamos la resolución de ecuaciones que incluyen exponentes y logaritmos. Concluimos la sección proponiendo problemas cuya resolución incluye el uso de funciones logarítmicas.
La **sección III.4**, "Secuencias didácticas", incluye ocho secuencias que tratan sobre aspectos diversos de las funciones objeto de estudio de la presente unidad.
La **Unidad IV, "Funciones trigonométricas"**, la presentamos en tres secciones.
La **sección IV.1**, **"Funciones periódicas y el círculo unitario"**, trata los aprendizajes: **Apr.1** Explorará situaciones o fenómenos de variación periódica y **Apr.2** Convertirá medidas angulares de grados a radianes y viceversa, aprendizajes que cubren los contenidos temáticos: Situaciones o fenómenos de variación periódica. Medidas angulares en grados y radianes. Conversiones. Su inicio incluye definiendo movimiento periódico, clasificándolos en circulares uniformes y en vibratorios, presenta ejemplos de stos tipos de movimientos. Posteriormente define función periódica y da ejemplos de ellas. Cocluye con el estudio de la medida de un ángulo central y estableciendo la regla de transformación de unidades de medida angular.
La **sección IV.2**, **"Funciones senoidales y cosenoidales"**, se refiere al trazo de la curva sociada a una función senoidal (o cosenoidal), dando significado al efecto gráfico causado por la variación de los parámetros A amplitud, B frecuencia, D desplazamiento vertical y desfasamiento, en las funciones $f(x) = Asen(Bx - C) + D$ y $g(x) = Acos(Bx - C) + D$. Concluye analizando situaciones de variación periódica cuya resolución incluye el uso de una función senoidal (o cosenoidal).

CONTENIDO

CONTENIDO

UNIDAD I

FUNCIONES POLINOMIALES

PROPÓSITOS:

Al finalizar la unidad el alumno:

Habrá avanzado en el estudio de las funciones al introducir la notación funcional y la noción de dominio y rango. Relacionando la expresión algebraica de una función polinomial con su gráfica y analizar su comportamiento.

Con base en la resolución de problemas y en contexto, usar las gráficas, tablas y expresiones matemáticas para explicar los procesos involucrados.

INTRODUCCIÓN

En la evolución del concepto de función hubo momentos que marcaron el camino de su desarrollo hasta establecer la definición formal que actualmente conocemos. En la etapa inicial de su desarrollo, las cantidades que la componen se interpretaron en forma verbal o en forma gráfica y no existió la idea abstracta de variable, así, el conteo utilizado implicó una correspondencia entre un conjunto de objetos y una secuencia de números, de este modo, las operaciones aritméticas fueron concebidas como funciones de dos variables.

En la Edad Media, en el estudio de los fenómenos naturales, las ideas relativas a ellos se desarrollaron alrededor de cantidades variables, ya sea independientes y/o dependientes, sin definirlas y distiguirlas específicamente. Las funciones se definieron por medio de la descripción verbal de sus propiedades específicas y otras veces mediante un gráfico, pero no fueron utilizadas relaciones algebraicas.

En la parte final del siglo XVI, las funciones se consideraron como expresiones analíticas, Descartes y Fermat consiguieron deslindar la aritmética y el álgebra de la geometría y como consecuencia fue posible descubrir, estudiar y representar nuevas curvas utilizando ecuaciones algebraicas (que anteriormente no se estudiaron al no ser posible utilizar regla y compás en su trazo). En 1692, Leibniz utilizó el término “función” para referirse a cualquier cantidad que variara entre dos puntos de una curva, para esto consideró que una curva estaba formada por un número infinito de segmentos de recta de tamaño infinitamente pequeño. En 1775, Euler define a una función como una expresión analítica, D’ Alambert, Euler y D. Bernoulli enriquecieron el concepto anterior cuando trataron de resolver el problema de la cuerda vibrante. En 1753, Bernoulli escribe: “Llamamos función a las diversas cantidades dadas de alguna forma por una (cantidad) indeterminada x, y por constantes, ya sea algebraicamente o trascendentemente”. En 1829, Dirichlet definió función de la siguiente forma: “y es una función de la variable x, definida en el intervalo $a < x < b$, si para todo valor de la variable x en ese intervalo, le corresponde un valor determinado de la variable y, también señaló que, es irrelevante como se establece esa correspondencia”. Con la Teoría de conjuntos, Cantor produce una nueva evolución del concepto de función, extendiéndose esta noción para incluir en su definición la frase “a oda correspondencia arbitraria que satisfaga la condición de unicidad entre conjuntos numéricos o no numéricos”.

PRESENTACIÓN

La Unidad I, "Funciones Polinomiales", ha sido dividida en cuatro secciones, donde cada sección incluye los aprendizajes, contenidos temáticos, conceptos clave, estimación del tiempo de desarrollo, procesos y algoritmos básicos y el desarrollo de lo antes señalado.
Sección I.1 "La noción de función", en esta sección desarrollamos los primeros cinco aprendizajes que señalan los Planes de Estudio institucionales y que están en correlación con la temática: relación, relación entre dos variables, regla de correspondencia, dominio y rango.
Esta sección inicia tratando el concepto de variable, clasifica a las variables en dependientes e independientes, y luego las relaciona para dar lugar al concepto y definición formal de relación, posteriormente, asociamos una representación en el plano cartesiano a las relaciones entre dos variables. A continuación, tratamos el símbolo conocido como relación de orden y lo relacionamos con segmentos de la recta real, dando así origen a las definiciones de los distintos tipos de intervalos, mismos que son útiles en la representación del dominio y del rango de las relaciones entre dos variables. Posteriormente, hacemos hincapié en la importancia de las funciones en nuestro entorno, señalamos que existen casos particulares de relaciones entre dos variables que se conocen como funciones, para así definir formalmente función. En la parte final de la sección desarrollamos el método gráfico para identificar relaciones que son funciones de aquellas que no lo son y que sedenomina "regla de la recta vertical" y se concluye con la definición de función polinomial, sus elementos y simplificaciones.
La Sección I.2 lleva por nombre "El álgebra en las funciones polinomiales", esta sección incluye los elementos algebraicos que son necesarios en el trazo de la curva asociada a una función polinomial, tales como la determinación de raíces, el algoritmo de la división, la división sintética (regla de Ruffini), el teorema del residuo, el teorema del factor, el teorema de las raíces racionales y el teorema de factorización lineal. Su desarrollo pretende ser una guía para el lector en la construcción y formalización de las propiedades algebraicas de los polinomios de mayor relevancia y que son útiles en el trazo de la curva que una función polinomial tiene asociada.
La Sección I.3, que se titula "Funciones polinomiales y sus gráficas", da sentido geométrico a los elementos desarrollados en la sección I.2, relaciona las raíces de una ecuación polinomial con los ceros de la función polinomial a la que es equivalente, proporciona un proceso de identificación de los intervalos en los que una función es positiva, de los intervalos en los que no lo es, relaciona el comportamiento extremo de una función polinomial con las características de su término dominante (o término líder), correlaciona la multiplicidad de los factores de una función polinomial con su comportamiento en la recta real, y también, establece un proceso que es útil en el bosquejo de la curva asociada a una función polinomial. Esta sección concluye proporcionando actividades de construcción de funciones polinomiales a partir de algunas de sus características algebraicas.
En la sección I.4 que lleva título "Las funciones polinomiales como modelos", presentamos figuras geométicas (sólidos y supeficies) que son utilizadas frecuentemente en estructuras arquitectónicas y cuyo análisis requiere del uso o construcción de una función polinomial.
La Unidad I concluye con la sección 1.5, cuyo título es "Secuencias didácticas", las secuecias didácticas son unidades estructurales conformadas por actividades que guían tanto al docente como al estudiante en la obtención de los aprendizajes y apropiación de la temática señalados en los programas indicativos de la asignatura de Matemáticas IV. Esta unidad incluye un total de siete secuencias didácticas.
La estructura de las secciones está compuesta por tres columnas:
Columnna 1. Observaciones y sugerencias, contiene indicaciones de apoyo en el desarrollo de la sección.
Columnna 2. Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo. Son los materiales que el docente puede utilizar en Columnna 3, donde se presentan algunas de las dificultades que el docente puede encontrar al desarrollar los aprendizajes señalados.
Ejercicios y actividades adicionales. Son actividades que el profesor puede implementar con el objeto de reforzar los aprendizajes alcanzados por los estudiantes, o que el docente puede implementar en el desarrollo de su clases.
Recursos. Se refiere a los recursos educativos tales como bibliografía, uso de dispositivos electrónicos, etc.

PUNTOS PROBLEMÁTICOS

POSIBLES DIFICULTADES (PROGRAMA)	SUGERENCIAS DE APOYO
Con base en nuestra experiencia, en relación al desarrollo de los aprendizajes y temática incluidos en el programa de la asignatura de Matemáticas IV, en la unidad correspondiente a Funciones Polinomiales, nos hemos percatado de:	
En relación a la congruencia entre aprendizajes y temática. **Fila 1.** La temática no incluye la relación de orden, tampoco los intervalos por lo que no se cuenta con los elementos teóricos suficientes para cubrir el aprendizaje correspondiente.	**1.** En la medida de sus posibilidades construya un programa operativo en el que mezcle aprendizajes y partes de aprendizajes, esto permite incrementar la congruencia entre éstos elementos.
Fila 2. Dada la complejidad del estudio de la función polinomial, el aprendizaje planteado está fuera de nivel del curso. La identificación del rango de una función polinomial no está al alcance en este momento.	**2.** Acote el estudio de esta unidad, sólo trate funciones polinomiales de grado tres y cuatro.
Fila 3. No contiene otros teoremas que son fundamentales en la determinación de los ceros, tampoco considera que existen funciones polinomiales que no tienen ceros. El aprendizaje no hace referencia a teoremas de factorización, ni al teorema de los ceros racionales. Tampoco se refiere a la intersección de la curva de la función con el eje de las ordenadas, así como analizar el comportamiento extremo de la función.	**3.** Debe incluir el teorema de la factorización lineal y el teorema de los ceros racionales, sólo así avanzará en la determinación de los ceros de las funciones polinomiales.
Fila 4. No basta el conocer los ceros de una función para el trazo de su curva asociada, ni es suficiente el conocer los ceros para determinar una única función polinomial.	**4.** Incluya: **a.** La relación existente entre: el grado de la función polinomial, el coeficiente del término líder (dominante) y las asignaciones extremas a la variable, ya sean positivas o negativas. **b.** Utilice registros tabulares y describa el comportamiento de la función alrededor de los ceros. **c.** Obtenga la información que proporciona, si es el caso, una multiplicidad par de un cero.
Fila 5. A nivel bachillerato (y a nivel licenciatura) son prácticamente inexistentes las aplicaciones de funciones polinomiales de grado tres o más.	**5.** El tratar con problemas relacionados con volúmenes es una buena opción.

POSIBLES DIFICULTADES (ALUMNOS)	SUGERENCIAS DE APOYO
Con base en nuestra experiencia, en relación al desarrollo de los aprendizajes y temática incluidos en el programa de la asignatura de Matemáticas IV, en la unidad correspondiente a Funciones Polinomiales, nos hemos percatado de:	
Fila 1. Los alumnos presentan dificultades en la identificación y clasificación de las variable involucradas en el estudio de una situación o de un objeto.	**1.** Utilice ejemplos relacionados con el concepto de variable como lo son: objeto, caracteres, cambio en un carácter.
Fila 2. En esta parte del curso, el estudiante no posee los elementos teóricos para determinar el rango de una función polinomial (los elementos disciplinarios se proporcionan en cursos más avanzados de matemáticas.	**2.** En caso de que pretenda cubrir este aprendizaje disminuya las dificltades presentando funciones polinomiales de grado par ya factorizadas.
Fila 3. Aún conociendo los teoremas que señala el aprendizaje, resultan no prácticos para el fin que se desea, el alumno los aplicará y no podrá determinar los ceros. El método de ensayo y error puede incidir en aumentar su frustración.	**3.** Proponga funciones racionales en las que ya se conozca el número mínimo de ceros, con el propósito de que el estudiante determine los restantes.
Fila 4. Para el bosquejo de la curva asociada a una función polinomial se requieren elementos teóricos que el estudiante aún desconoce, por ejemplo, el proceso de multiplicación de polinomios.	**4.** Practique los métodos de desarrollo de productos de polinomios.
Fila 5. La construcción de modelos y posterior aplicación, por lo general, requiere de un “pensamiento ordenado” y de experiencia en la temática, la mayoría de los estudiantes no han incluido ambas virtudes en su pensamiento.	**5.** Seleccione situaciones acordes al nivel académico del alumno y procure ordenar los pensamientos del estudiante utilizando y adaptando algunos de los modelos didácticos relacionados con la resolución de problemas.

TIEMPO REQUERIDO

22 Horas

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

a. Barnett, R., (2007) Precálculo Funciones y gráficas. México: MCGRAW HILL (4ª Edición).
b. Demana, F., (2007) *Precálculo Gráfico Numérico Algebraico.* México: PEARSON (7ª Edición).
c. Larson, R., (2008) *Precálculo. México.* REVERTÉ (7ª Edición)
d. Swokowski, E., (2015) *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: CENGAGE Learning. (13ª edición).

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Allen, R. (2008). *Álgebra intermedia.* México, PEARSON.

SITIOS WEB

a. Cogollo, J. (2014, mayo 26). *Criterio de la recta vertical* [Vídeo].
Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=hw1xFechhHM
b. Matematicatuya (2014, mayo 26). *Dominio y rango gráficamente. Prueba de la recta vertical* [Vídeo].
Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=4HyLpT9TNBM
c. Matematicas profe alex (2018, enero 24). *Intervalos introducción | tipos de intervalos* [Vídeo].
Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=yhdmoH_IyeU
d. Salvamate (2016, octubre 18). *Desigualdades e intervalos parte 1 - relación de orden e intervalos* [Vídeo].
Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=xOCzZ4W89is
e. MateMovil (2017, junio 26) *Intervalos - Abiertos / Cerrados / Semiabiertos - Ejercicios Resueltos* [Vídeo].
Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=mklq6aIHPXc
f. Salvamate (2017, marzo 19). *Hallar el DOMINIO y RANGO de una Función a partir de su Gráfica* [Vídeo].
Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=2CYya8dJovg
g. Miguemáticas (2016, octubre 7). *Intervalos: Definición y ejemplos* [Vídeo].
Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=jdOKAl6M46Q
h. MateMovilAcademia Internet (2017, 26 junio). *Teorema del Factor, Teorema del Residuo* [Vídeo].
Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=8-cKktg2-FI
i. julioprofe (2010, 14 junio). *Aplicación del teorema del residuo* [Vídeo].
Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=Pv-HtVEHoSI
j. Jesús Castillo (2015, 5 mayo). *Tutorial para resolver Funciones Polinomiales* [Vídeo].
Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=fMa8KuitSQE
k. MateMovil (2014, 4 julio). *División por Ruffini - División de Polinomios* [Vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=5CDZEfaU0Kg
l. Avirmat Uprm (2016, 10 mayo). *Teorema de los Ceros Racionales* [Vídeo].
Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=BliAFCqtXYs
m. Rodri Lorenzo (2017, 9 agosto). *Teorema de Gauss* [Vídeo]. https://www.youtube.com/watch?v=WPnevZ1xr_Y
n. KhanAcademyEspañol (26 enero 2014). *El comportamiento en los extremos de un polinomio* [Vídeo].
Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=KK8eBXVVd8U
o. Academatica (2012, 15 diciembre). *Funciones polinomiales* **-** Comportamiento en el infinito [Vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=cvL5w3lJXoU

DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS

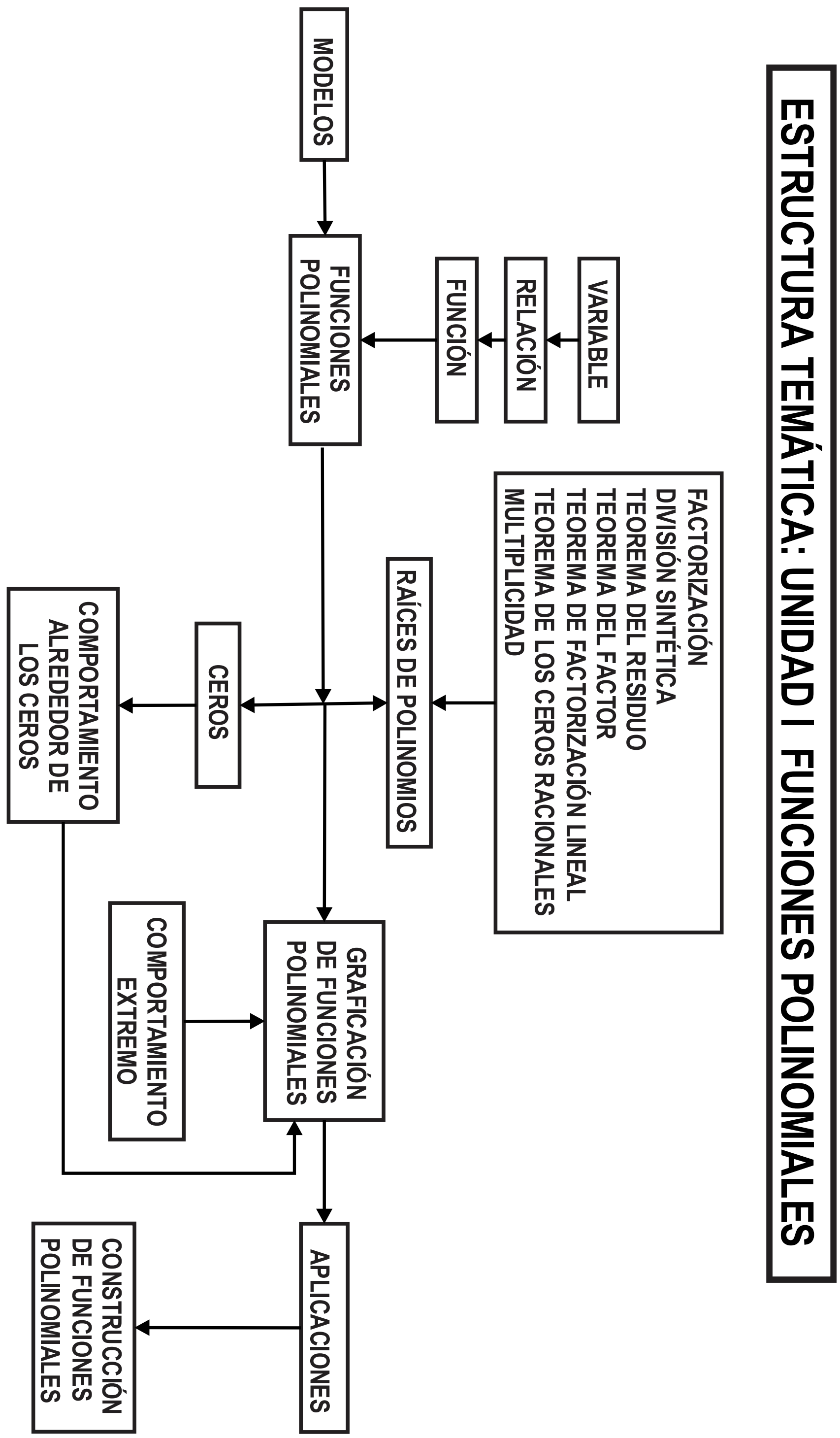
Ordenador
Proyector de vídeos

SOFTWARE DE APOYO

Geogebra
Symbolab

ESTRUCTURA

2



SECCIÓN I.1	LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

APRENDIZAJES Y CONTENIDOS TEMÁTICOS

SECCIÓN	APRENDIZAJES	CONTENIDOS TEMÁTICOS
I.1	**Apr.1** Explorará diferentes relaciones, reconociendo las condiciones necesarias para determinar si una relación es función, la simbolizará y distinguirá el dominio y el rango. **Apr.2** Usará la notación de intervalos para representar el dominio y rango de una función. **Apr.3** Comprenderá el significado de la notación funcional y lo utilizará para representar y evaluar funciones polinomiales.	Relación, relación entre dos variables, regla de correspondencia, dominio y rango.

CONCEPTOS CLAVE

Los siguientes conceptos son fundamentales para un buen desarrollo del curso:

i. Variable (numérica).
ii. Relación entre variables y partes de una relación.
iii. Función (dominio, regla de correspondencia y rango).
iv. Gráfica de una relación o función.
v. Proyección e Intervalo, relación de orden.

TIEMPO ESTIMADO

En situaciones regulares se invierten 6 horas para el desarrollo de los aprendizajes antes señalados.

PROCESOS Y ALGORITMOS BÁSICOS

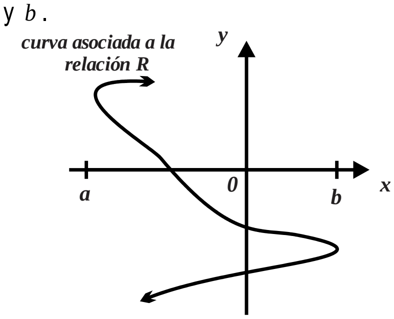
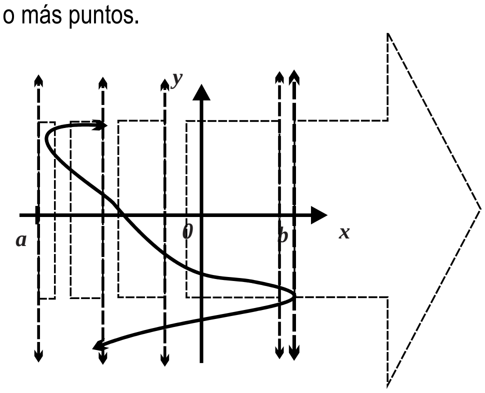
El alumno debe utilizar y manejar procesos como:
i. Evaluación de una relación y de una función (cálculo de imágenes).
ii. Obtención de imágenes de asignaciones.
iii. Identificación de la curva asociada a una relación o función.

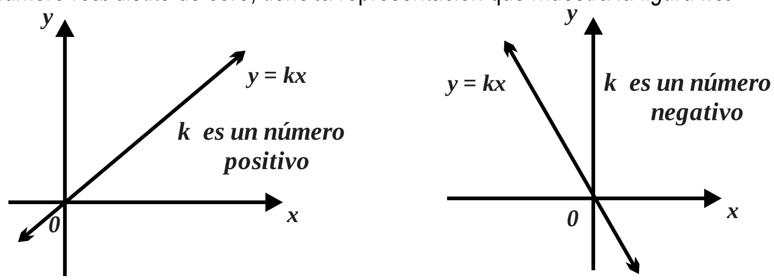
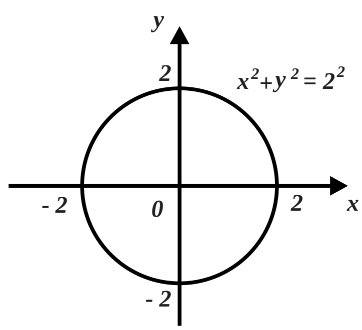
DESARROLLO

Estrategias didácticas, actividades de enseñanza aprendizaje, materiales de apoyo, identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
i. Proponga objetos en los que los estudiantes identifiquen características medibles que los definen. **ii.** Insista que en el presente curso sólo son de nuestro intrés variables medibles (cuantitativas).	Variable en matemáticas Uno de los conceptos imprescindibles en el estudio de las funciones es el de variable. **ACTIVIDAD I.1** (VARIABLES) Imagine que tiene a la vista cierto objeto cuya forma cambia al transcurrir el tiempo, por ejemplo, imagine un cubo de hielo. Este cubo de hielo presenta diversas características, como son: el área de sus caras, la longitud de sus aristas, su peso, su volumen, su aspecto físico, etc. Si el cubo de hielo se pone a la interperie, con el paso del tiempo sus características (antes señaladas) cambian, su volumen disminuye, el área de sus caras disminuye, la longitud de sus aristas también disminuye, su color es probable que no cambie. En el presente curso son de nuestro interés las características de un objeto, que cambian y que podemos de alguna forma, medir; es decir, asignarles un número.	**1.** El alumno puede no recordar los elementos que forman parte de un cubo (arista, cara, vértice, etc.).
iii. Distinga entre variables discretas de las que no lo son. **iv.** Conviene que los ejemplos propuestos se enmarquen en distintos contextos.	**DEFINICIÓN I.1** (VARIBLE) Una variable es una característica en un objeto que es suceptible a cambiar. En matemáticas, una variable suele representarse por un símbolo, en particular la letra x, sin embargo, esto no es una regla general, y una variable puede ser representada por cualquier otro símbolo siempre y cuando se efectúe la aclaración que es pertinente. En matemáticas se conoce como variable independiente a aquella variable que posee la característica de ser controlable, esto significa que quien la controla le asigna los valores numéricos (las asignaciones).	
v. Proponga a sus alumnos señalar situaciones u objetos en los que identifique posibles variables independientes.	**ACTIVIDAD I.2** (VARIABLES DEPENDIENTES) En la elaboración de un pastel, el pastelero controla, entre otras, características como: **a.** La cantidad de azúcar. **b.** La cantidad de harina. **c.** El “peso” del pastel. **d.** La forma del pastel. **e.** El tiempo de horneado. Por tanto, son variables independientes. △ En la *actividad I.1* , bajo la suposición de que el cubo de hielo conserva su forma, el valor asumido por algunas variables depende del valor que tiene asignado una variable independiente, por ejemplo, el volumen del cubo de hielo depende de la longitud de sus aristas, lo mismo ocurre con el área de las caras del cubo. También la longitud de las aristas del cubo depende del tiempo transcurrido. Cuando una variable depende del valor asignado a una variable independiente se le agrega el calificativo de dependiente (variable dependiente).	**2.** La identificación de variables dependientes, en un principio puede ser complicada, proponga situaciones relacionadas con el entorno del alumno, por ejemplo, “crédito abonado vs tiempo disponible”.
vi. Induzca a los alumnos a definir variable independiente y variable dependiente.	**DEFINICIÓN I.2** (VARIBLE DEPENDIENTE Y VARIABLE INDEPENDIENTE) En una situación (u objeto) una variable (medible) se conoce como: **a.** Independiente, si le son asignados los valores numéricos. **b.** Dependiente, si su valor numérico depende de las asignaciones hechas a una variable independiente.	

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
v. Señale que en el presente curso sólo son de interés las relaciones de igualdad entre dos variables, es decir, las ecuaciones que involucran variables.	En la *definición I.2* las dos variables (medibles o numéricas) se encuentran relacionadas; es decir, para un número asignado a una de ellas, existe otro número (o valor) para la otra varible, revise la actividad *I.2*. A la forma en que se relacionan dos variables, una dependiente y otra independiente, se le llama regla de correspondencia o regla de asociación. $$x\,R\,y$$ **FIGURA I.1**	**3.** Señale que en el presente curso sólo son de interés las relaciones de igualdad entre dos variables, es decir, las ecuaciones que involucran variables.
	En la *figura I.1* , x es la variable independiente, y es la variable dependiente y R representa la regla de asociación entre ambas variables. Cabe señalar que para nuestros fines (en lo sucesivo) consideraremos que R representa una expresión (o fórmula) matemática, y para indicar que una variable (dependiente) depende de otra variable (independiente) utilizaremos la notación $R(x)$, misma que interpretaremos como R de x .	**4.** Aclare el significado de $R(x)$ y evite que el alumno lo interprete como un producto.
vi. Utilice figuras que enfaticen las partes que incluye una relación.	Una asignación específica x_0 a la variable x (es decir, si $x=x_0$) recibe el nombre de preimagen, y el correspondiente número $R(x_0)$ se llama imagen (específicamente, imagen de x_0 bajo la relación $R(x)$), vea la *figura I.2*. $x = x_0$ ***preimagen*** $R(x_0)$ ***imagen de*** x_0 ***bajo R*** **FIGURA I.2** Tenga en cuenta que, en un contexto dado, en una relación entre dos variables, la variable independiente x sólo tiene sentido para ciertos números, por ejemplo, si la variable x representa tiempo, longitud, área, volumen o peso, sólo tendrá sentido si se le asignan números no negativos. Como consecuencia de ello, es posible que la variable dependiente sólo asuma ciertos valores (números). Formalmente, en una relación R el conjuto de valores o números que es posible asignarle a la variable independiente x de manera que existe el correspondiente número de la variable y se conoce como "dominio de la relación", también, el conjunto de todos los números que asume la variable y se conoce como rango (recorrido o conjunto imagen de la variable y .	**5.** Es muy importante que identifique los componentes de una relación puesto que el alumno suele entender que la relación es sólo la regla de asociación.
vii. Formalice la definición de relación. **viii.** Formalice la definición de relación los componentes de una relación.	**DEFINICIÓN I.3** (RELACIÓN) **a.** Una relación R es una regla que asigna a cada número de la variable independiente uno o más números de la variable dependiente. **b.** Todas las asignaciones a la variable independiente para las que tiene sentido la relación R, se denomina dominio de la relación. **c.** El conjunto de todas las imágenes de una relación R, se denomina rango (o recorrido o conjunto imagen) de la relación. Por otra parte, una relación puede representarse en el plano cartesiano, lo cual resulta de gran utilidad en la descripción de su comportamiento.	**6.** Es muy importante que establezca los componentes de una relación y que haga hincapíe en que una relación incluye tres partes.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
ix. Formalice la definición de gráfica de una relación.	**DEFINICIÓN I.4** (GRÁFICA DE UNA RELACIÓN) La gráfica de la relación R entre las variables x e y se define como: $G_R = \{ (x, y) \mid y = R(x) \text{ y } x \textit{ pertenece al dominio de la relación} \}$. Esto es "el conjunto de puntos en el plano cartesiano que satisfacen la relación $y = R(x)$, donde x pertenece al dominio de la relación". Conocida la regla de asociación (o de correspondencia) de una relación (de igualdad) entre dos variables y establecido (o fijado) su dominio, la *definición 1.4* garantiza la existencia de su representación en el plano cartesiano, que por lo general es una curva. La proyección ortogonal de la curva sobre el eje de las abscisas coincide con el dominio de la relación, la *figura I.3* muestra esta afirmación para la relación $R(x)$ en donde el dominio son los números contenidos en el segmento de recta con extremos en a y b.  **FIGURA I.3** La *figura I.4* muestra una línea recta vertical que es desplazada sobre el dominio de una relación, esta línea recta vertical intersecará a la curva asociada a la relación en uno o más puntos.  **FIGURA I.4** El hecho de que una línea recta vertical (que ha sido desplazada sobre el dominio de una relación $R(x)$, interseque en dos o más puntos a la curva asociada a la relación, significa que a una asignación numérica (a la variable independiente) le corresponden dos o más imágenes. Este hecho es de toral importancia en la definición de función, definición que proporcionaremos un poco más adelante. En cursos previos de matemáticas, usted trató con ecuaciones que involucran variables y las representó en el plano cartesiano, veamos algunas de ellas en la *actividad I.3*.	**7.** Señale e insista en la diferencia entre gráfica y representación gráfica de una relación, ¡el alumno suele confundirlas! **8.** No olvide señalar, que en el presente curso, sólo son de interés las relaciones de igualdad.
x. Haga que el alumno descubra que al desplazar una línea recta vertical sobre el dominio de una relación, ésta línea recta interseca a la curva de la relación en uno o más puntos.		

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
xi. Solicite al estudiante ejemplos de relaciones (lugares geométricos tratados en cursos previos).	**ACTIVIDAD I.3** (EJEMPLOS DE RELACIONES) **a.** La relación de variación directa dada por $y = Kx$ en donde K representa un número real distito de cero, tiene la representación que muestra *la figura I.5*.  **FIGURA I.5**	**9.** Es muy importante que señale e insista en la diferencia entre gráfica y representación gráfica de una relación, ¡el alumno suele confundirlas!
	La relación matemática $y = Kx$ tiene sentido (está definida) para toda asignación (numérica) que se haga a la variable x (¿por qué?), por tanto, su dominio lo constituye el conjunto de los números reales, este hecho se escribe como $dom(R) = IR$. **b.** En el plano cartesiano, el conjunto de todos los puntos que equidistan de un punto fijo (también en el plano cartesiano y que se conoce como centro) se llama circunferencia y satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 2^2$, vea la *figura I.6*. El dominio de esta relación son todos los números reales comprendidos entre -2 (inclusive) hasta 2 (inclusive).  **FIGURA I.6**	**10.** Es muy importante que señale e insista en la diferencia entre una ecuación que define un lugar en el plano y la curva que tiene asociada la ecuación. **11.** Insista con los lugares geométricos) que ya estudió el alumno.
xii. Solicite a los alumnos que investiguen algunas características de la hipérbola. **xiii.** Induzca al alumno a que proponga lugares geométricos con los que ya tuvo contacto en cursos previos de matemáticas.	En este momento surge la necesidad de establecer una notación para representar el dominio de una relación; sin embargo, esto se hará más adelante. **c.** En el plano cartesiano, el conjunto de todos los puntos cuya diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (también en el plano cartesiano y que se conocen como focos) es una constante se llama hipérbola y satisfacen la ecuación $$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$ La hipérbola asociada a la ecuación $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ se muestra en la *figura I.7*. Note que el dominio de esta relación son los número reales que son menores o iguales que -4 o que son mayores o iguales a 4.	

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

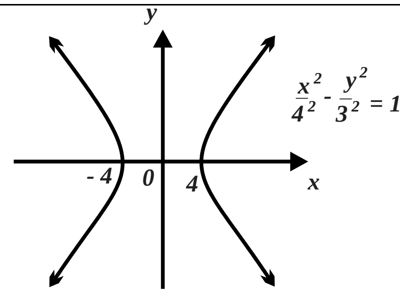


FIGURA I.7

△

En el desarrollo del presente curso será necesario determinar el dominio de una función (o de una relación) por lo que resulta imprescindible el establecer una notación adecuada para ello.

12. El estudiante suele tener dificultades en el uso de los símbolos $<$ y $\leq$, indique otras posibles lecturas dependiendo de la parte de mayor amplitud en ambos símbolos.

El símbolo "$<$" se denomina relación de orden total, la expresión $a<b$ indica que "el número a es menor que el número b".
El símbolo "$\leq$" se denomina relación de orden parcial, la expresión $a \leq b$ indica que "el número a es menor o igual que el número b".
Con la expresión "$a<x<b$" se indican los números comprendidos entre los números a y b, no incluye a los extremos y es equivalente al "intervalo" $(\ a\ ,\ b\ )$.
La expresión "$a \leq x \leq b$" se refiere a los números comprendidos entre los números a y b, incluye a los extremos y es equivalente ai intervalo $[\ a\ ,\ c\ ]$.
La generalización de lo expuesto anteriormente, incluyendo notación de conjuntos y secciones de la recta real se presenta en las siguientes líneas.

xiv. Indique al estudiante que la frase "$a<b$" es equivalente a la frase "$b>a$".

xv. Haga notar al estudiante que el símbolo $<$ se relaciona con el símbolo $($ y que el símbolo $[$ se relaciona con $\leq$.

INTERVALO ABIERTO (NO INCLUYE LOS NÚMEROS EXTREMOS)

$$(\ a\ ,b\ ) = \{\ x \in IR\ \mid a<x<b\ \}.$$

Su representación en la recta real es:

FIGURA I.8

INTERVALOS SEMIABIERTOS (NO CONTIENEN UNO DE LOS NÚMEROS EXTREMOS)

$$(\ a\ ,b\ ] = \{\ x \in IR\ \mid a<x \leq b\ \} \text{ o } [\ a\ ,b\ ) = \{\ x \in IR\ \mid a \leq x<b\ \}.$$

Su representación en la recta real es

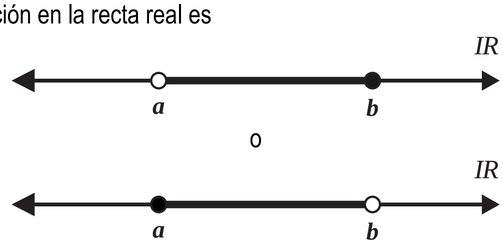
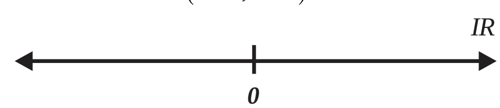
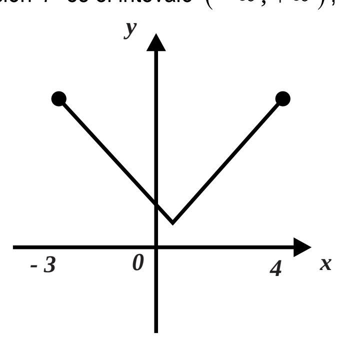
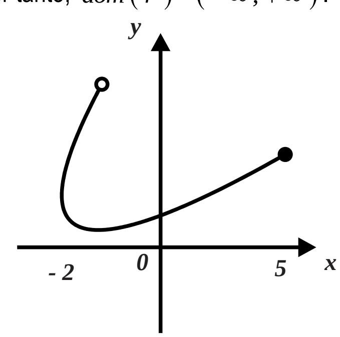
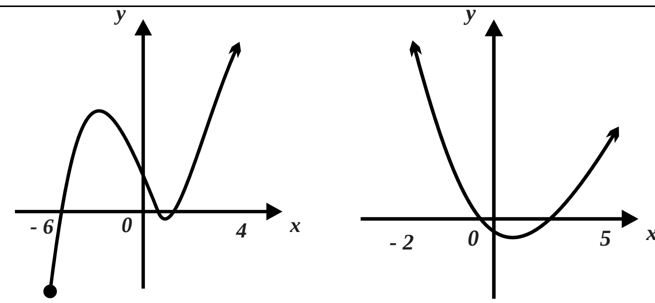


FIGURA I.9

Observaciones y sugerencias	**Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo**	**Dificultades y soluciones**
xvi. Formalice las definiciones de las distintas clases de intervalos. **xvii.** Proponga al alumno que establezca la diferencia (respecto al cero) entre un número no negativo y un número positivo. **xviii.** Proporcione situaciones u objetos en los que las variables involucradas sólo asumen una parte de los números reales. **xix.** Solicite a los alumnos que investiguen las formas de representar al conjunto de los números reales. **xx.** Proponga al estudiante que obtenga el dominio y el rango de una relación a partir de su representación en el plano cartesiano.	**INTERVALO CERRADO (CONTIENE LOS NÚMEROS EXTREMOS)** $[\, a , b \,] = \{ x \in IR \ \mid a \le x \le b \}$. Su representación en la recta real es  **FIGURA I.10** El conjunto de los números reales se define como un intervalo abierto y se representa por los símbolos $IR = (-\infty , +\infty)$  **FIGURA I.11** **ACTIVIDAD I.4** (TRÁNSITO ENTRE INTERVALOS Y RELACIÓN DE ORDEN) Represente en forma de intervalo. **a.** La expresión $x > 20$ se lee “los números reales mayores que veinte”, es equivalente al intervalo $[\ 20\ ,\ +\infty\ )$. **b.** La expresión $x \le -4.2$ se lee “los números reales menores o iguales que -4.2” es equivalente al intervalo $(-\infty , -4.2 \,]$. **c.** Los números reales comprendidos entre -5 (inclusive) y 0 (inclusive) se reprenta por $-5 \le x \le 0$ y es equivalente al intervalo $[\ -5\ ,\ 0\ ]$. △ **ACTIVIDAD I.5** (DOMINIO Y PROYECCIÓN) **a.** En la *figura I.12.a.*, la proyección sobre el eje x de la curva asociada a la relación r es el intevalo $[\ -3\ ,\ 4\ ]$; por tanto, $dom(r) = [\ -3\ ,\ 4\ ]$. **b.** En la *figura I.12.b.*, la proyección sobre el eje x de la curva asociada a la relación r es el intevalo $[\ -2\ ,\ 5\ ]$; por tanto, $dom(r) = [\ -2\ ,\ 5\ ]$. **c.** En la *figura I.12.c.*, la proyección sobre el eje x de la curva asociada a la relación r es el intevalo $[\ -6\ , +\infty\ )$; por tanto, $dom(r) = [\ -6\ , +\infty\ )$. **d.** En la *figura I.12.d.*, la proyección sobre el eje x de la curva asociada a la relación r es el intevalo $(-\infty , +\infty)$; por tanto, $dom(r) = (-\infty , +\infty)$.   a. b.	**13.** No es el momento de proporcionar el significado del símbolo ∞, sólo refiérase a él como “un número extremadamente grande”. **14.** Siempre que pretenda incluir los extremos utilice la palabra inclusive.
Observaciones	**Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo**	**Dificultades y**

y sugerencias		soluciones
xxi. Proponga al alumno que establezca la representación utilizando la relación de orden de los intervalos de la actividad I.4.	 **c.** **d.** **FIGURA I.12** △	**15.** Debe acotar sus explicaciones a situaciones que incluyan de forma específica, únicamente, dos variables.
xxii. Indique la importancia de las funciones en la resolución de problemas de la realidad o con problemas hipotéticamente reales.	La resolución de problemas es uno de los propósitos de las matemáticas, el estudio y análisis (resolución) de diversas situaciones reales (o hipotéticamente reales) en muchos casos requiere de la construcción de un modelo (que puede ser una figura, una tabla, una relación o la combinación de estos elementos), que relacione dos o más de sus variables, así, los modelos matemáticos incluyen (o pueden ser) relaciones matemáticas entre las partes que constituyen el problema, éstas relaciones describen su comportamiento y/o solución. Las funciones son relaciones matemáticas entre variables, mismas que representan un estado específico de un problema y que el cambio en sus valores representa un cambio de las características del problema. En nuestra vida diaria todos hemos dicho o escuchado frases como: **i.** “El costo del pasaje está en función (o depende) de la distancia existente hasta el destino”. **ii.** “El tiempo que una persona puede hablar desde su “celular” depende (es función) del “crédito” que dispone. **iii.** “La calificación final que alguien obtendrá en un curso está en función (o depende) de cuánto tiempo le dedique”. **iv.** “Los ingresos que obtenga están en función (o dependen) del tiempo que trabaje”. También, en el ámbito académico hemos escuchado: “El área de un círculo depende (es función) de la longitud de su radio”, “El volumen de un gas depende de la temperatura”, etc. Casos particulares de las relaciones entre dos variables son las funciones. **DEFINICIÓN I.5** (FUNCIÓN) Sean A y B dos conjuntos de números reales y f la regla que asigna a cada número x del conjunto A un único número en el conjunto B, entonces: **a.** Una función f es una relación entre dos variables, tal que para cada asignación a la variable independiente se le asocia exactamente un valor de la variable dependiente **b.** El conjunto A se denomina dominio de la función y se representa por $A = dom(f)$. **c.** El conjunto B se conoce como contradominio o codominio. **d.** Si x pertenece al conjunto $dom(f)$, entonces $f(x)$ es la imagen de x bajo f. **e.** El conjunto de todas las imágenes se denomina rango (recorrido, conjunto o imagen) y lo representaremos por $img(f)$.	

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

xxiii. Señale que en el presente curso sólo trataremos funciones reales de variable real.

La *figura I.13* muestra un esquema que muestra los elementos antes definidos.

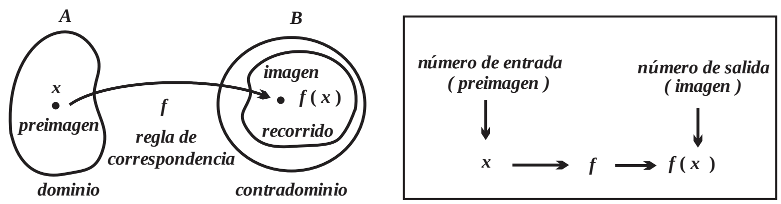


FIGURA I.13

ACTIVIDAD I.6 (EJEMPLOS DE FUNCIONES)

a. La función $f(x)=x$ con $dom\ f = IR$ se denomina función identidad.

xxiv. Solicite al estudiante que trace una figura que muestre los elementos de una función.

b. La función $f(x)=ax^2+bx+c$ con $a\neq 0$ y $dom\ f = IR$ se denomina función cuadrática.

c. La función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ con $a\neq 0$ y $dom\ f = IR$ se denomina función cúbica.

△

Toda función real de variable real, al ser también una relación, tiene asociada asociada una curva que puede representarse en el plano cartesiano.

DEFINICIÓN I.6 (GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN)

a. La gráfica de la función f , es el conjunto

$$G_f=\{\,(x,\ y)\ :\ x\in dom(\,f\,)\ \text{ y }\ y=f(x)\,\}.$$

b. La representación del conjunto $G_f=\{\,(x,\ y)\ :\ x\in dom(\,f\,)\ \text{ y }\ y=f(x)\,\}$ en el plano cartesiano es "la representación gráfica de la función f .

La *figura I.14* muestra la representación gráfica de una función, así como los elementos que incluye.

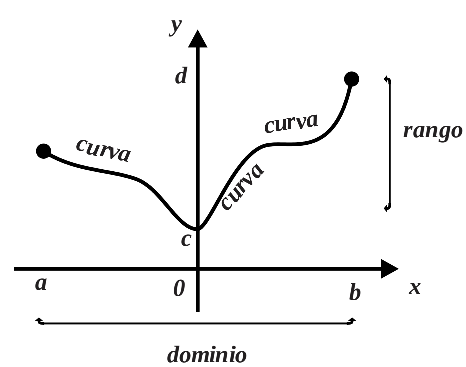
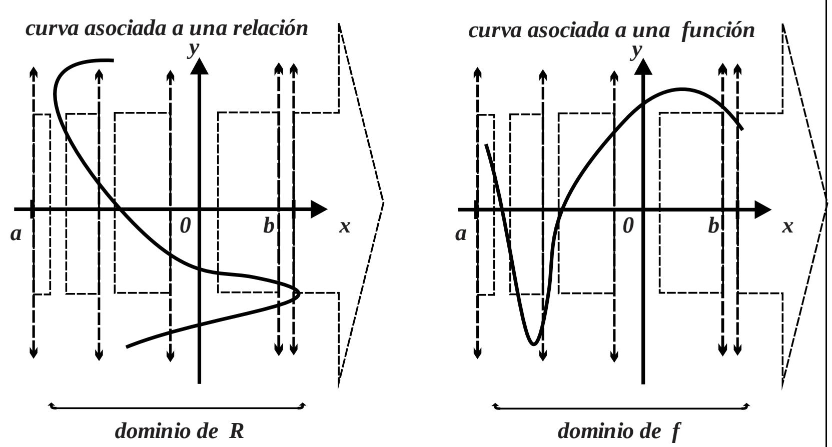


FIGURA I.14

Anteriormente señalamos que las funciones son casos particulares de relaciones, lo que significa que todas las funciones son relaciones, pero no todas las relaciones son funciones.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
	ACTIVIDAD I.7 (RELACIONES QUE NO SON FUNCIONES) **a.** La relación entre las variables x y y dada por $(y-1)^2=3(x-2)$, no es una función, dado que, si asignamos a la variable x el valor de 3, obtenemos $y=1\pm\sqrt{3}$; es decir, le corresponden dos imágenes. **b.** La relación entre las variables x y y dada por $x^2+y^2=25$, no es una función puesto que: si $x=3$ obtenemos $3^2+y^2=25$, de donde $y=-4$ y $y=4$, es decir le corresponden dos imágenes. △	
xxv. Proporcione representaciones gráficas de relaciones para que el estudiante distinga aquellas que pertenecen a funciones de aquellas que no lo son.	A partir de la representación gráfica de una relación (entre dos variables) podemos determinar si una curva pertenece o no pertenece a una función. Si en la representación gráfica de una relación, desplazamos una línea recta vertical sobre su del dominio, y esta recta interseca a la curva asociada en un único punto, entonces pertenece a una función. Esta característica fundamenta la *"prueba de la recta vertical"*, método de prueba para identificar cuando una curva pertenece a una función, vea la *figura I.15*.  **FIGURA I.15**	**16.** En la literatura es común llamar gráfica de la función a una figura y no al conjunto que define la gráfica. Aclare las diferencias. **17.** Una función incluye un dominio, una regla de correspondencia y un rango. **18.** Tenga en cuenta que funciones con la misma regla de correspondencia pueden no ser iguales.
xxvi. Induzca al estudiante a establecer el criterio de la recta vertical para indentificar si una curva pertenece o no a una función.	**PROPIEDAD 1.1** Identificación de la curva asociada a una función "Una curva, en el plano cartesiano, corresponde a una función si y sólo si cualquier recta de ecuación $x=x_0$, para todo número x_0 en el dominio de la función, interseca a la curva asociada a f en un sólo punto". **ACTIVIDAD I.8** (IDENTIFICACIÓN DE CURVAS ASOCIADAS A FUNCIONES) **a.** En la *figura I.16.*, si desplazamos la recta vertical de ecuación $x=x_0$ a lo largo del eje de las abscisas sólo interseca a la curva asociada a f en un punto; por tanto, las curvas pertenecen a funciones.	

<table>
<tr><th>Observaciones y sugerencias</th><th>Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo</th><th>Dificultades y soluciones</th></tr>
<tr><td></td><td>

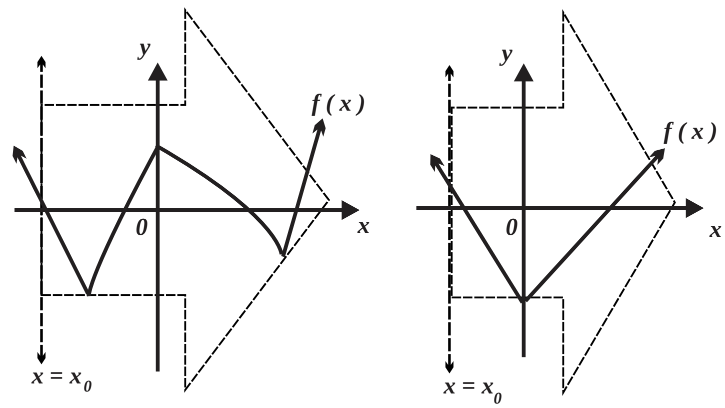


FIGURA I.16

b. En la *figura I.17.*, si desplazamos la recta vertical de ecuación $x = x_0$ a lo largo del eje de las abscisas, interseca a la curva asociada a f en más de un punto; por tanto, las curvas no pertenecen a funciones.

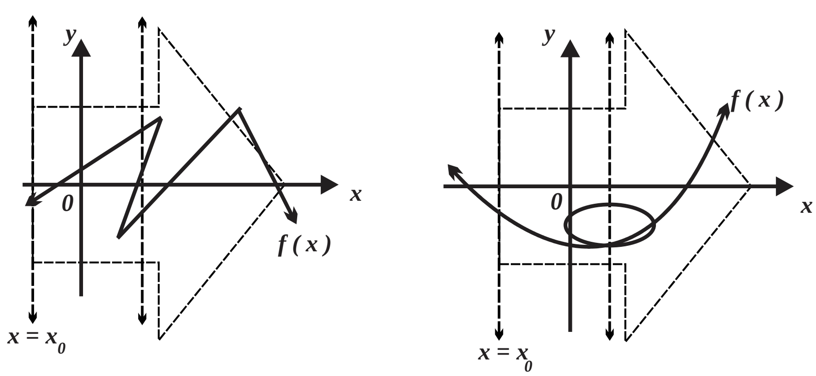


FIGURA I.17

△

Funciones Polinomiales

</td><td></td></tr>
<tr><td>**xxvii.** Señale la importancia de las funciones polinomiales , así como algunas posibles aplicaciones.</td><td>Las funciones polinomiales se utilizan frecuentemente en la modelación y estudio de situaciones relacionadas con nuestro entorno, por ejemplo, en problemas que involucran volúmenes de estructuras (arquitectónicas, de máquinas, esculturas, etc.) y problemas de resistencia de materiales, entre otros. También, con base en ellas pueden ser definidas otro tipo de funciones (como las racionales, las exponenciales y las logarítmicas), suelen utilizarse para aproximar valores (concretamente imágenes) de funciones trigonométricas y de funciones algebraicas. Las funciones polinomiales reciben este nombre puesto que su regla de correspondencia es un polinomio.</td><td>**19.** No confunda los términos: polinomio, ecuación polinomial y función polinomial.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Observaciones y sugerencias</th><th>Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo</th><th>Dificultades y soluciones</th></tr>
<tr>
<td>xxviii. Defina formalmente la función polinomial y el nombre de cada uno de sus elementos relevantes.</td>
<td>DEFINICIÓN I.7 (FUNCIÓN POLINOMIAL)
$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x^1+a_0$ es la regla de correspondencia de una función polinomial en la variable x, y se caracteriza por:
a. n es un número entero positivo, es la mayor de las potencias de la variable x, y además determina el grado de la función.
b. $a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,a_3,\ a_2,\ a_1,\ a_0$, donde $a_n\neq 0$ son números reales y se denominan coeficientes.
c. $a_nx^n,\ a_{n-1}x^{n-1},\cdots,\ a_3x^3,\ a_2x^2,\ a_1x$ y a_0 son los términos de la función polinomial.
d. a_nx^n es el término dominante y a_0 es el término independiente.
e. Su dominio son todos los números reales.

En la práctica, en $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_3x^3+a_2x^2+a_1x^1+a_0$ se aplican las simplificaciones:
Se escribe: a_0 en lugar de a_0x^0, x y no x^1, x^n por $1x^n$ y no se escriben los términos con coeficiente cero. Vea la actividad I.9.</td>
<td>20. No confunda los términos: polinomio, ecuación polinomial y función polinomial.</td>
</tr>
<tr>
<td>xxix. Solicite al estudiante la identificación de elementos de diversas funciones polinomiales.

xxx. Señale las simplificaciones prácticas en la regla de correspondencia de una función polinomial.</td>
<td>ACTIVIDAD I.9 (FUNCIONES POLINOMIALES Y CARACTERÍSTICAS)
<table>
<tr><th></th><th>Regla de correspondencia</th><th>Variable</th><th>Términos</th><th>Grado</th></tr>
<tr><td>a.</td><td>$p(x)=x^4+x^2-10x+25$</td><td>x</td><td>x^4, x^2, $-10x$ y 25</td><td>4</td></tr>
<tr><td>b.</td><td>$g(z)=4z^3-460z^2+1200z$</td><td>z</td><td>$4z^3$, $-460z^2$ y $1200z$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>c.</td><td>$h(w)=\frac{1}{2}w^6-13$</td><td>w</td><td>$\frac{1}{2}w^6$ y -13</td><td>6</td></tr>
<tr><td>d.</td><td>$i(r)=r^4-\dfrac{1}{3}r$</td><td>r</td><td>r^4 y $-\frac{1}{3}r$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>e.</td><td>$k(s)=-5s+9$</td><td>s</td><td>$-5s$ y 9</td><td>1</td></tr>
</table>
△

Para obtener la imagen bajo una función polinomial, de una asignación a la variable independiente, basta con efectuar la sustitución correspondiente y realizar las operaciones adecuadas.

ACTIVIDAD I.10 (IMÁGENES BAJO FUNCIONES POLINOMIALES)
a. La imagen de $x=5$ bajo la función $p(x)=x^4-10x-25$ es
$$p(5)=5^4-10(5)-25=550.$$b. La imagen de $x=0$ bajo la función $p(x)=2x^3-10x-2$ es $p(0)=-2$.
c. La imagen de $x=0$ bajo la función $p(x)=-x^3-6x^2+2x+4$ es $p(0)=4$.
△</td>
<td>21. El rango (o recorrido) de una función polinomial depende de la regla de correspondencia, y que por lo general no es fácil determinarlo.

22. Las funciones polinomiales tienen como dominio a todos los números reales ($dom(p)=IR$), lo que garantiza (junto con otras de sus propiedades que se estudian en otro tipo de cursos), que la curva que tienen asociada es suave y no presenta “saltos” y/o “picos”.</td>
</tr>
</table>

Ejercicios y actividades adicionales

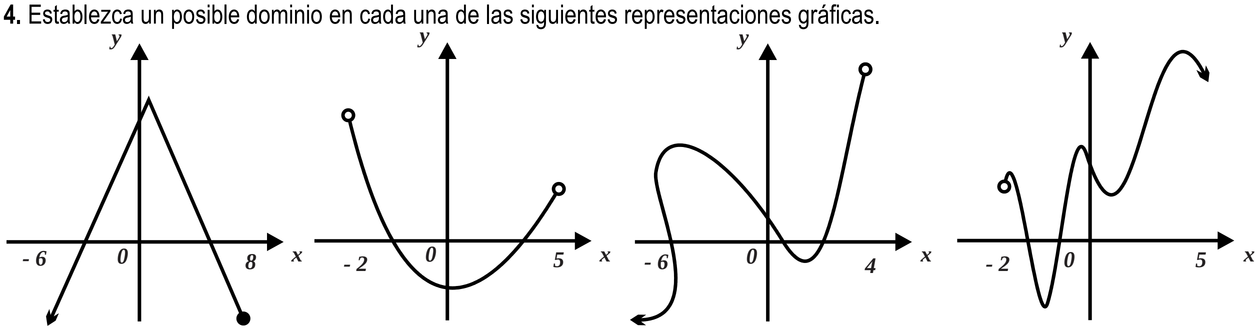
Con el propósito de reforzar los aprendizajes alcanzados por los estudiantes, UD. puede implementar en el desarrollo de sus clases algunos de los siguientes ejercicios o actividades.

1. Identifique posibles variables dependientes e independientes en cada uno de los siguientes casos y establezca posibles relaciones entre pares de variables.
a. Un envase cilíndrico.
b. Una caja de cartón.
c. Un rollo con alambre.
d. Un “tanque de gas”.
e. Un “recibo de la luz”.
f. Una calle en la Ciudad de México.

2. Reescriba los intervalos en términos de las relaciones de orden $\leq$ y $<$.
a. $[\,-8\ ,\ 17\,]$.
b. $(\,-\infty\,,12\,)$.
c. $(\,-10\,,+\infty\,)$.
d. $(\,-8\,,\ 16\,)$.
e. $[\,-132\ ,+\infty\,)$.
f. $(\,-6\ ,+\infty\,]$.

3. Reescriba en forma de intervalo.
a. $x \geq 12$.
b. $-3 \leq x < 18$.
c. $-4 < x < 9$.
d. $4 < x \leq 13$.
e. $x < -6$.
f. $-2 \leq x \leq 5$.

4. Establezca un posible dominio en cada una de las siguientes representaciones gráficas.

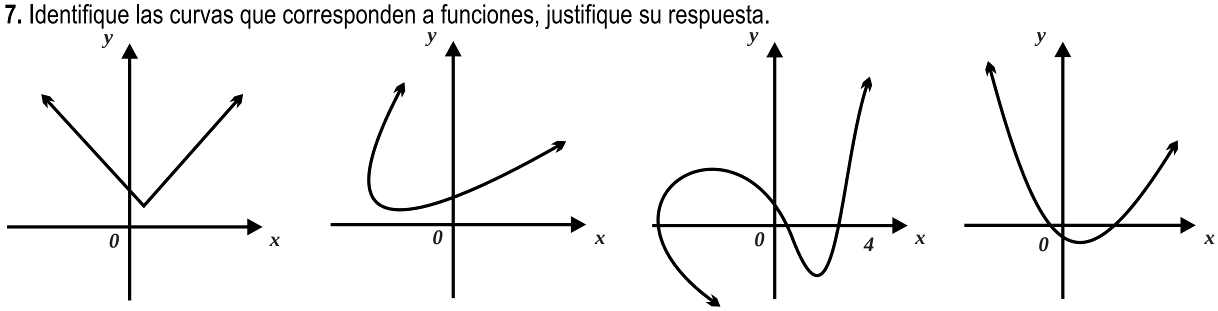


a. **b.** **c.** **d.**

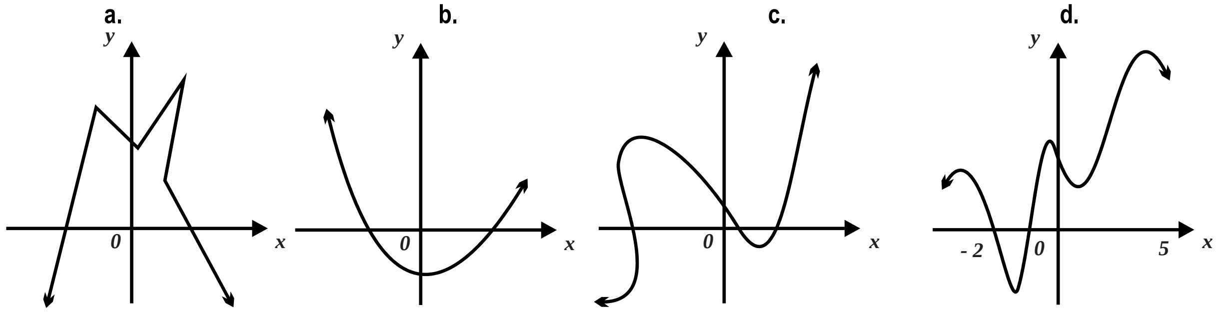
5. Trace gráficas de relaciones en las que el dominio sea el intervalo que se proporciona.
a. $dom(\,r\,)=[\,-4\ ,\ 12\,]$.
b. $dom(\,r\,)=(\,-\infty\,,+\infty\,)$.
c. $dom(\,r\,)=(\,-8\,,+\infty\,)$.
d. $dom(\,r\,)=(\,-8\,,+9\,)$.
e. $dom(\,r\,)=[\,2\ ,+\infty\,)$.
f. $dom(\,r\,)=(\,-4\ ,+\infty\,]$.

6. Busque en la WEB las distintas cónicas en el plano cartesiano y establezca los dominios correspondientes.

7. Identifique las curvas que corresponden a funciones, justifique su respuesta.



a. **b.** **c.** **d.**



e. **f.** **g.** **h.**

8.

i. Identifique las tablas que pueden representar funciones, justifique su respuesta..

a.

x	$r(x)$
–4	1
–1	1
2	1
3	1
7	1
10	1

b.

x	$r(x)$
–4	3
–4	7
2	3
3	9
7	12
10	–3

c.

x	$r(x)$
–4	3
–1	7
–1	7
–1	7
7	12
10	–3

d.

x	$r(x)$
–4	3
–1	7
2	–3
3	3
7	6
10	–3

e.

x	$r(x)$
–4	–8
–1	7
2	5
3	6
7	12
10	–8

f.

x	$r(x)$
–4	–9
–1	7
2	9
3	9
10	12
10	–3

ii. Investigue el concepto de "diagrama sagital" y utilice diagramas sagitales para representar las tablas anteriores y decidir si pueden o no pueden representar funciones.

9. Determine: la variable, el grado, los coeficientes y los términos de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 6x^2 - x + 2$.

b. $h(z) = \pi z^6 - 13z^3 - 2$.

c. $j(x) = 9ax^5 - 10x^3$

d. $p(x) = x^{n+2} - 26x^n - x + a_0$.

10. Desarrolle y describa las características de la función (variable, grado, coeficiente dominante y coeficiente independiente).

a. $f(x) = (x-1)(x+1)(2x-1)$.

b. $f(x) = (x^2-1)(x^2+3x+2)$.

c. $f(x) = (x^2-4x+3)(x^2+8x+7)$.

d. $f(t) = (3t-1)(2t+1)(t-\frac{1}{2})$.

11.

a. Si $f(x) = a_3x^3 + a_1x^1$, verifique que $f(x) = -f(-x)$.

b. Si $f\left(x\right)=a_8x^8+a_6x^8+a_4x^4+a_2x^2+a_0$, verifique que $f\left(x\right)=-f\left(-x\right)$.

12. Construya la regla de correspondencia de una función polinomial con las siguientes características (existen muchas soluciones).
a. Grado tres, coeficiente del término dominante -2 y término independiente -1.
b. Grado cuatro, coeficiente del término dominante $\frac{1}{6}$ y término independiente 0.
c. Grado dos, coeficiente del término dominante $-\frac{3}{8}$ y término independiente 1.
d. Grado cinco, coeficiente del término dominante 12 y término independiente -13.

13. Las siguientes reglas de correspondencias corresponden a funciones polinomiales, determine las imágenes de las asignaciones indicadas.
a. $p\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(2x+1\right)\left(x-2\right)$, si $x=1$, $x=-\frac{1}{2}$ y $x=2$.
b. $p\left(x\right)=3x\left(x+1\right)\left(2x-3\right)-3$, si $x=0$, $x=-1$ y $x=\frac{2}{3}$.
c. $p\left(x\right)=\left(x+13\right)\left(2x+8\right)\left(2x-2\right)+3$, si $x=-13$, $x=4$ y $x=1$.
d. $p\left(x\right)=-\frac{1}{6}\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x+2\right)-12$, si $x=-1$, $x=1$ y $x=-2$.

14. ACTIVIDAD (Uso de las funciones polinomiales)
El número "e" es uno de los números más importantes en matemáticas y su valor puede aproximarse utilizando funciones polinomiales.

a. La aproximación al número "e" por medio de la función polinomial $f\left(x\right)=e^x\approx1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}$ se llama "aproximación cuadrática". Determínela.

b. La aproximación al número "e" por medio de la función polinomial $f\left(x\right)=e^x\approx1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ se llama "aproximación cúbica". Determínela.

c. La aproximación al número "e" por medio de la función polinomial $f\left(x\right)=e^x\approx1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$ se llama "aproximación cuártica". Determínela.

15. ACTIVIDAD (Uso de las funciones polinomiales)
Considere que $f\left(x\right)=e^x\approx1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$

a. Aproxime "e^{-1}" por medio de la función polinomial $f\left(x\right)=e^x\approx1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}$ ("aproximación cuadrática").

b. Aproxime "e^{-1}" por medio de la función polinomial $f\left(x\right)=e^x\approx1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ ("aproximación cúbica"). Determínela.

c. Aproxime "e^{-1}" por medio de la función polinomial $f\left(x\right)=e^x\approx1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$ ("aproximación cuártica"). Determínela.

SECCIÓN I.2	EL ÁLGEBRA EN LAS FUNCIONES POLINOMIALES

APRENDIZAJES Y CONTENIDOS TEMÁTICOS

SECCIÓN	APRENDIZAJES	CONTENIDOS TEMÁTICOS
I.2	**Apr.4** Aplicará la división sintética, el teorema del residuo, el teorema del factor y su recíproco para determinar los ceros de f y su gráfica.	División sintética, teorema del residuo, teorema del factor y su recíproco.

CONCEPTOS CLAVE

Los siguientes conceptos son fundamentales para un buen desarrollo del curso:

Ceros de funciones, raíces de ecuaciones.
Factores.
Multiplicaciones.
Multiplicidad.

TIEMPO ESTIMADO

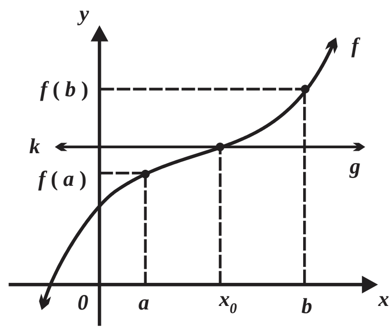
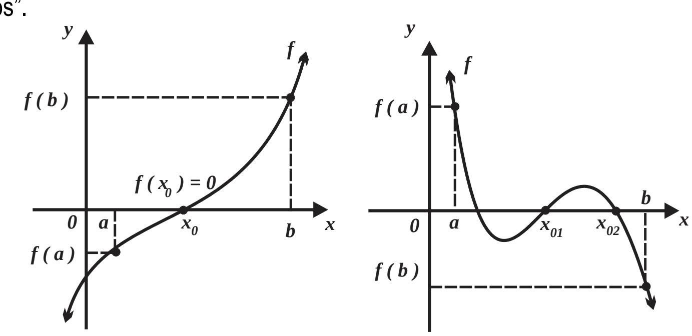
En situaciones regulares se invierten 8 horas en el desarrollo de los aprendizajes antes señalados.

PROCESOS Y ALGORITMOS BÁSICOS

Algoritmo de la división.
División sintética.
Uso del teorema del residuo.
Uso del teorema del factor.
Uso del teorema de las raíces racionales.
Uso del teorema de factorización lineal.

DESARROLLO

Estrategias didácticas, actividades de enseñanza aprendizaje, materiales de apoyo, identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
i. Aunque puede prescindir del Teorema del valor intemedio, en particular el teorema de los ceros de Bolzano, no está por demás mencionarlo al ser una de las propiedades más elegantes e intuitivas de las funciones continuas (como lo son las funciones polinomiales), y es quizá la única oportunidad que tienen los estudiantes para conocerlo.	Con el propósito de relacionar la regla de correspondencia de una función polinomial con su representación gráfica y analizar su comportamiento, es necesario conocer y aplicar los elementos que son imprescindibles para este proceso. Los puntos en los que la curva asociada a una función polinomial cruza a los ejes coordenados presentan gran utilidad en su caracterización, los fundamentos teóricas de la existencia de estos puntos de intersección con el eje cartesiano horizontal se basa en la propiedad del valor intermedio, de manera informal esta propiedad afirma: "Si a la variable x le son asignados todos los números desde a hasta b ($a<b$), entonces la función f asume todas las imágenes comprendidas entre $f\left(a\right)$ y $f\left(b\right)$", vea la *figura 1.18*.  **FIGURA 1.18**	**1.** Bajo una función polinomial p, la imagen de un intervalo cerrado es un intervalo cerrado. **2.** Sólo mencione y explique de manera geométrica la "belleza" y utilidad del teorema de los ceros de Bolzano, tenga en cuenta que una utilidad práctica de esta propiedad es la de identificar los intervalos en que una función es positiva de aquellos que no lo son.
ii. Bajo una función polinomial p, la imagen de un intervalo cerrado es un intervalo cerrado. **iii.** Invite al estudiante a proporcionar la definición de un cero de una función, apóyelo y formalícela.	Un caso particular de la propiedad del "valor intermedio", se da cuando $g\left(x\right)=k=0$, es decir, si la curva asociada a la función $g\left(x\right)=k=0$ coincide con el eje x. Si f es una función polinomial con dominio en el intervalo cerrado $\left[a, b\right]$, y las imágenes $f\left(a\right)$ y $f\left(b\right)$ tienen signos opuestos, entonces una de las funciones $g\left(x\right)=k$ es cero (al revés no es cierto), vea la *figura 1.19*. Los números x_0, x_{01} y x_{02} en $\left(a, b\right)$, *mostrados en la figura 1.19* son de gran utilidad en el trazo de la gráfica de una función polinomial y se denominan "ceros".  **FIGURA 1.19** **DEFINICIÓN 1.8** (CEROS Y RAÍCES) Sea: la función polinomial $p\left(x\right)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ y x_0 un número real tal que $p\left(x_0\right)=0$, entonces: **a.** x_0 se denomina cero real **(**o simplemente cero) de p. **b.** Si x_0 al ser sustituido en la ecuación $a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0=0$ genera una identidad, se denomina raíz.	**3.** Debe tener en cuenta que la denominación de ceros se refiere a funciones, y que la denominación de raíz se refiere a ecuaciones. Cada vez que utilice estos conceptos haga referencia al contexto en que los utiliza.

Observaciones y sugerencias	**Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo**	**Dificultades y soluciones**
iv. Induzca al estudiante a identificar el punto $I_y(\ 0\ ,\ a_0\ )$ como el punto de intersección de la curva asociada a la función polinomial $p(x)$ y el eje y. **v.** Indique al estudiante la necesidad de conocer procesos de factorización de polinomios. **vi.** Señale que el algoritmo de la división es de gran utilidad en el proceso de fatorización de una ecuación polinomial. **vii.** Resalte el hecho que en el algoritmo de la división, cuando $r(x)=0$, entonces $d(x)$ es un factor de $p(x)$.	**Andamio algebraico que apoya el trazo de la gráfica de una función polinomial** Un primer elemento en el trazo de la gráfica de una función polinomial es la determinación de los puntos en que su curva interseca a los ejes coordenados, el punto de intersección con el eje de las ordenadas es el punto $I_y(\ 0\ ,\ p(0)\ )$, cuyo proceso de cálculo no presenta complicaciones. **PROPIEDAD I.2** (EL PUNTO DE INTERSECCIÓN CON EL EJE y) Sea $p(x)$ una función polinomial con término independiente a_0, entonces el punto de intersección de la curva asociada a $p(x)$ con el eje y es $I_y(\ 0\ ,\ p(0)=a_0\ )$. La determinación de los puntos de intersección de la curva asociada a una función polinomial con el eje x suele resultar bastante complicado (si es que existen) y requiere de dar solución a la ecuación polinomial $$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0\ .$$ Si rescribimos la ecuación polinomial $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ en la forma $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)=0$, entonces sus raíces (soluciones) se obtienen de forma inmediata y éstas son $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$, $\cdots$, $x=x_n$, por lo que las intersecciones entre la curva asociada a $p(x)$ y el eje de las abscisas son los puntos $$I_{x1}(\ x_1\ ,\ 0\ ),\ I_{x2}(\ x_2\ ,\ 0\ ),\ I_{x3}(\ x_3\ ,\ 0\ ),\ \cdots\ I_{x1}(\ x_1\ ,\ 0\ ),$$ razón por la cual es necesario el uso de herramientas de factorización de polinomios. **ALGORITMO I.4 (DE LA DIVISIÓN)** Afirma que sí $p(x)$ y $d(x)\neq 0$ son polinomios, entonces existen dos únicos polinomios $c(x)$ y $r(x)$ tales que $p(x)=d(x)c(x)+r(x)$, donde el grado del polinomio $r(x)$ es menor que el grado del polinomio $c(x)$. Los polinomios $p(x)$ y $d(x)$ son el dividendo y el divisor, respectivamente. $$\begin{array}{r\|l} & c(x) \\ \hline d(x) & p(x) \\ & \overline{\ \ r\ \ } \end{array} \qquad p(x)=c(x)d(x)+r$$ **FIGURA 1.20** **ACTIVIDAD I.11** (IDENTIFICACIÓN DE LOS ELEMENTOS DE UNA DIVISIÓN) **a.** En $\dfrac{3x^3+6x^2-9x-12}{x-2}=3x^2+12x+15+\dfrac{18}{x-2}$: Dividendo $p(x)=3x^3+6x^2-9x-12$, divisor $d(x)=x-2$, cociente: $c(x)=3x^2+12x+15$ y residuo $r=18$. **b.** Observe que $$p(x)=c(x)d(x)+r(x)=(3x^2+12x+15)(x-2)+11=3x^3+6x^2-9x-19$$ △	 **4.** Tenga presentes las diferencias entre polinomio, ecuación polinomial y función polinomial.

<table>
<tr><th>Observaciones y ugerencias</th><th>Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo</th><th>Dificultades y soluciones</th></tr>
<tr><td>viii. Verifique que los términos de los polinomios involucrados en el proceso están en orden decreciente.</td><td>

ACTIVIDAD I.12 (DIVISIÓN DE POLINOMIOS)

Para dividir $p(x)=x^3+x-66$ por $d(x)=x-4$ se procede como sigue:

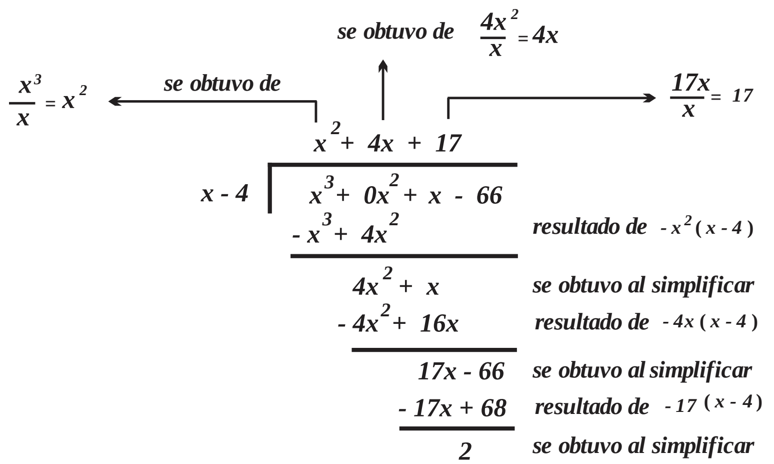


FIGURA I.21

La división $\dfrac{-66+x+x^3}{x-4}$ tiene por cociente $c(x)=x^2+4x+17$ y residuo $r=2$, note que éste es lineal.

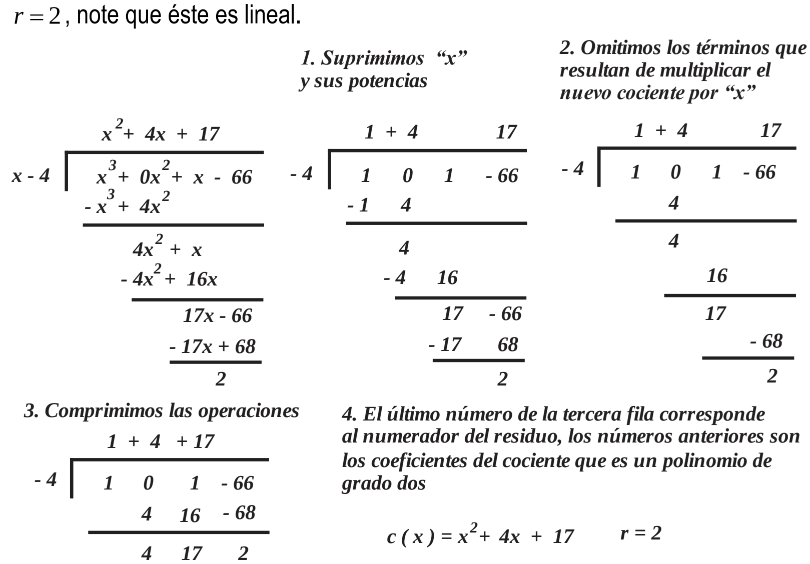
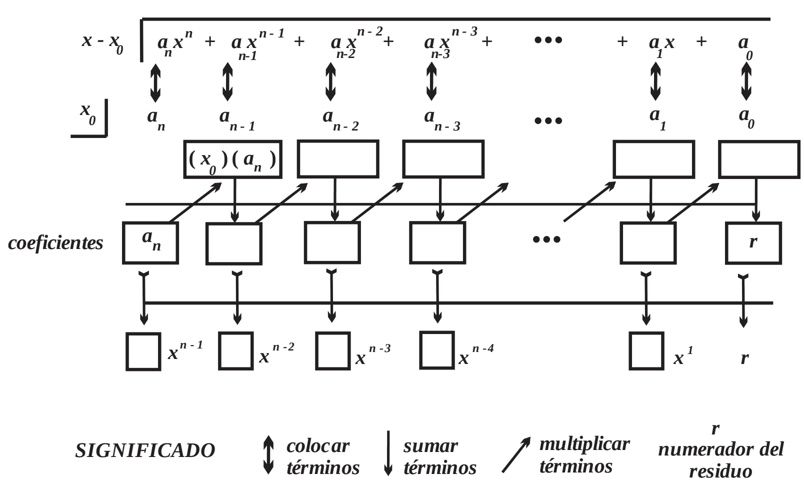


FIGURA I.22

El proceso anterior da origen al *"algoritmo de la división sintética"*, *algoritmo* que en muchos casos reduce (simplifica) la operación $\dfrac{p}{x-x_0}$ a unas cuantas operaciones aritméticas.

△

</td><td></td></tr>
</table>

Observaciones y sugerencias	**Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo**	**Dificultades y soluciones**
ix. Resalte el hecho de que en el algoritmo de la división, si $r(x)=0$ y $d(x)$ es una expresión lineal, entonces $d(x)$ es un factor lineal, y $r(x)$ es constante.	**ALGORITMO I.5** (DE LA DIVISIÓN SINTÉTICA) Para efectuar la división $x-x_0 \overline{\big)\, a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0}$ **1.** Ordene los términos del polinomio dividendo p en forma descendente y ponga en una primera fila los coeficientes, sustituya con un cero el coeficiente del término que falte. **2.** Escriba x_0, "el divisor sintético", en la primera fila y a la izquierda de los coeficientes. **3.** Ponga el coeficiente del término de mayor grado a_n al inicio de la tercera fila. **4.** Multiplique a_n por x_0; escriba el producto $a_n \cdot x_0$ en la segunda fila, exactamente debajo de a_{n-1}, sume con a_{n-1} y escriba la suma $a_n x_0 + a_{n-1}$ en la tercera fila bajo a_{n-1}. **5.** Multiplique la suma del paso cuatro por x_0; escriba el producto en la segunda fila bajo a_{n-2}, súmelo a a_{n-2} y escriba la suma en la tercera fila debajo de a_{n-2}.	
x. Muestre al estudiante la obtención del algoritmo de la división sintética (regla de Ruffini).	**6.** Repita el proceso del paso cinco hasta que haya sumado un producto al término constante del polinomio a_0. Los primeros n números de la tercera fila son los coeficientes del cociente, que es un polinomio de grado $n-1$, y el último número r de la tercera fila es el residuo La *figura I.23* es un esquema que indica la forma de usar del algoritmo de la división sintética.	
xi. Proponga una divisón, una vez resuelta, elimine la "variable" y luego reagrupe los coeficientes convenientes hasta obtener la regla de Ruffini.	 **FIGURA I.23** **ACTIVIDAD I.13** (DIVISIÓN SINTÉTICA) **a.** Resolvamos por división sintética $x - 4 \overline{\big)\, 5x^3 - 8x^2 + 2x - 6}$ **1.** Los términos de los polinomios ya están ordenados de forma decreciente. **2.** Listamos los coeficientes.	

<table>
<tr><th>Observaciones y sugerencias</th><th>Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo</th><th>Dificultades y soluciones</th></tr>
<tr><td>xii. Proponga al estudiante ejercicios de división sintética para practicar.</td><td>

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 5 & -8 & 2 & -6 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

3. Bajamos el primer coeficiente a la fila tres.

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 5 & -8 & 2 & -6 \\ & & & & \\ \hline & 5 & & & \end{array}$$

4. Multiplicamos el primer coeficiente de la fila tres por 4, y colocamos el resultado abajo del siguiente coeficiente, efectuamos la suma.
5. Repetimos el paso anterior utilizando todos los coeficientes.

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 5 & -8 & 2 & -6 \\ & & 20 & 48 & 200 \\ \hline & 5 & 12 & 50 & 194 \leftarrow \textit{residuo} \end{array}$$

6. Los primeros tres números de la tercera fila son los coeficientes del cociente $c(x)$, el último término es el residuo. Entonces $c(x)=5x^2+12x+50$ y $r=194$; por tanto $\dfrac{5x^3-8x^2+2x-6}{x-4}=5x^2+12x+50+\dfrac{194}{x-4}$.

b. Resolvamos por división sintética

$$x+2\,\overline{\big)\,2x^4-x^3-11x^2+4x+14}$$

1. Los términos de los polinomios ya están ordenados de forma decreciente.
2. Listamos los coeficientes.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 2 & -1 & -11 & 4 & 14 \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

3. Bajamos el primer coeficiente a la fila tres.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 2 & -1 & -11 & 4 & 14 \\ & & & & & \\ \hline & 2 & & & & \end{array}$$

4. Multiplicamos el primer coeficiente de la fila tres por -2, y colocamos el resultado abajo del siguiente coeficiente, efectuamos la suma.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 2 & -1 & -11 & 4 & 14 \\ & & -4 & & & \\ \hline & 2 & -5 & & & \end{array}$$

5. Repetimos el paso anterior utilizando todos los coeficientes.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 2 & -1 & -11 & 4 & 14 \\ & & -4 & 10 & 2 & -12 \\ \hline & 2 & -5 & -1 & 6 & 2 \leftarrow \textit{residuo} \end{array}$$

6. Los primeros cuatro números de la tercera fila son los coeficientes del cociente $c(x)$, el último término es el residuo. Entonces, $c(x)=2x^3-5x^2-x+6$ y $r=2$; por tanto $\dfrac{2x^4-x^3-11x^2+4x+14}{x+2}=2x^3-5x^2-x+6+\dfrac{2}{x+2}$.

△
</td><td></td></tr>
</table>

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
xiii. Proponga casos particulares del teorema del factor para establecer conjeturas sobre esta propiedad. **xiv.** Guíe al estudiante para que "descubra", que si $x = x_0$ es una raíz de la ecuación polinomial $a_n x^n + \cdots + a_0 = 0$, entonces $\frac{p}{x - x_0}$ tiene residuo cero.	**EL TEOREMA DEL FACTOR** Tanto el algoritmo de la división como el teorema del factor presentan gran utilidad para determinar las raíces y los factores de una ecuación polinomial. **ACTIVIDAD I.14** (ANTECEDENTES DEL TEOREMA DEL FACTOR) **a.** El resultado del producto $(x+4)(x-1)$ es el polinomio x^2+3x-4 (verifíquelo); es decir, $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$, luego los factores del polinomio x^2+3x-4 son $(x+4)$ y $(x-1)$. Ahora bien, si sustituimos los números $x=-4$ y $x=1$ en el polinomio x^2+3x-4 obtenemos 0, por tanto, $x=-4$ y $x=1$ son las raíces de la ecuación polinomial $x^2+3x-4=0$. **b.** El resultado del producto $(x-3)(x-1)(x+2)$ es el polinomio x^3-2x^2-5x+6 (verifíquelo); es decir, $x^3-2x^2-5x+6=(x-3)(x-1)(x+2)$ por lo que los factores del polinomio x^3-2x^2-5x+6 son $(x-3)$, $(x-1)$ y $(x+2)$. Observe que si sustituimos los números $x=3$, $x=1$ y $x=-2$ en el polinomio x^3-2x^2-5x+6 obtenemos 0; por tanto, $x=3$, $x=1$ y $x=-2$ son las raíces de la ecuación polinomial $x^3-2x^2-5x+6=0$. $\triangle$ Las observaciones hechas en la actividad *I.14* representas características particulares de la proposición conocida como *teorema del factor*, mismo que enunciamos a continuación. **PROPIEDAD I.3** (TEOREMA DEL FACTOR) La ecuación polinomial $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ tiene un factor $x - x_0$ si y sólo si x_0 es una de sus raíces. $\boxed{\begin{array}{c}(a_{n-1}x_0^n + a_{n-2}x_0^{n-1} + \ldots + a_0) = 0 \\ \Updownarrow \\ (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0)\ (x - x_0) = 0\end{array}}$ **FIGURA I.24** Estrechamente relacionado con el teorema del factor está el teorema del residuo. Por lo general, al efectuar la división de un polinomio por un binomio el residuo no es cero, veamos la *actividad I.15*. **ACTIVIDAD I.15** (ANTECEDENTES DEL TEOREMA DEL RESIDUO) **a.** ¿Es $x-1$ un factor del polinomio x^3-2x^2-x-2? Podemos responder esta pregunta utilizando el teorema del factor. Supongamos que en efecto, $x-1$ es un factor del polinomio x^3-2x^2-x-2, esto implica que $x=1$ es una raíz de la ecuación $x^3-2x^2-x-2=0$, lo cual es falso puesto que $(1)^3-2(1)^2-(1)-2=-4\neq 0$.	**5.** Aclare el concepto de factor y evite confusiones.

<table>
<tr><th>Observaciones y sugerencias</th><th>Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo</th><th>Dificultades y soluciones</th></tr>
<tr><td>

xv. Proponga casos particulares del teorema del residuo para establecer conjeturas sobre esta propiedad.

xvi. Guíe al estudiante para que descubra que: si el polinomio $a_n x^n + \cdots + a_0$ se divide por $x - x_0$, entonces tiene residuo $p(x_0)$.

</td><td>

Por otra parte, la división $\dfrac{x^3 - 2x^2 - x - 2}{x - 1}$ tiene como cociente al polinomio $c(x) = x^2 - x - 2$ y residuo $r = -4$.

b. ¿Es $x - 3$ un factor del polinomio $x^3 - 2x^2 - x - 2$? Podemos responder esta pregunta utilizando el teorema del factor. Supongamos que $x - 3$ es un factor de del polinomio $x^3 - 2x^2 - x - 2$, esto implica que $x = 3$ es una raíz de la ecuación $x^3 - 2x^2 - x - 2 = 0$, lo cual es falso puesto que $(3)^3 - 2(3)^2 - (3) - 2 = 4 \neq 0$.

Por otra parte, la división $\dfrac{x^3 - 2x^2 - x - 2}{x - 3}$ tiene como cociente al polinomio $c(x) = x^2 - x - 2$ y residuo $r = 4$.

$\triangle$

En la actividad *I.15*, el lector debió notar que la “posible raíz” (obtenida a partir del “posible factor”) al ser sustituida en el polinomio generó un número que coincide con el residuo de la división del polinomio y el “posible factor”.

Estas observaciones son casos particulares del teorema del residuo, mismo que enunciamos a continuación.

PROPIEDAD I.4 (TEOREMA DEL RESIDUO)
Si el polinomio p se divide por $x - x_0$, entonces su residuo es $p(x_0)$.

En la *figura I.25* p representa a un polinomio.

$$\boxed{\dfrac{p}{x - x_0} \Rightarrow \begin{matrix}\textit{residuo}\\ p(x_0)\end{matrix}}$$

FIGURA I.25

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

Practiquemos con el teorema del residuo.

ACTIVIDAD I.16 (USO DEL TEOREMA DEL RESIDUO)

a. Obtengamos el residuo de $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x - 8}{x + 2}$ sin dividir. En este caso $x = -2$, entonces $r = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2) - 8 = -2$. Utilizando división sintética podemos verificar el resultado anterior.

</td><td>

6. ¡Un uso correcto del teorema del residuo requiere que el numerador del residuo sea independiente de la variable (en nuestro caso x)!

</td></tr>
<tr><td>

xvii. Aplique el teorema del factor.

</td><td>

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 2 & -3 & -8 \\ & & -2 & 0 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & -2 \leftarrow \textit{residuo} \end{array}$$

Obtenemos $r = -2$.

b. Si $\dfrac{2x^4 - x^3 - 8x^2 + 4x + 8}{x - 1}$, entonces $r = 2(1)^4 - (1)^3 - 8(1)^2 + 4(1) + 8 = 5$.

</td><td></td></tr>
</table>

Observaciones y sugerencias	**Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo**	**Dificultades y soluciones**
	c. Si $\dfrac{x^5+x^3-8x^2+4}{x+1}$, entonces $r=(-1)^5+(-1)^3-8(-1)^2+4=-6$. △	
xviii. Guíe al estudiante para que "descubra" la relación entre los teoremas del residuo y del factor.	**PROPIEDAD I.5** (RELACIÓN ENTRE LOS TEOREMAS DEL RESIDUO Y DEL FACTOR) Sean p un polinomio y r el residuo de la operación $\dfrac{p}{x-x_0}$, entonces: **a.** El residuo r es el número que se obtiene al sustituir x_0 en p. **b.** Si $r=0$, entonces $x-x_0$ es un factor de p, y viceversa, si $x-x_0$ es un factor de p, entonces $r=0$. **c.** Si $r=0$, entonces $x=x_0$ es una raíz de $p=0$, y viceversa, si $x=x_0$ es una raiz de $p=0$, entonces $r=0$. Otra propiedad algebraica que se relaciona con la determinación de los ceros de las funciones polinomiales es la propiedad de los "ceros racionales". Dadas las características de este curso, nos conformaremos con señalarlo y aplicarlo.	
xix. Presente al estudiante el teorema de los ceros racionales.	**PROPIEDAD I.6** (TEOREMA DE LOS CEROS RACIONALES) Sea $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ una ecuación polinomial con coeficientes enteros, coeficiente dominante $a_n \neq 0$ y coeficiente independiente $a_0 \neq 0$. Si el número (irreducible) $\dfrac{r}{s}$ es una de las raíces de la ecuación, entonces el número r es divisor de a_0 y el número s es divisor de a_n. Si $a_n = 1$ en la *propiedad 1.5*, entonces las posibles raíces racionales de $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ son los divisores del término independiente a_0.	**7.** No se encuentra al alcance de esta obra la demostración del teorema de los ceros racionales, tampoco es propósito el demostrarlo.
xx. Establezca el algoritmo para determinar las posibles raíces racionales de una ecuación polinomial.	**ALGORITMO I.3** (RECONOCIMIENTO DE LAS RAÍCES RACIONALES) **1.** Identifique el coeficiente independiente $a_0 \neq 0$ de $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ y haga una lista de todos sus divisores. **2.** Identifique el coeficiente dominante (líder) $a_n \neq 0$ de $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ y enliste todos sus divisores. **3.** Forme todas las divisiones: $\dfrac{divisores\ del\ coeficiente\ independiente}{divisores\ del\ coeficiente\ dominante}$. **4.** Sustituya directamente (también puede utilizar una división sintética) las posibles raíces racionales en la ecuación polinomial y determine cuáles son raíces. **5.** Si el coeficiente del término dominante es 1, los posibles ceros racionales de $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ son los divisores del coeficiente independiente. La *actividad I.17* muestra la forma de uso del *algoritmo I.3.*	
xxi. Guíe al estudiante en el cálculo de los posibles ceros racionales.	**ACTIVIDAD I.17** (POSIBLES RAÍCES RACIONALES) **a.** En $x^3+2x^2-x-2=0$, $a_0=-2$ tiene como factores (o divisores) -2, -1, 1 y 2. $a_3=1$ tiene como factores (o divisores) a -1 y 1, entonces las posibles raíces son:	

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

a_0 \ a_3	–1	1
–2	$x=-2$	$x=-2$
–1	$x=1$	$x=-1$
1	$x=-1$	$x=1$
2	$x=-2$	$x=2$

TABLA I.1

Por tanto, las posibles raíces racionales son: -2, -1, 1 y 2. De estas, las raíces racionales del polinomio: son -2, -1 y 1 puesto que

$$(-2)^3+2(-2)^2-(-2)-2=0,\ (-1)^3+2(-1)^2-(-1)-2=0 \text{ y}$$

$$(1)^3+2(1)^2-(1)-2=0.$$

b. En $2x^3-5x^2+x+2=0$, el coeficiente independiente es $a_0=2$ y tiene como divisores a $-2, -1$, 1 y 2. El coeficiente dominante es $a_3=2$ y tiene como divisores a $-2, -1$, 1 y 2. Los posibles raíces racionales son las entradas mostradas en la *tabla I.2*.

a_0 \ a_3	–2	–1	1	2
–2	$x=1$	$x=2$	$x=-2$	$x=-1$
–1	$x=\frac{1}{2}$	$x=1$	$x=-1$	$x=-\frac{1}{2}$
1	$x=-\frac{1}{2}$	$x=-1$	$x=1$	$x=\frac{1}{2}$
2	$x=-1$	$x=-2$	$x=2$	$x=1$

TABLA I.2

Por tanto; las posibles raíces racionales son: -2, -1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1 y 2. De éstas, las raíces racionales son $-\frac{1}{2}$, 1 y 2, puesto que

$$2\left(-\frac{1}{2}\right)^3-5\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)+2=0,\ 2(1)^3-5(1)^2+(1)+2=0 \text{ y}$$

$$2(2)^3-5(2)^2+(2)+2=0.$$

c. En $5x^3-10x^2-17x+3=0$, $a_3=5$ y sus divisores son -1, -5, 1 y 5. Por otra parte, $a_0=3$ tiene como divisores -1, -3, 1 y 3. Los posibles ceros racionales son las entradas mostradas en la *tabla I.3.*

a_0 \ a_3	–5	–1	1	5
–3	$x=\frac{3}{5}$	$x=\frac{1}{5}$	$x=-3$	$x=-\frac{3}{5}$
–1	$x=\frac{1}{5}$	$x=1$	$x=-1$	$x=-\frac{1}{5}$
1	$x=-\frac{1}{5}$	$x=-1$	$x=1$	$x=\frac{1}{5}$
3	$x=-\frac{3}{5}$	$x=-3$	$x=3$	$x=\frac{3}{5}$

TABLA I.3

8. Evite presentar ecuaciones polinomiales en las que sea excesivo el número de posibles raíces racionales.

9. Aclare que no necesariamente todos las posibles raíces racionales son raíces.

Observaciones y sugerencias	**Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo**	**Dificultades y soluciones**
xxii. Aborde el concepto de multiplicidad de raíces. **xxiii.** Proponga ecuaciones polinomiales cuya factorización incluya factores repetidos.	Por tanto, las posibles raíces racionales son -3, -1, $-\frac{3}{5}$, $\frac{3}{5}$, 1 y 3. De éstas, raíces racionales ninguna lo es, verifíquelo. △ Existen ecuaciones polinomiales en las que una o más raíces se repiten, por ejemplo, la ecuación $x^3+6x^2+12x+8=0$ equivale a $(x+2)(x+2)(x+2)=0$. Por tanto; tiene raíz $x=-2$ de "*multiplicidad tres*". **DEFINICIÓN I.9** (MULTIPLICIDAD DE UNA RAÍZ) Si $x=x_0$ es una raíz de $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ y $(x-x_0)^k$ es uno fde sus factores, se dice que la raíz $x=x_0$ tiene multiplicidad k. **ACTIVIDAD I.18** (MULTIPLICIDAD) **a.** Si $(x+1)^3(x+2)^2=0$, las raíces son $x_{01}=-1$ y $x_{02}=-2$ con multiplicidades 3 y 2 respectivamente (note que las multiplicidades coinciden con las potencias de los factores). **b.** En $x^2(x+3)^3(x-9)=0$, las multiplicidades de las raíces $x_{01}=0$, $x_{02}=-3$ y $x_{03}=9$ son 2, 3 y 1, respectivamente. △ El número de raíces de $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ está relacionado con el grado n, así la ecuación $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ tiene a lo más n raíces reales (algunas se pueden repetir), esta propiedad es un caso particular del *teorema Fundamental del Álgebra* mismo que enunciamos (en términos de ecuaciones polinomiales) a continuación. **PROPIEDAD I.7** (TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA) La ecuación $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ tiene al menos una raíz. **ACTIVIDAD I.19** (RAÍCES Y GRADO DE UNA ECUACIÓN POLINOMIAL) **a.** La ecuación $x-8=0$ tiene exactamente una raíz, ésta es $x=8$. **b.** La función $p(x)=x^3-6x^2-27x=x(x+3)(x-9)$ tiene exactamente tres ceros, estos son $x=0$, $x=-3$ y $x=9$. **c.** La fecuación $x^4+1=0$ no tiene raíces reales. △ La combinación de los teoremas: *fundamental del álgebra, del residuo* y *del factor*, garantizan que la ecuación polinomial $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ pueda rescribirse como el producto de n factores lineales (algunos de ellos pueden estar repetidos, otros pueden no incluir números reales y por tanto carecer de interés en este curso), es decir en la forma $a_n(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)=0$, siendo $x_1,\ x_1,\ x_1,\ \cdots,\ x_n$ las raíces de la *ecuación*. Esta propiedad se conoce como "*Teorema de factorización lineal*". **PROPIEDAD I.8** (TEOREMA DE LA FACTORIZACIÓN LINEAL) La ecuación $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ tiene n factores lineales.	

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
xxiv. Proponga al estudiante que aplique el teorema de la factorización lineal.	**ACTIVIDAD I.20** (USO DEL TEOREMA DE FACTORIZACIÓN LINEAL) Para “factorizar linealmente” la ecuación $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$, note que uno de sus raíces es $x_0 = 2$, y que la división $\frac{2x^3 - x^2 - 8x + 4}{x-2}$ tiene cociente $c(x) = 2x^2 + 3x - 2$. La ecuación $2x^2 + 3x - 2 = 0$ tiene raíces $x = -2$ y $x = \frac{1}{2}$ (verifíquelo), en consecuencia $2x^2 + 3x - 2 = (x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$. En la ecuación $9x^3 + 3x^2 - 2x = 0$ una de las raíces es $x_0 = 0$, por tanto, $\frac{9x^3 + 3x^2 - 2x}{x-0} = 9x^2 + 3x - 2$. Pero $9x^2 + 3x - 2 = 0$ tiene como raíces $x = \frac{1}{3}$ y $x = -\frac{2}{3}$ (¡verifíquelo!), entonces $9x^2 + 3x - 2 = x\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$, finalmente $9x^3 + 3x^2 - 2x = x\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$. △	

Ejercicios y actividades adicionales

Con el propósito de reforzar los aprendizajes alcanzados por los estudiantes, UD. puede implementar en el desarrollo de sus clases algunos de los siguientes ejercicios o actividades.

1. Determine las raíces. Verifique sus resultados utilizando el teorema del residuo.

a. $f(x) = \frac{1}{10}(x+2)(x-3)^2$. **b.** $f(x) = (2x+2)(4x-8)^2$. **c.** $f(x) = x^2(6x-12)(x-1)$.

d. $f(x) = (x+1)(x+2)(x-6)$. **e.** $f(x) = (4-2x)(2x+6)(2x-1)$. **f.** $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x - 12$.

g. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

2. Utilice división sintética y exprese el polinomio dividendo en la forma $p(x) = c(x) \cdot d(x) + r$.

a. $x + 2 \overline{\big)\, x^3 + x^2 - 4x - 4}$. **b.** $x - 2 \overline{\big)\, 8x^3 + x^2 - 10x - 4}$. **c.** $x + 3 \overline{\big)\, x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x - 4}$.

d. $x + 1 \overline{\big)\, x^5 - 4x^4 - x^3 + x^2 + 2x - 4}$. **e.** $x - 1 \overline{\big)\, x^8 - 9}$. **f.** $x + 2 \overline{\big)\, 2x^8 + 32}$.

g. $x - 2 \overline{\big)\, 4x^5 - 64}$. **h.** $\frac{x^4 + x^3 + x^2 - 14x - 4}{x+4}$. **i.** $\frac{4x^5 - 8x^3 + x^2 - 10x - 4}{x-1}$.

j. $\frac{x^4 - 4}{x-1}$ **k.** $\frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 17x - 4}{x+2}$. **l.** $\frac{x^5 - 4x^4 - x^3 + x^2 + 2x - 4}{x-1}$.

3. Obtenga el residuo sin efectuar la división.

a. $x + 2 \overline{\big)\, x^3 + x^2 - 4x - 4}$. **b.** $x - 2 \overline{\big)\, 8x^3 + x^2 - 10x - 4}$. **c.** $x + 3 \overline{\big)\, x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x - 4}$.

d. $x + 1 \overline{\big)\, x^5 - 4x^4 - x^3 + x^2 + 2x - 4}$. **e.** $x - 1 \overline{\big)\, x^8 - 9}$. **f.** $x + 2 \overline{\big)\, 2x^8 + 32}$.

g. $x - 2 \overline{\big)\, 4x^5 - 64}$. **h.** $\frac{x^4 + x^3 + x^2 - 14x - 4}{x+4}$. **i.** $\frac{4x^5 - 8x^3 + x^2 - 10x - 4}{x-1}$.

4. Utilice el algoritmo de la división sintética y luego aplique el teorema del residuo para verificar que $f\left(x_0\right)=r$.

a. $x^3+3x^2-14x+2=0$, sí $x_0=1$.

b. $x^3-5x^2-11x+10=0$, sí $x_0=-2$.

c. $15x^4+10x^3-6x^2+14=0$, sí $x_0=3$.

d. $x^3-x^2-14x+12=0$, sí $x_0=4$.

e. $2x^3-3x^2-4x+8=0$, sí $x_0=1$.

f. $6x^4+10x^3-6x^2+4x+14=0$, sí $x_0=-\frac{2}{3}$.

5. Utilice la división sintética y el teorema del residuo para verificar que el (los) número(s) indicado(s) es (son) raíz de la ecuación polinomial, posteriormente factorícela.

a. $2x^3-14x+12=0$, $x_0=2$.

b. $2x^3+6x^2-96x-288=0$, $x_0=-3$.

c. $x^3-14x+13=0$, $x_0=1$.

d. $x^4-4x^3-15x^2+58x-40=0$, $x_{01}=5$ y $x_{02}=-4$.

e. $8x^4-14x^3-71x^2-10x+24=0$, $x_{01}=-2$ y $x_{02}=4$.

6. Determine las posibles raíces racionales, seleccione aquellos que lo son..

a. $x^3-2x^2-11x+12=0$.

b. $x^3-6x^2+2x+3=0$.

c. $x^3-2x^2-6x+12=0$.

d. $-2x^3-9x^2-3x+4=0$.

e. $\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{15}{4}x+9=0$.

f. $\frac{1}{4}x^3-3x-4=0$.

g. $2x^4+7x^3-6x^2-7x^2+4=0$.

h. $-2x^4-7x^3+12x^2+28x-16=0$.

i. $-3x^4-4x^3+3x+4=0$.

j. $-x^4+8x^3-22x^2+24x-9=0$.

k. $\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{3}x^3-x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}=0$.

l. $x^4-\frac{16}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{74}{3}x-8=0$.

m. $x^4+\frac{3}{4}x^3-\frac{41}{4}x^2-\frac{21}{2}x-2=0$.

7. Construya ecuaciones polinomiales con las siguientes condiciones.

a. Grado tres, raíces: $x_1=-1$, $x_2=-2$ y $x_3=4$, con coeficiente del término dominante $a_3=1$.

b. Grado tres, raíces: $x_1=-4$ y $x_2=-2$ de multiplicidad dos, con coeficiente del término dominante $a_3=1$.

c. Grado tres, raíces: $x_1=5$ y $x_2=\frac{1}{4}$ de multiplicidad dos, con coeficiente del término dominante $a_3=1$.

d. Grado tres, raíces: $x_1=\frac{1}{4}$ de multipicidad dos y $x_2=\frac{1}{4}$, con coeficiente del término dominante $a_3=4$.

e. Grado tres, raíces: $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{4}$ y $x_3=4$, con coeficiente del término dominante $a_3=2$.

f. Grado tres, raíces: $x_1=5$ y $x_2=2$ de multiplicidad dos, con coeficiente del término dominante $a_3=-4$.

g. Grado cuatro, raíces: $x_1=-1$, $x_2=-2$, $x_3=4$ y $x_4=1$, con coeficiente del término dominante $a_4=1$.

h. Grado cuatro, raíces: $x_1=-4$ y $x_2=-2$, ambas con multiplicidad dos, con coeficiente del término dominante $a_3=-1$.

i. Grado cuatro, raíces: $x_1=5$ y $x_2=\frac{1}{4}$ ambas con multiplicidad dos, con coeficiente del término dominante $a_3=2$.

j. Grado cuatro, raíces: $x_1=2$ de multipicidad tres y $x_2=\frac{1}{4}$, con coeficiente del término dominante $a_3=-2$.

k. Grado cuatro, raíces: $x_1=-\frac{1}{2}$ y $x_2=-\frac{1}{4}$ con multiplidad tres y coeficiente del término dominante $a_3=1$.

l. Grado cuatro, raíces: $x_1=5$ y $x_2=2$ ambas de multiplicidad dos, con coeficiente del término dominante $a_3=\frac{1}{2}$.

SECCIÓN I.3	FUNCIONES POLINOMIALES Y SUS GRÁFICAS

SECCIÓN I.3

FUNCIONES POLINOMIALES Y SUS GRÁFICAS

APRENDIZAJES Y CONTENIDOS TEMÁTICOS

SECCIÓN	APRENDIZAJES	CONTENIDOS TEMÁTICOS
I.3	**Apr.5** Construirá una función polinomial a partir de las raíces reales de su ecuación y bosquejará su gráfica. A partir de una función polinomial calculará los ceros y realizará su gráfica.	Ceros de multiplicidad impar o par, para observar el comportamiento gráfico. Graficación de funciones. Calculo de ceros y graficación de funciones.

CONCEPTOS CLAVE

Los siguientes conceptos son fundamentales para un buen desarrollo del curso:
Puntos en los que la curva asociada a una función interseca alos ejes coordenados.
Comportamiento alrededor de un punto.
Comportamiento extremo.
Bosquejo de la gráfica de una función.

TIEMPO ESTIMADO

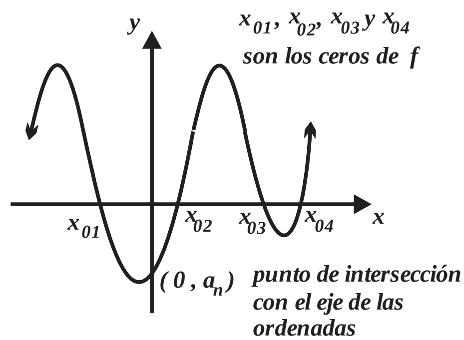
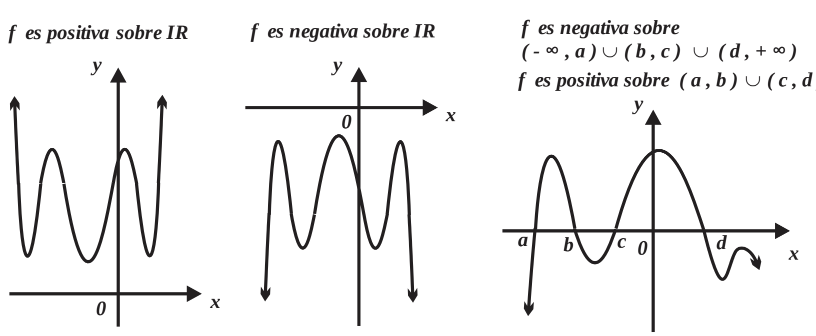
En situaciones regulares se invierten 7 horas en el desarrollo de los aprendizajes antes señalados.

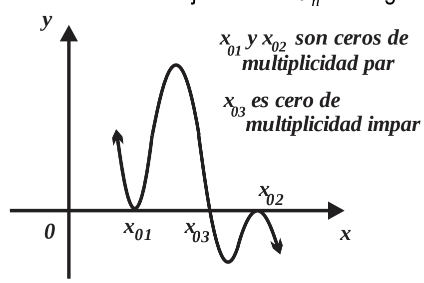
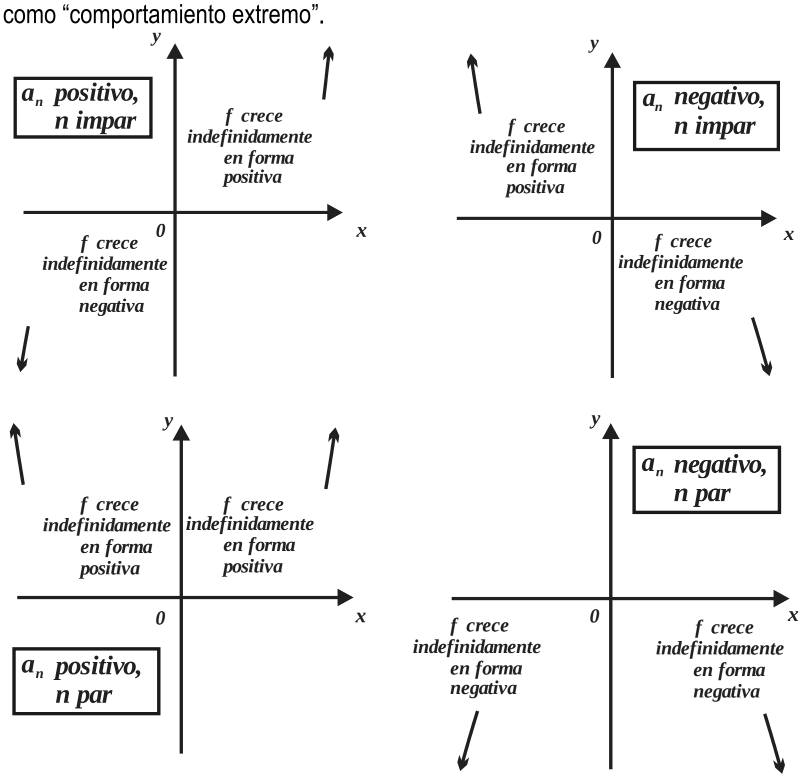
PROCESOS Y ALGORITMOS BÁSICOS

Construcción de la gráfica de una función.

DESARROLLO

(Estrategias didácticas, actividades de enseñanza aprendizaje, materiales de apoyo, identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución.

Observaciones y sugerencias	**Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo**	**Dificultades y soluciones**
i. Señale la importancia de los conceptos tratados en la sección anterior, para el bosquejo de la gráfica de una función polinomial. **ii.** Indique el significado de “bosquejo de la gráfica de una función polinomial”. **iii.** No pierda de vista que al tratar con funciones ahora lo correcto es hablar de ceros de una función (¡y no de raíces de una función!).	Las propiedades algebraicas de las ecuaciones polinomiales antes mencionadas, y otras que trataremos a continuación, constituyen parte del proceso a seguir para construir un “bosquejo” (aproximación a la forma real de la curva asociada) de la gráfica de una función polinomial. Para la construcción del “bosquejo de la curva asociada a una función polinomial”, es conveniente rescribir la regla de correspondencia apropiadamente, y para esto, las propiedades que estableceremos a continuación son de gran apoyo. Así, para trazar la curva correspondiente a una función debemos tener en cuenta que: **1.** Los puntos donde la curva asociada a una función polinomial interseca al eje de las abscisas tienen como primera coordanada a los ceros de la función polinomial, y la segunda coordenada del punto donde interseca al eje de las ordenadas es el término independiente de la regla de correspondencia.  **FIGURA I.26**	**1.** Las funciones polinomiales son continuas en su dominio de definición.
iv. Presente figuras que muestren funciones positivas y funciones negativas.	**2.** Una función f es positiva sobre un intervalo si y sólo si todas las imágenes de los puntos del intervalo son positivas, similarmente, entenderemos que una función polinomial f es negativa sobre un intervalo si y sólo si todas las imágenes de los puntos del intervalo son negativas. Las funciones polinomiales positivas (o negativas), no tienen ceros, su curva asociada no interseca al eje “ x ”. Por otra parte, una función polinomial no positiva (o no negativa) interseca al eje x por lo menos en un punto de la forma $I_x\left(x_0 , 0 \right)$, donde x_0 es un cero de la función y alrededor de estos puntos el signo de f puede no cambiar.  **FIGURA I.27**	

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
	3. Alrededor de los ceros de una función, la curva asociada a ella cambia de signo o es tangente al eje cartesiano horizontal. Alrededor de los ceros de multiplicidad par de una función, la curva asociada a la función es cóncava hacia arriba cuando a_n es positiva y es cóncava hacia abajo cuando a_n es negativa.  FIGURA I.28 **4.** El comportamiento "extremo" (asignaciones a la variable x de valores extremadamente grandes, ya sea positivas, negativas o ambas) de la función polinomial $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ depende de la combinación del signo de a_n (coeficiente del término dominante) y de la paridad del grado n (par o impar) de la función polinomial. Si a la variable x le asignamos valores extremadamente grandes (ya sean positivos o negativos), entonces la curva correspondiente presenta uno de los comportamientos mostrados en la *figura I.29.* Tal comportamiento se conoce como "comportamiento extremo".  FIGURA I.29	**2.** En esta parte no se pretende incluir el concepto de "tender a infinito", consideramos que debe estudiarse en un curso de cálculo, por lo que en la medida de lo posible no utilizamos el símbolo correspondiente.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

v. Rescate los procesos vistos en la sección anterior y formule un algoritmo para el bosquejo de la curva asociada a una función polinomial.

Todos los elementos antes estudiados se utilizan en el bosquejo (trazo aproximado) de la curva asociada a una función polinomial, en el *algoritmo 1.4* resumimos estas propiedades.

ALGORITMO I.4 (BOSQUEJO DE LA CURVA ASOCIADA A UNA FUNCIÓN POLINOMIAL)

i. Determinar la intersección de p con el eje “ y ”.

ii. Determinar los ceros reales de p y luego los puntos de intersección con el eje “ x ”.

iii. Verificar el comportamiento de p alrededor de los ceros.

iv. A partir del término dominante determinar el comportamiento extremo de p .

v. Unir los puntos de la forma $(x, p(x))$, obtenidos en los pasos anteriores por medio de una curva “suave y continua”.

vi. Proponga al estudiante que bosqueje la curva asociada de diversas funciones polinomiales.

ACTIVIDAD I.21 (BOSQUEJO DE CURVAS POLINOMIALES)

a. Bosquejo de la curva asociada a $p(x) = \frac{1}{4}\left(x^3 - 2x^2 - 3x\right)$.

i. $a_0 = 0$ y el punto de intersección con el eje “ y ” es $I_y\ (0, 0)$.

ii. Puesto que $p(x) = \frac{1}{4}\left(x^3 - 2x^2 - 3x\right) = \frac{1}{4}x\left(x^2 - 2x - 3\right) = \frac{1}{4}x(x-3)(x+1)$ los ceros son $x = -1$, $x = 0$ y $x = 3$, por tanto, los puntos de intersección con el eje “ x ” son $I_{x1}\ (-1, 0)$, $I_{x2}\ (0, 0)$ y $I_{x3}\ (3, 0)$.

iii. Comportamiento alrededor de los ceros.

INTERVALO	x_p	$p(x_p)$	p
$(-\infty, -1)$	-2	-2.5	Negativa
$(-1, 0)$	-0.5	0.21875	Positiva
$(0, 3)$	1	-1	Negativa
$(3, +\infty)$	4	5	Positiva

iv. En p , $a_3 = \frac{1}{4}$ (coeficiente del término dominante) y $n = 3$ (potencia del término dominante) es impar, entonces:
Si a x le asignamos “números positivos extremadamente grandes”, p asume “números positivos extremadamente grandes”. Si a x le asignamos “números negativos extremadamente grandes”, p asume “números negativos extremadamente grandes”. Vea la *figura I.30*.

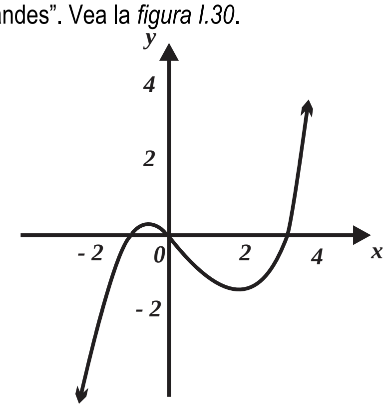


FIGURA I.30

3. Conviene que seleccione adecuadamente las funciones cuya gráfica se va a esbozar puesto que si no lo hace adecuadamente, con las herramientas desarrolladas le puede resultar imposible.

4. Tenga en cuenta que los elementos antes tratados están bastante limitados por lo que el trazo de la curva asociada a una función polinomial puede ser un tanto burdo y en ocasiones imposible.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

b. Bosquejo de la curva asociada a $p(x) = 2x^4 - x^3 - 19x^2 + 9x + 9$.

i. $a_0 = 9$ y el punto de intersección con el eje "y" es $I_y\left(0, 9\right)$.

ii. $a_4 = 2$ y $a_0 = 9$, entonces los posibles ceros racionales de p se encuentran entre ± 1, ± 3, ± 9, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$ y $\pm\frac{9}{2}$, de los cuales sólo son ceros de $p(x)$ $x = -3$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 1$ y $x = 3$ (¡verifíquelo!); por tanto, los puntos de intersección con el eje "x" son $I_{x1}\left(-3, 0\right)$, $I_{x2}\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $I_{x3}\left(1, 0\right)$ y $I_{x4}\left(3, 0\right)$.

iii. Comportamiento alrededor de los ceros.

INTERVALO	x_p	$p(x_p)$	p
$(-\infty, -3)$	–4	265	Positiva
$\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$	–2	–45	Negativa
$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	0	9	Positiva
$(1, 3)$	2	–45	Negativa
$(3, +\infty)$	4	189	Positiva

iv. En p, $a_4 = 2$ (coeficiente del término dominante) y $n = 4$ (grado de la función) es par.

Si a x le asignamos "números positivos extremadamente grandes", entonces p asume "números positivos extremadamente grandes".

Si a x le asignamos "números negativos extremadamente grandes", entonces p asume "números positivos extremadamente grandes". Vea la *figura I.31* (note la diferencia de escalas en los ejes coordenados).

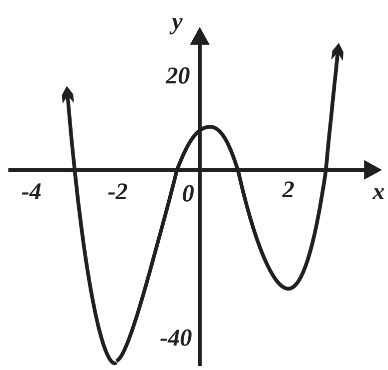


FIGURA I.31

c. Bosquejo de la curva asociada a $p(x) = -x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 12x - 9$.

i. $a_0 = -9$, entonces el punto de intersección con el eje "y" es $I_y\left(0, -9\right)$.

ii. $a_4 = -1$ y $a_0 = -9$, entonces los posibles ceros racionales de p se encuentran entre ± 1 y ± 3, de los cuales sólo son ceros de p $x = -3$, con multiplicidad 2 y $x = 1$ con multiplicidad 2 (¡verifíquelo!); por tanto, los puntos de intersección con el eje "x" son $I_{x1}\left(-3, 0\right)$, $I_{x2}\left(1, 0\right)$.

iii. Comportamiento alrededor de los ceros.

<table>
<tr><th>Observaciones y sugerencias</th><th>Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo</th><th>Dificultades y soluciones</th></tr>
<tr>
<td>

vii. Guíe al estudiante para que descubra que la paridad de la multiplicidad de los ceros define parte del comportamiento de la curva asociada a f.

viii. Guíe al estudiante para que descubra, que el comportamiento “extremo” de la curva asociada a f depende del término dominante.

</td>
<td>

<table>
<tr><th>INTERVALO</th><th>x_p</th><th>$p\left(x_p\right)$</th><th>p</th></tr>
<tr><td>$\left(-\infty,-3\right)$</td><td>-4</td><td>-144</td><td>Negativa</td></tr>
<tr><td>$\left(-3\,,\,1\right)$</td><td>0</td><td>-9</td><td>Negativa</td></tr>
<tr><td>$\left(1\,,\,+\infty\right)$</td><td>$2$</td><td>$-25$</td><td>Negativa</td></tr>
</table>

iv. En p, $a_4=-1$ (coeficiente del término dominante) y $n=4$ (grado de la función) es par.
Si a x le asignamos “números positivos extremadamente grandes”, entonces p asume “números negativos extremadamente grandes”.
Si a x le asignamos “números negativos extremadamente grandes”, entonces p asume “números negativos extremadamente grandes”. Vea la *figura I.32* (note la diferencia de escalas en los ejes coordenados).

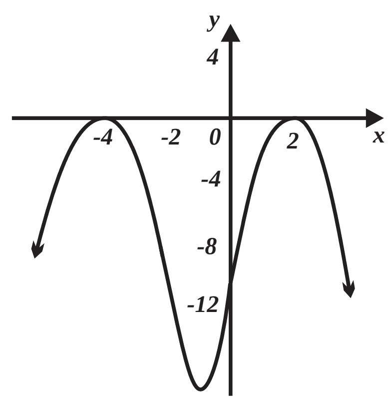


FIGURA I.32

d. Bosquejo de la curva asociada a $p\left(x\right)=x^3-5x^2+3x+9$.
i. $a_0=9$, entonces el punto de intersección con el eje “ y ” es $I_y\left(0,9\right)$.
ii. $a_3=1$ y $a_0=9$, entonces los posibles ceros racionales de p se encuentran entre ±1, ±3 y ±9, de ellos, sólo son ceros de p: $x=-1$, con multiplicidad 1 y $x=3$ con multiplicidad 2 (¡verifíquelo!); por tanto, los puntos de intersección con el eje “ x ” son $I_{x1}\left(-1,0\right)$, $I_{x2}\left(3,0\right)$.
iii. Comportamiento alrededor de los ceros.

<table>
<tr><th>INTERVALO</th><th>x_p</th><th>$p\left(x_p\right)$</th><th>p</th></tr>
<tr><td>$\left(-\infty,-1\right)$</td><td>-4</td><td>-147</td><td>Negativa</td></tr>
<tr><td>$\left(-1\,,\,3\right)$</td><td>0</td><td>9</td><td>Positiva</td></tr>
<tr><td>$\left(3\,,\,+\infty\right)$</td><td>$2$</td><td>$3$</td><td>Positiva</td></tr>
</table>

iv. En p, $a_3=1$ (coeficiente del término dominante) y $n=3$ (grado de la función) es impar.
Si a x le asignamos “números positivos extremadamente grandes”, entonces p asume “números positivos extremadamente grandes”.
Si a x le asignamos “números negativos extremadamente grandes”, entonces p asume “números negativos extremadamente grandes”, vea la *figura I.33*.

</td>
<td>

5. Las concavidades de la curva asociada a una función polinomial están relacionadas con la “paridad” de la multiplicidad de un cero, sin embargo, con los métodos algebraicos desarrollados al momento, en la mayoría de los casos no es posible obtener completamente los intervalos en los que éstas concavidades se dan.

6. Se requiere una condición más que el grado del término dominante.

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>Observaciones y sugerencias</th><th>Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo</th><th>Dificultades y soluciones</th></tr>
<tr><td>

ix. Proponga que el estudiante construya funciones polinomiales que satisfagan condiciones específicas.

</td><td>

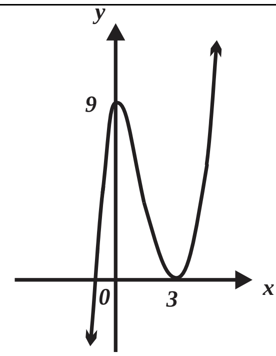


FIGURA I.33

Con base en el andamiaje algebraico antes tratado (teorema del factor, teorema del residuo, raíces, etc.) y las características geométricas, ya es posible construir funciones polinomiales.

ACTIVIDAD I.22 (CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES POLINOMIALES)

a. La función polinomial de grado tres, con ceros $x_{01}=-2$, $x_{02}=1$, $x_{03}=3$ y que interseque al eje de las ordenadas en $I_y\left(0,2\right)$ se construye como sigue:

i. Dado que $x_{01}=-2$, $x_{02}=1$, $x_{03}=3$ son sus ceros, entonces sus tres factores son $\left(x+2\right)$, $\left(x-1\right)$ y $\left(x-3\right)$.

ii. Puesto que interseca al eje de las ordenadas en $I_y\left(0,2\right)$, entonces $a_0=2$.

iii. En el producto $\left(x+2\right)\left(x-1\right)\left(x-3\right)$ el término sin la variable x es $\left(+2\right)\left(-1\right)\left(-3\right)=6$, por tanto, el término dominante debe ser $\frac{1}{3}$ (de otra forma no se cumple que que $I_y\left(0,2\right)$ sea el punto de intersección con el eje y).

La función polinomial que cumple con las características señaladas es

$$p\left(x\right)=\frac{1}{3}\left(x+2\right)\left(x-1\right)\left(x-3\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+2$$, vea la *figura I.34*.

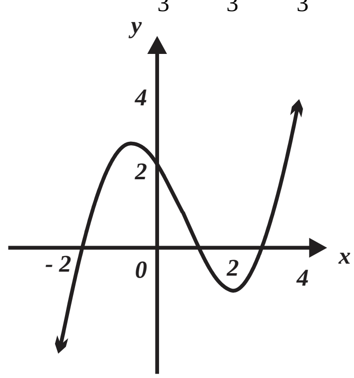
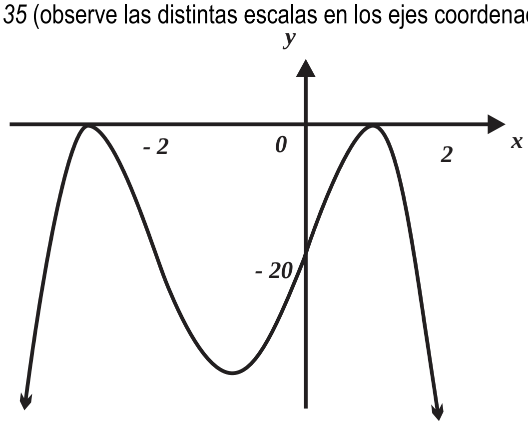
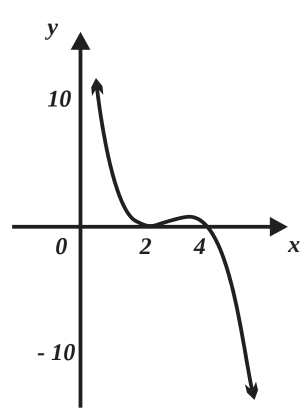


FIGURA I.34

b. La función polinomial de grado cuatro, con ceros $x_{01}=-3$, $x_{02}=1$, ambos de multiplicidad dos y con coeficiente -2 en el término dominante.

i. Si los ceros $x_{01}=-3$ y $x_{02}=1$ tienen multiplicidad dos, entonces la regla de correspondencia contiene los factores: $\left(x+3\right)^2$ y $\left(x-1\right)^2$.

</td><td></td></tr>
</table>

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
	ii. El coeficiente del término dominante es -2, por lo que la regla de correspondencia es $p(x)=-2(x+3)^2(x-1)^2=-2x^4-8x^3+4x^2+24x-18$, vea la *figura I.35* (observe las distintas escalas en los ejes coordenados).  **FIGURA I.35** **c.** La función polinomial de grado tres, tangente al eje horizontal en $I_{x1}\,(2,0)$, positiva alrededor de $x=2$ y cruza al eje horizontal en $I_{x2}\,(4,0)$. **i.** El cero $x_{01}=2$ tiene multiplicidad dos (por la condición de tangencia); por tanto, la regla de correspondencia incluye al factor $(x-2)^2$. Por otra parte $x_{02}=4$ es otro cero de la función, por lo que la regla de correspondencia también incluye el factor $(x-4)$. **ii.** La posición de los ceros y el hecho de que la función es positiva alrededor del primero de ellos indica que a_0 es positivo, concretamente $a_0=16$; por tanto $I_y\,(0,16)$. **iii.** La regla de correspondencia es $p(x)=-(x-2)^2(x-4)=-x^3+8x^2+20x+16$, vea la *figura I.36* (observe las distintas escalas en los ejes coordenados).  **FIGURA I.36** **d.** La función polinomial de grado tres, tangente al eje horizontal en $I_{x1}\,(1,0)$ y negativa alrededor de $x=1$, y cruza al eje horizontal en el punto $I_{x2}\,(-4,0)$.	

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

i. La condición de tangencia indica que el cero $x_{01}=1$ tiene multiplicidad dos, así la regla de correspondencia incluye al factor $(x-1)^2$, el cero $x_{02}=-4$ indica que la regla de correspondencia también incluye al factor $(x+4)$.

ii. La posición de los ceros y el hecho de que la función sea negativa alrededor de $x=1$ indica, que a_0 es negaitivo, concretamente, $a_0=-4$; por tanto $I_y(0,-4)$.

iii. La regla de correspondencia es

$$p(x)=-(x-1)^2(x+4)=-x^3-2x^2+7x-4$$, vea la *figura I.37*.

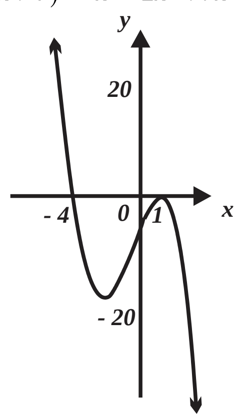


FIGURA I.37

e. En la construcción de una función polinomial f con ceros en: $x_{01}=0$, $x_{02}=2$ y $x_{03}=4$, de grado cuatro.

Construimos los factores lineales $x_{01}-0=0$, $x_{02}-2=0$ y $x_{03}-4=0$, uno de ellos debe ser de grado dos, por tanto $f(x)=-\frac{1}{3}(x-0)^2(x-2)(x-4)$, al desarrollar se obtiene $f(x)=-\frac{1}{3}x^4+2x^3-\frac{8}{3}x^2$ (existen más funciones polinomiales con estas características). Para trazar su curva asociada procedemos como sigue:

i. $a_0=0$, el punto de intersección con el eje "y" es $I_y(0,0)$.

ii. Los ceros de $f(x)=-\frac{1}{3}(x-0)^2(x-2)(x-4)$ son $x_{01}=0$, $x_{02}=2$, $x_{03}=4$. Los puntos de intersección con el eje "x" son $I_{x1}(0,0)$, $I_{x2}(2,0)$ y $I_{x3}(4,0)$.

iii. Si $x=1$, $f(1)=-1$; si $x=3$, entonces $f(3)=3$.

iv. En $f(x)$: $a_4=-\frac{1}{3}$ y $n=4$ es par, así:

Si a x le asignamos "números positivos extremadamente grandes", f asume "números negativos extremadamente grandes".

Si a x le asignamos "números negativos extremadamente grandes", f asume "números negativos extremadamente grandes".

f. Deseamos conocer la regla de correspondencia de una función polinomial con las siguientes características: grado 3, ceros en $x_{01}=2$, $x_{02}=-1$ y $x_{03}=3$, e

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
	interseque al eje y en $f(0)=4$. La función polinomial, una vez que ha sido factorizada tiene la forma $f(x)=a(x-2)(x+1)(x-3)$. Puesto que se cumple $f(0)=4$, entonces $4=a(0-2)(0+1)(0-3)$; es decir $4=6a$ o $a=\frac{2}{3}$. La regla de correspondencia de la función es $f(x)=\frac{2}{3}(x-2)(x+1)(x-3)=\frac{2}{3}x^3-\frac{8}{3}x^2+\frac{2}{3}x+4$. **g.** Deseamos conocer la regla de correspondencia de una función polinomial f con las siguientes características: grado 3, ceros en $x_{01}=-3$ con multiplicidad 2 y $x_{02}=4$, además, que contenga al punto $A(0\ ,\ 72)$. La función polinomial tiene factores $(x+3)^2$ y $(x-4)$; por tanto su regla de correspondencia es $f(x)=a(x+3)^2(x-4)$. Para determinar el valor de a utilizamos el hecho de que contiene al punto $A(0\ ,\ 72)$; es decir, $f(0)=72$. Entonces $72=a(0+3)^2(0-4)=-36a$; por tanto $a=-2$. La regla de correspondencia de la función es $f(x)=-2(x+3)^2(x-4)=-2x^3-4x^2+30x+72$. △	

Ejercicios y actividades adicionales

Con el propósito de reforzar los aprendizajes alcanzados por los estudiantes, UD. puede implementar en el desarrollo de sus clases algunos de los siguientes ejercicios o actividades.

1. Haga un bosquejo de la representación gráfica.

a. $f(x)=(2-x)(x-2)(x-1)$. **b.** $f(x)=x(2x-1)(3x+3)$. **c.** $f(x)=-\frac{1}{4}x(4x-3)(2x+4)$.

d. $f(x)=2(x+1)^2(x-3)$. **e.** $f(x)=-2x^2(x-1)^2$.

2. Bosqueje la gráfica (Determine: las intersecciones con los ejes coordenados, el comportamiento para valores extremos y los intervalos donde es positiva e intervalos donde es negativa).

a. $f(x)=x^3-x^2-6x$.

b. $f(x)=-4x^3+12x^2-12x$.

c. $f(x)=x^3-2x^2-11x+12$.

d. $f(x)=x^3-6x^2+2x+3$.

e. $f(x)=x^3-2x^2-6x+12$.

f. $f(x)=x^3+2x^2-11x-12$.

g. $f(x)=x^3+12x^2+21x+10$.

h. $f(x)=-2x^3-9x^2-3x+4$.

i. $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{15}{4}x+9$.

j. $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x-4$.

k. $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{8}{3}x^2-\frac{13}{3}x+2$.

l. $f(x)=2x^4+7x^3-6x^2-7x^2+4$.

m. $f(x)=-2x^4-7x^3+12x^2+28x-16$.

n. $f(x)=3x^4-\frac{28}{5}x^3-46x^2-\frac{28}{5}x+3$.

o. $p(x)=-3x^4-4x^3+3x+4$.

p. $p(x)=-x^4+8x^3-22x^2+24x-9$.

q. $f(x)=\frac{1}{3}x^4-\frac{10}{3}x^3+\frac{37}{3}x^2-20x+12$.

r. $f(x)=\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{3}x^3-x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$.

s. $p(x)=2x^4-11x^3-6x^2+64x+32$.

t. $f(x)=x^4-\frac{16}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{74}{3}x-8$.

u. $f(x)=x^4+\frac{3}{4}x^3-\frac{41}{4}x^2-\frac{21}{2}x-2$.

3. Construya una función polinomial que satisfaga las condiciones (hay muchas respuestas correctas).
a. Grado tres y único cero $x=-1$.
b. Ceros en $x=1$ y $x=\frac{1}{4}$ con multiplicidades uno y tres, respectivamente.
c. Ceros en $x=\frac{1}{2}$, $x=0$ y $x=2$ con multiplicidades uno, uno y dos, respectivamente.
d. Ceros en $x=-1$, $x=1$ y $x=-3$ con multiplicidades uno, dos y dos, respectivamente.

4. Construya una función polinomial que satisfaga las condiciones (hay muchas respuestas correctas)
a. Grado tres, con ceros en $x=-2$, $x=0$ y $x=2$, que interseque al eje de las ordenadas en $y=-2$.
b. Grado tres, con ceros en $x=5$, $x=8$ y $x=2$, que interseque al eje de las ordenadas en $y=4$.
c. Grado cuatro, con ceros en $x=-4$, $x=6$ y $x=2$, que interseque al eje de las ordenadas en $y=-1$.
d. Grado cuatro, con ceros en $x=-8$, $x=-3$, $x=0$ y $x=2$, que interseque al eje de las ordenadas en $A(\ 0\ ,3\ )$.
e. Grado cuatro, con ceros en $x=-2$, $x=1$, que interseque al eje de las ordenadas en $A(\ 0\ ,1\ )$.

5. Determine la regla de correspondencia de una función polinomial con las siguientes características:
a. Grado tres, interseque al eje “ y ” en -4, tenga ceros en -2, 1 y 5.
b. Grado tres, interseque al eje en “ y ” en 3, tenga ceros en -3, 1 y 2.
c. Grado cuatro, interseque al eje “ y ” en 8, tenga ceros en -1 (de multiplicidad 2) y 2 (de multiplicidad 2).

6. Determine la regla de correspondencia de una función polinomial con las siguientes características:
a. Grado tres, contenga al punto $A(\ 2\ ,-1\ )$, tenga ceros en -1, 1 y 6.
b. Grado tres, contenga al punto $A(\ 1\ ,3\ )$, tenga ceros en -2, 2 y 4.
c. Grado cuatro, contenga al punto $A(\ 1\ ,3\ )$, tenga ceros en 2 (de multiplicidad 2) y 4 (de multiplicidad 2).

7. Utilice la información contenida en la tabla y responda las preguntas. Explique su respuesta.

INTERVALO	f
$(-\infty,-2)$	Positiva
$(\ -2\ ,\ 1\ )$	Negativa
$(\ 1\ ,\ 2\ )$	Negativa
$(\ 2\ ,\ +\infty\ )$	Positiva

a. ¿Cuáles son los ceros de f ?
b. ¿Cuál es el menor grado posible de f ?
c. ¿Qué puede decir del comportamiento de la curva asociada a f en $x_0=1$?
d. ¿Puede ser impar el grado de f ?
e. ¿Cuál es el signo del término dominante?
f. Trace una curva que satisfaga las condiciones de la tabla.

8. Utilice la información contenida en la tabla y responda las preguntas.

INTERVALO	f
$(-\infty,-5)$	Positiva
$(\ -5\ ,\ -1\ )$	Negativa
$(-1\ ,\ 1\ )$	Positiva
$(\ 1\ ,\ 2\ )$	Negativo
$(\ 2\ ,\ +\infty\ )$	Positiva

a. ¿Cuáles son los ceros de f ?
b. ¿Cuál es el menor grado posible de f ? Explique su respuesta.
c. ¿Cuál es el signo del término dominante? Explique su respuesta.
d. Trace una curva que satisfaga las condiciones de la tabla.

9. Utilice la información contenida en la tabla y responda las preguntas.

INTERVALO	$f(x)$
$(-\infty, -4)$	Negativa
$(-4, 1)$	Positiva
$(1, 3)$	Negativa
$(3, +\infty)$	Positiva

a. ¿Cuáles son los ceros de f?
b. ¿Cuál es el menor grado posible de f? Explique su respuesta.
c. ¿Cuál es el signo del término dominante? Explique su respuesta.
d. Trace una curva que satisfaga las condiciones de la tabla y que interseque al eje y en $I_y(0, 3)$.

10. Una función polinomial de tercer grado interseca al eje de las abscisas en $I_{x1}(-4, 0)$, $I_{x2}(1, 0)$ y $I_{x3}(6, 0)$, interseca al eje de las ordenadas en $I_y(0, 8)$, y el signo del término dominante es positivo. ¿Cuál es su regla de correspondencia?

11. Una función polinomial de cuarto grado interseca al eje de las abscisas en $I_{x1}(2, 0)$ y $I_{x2}(5, 0)$, interseca al eje de las ordenadas en $I_y(0, -3)$, y el signo del término dominante es negativo. ¿Cuál es una posible regla de correspondencia?

12. ¿Cuál debe ser el valor de k para que la función $p(x) = 2x^3 + 6x^2 - k$, tenga un cero de multiplicidad dos en $x_0 = -2$, un cero de multiplicidad uno en $x_0 = 1$, e interseque al eje de las ordenadas en $I_y(0, -8)$.

13. ¿Cuál debe ser el valor de a_3 para que la función $p(x) = a_3x^3 - 4x^2 - 20x - 12$, tenga un cero de multiplicidad uno en $x_{01} = 3$, un cero de multiplicidad dos en $x_{02} = -1$ e interseque al eje de las ordenadas en $I_y(0, -12)$.

14. Trace la gráfica de una función polinomial de grado 3, tal que:
a. No tenga ceros.
b. Tenga un sólo cero.
c. Tenga sólo dos ceros.
d. Tenga tres ceros.

15. Trace la gráfica de una función polinomial de grado 4, que satisfaga la condición:
a. No tenga ceros.
b. Tenga un sólo cero.
c. Tenga sólo dos ceros.
d. Tenga tres ceros.
e. Tenga cuatro ceros.

SECCIÓN I.4	LAS FUNCIONES POLINOMIALES COMO MODELOS

APRENDIZAJES Y CONTENIDOS TEMÁTICOS

SECCIÓN	APRENDIZAJES	CONTENIDOS TEMÁTICOS
I.4	**Apr.6** Conocerá a las funciones como modelos de variación de fenómenos naturales, económicos y sociales.	Problemas de aplicación de las funciones polinomiales.

CONCEPTOS CLAVE

Los siguientes conceptos son fundamentales para un buen desarrollo del curso:
Problema de aplicación.

TIEMPO ESTIMADO

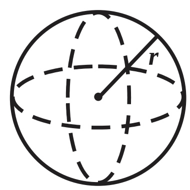
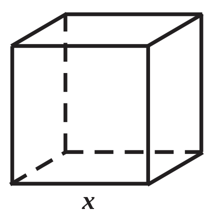
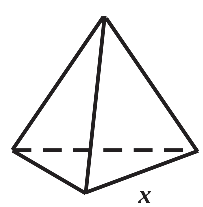
En situaciones regulares se invierten 3 horas en el desarrollo de los aprendizajes antes señalados.

PROCESOS Y ALGORITMOS BÁSICOS

No aplica.

DESARROLLO

Estrategias didácticas, actividades de enseñanza aprendizaje, materiales de apoyo, identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
	Las funciones polinomiales pueden utilizarse en la descripción del comportamiento del volumen de cuerpos y de sólidos geométricos en términos de alguna de sus dimensiones. Las actividades propuestas incluyen sólidos geométricos en los que el volumen ha sido expresado en términos de una función polinomial de grado tres. **ACTIVIDAD I.24** (FUNCIONES POLINOMIALES Y SÓLIDOS GEOMÉTRICOS) **a.** La función polinomial $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$ (donde $r>0$) describe el comportamiento del volumen de una esfera en función de la longitud de su radio, vea la *figura I.38.*  **FIGURA I.38** **b.** La función polinomial $V(x)=x^3$ (siempre que $x>0$) describe el comportamiento del volumen de un cubo en función de la longitud de sus lados, vea la *figura I.39.*  **FIGURA I.39** **c.** La función polinomial $V(x)=\frac{\sqrt{2}}{12}x^3$ (donde $x>0$) describe el comportamiento del volumen de un tetraedro en función de la longitud de sus lados, vea la *figura I.40.*  **FIGURA I.40** **d.** La función polinomial $V(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}x^3$ (donde $x>0$) describe el comportamiento del volumen de un octaedro en función de la longitud de sus lados, vea la *figura I.41*.	**1.** Dada la difilcultad que presenta la localización de aplicaciones polinomiales de grado superior a dos, debemos concentrarnos en tratar situaciones relacionadas con volúmenes.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

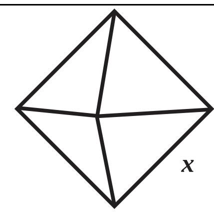


FIGURA I.41

e. La función polinomial $V(x)=\frac{1}{3}x^3$ (donde $x>0$) describe el comportamiento del volumen de una pirámide cuadrangular de altura con longitud igual a la longitud de lado de la base, vea la *figura I.42.*

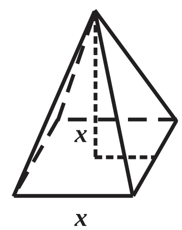


FIGURA I.42

△

Las combinaciones de los sólidos geométricos descritos en la *actividad I.23* presentan gran utilidad en la fabricación de diversos componentes en la industria y en el diseño y posterior construcción de estructuras arquitectónicas.

ACTIVIDAD I.25 (FUNCIONES POLINOMIALES Y ESTRUCTURAS)

a. Algunas estructuras arquitectónicas (torres, almacenes, diques, etc.) están formadas por un cubo y una pirámide. La función polinomial que describe el volumen de este tipo de estructuras es $V(x)=x^3+\frac{1}{3}ax^2$, donde a y x son números positivos, vea la *figura I.43*.

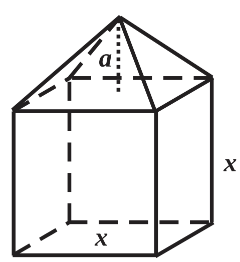


FIGURA I.43

b. Ciertas estructuras (torres, columnas, lámparas, adornos, almacenes, etc.) están formadas por un cubo y una semiesfera, vea la *figura I.44*. La función polinomial que describe el volumen de este tipo de estructuras es: $V(x)=x^3+\frac{2}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$, donde x representa un números positivo.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

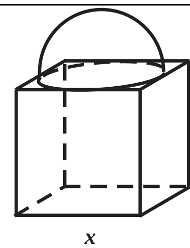


FIGURA I.44

c. Estructuras como, remaches, envases para desodorantes, etc., se diseñan tomando como base un cilindro y una semiesfera, vea la *figura I.45.* La función polinomial que describe el volumen de este tipo de estructuras es: $V(r) = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^3$.

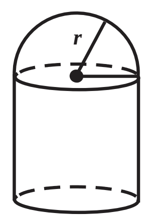


FIGURA I.45

d. Cajas, cofres, ataúdes, envases, etc., están formadas por un prisma rectangular coronado por un semicilindro, vea la *figura I.46.* La función polinomial que describe el volumen de estas estructuras es: $V(x) = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 h + x^3$, donde h y x son números positivos.

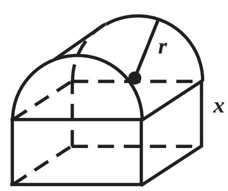


FIGURA I.46

e. Torres, almacenes, proyectiles, adornos, etc., incluyen en su diseño un prisma triangular y un tetraedro, vea la *figura I.47*. La función polinomial que describe el volumen de estos elementos es: $V(x) = \frac{\sqrt{2}}{12}x^3 + \frac{1}{3}x^3$, donde x es un número positivo.

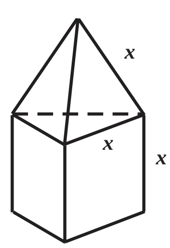


FIGURA I.47

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

f. Casas, torres, cajas, etc., tienen la forma de prisma rectangular con dimensiones de medidas: x, ax y bx, coronado por un prisma triangular que tiene como base un triángulo equilátero, vea la *figura I.48*. La función polinomial que describe el volumen de estos objetos es: $V(x)=abx^3+\frac{\sqrt{3}}{4}ax^3$.

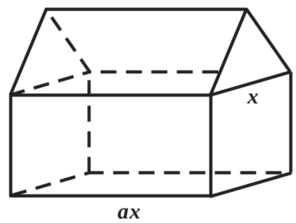


FIGURA I.48

g. Implementos en los que se da de comer al ganado, han sido diseñados construyendo un paralelepípedo con una concavidad en forma de prisma triangular, vea la *figura I.49*. La función polinomial que describe el volumen de estos elementos es: $V(x)=abx^3-\frac{\sqrt{3}}{4}ax^3$.

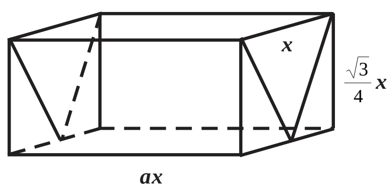


FIGURA I.49

△

ACTIVIDAD I.26 (APROXIMACIONES)

Las funciones polinomiales se utilizan en diversas ramas de las matemáticas como método de aproximación a otras funciones.

a. Aproximación de $f(x)=\frac{1}{1-x}$ en el intervalo $(-1,1)$ por medio de una función polinomial. Al efectuar la operación $\frac{1}{1-x}$ obtenemos $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$; por tanto, $f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$, en otros cursos de matemáticas se demuestra que ésta expresión es válida cuando x pertenece al intervalo $(-1,1)$.

b. La función "exponencial natural", que estudiaremos más adelante, cuya regla de correspondencia es $f(x)=e^x$, también puede ser escrita en términos de un función polinomial, así $f(x)=e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\cdots$.

El número representado por "e" es uno de los números más importantes en matemáticas y se denomina "número de Euler" o constante de Napier.

i. Aproximación del número "e" por medio de una función polinomial de tercer grado: $f(1)=e^1=1+1+\frac{1^2}{2}+\frac{1^3}{6}=2.\overline{6}$.

ii. Aproximación del número "e" por medio de una función polinomial de cuarto

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

grado $f(1) = e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{6} + \frac{1^4}{24} \approx 2.70833$.

△

ACTIVIDAD I.27 (REPOSTERÍA)

a. Se pretende elaborar galletas con forma de prisma de base cuadrada. Las galletas deben tener un volumen de 9 centímetros cúbicos y su altura debe ser la tercera parte de la longitud de la base. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del molde de la galleta?

i. La *figura I.50* muestra la forma del molde.

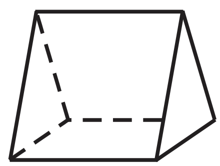


FIGURA 1.50

ii. Representemos por x la longitud de la base.

iii. Para determinar las dimensiones del molde, debemos tomar en cuenta que el volumen del prisma se calcula con la relación $V = B \cdot h$; esto es $9 = x^2\left(\frac{1}{3}x\right)$, esta ecuación es equivalente a $x^3 - 27 = 0$. La ecuación $x^3 - 27 = 0$ tiene como única raíz real $x = 3$. Por tanto, el molde debe tener las siguientes dimensiones: base $x = 3$ centímetros, altura $h = \frac{1}{3}(3) = 1$ centímetros.

b. Se construirá un molde (en forma de pirámide, con base cuadrada) para fabricar caramelos que contengan un volumen de 25 centímetros cúbicos. La altura h de los caramelos debe medir 2 centímetros menos que la longitud de los lados de la base.

i. La *figura 1.49* muestra la forma del molde.

ii. Representemos por x la longitud de la base, $x - 2$ representa la longitud de la altura.

iii. Para determinar las dimensiones del molde, debemos tomar en cuenta que el volumen de la pirámide se calcula con la relación $V = \frac{1}{3}B \cdot h$; esto es, $25 = \frac{1}{3}x^2(x - 2)$, donde obtenemos $x^3 - 2x^2 - 75 = 0$. La ecuación $x^3 - 2x^2 - 75 = 0$ tiene como única raíz real $x = 5$. Por tanto, el molde debe tener dimensiones: base $x = 5$ unidades, altura $x - 2 = 3$ unidades.

△

ACTIVIDAD I.28 (SALCHICHAS)

La compañía alimenticia desea elaborar salchichas. Deben tener forma de cilindro circular recto de 12 centímetros de largo con una semiesfera en cada extremo. La compañía desea controlar los volúmenes de las salchichas asignando valores al radio. **i.** La *figura I.51* muestra un esquema de la salchicha.

ii. El volumen de la parte cilíndrica de la salchicha es el producto del largo del

Observaciones	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y

y sugerencias		soluciones

cilindro (que es de doce centímetros) y el área (πr^2) de la base, entonces $V_C = 12\pi r^2$ centímetros cúbicos. Los dos extremos semiesféricos forman una esfera de radio r cuyo volumen es $V_E = \frac{4}{3}\pi r^3$. Así, el volumen V_S de la salchicha, en función del radio, es $V_S(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + 12\pi r^2$ con $r > 0$ centímetros cúbicos.

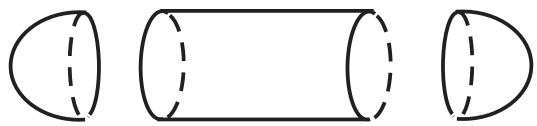


FIGURA 1.51

△

ACTIVIDAD I.29 (ENGORDA)
Se pretende "engordar" cierta especie de jabalíes para posteriormente liberarlos y repoblar cierto lugar. El peso de los jabalís depende de la dieta que se utilice. Se han implementado dos dietas: una en base al alimento que encuentran normalmente en su hábitat y la segunda ha sido preparada en el laboratorio. Se ha encontrado que con la dieta preparada en el laboratorio, el aumento de peso en función del tiempo está dado por $p(x) = -2x^4 + 8x^2 + 4$ Kilogramos, donde x está en años. Si el jabalí sigue la dieta natural, su aumento de peso está dada por $q(x) = -2x^4 + 12x^2 + 4$.

Comentarios:

a. Note que inicialmente (cuando $x = 0$), ambos modelos indican que el jabalí tiene el mismo peso:

$$p(0) = -2(0)^4 + 8(0)^2 + 4 = 4 \text{ Kilogramos.}$$

$$q(0) = -2(0)^4 + 10(0)^2 + 4 = 4 \text{ Kilogramos.}$$

b. Los ceros de $p(x) = -2x^4 + 8x^2 + 4$ y $q(x) = -2x^4 + 12x^2 + 4$ son las raíces de las ecuaciones: $-2x^4 + 8x^2 + 4 = 0$ y $-2x^4 + 12x^2 + 4 = 0$.

Para $p(x) = -2x^4 + 8x^2 + 4$, $-2x^4 + 8x^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 4x^2 - 2 = 0$, entonces $x^2 = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-2)}}{2}$, de donde $x^2 = 2 \pm \sqrt{6}$, así:

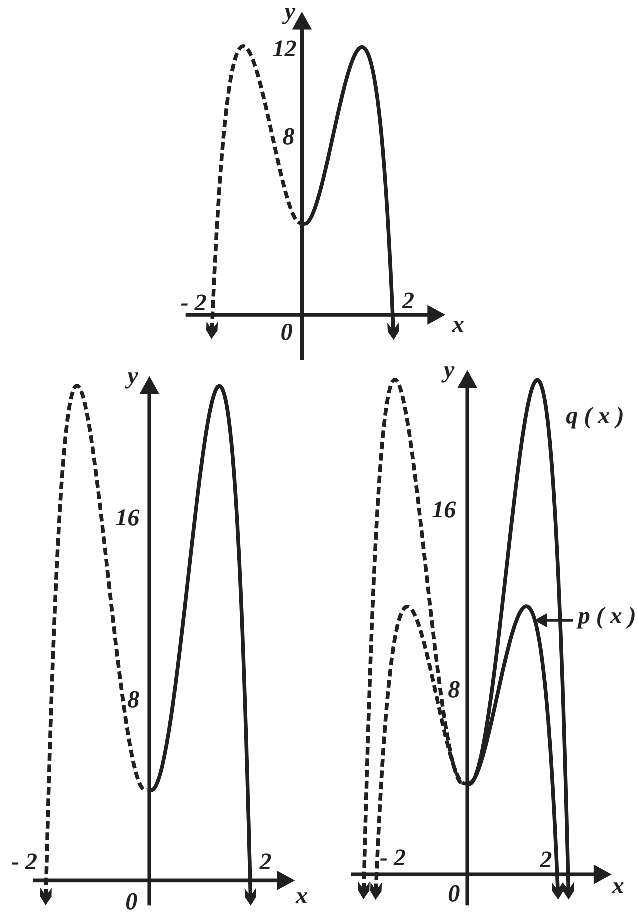
$$x_1 = \sqrt{2 + \sqrt{6}} \text{ y } x_2 = -\sqrt{2 + \sqrt{6}}.$$

Para $q(x) = -2x^4 + 12x^2 + 4$, $-2x^4 + 12x^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 6x^2 - 2 = 0$, entonces $x^2 = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-2)}}{2}$, de donde $x^2 = 3 \pm \sqrt{11}$

por tanto, $x_1 = \sqrt{3 + \sqrt{11}}$ y $x_2 = -\sqrt{3 + \sqrt{11}}$.

Los ceros de las funciones "aumento de peso", indican que el "aumento de peso" es cero para esos tiempos.

c. Las curvas correspondientes se muestran en la *figura I.52*. La parte punteada de las curvas carece de significado (puesto que la variable x representa tiempo. Por otra parte, la dieta $q(x) = -2x^4 + 12x^2 + 4$ es más eficiente para engordar a los jabalís (las imágenes de x son mayores bajo $q(x)$ que bajo $p(x)$ en el

	intervalo de tiempo $\left(0 \,,\, \sqrt{3+\sqrt{11}} \right)$ años.  FIGURA 1.52 $\triangle$	

Ejercicios y actividades adicionales

Con el propósito de reforzar los aprendizajes alcanzados por los estudiantes, UD. puede implementar en el desarrollo de sus clases algunos de los siguientes ejercicios o actividades.

1. Se desea construir un tanque de acero para almacenar gas. El tanque tiene forma de cilindro circular recto de 12 metros de largo con una semiesfera en cada extremo. Exprese el volumen del tanque en términos del radio.

2. Se desea construir un tanque de acero para almacenar gas. El tanque tiene forma de cilindro circular recto con una semiesfera en cada extremo. La longitud de la parte cilíndrica debe ser cinco veces la longitud del radio. Exprese el volumen del tanque en términos del radio.

3. A partir de una lámina rectangular de ancho a y largo b se quiere construir un canal de sección transversal rectangular, para transportar aceite. Las paredes del canal se construirán doblando la lámina perpendicularmente a sus lados. Determine la función que describe el volumen de un tramo del canal de longitud igual a diez veces la base, en términos de la altura x del canal.

4. Se desea construir un silo (almacén) con forma de cilindro circular recto de 20 metros de largo, y coronado con un cono en la parte superior, la altura del cono mide el triple que su radio. Exprese el volumen del silo en términos de la longitud del radio.

5. Determine la función que describe el volumen de la figura que se obtiene conforme se perfora un cubo de lado de longitud de 4 centímetros. Suponga que la perforación tiene forma de prisma cuadrangular y la longitud de la altura es el doble que la longitud de la base.

6. Se construye una caja sin tapa recortando un pequeño cuadrado de cada esquina de una hoja rectangular (de aluminio) y luego doblando hacia arriba los lados. La hoja tiene dimensiones 90 por 180 centímetros. ¿Cuál es la función que describe el volumen de la caja?

7. Los paquetes que acepta cierta compañía de mensajería, deben tener forma de ortoedro, sus caras cuadradas deben tener longitud x y los costados rectangulares deben tener de longitud y. También, el perímetro máximo permitido debe cumplir que la suma de su longitud y su sección transversal debe ser 300 centímetros. ¿Cuál es la función que describe el volumen del paquete?

8. Exprese el volumen de un cono circular recto en función de su altura, si tiene base de longitud r y se encuentra inscrito en en una esfera de radio de longitud $R=1$.

9. Un cilindro circular recto se ha inscrito en una esfera de longitud de radio $R=1$. Exprese el volumen del cilindro en función de su radio.

10. La utilidad de cierta compañía se determina por la relación $U=I-G$, en donde I representa el ingreso total que generó la compañía y G los gastos totales de operación del negocio. Si $I(x)=0.0125x^2+412x$ modela el ingreso total y $G(x)=0.00135x^3+12.225$ modela el costo total, donde x es el número de clientes.

a. ¿Cuál es la función que describe el comportamiento de las utilidades?
b. ¿Cuántos clientes debe tener la compañía para tener utilidades?

11. Se ha encontrado que la población de cierta especie de roedores, puede modelarse por medio de la función $f(t)=-0.00001t^3+0.002t^2+1.5t+100$. Utilice un software graficador y:

a. Trace la curva correspondiente.
b. ¿Cuál es la población máxima de roedores y cuándo ocurre?
c. De acuerdo a este modelo, ¿cuándo se extinguirá la población de roedores?

12. Suponga que la altura de cierta clase de pino se modela mediante la función $h(t)=-0.001t^3+0.044t^2-0.152t+0.26$, donde t es su edad en años. Utilice un software graficador y:

a. Trace la curva correspondiente.
b. Estime la edad del árbol en la que el crecimiento es más rápido.

13. Suponga que el ingreso total I (en millones de pesos) está relacionado con el gasto en publicidad por medio de $I(t)=-0.000001t^3+0.006t^2$, $0\le t\le 400$, donde t representa la cantidad (en miles de pesos). Utilice un software graficador y:

a. Trace la curva correspondiente.
b. Estime el punto en que el crecimiento de la función es más rápido.

SD 1. ELEMENTOS DE UNA FUNCIÓN

APRENDIZAJES

Apr.1 Explorará diferentes relaciones, reconociendo las condiciones necesarias para determinar si una relación es función, la simbolizará y distinguirá el dominio y el rango.

Apr.3 Comprenderá el significado de la notación funcional y lo utilizará para representar y evaluar funciones polinomiales.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

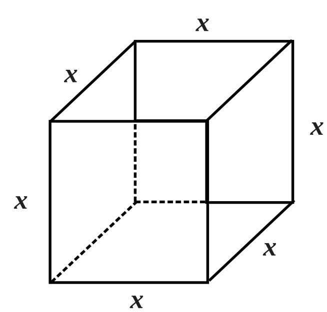
Relación, relación entre dos variables, regla de correspondencia, dominio y rango.

APERTURA

Presentación del vídeo:
Matemáticas profe Alex. (2018, abril 11). *Dominio y rango de una función* [Vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=H40lcwlgPMk

DESARROLLO

1. La siguiente figura muestra un cubo, sus aristas tienen longitud x.



¿Cuáles de sus características puedes medir?

____

2. Qué ocurre si la dimensión de las aristas del cubo cambia?

a. El perímetro ________________________________

b. El área ________________________________

c. El volumen ________________________________

3. Representa por P el perímetro, por A el área y por V el volumen. Escribe la forma (fórmulas) en que las características antes señaladas (perímetro, área y volumen) se relacionan con la longitud de las aristas.

a. Perímetro ________________________________

b. Área ________________________________

c. Volumen ________________________________

4. Los símbolos $p(x)$, $A(x)$ y $V(x)$ indican que el perímetro P, el área A y el volumen V son función (respectivamente) de la longitud de las aristas del cubo (longitud a la que tú le asignas los valores). Rescribe las "formulas" de la pregunta 3. En términos de los símbolos:

$p(x)=$ ________________

$A(x)=$ ________________

$V(x)=$ ________________

El nombre formal de las relaciones ("fórmulas") anteriores es el de <u>regla de correspondencia o regla de asociación</u>.

5. En las relaciones obtenidas en el inciso **3.,** ¿a cuál de las variables x, p, A y V le asignas asignas los valores (números)?

____.

6. Investiga: En una relación entre dos variables, a la variable que le asignas valores (los números) se llama variable ____________________________**;** por tanto, en las relaciones $p(x)=$ __________, $A(x)=$ ________________ y $V(x)=$ __________________, la variable x es la ____.

7. En las relaciones entre las variables x, p, A y V tu asignas valores a la variable x por lo que se llama variable __________________________, las restantes variables p, A y V se conocen como ______________________________.

8. Todos los números que es posible asignarle una la variable independiente (en un contexto dado) x y para los que $p(x)$, $A(x)$ y $V(x)$ (tienen sentido) se conce como ____y se representa por $dom(P)$, $dom(A)$ y $dom(V)$.

9. Investiga; Por otra parte, una vez que asignas un número (valor) a x obtienes un número para $p(x)$ (o para $A(x)$ y $V(x)$) que se conoce como "imagen de x bajo p (o bajo A o V), el conjunto de todas las imágenes es el "conjunto ____".

CIERRE

Formalización de conceptos

1. Una variable es una característica medible de un ___________________________________.
2. Una variable se denomina independiente cuando ___________________________________.
3. En una relación entre dos variables, recibe el nombre de variable independiente______________________________ ____.

4. La forma en que se relacionan dos variables se conoce como____ o ____.

5. El conjunto de todos los números que se asignan a una variable independiente se llama_________________ de la relación.
6. El conjunto de todos los números que asume la variable dependiente (o relación) se llama _____________________________ de la relación.

SD 2. IDENTIFICACIÓN DE RELACIONES Y FUNCIONES

APRENDIZAJES

Apr.1 Explorará diferentes relaciones, reconociendo las condiciones necesarias para determinar si una relación es función, la simbolizará y distinguirá el dominio y el rango.

Apr.3 Comprenderá el significado de la notación funcional y lo utilizará para representar y evaluar funciones polinomiales.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

Relación, relación entre dos variables, regla de correspondencia, dominio y rango.

APERTURA

Proyección de los vídeos (puede proponerse como actividad extra clase):

a. Cogollo, J. (2014, mayo 26). *Criterio de la recta vertical* [Vídeo].
Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=hw1xFechhHM

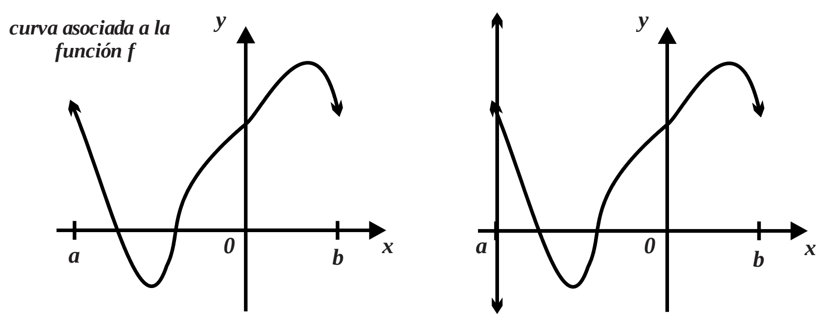
b. Matematicatuya (2014, mayo 26). *Dominio y rango gráficamente. Prueba de la recta vertical* [Vídeo].
Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=4HyLpT9TNBM

DESARROLLO

1. Complete la definición de función.

Una función es una ______________________________________ entre dos variables, de manera que a cada número asignado a la primera variable le corresponde un único _______________de la ______________________________________.

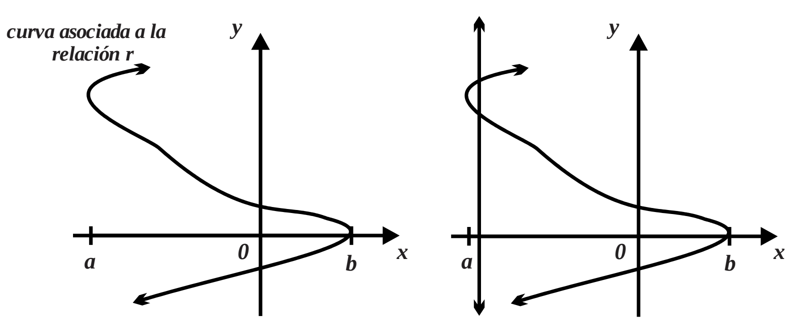
2. La siguiente figura es la representación gráfica de una función cuyo dominio es el intervalo $[\,a\ ,\ b\,]$.



En el mismo plano cartesiano ha sido trazada una línea recta vertical, supón que esta recta se puede desplazar (verticalmente), ¿en cuantos puntos corta a la curva asociada a la función? ____________________________________

3. Esto significa que a cada número del dominio le corresponde ______________________imagen (o un único número de rango).

4. La siguiente figura es la representación gráfica de una relación con dominio en el intervalo $[\,a\ ,\ b\,]$.



Si se tiene una recta vertical, imagina esta se puede desplazar (horizontallmente), ¿en cuántos puntos interseca a la curva asociada a la relación?

____.

5. ¿Por qué la curva mostrada en la figura anterior no corresponde a una función? Explica.

____.

6. ¿Qué condición debe cumplir la curva asociada a una relación para que esta relación pueda considerse como una función?

____.

CIERRE

Establece un criterio gráfico para definir cuándo una curva en el plano cartesiano pertenece a una función.

____.

SD 3. INTERVALOS

APRENDIZAJES

Apr.2 Usará la notación de intervalos para representar el dominio y rango de una función.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

Intervalos.

APERTURA

Proyección de los vídeos (puede proponerse como actividad extra clase):

a. Salvamate (2016, octubre 18) *Desigualdades e intervalos parte 1 - relación de orden e intervalos* [Vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=xOCzZ4W89is

b. MateMovil (2017, junio 26) *Intervalos - Abiertos / Cerrados / Semiabiertos - Ejercicios Resueltos* [Vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=mklq6aIHPXc

c. Salvamate (2017, marzo 19) *Hallar el DOMINIO y RANGO de una Función a partir de su Gráfica* [Vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=2CYya8dJovg

d. Miguemáticas (2016, octubre 7) *Intervalos: Definición y ejemplos* [Vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=jdOKAl6M46Q

DESARROLLO

Guíe a los estudiantes para que respondan el siguiente cuestionario:

1. ¿Qué es un intervalo de números reales?

____

2. Señale los tres tipos de intervalos existentes sobre la recta real. ¿Cómo se representan?

____.

3. Proporcione ejemplos de intervalos de los diferentes tipos de intervalos que señaló en la pregunta anterior.

____.

4. ¿Qué características los distinguen?

____.

5. ¿Cómo se representan los intervalos en términos de las relaciónes de orden?

____.

6. ¿Cómo se determna el dominio de una función a partir de su representación gráfica?

____.

7. ¿Cómo se determina el rango (recorrido o conjunto imagen) de una función a partir de su representación gráfica? Explica.

____.

8. Generalización. Suponga que a y b son núemeros reales, utilice relaciones de orden y defina las siguientes clases de intervalos.

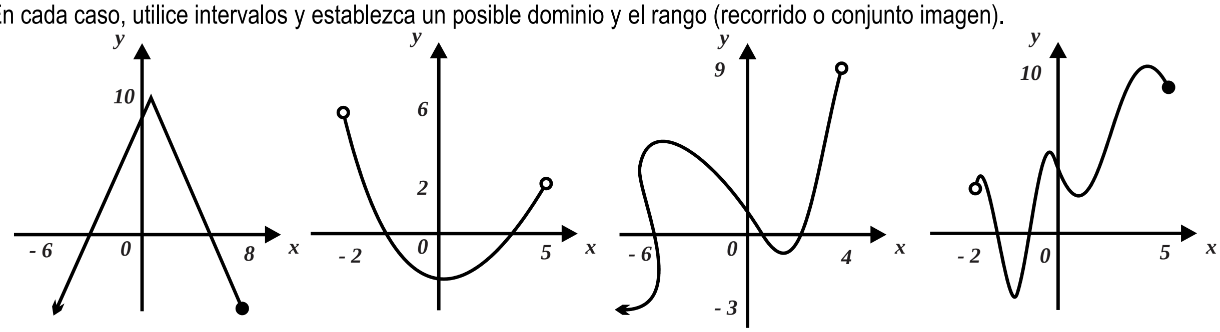
a. $[\ a\ ,\ b\ ]=$

b. $(\ a\ ,\ b\ )=$

c. $[\ a\ ,b\ )=$

d. $(\ a\ ,b\ ]=$

9. Practicando.
En cada caso, utilice intervalos y establezca un posible dominio y el rango (recorrido o conjunto imagen).



a. **b.** **c.** **d.**

SD 4. EL TEOREMA DEL RESIDUO

APRENDIZAJES

Apr.4 Aplicará la división sintética, el teorema del residuo, el teorema del factor y su recíproco para determinar los ceros de f y su gráfica.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

Teorema del residuo.

APERTURA

Proyección previa de los vídeos.

a. MateMovilAcademia (26 junio 2017) *Teorema del Factor, Teorema del Residuo* [Vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=8-cKktg2-FI

b. julioprofe (14 junio 2010) *Aplicación del teorema del residuo* [Vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=Pv-HtVEHoSI

DESARROLLO

Guíe a los estudiantes para que respondan el siguiente cuestionario.

En la operación $\begin{array}{r} c(x) \\ x-a\,\overline{\big)\,p(x)} \\ r \end{array}$, $p(x)$ y $c(x)$ representan funciones polinomiales ($c(x)$ tiene menor grado que $p(x)$), $x-a$ es un polinomio de primer grado y r es un número real.

1. Proporciona los nombres de los elementos contenidos en la operación (división) $\begin{array}{r} c(x) \\ x-a\,\overline{\big)\,p(x)} \\ r \end{array}$

$p(x)$ ______________________ $c(x)$ ______________________

$x-a$ ______________________ r ______________________

2. Si rescribes $\begin{array}{r} c(x) \\ x-a\,\overline{\big)\,p(x)} \\ r \end{array}$ en términos del algoritmo de la división obtienes:

____

3. En la expresión que obtuviste en el inciso **2.**, calcula $p(a)$ (es decir, calcula la imagen del número a), así:

$p(a)=$

____ .

4. Compara el resultado que obtuviste en **3.**, con la operación $\begin{array}{r} c(x) \\ x-a\,\overline{\big)\,p(x)} \\ r \end{array}$, ¿qué observas?

____ .

5. Completa:

La imagen de la función polinomial $p(x)$ cuando ______________________________ coincide con el _______________ de la operación (división). $x-a\overline{)\,p(x)\,}$.

CIERRE

Formalización de las observaciones anteriores.

Teorema del residuo

Si se divide el polinomio $p(x)$ entre ____________________, hasta obtener un residuo independiente de x, entonces el __________________________________ es igual a_______________________.

SD 5. EL TEOREMA DEL FACTOR Y SU RECÍPROCO

APRENDIZAJES

Apr.4 Aplicará la división sintética, el teorema del residuo, el teorema del factor y su recíproco para determinar los ceros de f y su gráfica.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

Teorema del factor y su recíproco.

APERTURA

Discusión sobre:

1. El enunciado del teorema del residuo.

Teorema del residuo:

Si se divide el polinomio $p(x)$ entre $x-a$, hasta obtener un residuo independiente de x, entonces el residuo de $\frac{p(x)}{x-a}$ es igual a $p(a)$, es decir $p(a)=r$.

2. La definición de cero de una función polinomial.

DESARROLLO

Guíe a los estudiantes para que respondan las preguntas.

a. Si a es una raíz de $p(x)=0$, entonces $p(a)=$ ___________.

De acuerdo con el teorema del residuo $r=$ ____________________________. Por consiguiente; $\frac{p(x)}{x-a}=c(x)$ y

$p(x)=$ ________________________; por tanto, $x-a$ es un factor de $p(x)$.

b. (**Recíproco)**

Por otra parte, si $x-a$ es un factor de $p(x)=0$, entonces el residuo de $\frac{p(x)}{x-a}$ es ____________.

Si el residuo de $\frac{p(x)}{x-a}$ es cero, entonces___________________ es raíz de _______________________.

CIERRE

Formalización de las observaciones anteriores.

Teorema del factor

"Si a es una raíz del polinomio $p(x)$, entonces ____", recíprocamente, "si $x-a$ es un factor de $p(x)=0$, entonces ____________________________________".

SD 6. COMPORTAMIENTO EXTREMO DE LAS FUNCIONES POLINOMIALES

APRENDIZAJES

Apr.5 Construirá una función polinomial a partir de las raíces reales de su ecuación y bosquejará su gráfica. A partir de una función polinomial calculará los ceros y realizará su gráfica.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

Gráfica de una función polinomial, comportamiento extremo.

APERTURA

1. Identificación de las características de la función polinomial $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ tales como: grado, término lider (dominante) y coeficiente del término lider.

2. Significado de las frases: "asiganción de valores positivos extremadamente grandes a la variable x" y "asiganción de valores negativos extremadamente grandes a la variable x", en $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$.

3. Revisión de los vídeos (puede propoponerse como actividad extra clase):

a. KhanAcademyEspañol (2014, 26 enero). *El comportamiento en los extremos de un polinomio* [Vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=KK8eBXVVd8U

b. Academatica (2012, 15 diciembre). *Funciones polinomiales* - Comportamiento en el infinito [Vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=cvL5w3lJXoU

DESARROLLO

a. Identifique el término líder (dominante) y el coeficiente de dicho término de la función polinomial $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$.

____

b. Establezca el signo de $a_n x^n$, suponga que a_n y x^n representan números reales, ¿qué signo tiene el producto $a_n x^n$ cuando:

i. a_n es positivo y x^n es positivo? ____

ii. a_n es positivo y x^n es negativo? ____

iii. a_n es negativo y x^n es positivo? ____

iv. a_n es negativo y x^n es negativo? ____

c. Suponga que en la expresión x^n la potencia es entera, responda:

i. Si en x^n, n es un número positivo, es par y a x le son asignados números positivos extremadamente grandes, entonces x^n tiene signo ____.

ii. Si en x^n, n es un número positivo, es par, y a x le son asignados números negativos extremadamente grandes, entonces x^n tiene signo ____.

iii. Si en x^n, n es un número positivo, es impar, y a x le son asignados números positivos extremadamente grandes, entonces x^n tiene signo ____.

iv. Si en x^n, n es un número positivo, es impar, y a x le son asignados números negativos extremadamente grandes, entonces x^n tiene signo ____.

Considere que en una función polinomial $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, el término dominante $a_n x^n$ define el comportamiento extremo (asignaciones extremadamente grandes ya sea positivas o negativas).

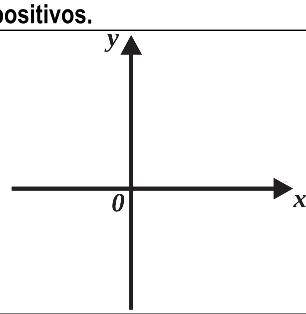
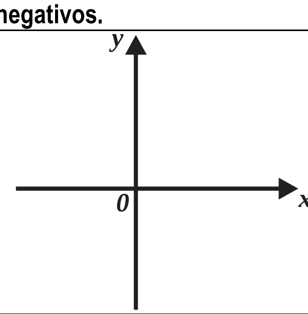
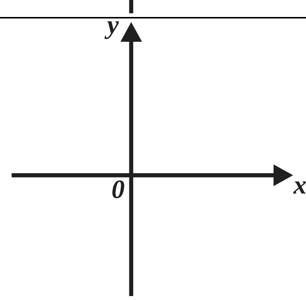
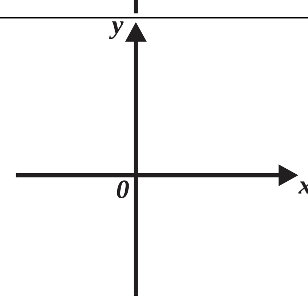
d. Suponga que a_n es positivo ($a_n > 0$) y complete la siguiente tabla:

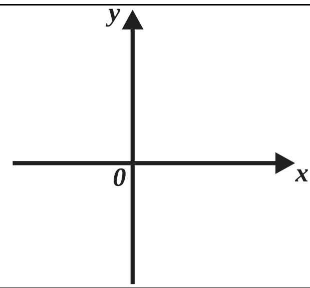
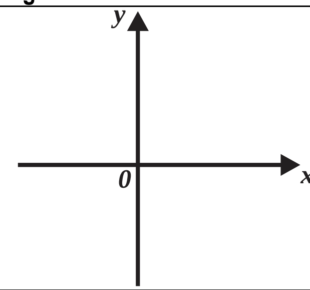
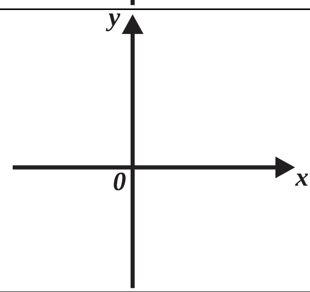
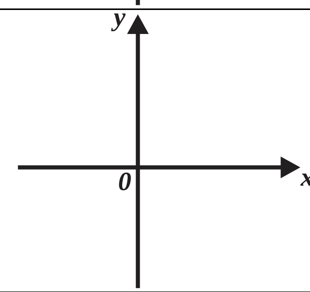
	Sí a x se le asignan números extremadamente grandes y positivos.	**A x se le asignan números extremadamente grandes y negativos.**
La potencia n es par	$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ tiene signo ________________	$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ tiene signo ________________
La potencia n es impar	$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ tiene signo ________________	$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ tiene signo ________________

e. Suponga que a_n es negativo ($a_n<0$) y complete la siguiente tabla:

	Sí a x se le asignan números extremadamente grandes y positivos.	**A x se le asignan números extremadamente grandes y negativos.**
La potencia n es par	$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ tiene signo ________________	$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ tiene signo ________________
La potencia n es impar	$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ tiene signo ________________	$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ tiene signo ________________

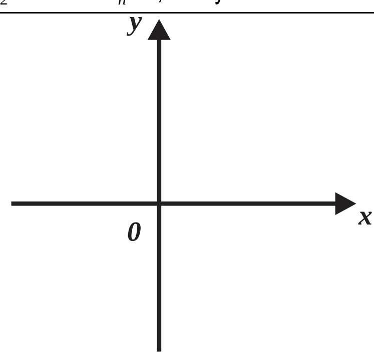
f. Tome como base las observaciones antes hechas y complete la siguiente tabla haciendo un bosquejo del comportamiento extremo de $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$.

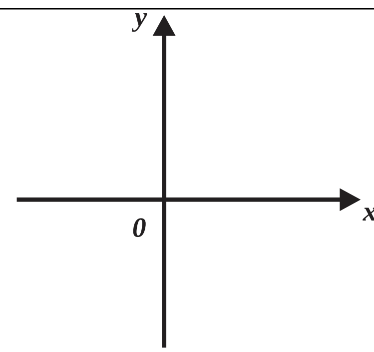
	$a_n>0$, **a x se le asignan números extremadamente grandes y positivos.**	$a_n>0$, **a x se le asignan números extremadamente grandes y negativos.**
La potencia n es par		
La potencia n es impar		

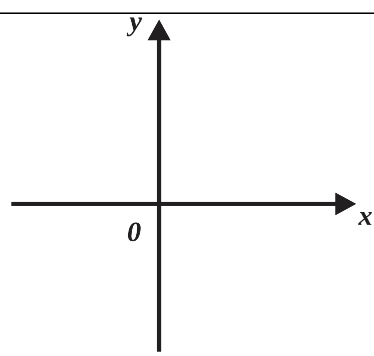
	$a_n > 0$, **a** x **se le asignan números extremadamente grandes y positivos.**	$a_n > 0$, **a** x **se le asignan números extremadamente grandes y negativos.**
La potencia n **es par**		
La potencia n **es impar**		

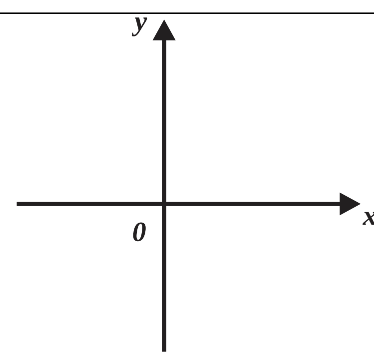
CIERRE

Dibuje en la siguiente los cuatro comportamientos extremos posibles de la función polionomial $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, incluya sus características.









SD 7. BOSQUEJO DE LA GRÁFICA DE $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$.

APRENDIZAJES

Apr.5 Construirá una función polinomial a partir de las raíces reales de su ecuación y bosquejará su gráfica. A partir de una función polinomial calculará los ceros y realizará su gráfica.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

Bosquejo de la gráfica de la función $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$.

APERTURA

1. Discusión sobre:

a. El número de ceros (reales) de la función polinomial $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$.

b. Multiplicidad de un cero.

c. El teorema de la factorización lineal.

DESARROLLO

1. Suponga que la función polinomial $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ tiene únicamente un cero real siendo este $x=x_0$ de multiplicidad tres.

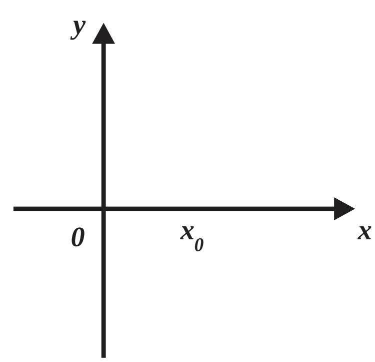
a. Entonces al aplicar el teroema de factorización lineal, la función puede rescribirse como:

____

i. Suponga que $a_3>0$ (el coeficiente dominante es positivo) en la expresión que obtuvo antes, y complete la siguiente tabla:

x	Signo de $p(x)$
Negativa y extremadamente grande.	
$\frac{1}{2}x_0$	
x_0	
$\frac{3}{2}x_0$	
Positiva y extremadamente grande.	

ii. Suponga que la curva asociada a $p(x)=a_3(x-x_0)^3$ (con $a_3>0$) es suave y continua (sobre todo su dominio), haga un bosquejo de su representación en el plano cartesiano.

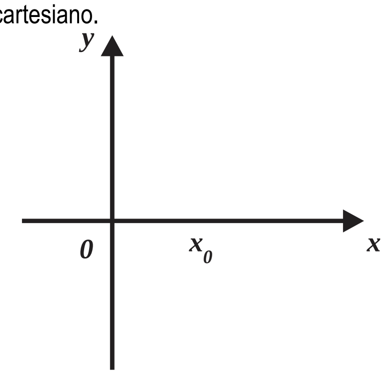


b. Suponga que $a_3<0$ (el coeficiente dominante es negativo) en la expresión que obtuvo en el inciso **a.**

i. Complete la tabla:

x	Signo de $p(x)$
Negativa y extremadamente grande.	
$\frac{1}{2}x_0$	
x_0	
$\frac{3}{2}x_0$	
Positiva y extremadamente grande.	

ii. Suponga que la curva asociada a $p(x)=a_3(x-x_0)^3$ (con $a_3<0$) es suave y continua (sobre todo su dominio), haga un bosquejo de su representación en el plano cartesiano.



2. Suponga que la función polinomial $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ tiene dos ceros reales siendo $x=x_0$ uno de ellos de multiplicidad dos, y el otro $x=x_1$ con multiplicidad uno, entonces al aplicar el teroema de factorización lineal, la función, puede rescribirse como:

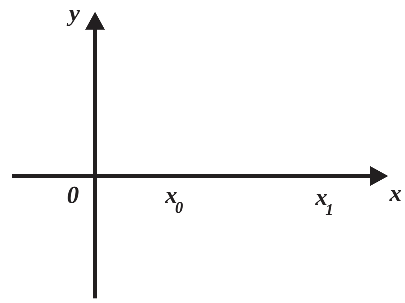
____

a. Suponga que $a_3<0$ (el coeficiente dominante es negativo) en la expresión que obtuvo en el 2**.**

i. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_0<x_1$. Complete la siguiente tabla:

x	Signo de $p(x)$
Negativa y extremadamentegrande.	
$\frac{1}{2}x_0$	
x_0	
$\frac{3}{2}x_0$	
$\frac{1}{2}x_1$	
x_1	
$\frac{3}{2}x_1$	
Positiva y extremadamente grande.	

ii. Suponga que la curva asociada a $p(x)=a_3(x-x_0)^2(x-x_1)$ (con $a_3<0$) es suave y continua sobre todo su dominio, haga un bosquejo de su representación en el plano cartesiano.

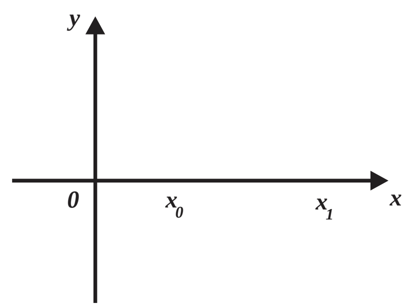


b. Suponga que $a_3>0$ (el coeficiente dominante es positivo) en la expresión que obtuvo en el número 2**.**

i. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x_0<x_1$, complete la siguiente tabla:

x	Signo de $p(x)$
Negativa y extremadamentegrande.	
$\frac{1}{2}x_0$	
x_0	
$\frac{3}{2}x_0$	
$\frac{1}{2}x_1$	
x_1	
$\frac{3}{2}x_1$	
Positiva y extremadamente grande.	

ii. Suponga que la curva asociada a $p(x)=a_3(x-x_0)^2(x-x_1)$ (con $a_3>0$) es suave y continua (sobre todo su dominio), haga un bosquejo de su representación en el plano cartesiano.



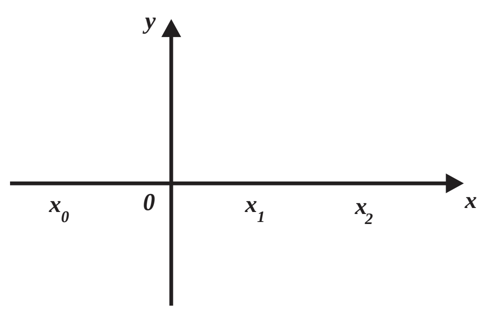
3. Suponga que la función polinomial $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ tiene tres ceros reales y éstos son: $x=x_0$, $x=x_1$ y $x=x_3$, entonces al aplicar el teroema de factorización lineal, la función, puede rescribirse como:

____

a. Suponga que $a_3 < 0$ (el coeficiente dominante es negativo) en la expresión que obtuvo en el inciso 2**.**
i. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x_0 < x_1 < x_2$. Complete la siguiente tabla:

x	Signo de $p(x)$
Negativa y extremadamentegrande.	
$\frac{1}{2}x_0$	
x_0	cero
$\frac{3}{2}x_0$	
$\frac{1}{2}x_1$	
x_1	cero
$\frac{3}{2}x_1$	
$\frac{1}{2}x_2$	
x_2	cero
$\frac{3}{2}x_2$	
Positiva y extremadamente grande.	

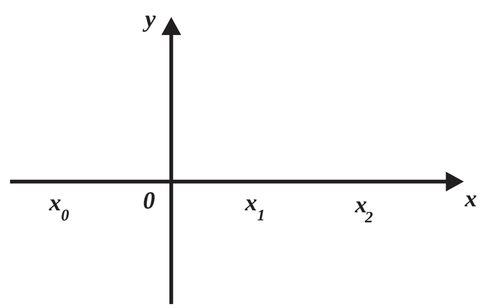
ii. Suponga que la curva asociada a $p(x) = a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$ (con $a_3 < 0$) es suave y continua (sobre todo su dominio), haga un bosquejo de su representación en el plano cartesiano.



b. Suponga que $a_3 > 0$ (el coeficiente dominante es positivo) en la expresión que obtuvo en el inciso 2**.**
i. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x_0 < x_1 < x_2$. Complete la siguiente tabla:

x	Signo de $p(x)$
Negativa y extremadamentegrande.	
$\frac{1}{2}x_0$	
x_0	cero
$\frac{3}{2}x_0$	
$\frac{1}{2}x_1$	
x_1	cero
$\frac{3}{2}x_1$	
$\frac{1}{2}x_2$	
x_2	cero
$\frac{3}{2}x_2$	
Positiva y extremadamente grande.	

ii. Suponga que la curva asociada a $p(x)=a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ (con $a_3>0$) es suave y continua (sobre todo su dominio), haga un bosquejo de su representación en el plano cartesiano.



CIERRE

1. Señale las características básicas de la curva asociada a la función polinomial.

UNIDAD II

FUNCIONES RACIONALES Y FUNCIONES CON RADICALES

PROPÓSITOS:

Al finalizar la unidad el alumno:

Modelará algunas situaciones que dan lugar a funciones racionales y con radicales, analizará una gráfica para identificar su dominio, rango, asíntotas y relacionar estas características con la situación problemática planteada.

INTRODUCCIÓN

Ahora nos referiremos a la clase de funciones definidas en términos de la división de polinomios, es decir, las funciones racionales.Las funciones racionales han sido utilizadas en la descripción de una gran variedad de situaciones, por ejemplo, en aquellas que involucran tasas, tiempos y trabajo. Una de las funciones racionales más comunes aquella que describe la relación de variación inversa, esta función se utiliza en numerosos fenómenos físicos, técnicos y sociales. Algunas situaciones ilustrativas que se modelan por este tipo de funciones destacan: la relación entre el caudal de un grifo y el tiempo que tarda en llenar un depósito de una capacidad determinada; la relación entre el número de pacientes que asiste a una consulta médica de horario limitado y el tiempo que puede dedicar el médico a cada paciente, etc.; las funciones racionales también se utilizan para dar respueta a preguntas sobre la combinación de trabajadores o máquinas para completar un trabajo a tiempo determinado. En la física clasíca, gran variedad de leyes y fenómenos tienen como modelos funciones racionales, por ejemplo, la relación entre la presión y el volumen en un gas ideal sometido a una temperatura constante k, sigue el principio conocido como ley de Boyle - Mariotte: P x V = k. En mecánica, la ley de gravitación universal de Newton, que afirma, “todo cuerpo en el universo atrae a cualquier otro con una fuerza que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos” en términos de una función racional $F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$. En electrostática, la fuerza que ejerce una carga sobre otra depende de la distancia entre ellas y está dada por la ley de Coulomb $F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$, función en donde r es la distancia entre las cargas. En circuitos eléctricos se desarrolla toda una teoría fundamentada en funciones racionales (conocida como transformada de Laplace) con el propósito de facilitar el estudio del comportamiento de la combinación de los elementos que dan lugar a ellos. En óptica, la iluminación sobre una superficie a una distancia r de una fuente isotrópica de luz de intensidad I es $E = k\frac{L}{r^2}$. Las funciones racionales también tienen diversas aplicaciones en otros campos de la matemática, por ejemplo, en el campo del análisis numérico, se utilizan para interpolar o aproximar los resultados obtenidos en otras funciones más complejas, debido a que las funciones racionles presentan menor dificultad en su uso.

Respecto a las funciones que involucran radicales de índice dos, el número de aplicaciones es basto, por ejemplo, en geometría analítica se relacionan con el cálculo de distancias recorridas y longitudes; en geometría del plana y del espacio relaconan las dimensiones de sólidos y superficies geométricas, etc.; en física suelen ser útiles en la modelación de tiempos, de velocidades angulares, en la modelación de periodos de movimientos armónicos, en el cálculo de velocidades de descenso de la superficie de fluidos; en circuitos eléctricos en la modelación de impedancias, en la construcción de modelos relativistas, etc.

PRESENTACIÓN

Esta unidad toma por título "Funciones racionales y funciones con radicales", se divide en dos secciones que llevan los títulos de II.1 "Funciones Racionales" y II.2 "Funciones con radicales".
La Sección II.1 presenta los aprendizajes que señalan los Planes y Progamas de estudios correspondientes, mismos que se refieren a las funciones racionales con polinomios numerador y denominador de hasta grado dos. Inicia con la presentación de situaciones cuyo estudio involucra la construcción de funciones racionales como modelos que se relacionan con las dimensiones de cuerpos y sólidos geométricos, modelos que son aprovechados para definir formalmente "función racional". Continúa con la clasificación de las funciones racionales en propias e impropias, después trata el comportamiento asintótico de las curvas asociadas a este tipo de funciones. También relaciona la división de los términos líderes o dominantes con el "comportamiento extremo" de la curva asociada a la función racional, así como con las posibles asíntotas horizontales. Posteriormente incluye el análisis de aquellas funciones racionales que son reducibles y que incluyen uno (o más) huecos en su curva asociada. El desarrollo de la sección continua con el desarrollo de la sistematización de los elementos tratados en la sección para dar paso a la construcción del proceso a seguir para el bosquejo (trazo aproximado) de la curva que tiene asociada una función racional. La sección concluye con la presentación de algunos problemas en los que se aplican las funciones racionales.
Al inicio de la Sección II.2 se exploran situaciones cuyo estudio incluye la construcción de modelos de las formas $f(x)=\sqrt{ax\pm b}$ y $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$, es decir funciones que incluyen radicales en el contexto de áreas y dimensiones lineales de superficies geométricas. Continúa sustentando un proceso para determinar las características la función $f(x)=\sqrt{ax+b}$ (dominio, ceros, y rango), el trazo de la curva asociada a este tipo de funciones se relaciona con una semiparábola.
En la segunda parte de la sección II.2 se analiza la función con regla de correspondencia $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ en términos del número de ceros del polinomio del radical: radicando positivo, radicando negativo, radicando con un cero de multiplicidad 2 y cuando el radicando tiene dos ceros. Se concluye la sección con la inclusión de problemas de aplicación de este tipo de funciones.

PUNTOS PROBLEMÁTICOS

POSIBLES DIFICULTADES (PROGRAMA)	SUGERENCIAS DE APOYO
Con base en nuestra experiencia, en relación al desarrollo de los aprendizajes y temática incluidos en el programa de la asignatura de Matemáticas IV, en la unidad correspondiente a Funciones racionales y con radicales, nos hemos percatado de:	
I. En relación a la congruencia entre aprendizajes y temática. **Fila 1.** Las (escasas a este nivel) situaciones que se modelan con "funciones racionales" presentan el detalle de tener variable independiente limitada a asignaciones positivas. Aspecto que no señala el plan de estudios correspondiente.	**1.** Aclare que lo descrito antes conlleva al empleo de funciones definidas por intervalos y no son funciones racionales específicamente.
Fila 2. **a.** Respecto al rango, no se indica el tipo de funciones racionales en las que éste debe obtenerse. **b.** No se mencionan los tipos de funciones racionales, debe reconocer los diversos tipos de funciones como son las propias, las impropias y las que son reducibles. **c.** La temática de la unidad no aclara el significado de huecos y no señala a qué discontinuidades se refiere, si de la función o de la curva que tiene asociada, ya que ésas discontinuidades no son equivalentes. **d.** La temática de la unidad no menciona el análisis del comportamiento de una función alrededor de las asíntotas, tampoco señala el estudio del comportamiento para "asignaciones muy grandes", positivas o negativas a la variable independiente, como la relación de los comportamientos señalados con relación al coeficiente de los polinomios que componen a las funciones.	**2.** **a.** Es relativamente sencillo obtener el rango de funciones racionales en las que éste es estrictamente positivo (o estrictamente negativo). **b.** Haga una estricta clasificación de las funciones racionales en propias e impropias, alguna de las características previas con el carácter de reducibles o irreducibles. **c.** Tenga en cuenta que una función continua puede tener asociada una curva con huecos o con saltos, es decir una curva que no es continua. Explique que el proceso de simplificación de una función racional impropia puede inducir a la existencia de huecos en la curva que tiene asociada. No olvide tratar el comportamiento para asignaciones extremas (positivas y negativas) a la variable independiente.
Fila 3. Las mismas que se señalan en la fila 2.	**3.** Las mismas que se señalan en la fila 2.
Fila 4. En esta parte no se señala el comportamiento extremo, además no todas las funciones racionales poseen asíntotas verticales. Con base a nuestra experiencia. en relaciónal desarrollo de los aprendizajes y temática incluidos en el programa de la asignatura de Matemáticas IV en el tema correspondiente a Funciones con radicales, nos hemos percatado de que los alumnos:	**4.** Debe proponer el trazo de la curva asociada a todo tipo de funciones racionales, inclusive de aquellas que no posean asíntotas verticales.
Fila 5. **a.** A nivel bachillerato son prácticamente inexistentes las	**5.** **a.** Proponga problemas relacionados con cálculo de

aplicaciones de funciones racionales, o en su caso, requieren de una mayor especialización en otras ramas del conocimiento. **b.** Esta fila es una muestra de la incongruencia entre aprendizajes y contenidos. En relacióna con problemas secillos que se modelan con funciones con radicales de la forma $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ (que engloba a las anteriores), probablemente, sólo sea posible el presentar "problemas sencillos" relacionados con longitudes de lados de ciertas superficies.	dimensiones de estructuras arquitectónicas o relacionadas con superficies. Seleccione algunas de las aplicaciones señaladas en la bibliografia de apoyo. **b.** Proponga problemas que se modelan mediante funciones que relacionen longitudes y áreas.
Fila 6. Los elementos de trazo de la gráfica señalados en este aprendizaje están incompletos. No recurra a la "tabulación".	**6.** Incluya los elementos relacionados con el comportamiento extremo del tipo de funciones señalado. Utilice los conocimientos relacionados con las cónicas que el alumno reviso en el curso previo.
Fila 7. La existencia de problemas de este tipo de funciones es escaso y requiere de un nivel de conocimiento mayor.	**7.** Refiérase a problemas relacionados con longitudes de superficies.

DIFICULTADES (ALUMNOS)	**SUGERENCIAS DE APOYO**
Con base aen nuestra experiencia, en relación al desarrollo de los aprendizajes y temática incluidos en el programa de la asignatura de Matemáticas IV en la unidad correspondiente a Funciones con radicales, es probable que los alumnos prensenten dificultades como:	
Filas 1., 3., **Fila 4.**, **Fila 5.** y **Fila 7.** Construcción de modelos.	**1., 4.**, **5. y 7.** No es fácil superar esta dificultad, pero el "ordenar" el pensamiento del estudiante puede incrementar los logros, utilice los modelos didáctico pedagógicos relacionados con la resolución de problemas.
Filas 2. y **Fila 6.** En la parte operativa (habilidades en procesos algebraícos) los estudiantes suelen presentar dificultades.	**2.** y **3.** Enfatice los detalles existentes en los procesos algebraicos que utilice (división de polinomios, resolución de ecuaciones, etc.), seleccione casos ilustrativos. **6.** Enfatice los detalles existentes en los procesos algebraicos que utilice (división de polinomios, resolución de ecuaciones etc.), seleccione casos ilustrativos.

TIEMPO REQUERIDO

15 Horas

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA
Barnett, R., (2007). *Precálculo Funciones y gráficas.* México: MCGRAW HILL (4ª Edición).
Demana, F., (2007). *Precálculo Grafico Numerico Algebraico.* México: PEARSON (7ª Edición).
Stewart, J., (2007). *Precálculo: Matematicas para el Calculo*. México: CENGAGE LEARNING (7ª Edición).
Larson, R., (2008). *Precálculo.* México. REVERTÉ (7ª Edición)
Sobel, M., (1998). *Precálcul*o. México: PRENTICE HALL HISPANOAMERICANA (4ª Edición).
Swokowski, E., (2015). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: CENGAGE Learning. (13ª edición.)
Zill, D., (2008) *Precálculo con avances de cálculo*: México. MC GRAW HILL (4° Edición)

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA
Allen, R. (2008). *Álgebra intermedia.* México, PEARSON.

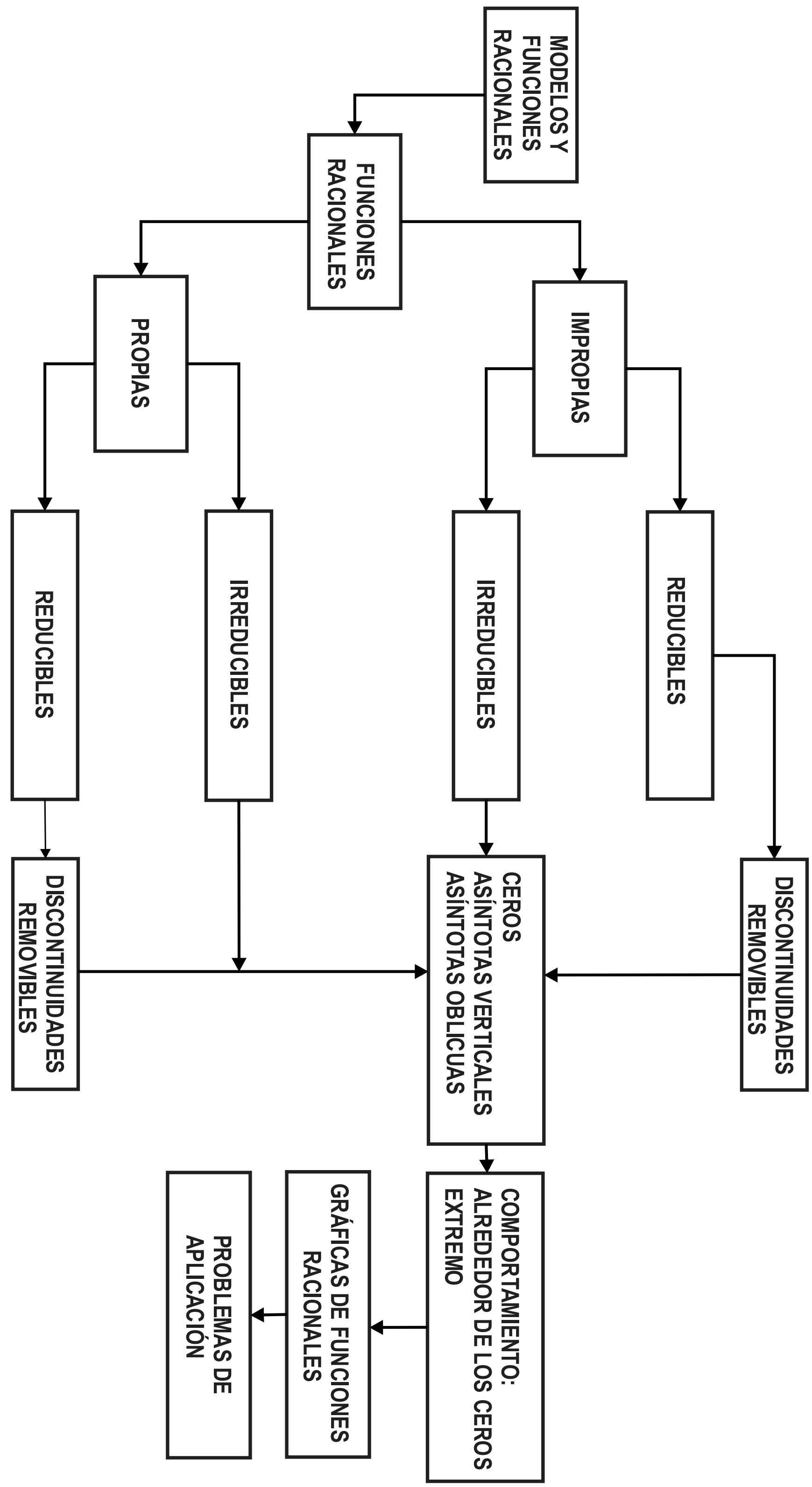
SITIOS WEB
www.matesfacil.com (Recuperado agosto de 2018)
https://www.google.com.mx/search?q=portal+academico+cch&oq=PORTAL+ACA&aqs=chrome.0.0j69i57j69i60j0l3.6191j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8 (Recuperado agosto de 2018)
Juliana Gómez (2013, septiembre 13) *Funciones racionales* [Presentación]. Recuperado de https://prezi.com/tnsw_kc_i4g1/funciones-racionales/
Roberto Cardil (No la indica) *Matemáticas visuales (funciones racionales)*. Recuperado de http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/rational/rational1.html
Genny Yah. (2012, mayo 21) *Artículo #1 "función racional 21 de mayo de 2012.* [Vídeo]. Recuperado de http://princesita-genny.blogspot.com/2012/05/articulo-1-funcion-racional.html
Agustín Martínez Pedreño (No la indica) *Asíntotas*. Recuperado de http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Asintotas_horizontales_verticales_oblicuas/Asintotas_horizontales.html

DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS
Ordenador
Proyector de vídeos.

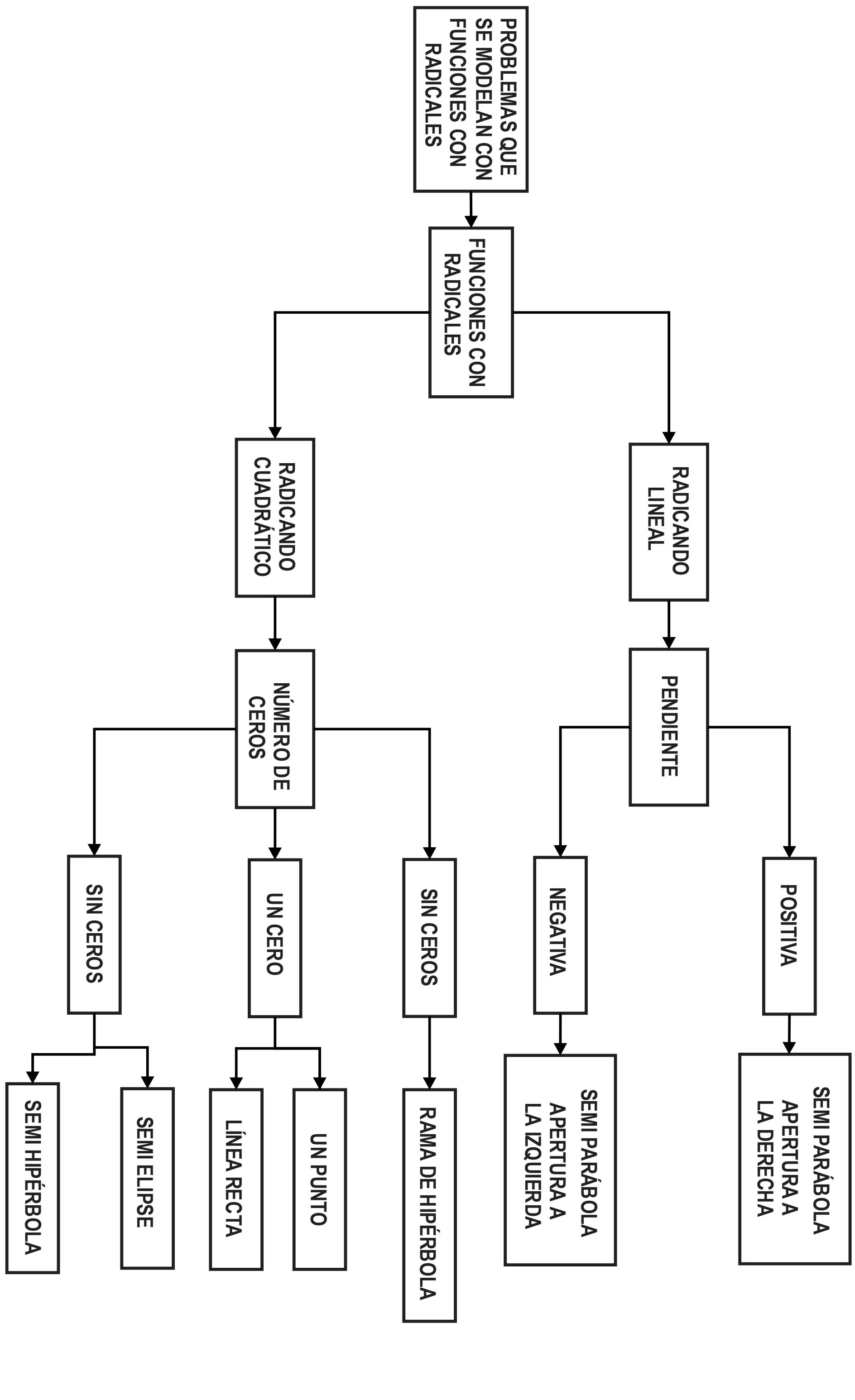
SOFTWARE DE APOYO
Geogebra
Symbolab

ESTRUCTURA

ESTRUCTURA TEMÁTICA: UNIDAD II.1 FUNCIONES RACIONALES



ESTRUCTURA TEMÁTICA: UNIDAD II.2 FUNCIONES CON RADICALES



SECCIÓN II.1	FUNCIONES RACIONALES BÁSICAS

APRENDIZAJES Y CONTENIDOS TEMÁTICOS

SECCIÓN	APRENDIZAJES	CONTENIDOS TEMÁTICOS
II.1	**Apr.1** Explorará situaciones que se modelan con funciones racionales. **Apr.2** Identificará los elementos de una función racional: ceros, asíntotas verticales y huecos, dominio y rango para graficarla. **Apr.3** Graficará funciones que tengan asíntota horizontal diferente al eje de las x, asíntotas verticales, ceros, huecos, dominio y rango. **Apr.4** Resolverá problemas de aplicación.	**1.** Funciones de la forma: $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)},\quad q(x)\neq 0$ con $p(x)$ y $q(x)$, polinomios de coeficientes reales, de grado menor o igual a dos. **2.** Elementos de las funciones: dominio, rango, asíntotas verticales, puntos de discontinuidad y ceros de la función. **3.** Gráfica de funciones racionales con asíntotas verticales y horizontales.

CONCEPTOS CLAVE

Los siguientes conceptos son fundamentales para un buen desarrollo del curso:

i. Función racional, términos dominantes, asíntotas (horizontales, verticales), huecos (discontinuidades removibles).

TIEMPO ESTIMADO

En situaciones regulares se sugieren 10 horas para el desarrollo de los aprendizajes antes señalados.

PROCESOS Y ALGORITMOS BÁSICOS

Bosquejo de la gráfica de una función racional.

DESARROLLO

Estrategias didácticas, actividades de enseñanza aprendizaje, materiales de apoyo, identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución.

<table>
<tr><th>Observaciones y sugerencias</th><th>Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo</th><th>Dificultades y soluciones</th></tr>
<tr><td>**i.** Proponga el estudio y modelación de situaciones relacionadas con la “relación de variación directa. Pudes ser de útilidad las situaciones presentes en las actividades II.1 y II.2.</td><td>El estudio y modelación de las siguientes situaciones involuucran la construcción de funciones racionales.

ACTIVIDAD II.1 (FUNCIONES RACIONALES)
a. Afirmar que dos variables x y f cambian en relación inversa significa que conforme una de ellas aumenta la otra disminuye y viceversa. El modelo que representa una situación de variación inversa es $f(x)=\frac{k}{x}$ siempre que $k \neq 0$ y $x \neq 0$.
b. Suponga que una placa rectangular tiene área $A=10$ metros cuadrados, que su base mide x metros y su altura mide f metros. Por tanto, $10=xf$. Si la altura depende de la base, entonces $f(x)=\frac{10}{x}$, siempre que $x>0$, es decir, la altura disminuye conforme se incrementa la longitud de la base, vea la *figura II.1.*

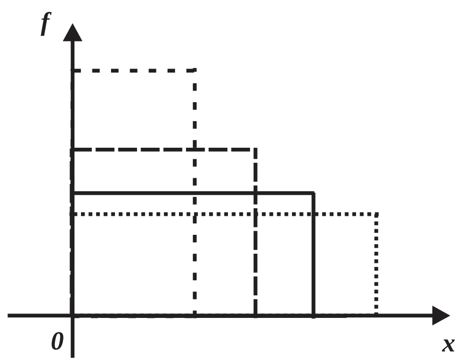


FIGURA II.1

c. En una región triangular de área 20 unidades cuadradas, en donde su base mide x ($x>0$) unidades y su altura mide f unidades se cumple que $20=\frac{xf}{2}$, por tanto la longitud de la altura en función de la base está dada por $f(x)=\frac{40}{x}$ (siempre que $x>0$). Asimismo la longitud de la base puede escribirse en función de la longitud de la altura como $x(f)=\frac{40}{f}$ (siempre que $f>0$), vea la *figura II.2.*

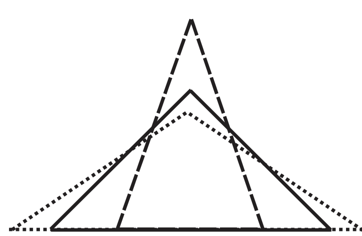
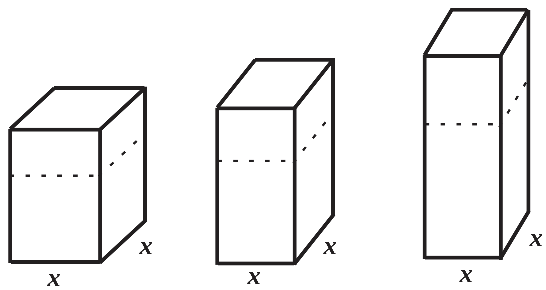
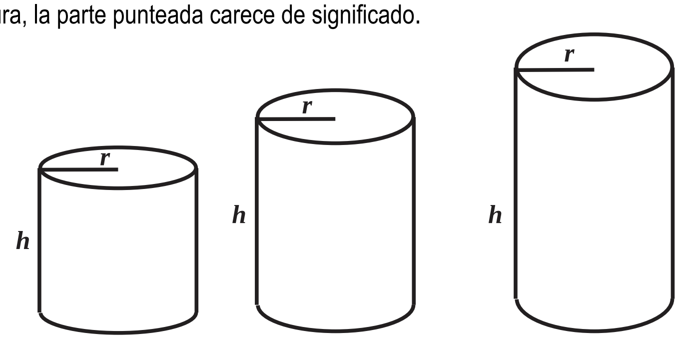


FIGURA II.2
△</td><td>**1.** Debe tener en cuenta que, por lo general, en situaciones de la vida cotidiana las variables involucradas son no negativas o positivas.</td></tr>
</table>

Observaciones y Sugerencias	**Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo**	**Dificultades y soluciones**
ii. En la vida diaria el prisma y el cilidro son de gran utilidad, en particular puede referirse a ellos como envases o estructuras arquitectónicas. **iii.** Conviene que incluya funciones racionales propias en el estudio de situaciones cercanas a la realidad.	**ACTIVIDAD II.2** (FUNCIONES RACIONALES COMO MODELOS) **a.** Un envase tiene forma de prisma rectangular y encierra un volumen de 20 unidades cúbicas, su base es cuadrada de lado de longitud x ($x>0$) unidades y su altura es variable, que representamos por h, entonces se concluye que $20=x^2\cdot h$ y si expresamos la longitud de la altura en términos de la longitud de la base obtenemos $h(x)=\frac{20}{x^2}$. Vea la *figura II.3.* que muestra el comportamiento gráfico de la función anterior (las líneas punteadas carecen de significado).  **FIGURA II.3** **b.** El volumen de un cilindro (circular recto), su radio y su altura se relacionan por medio de la expresión $V=\pi r^2 h$. Si el cilindro contiene un volumen de 30 unidades cúbicas, entonces la altura del cilindro en función del radio es $h(r)=\frac{30}{\pi r^2}$, donde $r>0$. Vea la *figura II.4* que muestra el comportamiento de la altura, la parte punteada carece de significado.  **FIGURA II.4** △ **ACTIVIDAD II.3** (MODELANDO CON UNA FUNCIÓN RACIONAL) **a.** Se planea construir una superficie de descanso para automovilistas a un lado de una carretera. La superficie de descanso debe ser rectangular y contener un área de 5000 metros cuadrados. Deben cercarse: la parte contigua y los lados perpendiculares a la carretera, no así el lado opuesto a la carretera. Para construir la función que relaciona el número de metros de cerca requeridos en función de la longitud del lado no cercado observemos la *figura II.5*, la superficie es rectangular y las longitudes de sus lados están representadas por x y y. Por tanto, el perímetro p de la cerca tiene una longitud de $p=x+2y$ metros, el área de la superficie a cercar es 5000 metros cuadrados, es decir, $xy=5000\ m^2$.	**2.** Tenga en cuenta que en la práctica el uso de la expresión $x>0$ puede resultar inexacto puesto que en la realidad las dimensiones están acotadas, esto tiene que explicarlo al alumno. .

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

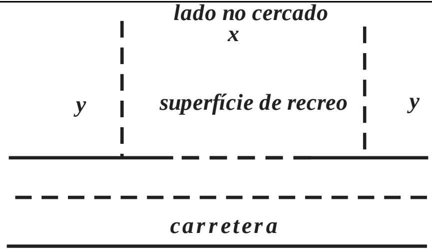


FIGURA II.5

Para expresar el perímetro p como una función de la longitud del lado no cercado (que hemos representado por x), despejamos y de $xy = 5000$ y obtenemos $y = \frac{5000}{x}$, que al sustituirla en $p = x + 2y$ se obtiene $p = x + 2\frac{5000}{x} = x + \frac{10000}{x}$, o simplemente, $p = \frac{x^2 + 10000}{x}$. Esta relación únicamente depende de la variable x, es decir, $p(x) = \frac{x^2 + 10000}{x}$, siempre que $x > 0$. En la presente sección se desarrollan los elementos para construir este tipo de curvas).

b. Se desea construir un envase cilíndrico que encierre un volumen igual a un litro (mil centímetros cúbicos). Se debe relacionar el área de su superficie (cantidad de material requerido) con el radio del cilindro. La descomposición del cilindro se muestra en la *figura II.6.*, donde cada una de las bases tiene área πx^2. La superficie lateral del cilindro es un rectángulo de dimensiones $2\pi x$ por h.

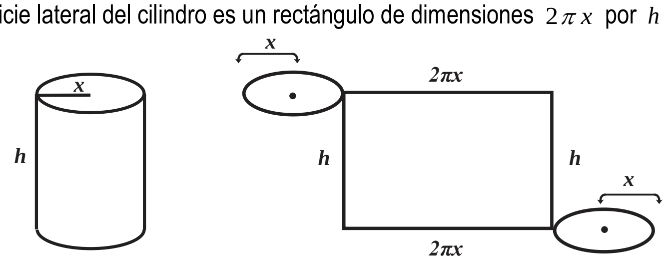


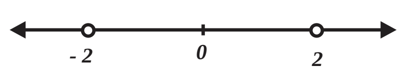
FIGURA II.6

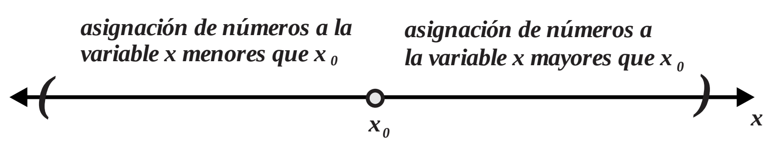
El área del envase está dada por la suma de las áreas de las superficies que lo componen, es decir, la suma de las áreas de las bases y el área de la parte lateral, entonces $A = 2\pi x^2 + 2\pi xh = 2\pi\left(x^2 + xh\right)$.

En la expresión anterior, el área depende de las variables x y h, sin embargo, estas dos variables se encuentran ligadas por el hecho de que $V = \pi x^2 h = 1000$. Para rescribir la expresión del área en términos de una sola variable, digamos el radio x, utilizamos la condición de ligadura $h = \frac{1000}{\pi x^2}$, por tanto, $A = 2\pi x^2 + 2\pi x\frac{1000}{\pi x^2} = \frac{2\pi x^3 + 2000}{x}$. Por último, para indicar que el área depende de la variable x escribimos $A(x) = \frac{2\pi x^3 + 2000}{x}$, siempre que $x > 0$.

△

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
iv. Fundamentándose en los modelos que construyó antes, formalice la definición de función racional.	**DEFINICIÓN II.1** (FUNCION RACIONAL) La función $r(x)=\dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$, donde a_0 , a_1 , $\cdots, a_{n-1}$, a_n , b_0 , b_1 , $\cdots, b_{m-1}$ y b_m, son números reales y $b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \neq 0$, se denomina función racional en la variable x . **a.** Sí $n < m$ (el grado del polinomio numerador es menor que el grado del polinomio del denominador) se denomina propia. **b.** $n \geq m$ (el grado del polinomio numerador es mayor o igual que el grado del polinomio denominador) se denomina impropia.	**3.** Tenga en cuenta que en la definición de función racional, tanto el numerador como el denominador son polinomios y que la literal común en los términos se interpreta como la variable independiente.
v. Solicite al estudiante que proponga y que clasifique funciones racionales.	**ACTIVIDAD II.4** (FUNCIONES RACIONALES) **a.** En $r(x)=\dfrac{x^2 - 4x}{x^2 + x + 1}$ el polinomio del denominador es $q(x)= x^2 + x + 1$ y tiene grado $m = 2$, el polinomio del numerador es $p(x)= x^2 - 4x$ y su grado es $n = 2$, por tanto, $r(x)=\dfrac{x^2 - 4x}{x^2 + x + 1}$ es una función racional impropia. **b.** En $r(x)=\dfrac{4x^5 - 10x^2 - 8}{x^2 + 10x + 24}$ el polinomio del denominador es $q(x)= x^2 + 10x + 24$ y tiene grado $m = 2$, el polinomio del numerador es $p(x)= 4x^5 - 10x^2 - 8$ y su grado es $n = 5$, por tanto $r(x)=\dfrac{4x^5 - 10x^2 - 8}{x^2 + 10x + 24}$ es una función racional impropia. **c.** En $r(x)=\dfrac{3x^3 - 5}{x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 4}$ el polinomio del denominador es $q(x)= x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 4$ y tiene grado $m = 4$, el polinomio del numerador es $p(x)= 3x^3 - 5$ de grado $n = 3$, por tanto, $r(x)=\dfrac{3x^3 - 5}{x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 4}$ es una función racional propia. $\triangle$	**3.** La *definición II.2* indica que en las funciones racionales irreducibles, las funciones polinomiales que la componen no tienen ceros comunes, en consecuencia, la regla de correspondencia no se puede simplificar.
v. Clasifique las funciones racionales en irreducibles y reducibles.	Otra clasificación que admiten las funciones racionales es la de ser reducibles o irreducibles. **DEFINICIÓN II.2** (CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES RACIONALES) Sea la función racional con regla de correspondencia $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}=\dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$. **a.** $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ es irreducible si y sólo si $p(x)$ y $q(x)$ no tienen ceros comunes. **b.** $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ es reducible si y sólo si $p(x)$ y $q(x)$ tienen ceros comunes.	

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
vi. Insista en las condiciones a cumplirse en la igualdad de dos funciones. Plantee actividades para establecer el por qué del tener cuidado al "simplificar" funciones.	Si la regla de correspondencia $r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1 x+b_0}$ puede simplificarse (es decir, r es reducible), debe tenerse en cuenta que al "simplificarla" ha modificado su dominio, es decir, al cancelar el factor $x-x_0$ tanto en p como en q, en realidad ha construido una nueva función, digamos $r_1(x)$ que es igual a $r(x)$ excepto en el punto $x=x_0$, por tanto, $r_1(x)=r(x)$ siempre que $x\neq x_0$. **ACTIVIDAD II.5** (REDUCCIÓN DE FUNCIONES RACIONALES) **a.** $r(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2+5x+6}=\frac{(x+1)^2}{(x+3)(x+2)}$ es irreducible. **b.** $r(x)=\frac{x^2+2x}{x^2+6x}$ es reducible puesto que $r(x)=\frac{x^2+2x}{x^3+6x}=\frac{x(x+2)}{x(x+6)}=\frac{x+2}{x+6}$, sin embargo, el dominio de r se obtiene a partir de regla de correspondencia original. **c.** $r(x)=\frac{x^2+5x+6}{x^3+5x^2+6x}$ es reducible, puesto que $r(x)=\frac{x^2+5x+6}{x^3+5x^2+6x}=\frac{(x+2)(x+3)}{x(x+2)(x+3)}$, por tanto, $r(x)=\frac{x^2+5x+6}{x^3+5x^2+6x}=\frac{1}{x}$ siempre que $x\neq 0$, $x\neq -2$ y $x\neq -3$. $\triangle$	**4.** El programa no incluye los conceptos relacionados con la igualdad de funciones, sin embargo, resulta prudente que haga referencia a este concepto, le evitará muchos problemas.
v.ii No olvide guiar al estudiante para que "descubra" que los ceros de una función racional irreducible coinciden con los ceros de su polinomo numerador.	Los ceros de una función racional irreducible (si es que existen) son los ceros de la función polinomial que define su numerador, por tanto, todas las propiedades tratadas en la unidad previa (respecto a los ceros de una función polinomial) son válidas en la determinación de los ceros de una función racional irreducible. **ACTIVIDAD II.6** (DOMINIO DE FUNCIONES RACIONALES) **a.** En $r(x)=\frac{x^2-4x}{x^2-4}$, el dominio lo constituyen todos los números reales diferentes a los ceros del polinomio denominador, es decir $dom(r)=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$, puesto que $q(x)=x^2-4\neq 0$ si $x\neq -2$ y $x\neq 2$, vea la *figura II.7*. Los ceros de $r(x)=\frac{x^2-4x}{x^2-4}$ son los ceros de $p(x)=x^2-4x$, es decir, $x=0$ y $x=4$.  **FIGURA II.7**  **FIGURA II.8** **b.** El dominio de $r(x)=\frac{-6x}{x^2+10x+24}$ contiene a todos los números reales	

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
v.iii Insista en que para de análisis del comportamiento gráfico de una función racional se facilita si los polinomios que la componen están factorizados. **ix** La determinación de los ceros del polinomio denominador es fundamental en el trazo de la curva asociada a ella, éstos ceros se relacionan con las asíntotas. **x.** Utilice tablas en casos particulares para mostrar los distintos comportamientos de las funciones polinomiales alrededor de los ceros. Traduzca estas observaciones en el comportamiento gráfico de la función.	distintos a los ceros de $q(x)=x^2+10x+24=(x+4)(x+6)$, mismos que son $x\neq-6$ y $x\neq-4$, así $dom(r)=(-\infty,-6)\cup(-6,-4)\cup(-4,+\infty)$, vea la *figura II.8*. El único cero de $r(x)=\frac{-6x}{x^2+10x+24}$ (que coincide con el cero de $p(x)=-6x$) es $x=0$. **c.** En $r(x)=\frac{2x+7}{x^2+1}$ el polinomio denominador es $q(x)=x^2+1$ y no tiene ceros reales, por tanto, el dominio de $r(x)$ es el conjunto $dom(r)=(-\infty,+\infty)=IR$. El polinomio numerador es $p(x)=2x+7$ y su único cero es $x=-\frac{7}{2}$, por tanto, también es el único cero de $r(x)$. **d.** En $r(x)=\frac{x^2+5}{x^2-x-20}$, el polinomio $q(x)=x^2-x-20$ tiene dos ceros $x=-4$ y $x=5$, así el dominio de $r(x)$ es el conjunto $dom(r)=(-\infty,-4)\cup(-4,5)\cup(5,+\infty)$. Por otra parte, como $p(x)=x^2+5$ no tiene ceros reales, entonces $r(x)$ no tiene ceros. $\triangle$ Avanzando en el desarrollo del proceso de construcción de la curva asociada a una función racional irreducible, veamos cuál es su comportamiento alrededor de un punto en el que no está definida (es decir, alrededor de un cero del polinomio denominador). Sea $r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ una función polinomial irreducible en donde q tiene grado m, entonces puede ser rescrita en la forma $r(x)=\frac{p(x)}{(x-x_0)^a s(x)}$ en donde $q(x)=(x-x_0)^a s(x)$ y $s(x)$ es una función polinomial de grado $m-a$. El comportamiento de $r(x)$ alrededor de x_0 lo describen, tanto el factor $g(x)=\frac{1}{(x-x_0)^a}$ como el signo de $\frac{p(x_0)}{s(x_0)}$. Para analizar el comportamiento de la función $r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(x)}{(x-x_0)^a s(x)}$ asignaremos a la variable x números cada vez más próximos a x_0, primero menores que x_0 y luego mayores que x_0, vea la *figura II.9 y las tablas II.1 y II.2.*.  **FIGURA II.9**	**5.** La notación (en términos de la simbología de la teoría de conjuntos) adecuada para representar el dominio de una función racional no se contempla en los cursos previos, introdúzcala de manera un tanto informal. **6.** Es muy común que el estudiante confunda el rol de los ceros de las funciones polinomiales que componen a la función racionál, Usted debe especificar a qué se refiere cada uno de ellos.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

PRIMER CASO, a ES UN NÚMERO IMPAR

x	$g(x)=\dfrac{1}{(x-x_0)^a}$	Signo de g
$(0.9)x_0$	$(-10x_0)^a$	negativo
$(0.999)x_0$	$(-1000x_0)^a$	negativo
$(0.99999)x_0$	$(-100\,000x_0)^a$	negativo
x_0	*indefinido*	
$(1.00001)x_0$	$(100\,000x_0)^a$	positivo
$(1.001)x_0$	$(1000x_0)^a$	positivo
$(1.1)x_0$	$(10x_0)^a$	positivo

TABLA II.1

SEGUNDO CASO, a ES UN NÚMERO PAR

x	$g(x)=\dfrac{1}{(x-x_0)^a}$	Signo de g
$(0.9)x_0$	$(-10x_0)^a$	positivo
$(0.999)x_0$	$(-1000x_0)^a$	positivo
$(0.99999)x_0$	$(-100\,000x_0)^a$	positivo
x_0	*indefinido*	
$(1.00001)x_0$	$(100\,000x_0)^a$	positivo
$(1.001)x_0$	$(1000x_0)^a$	positivo
$(1.1)x_0$	$(10x_0)^a$	positivo

TABLA II.2

El comportamiento de $r(x)=\dfrac{p(x)}{(x-x_0)^a s(x)}$ se muestra en las *figuras II.10.* y *II.11.*

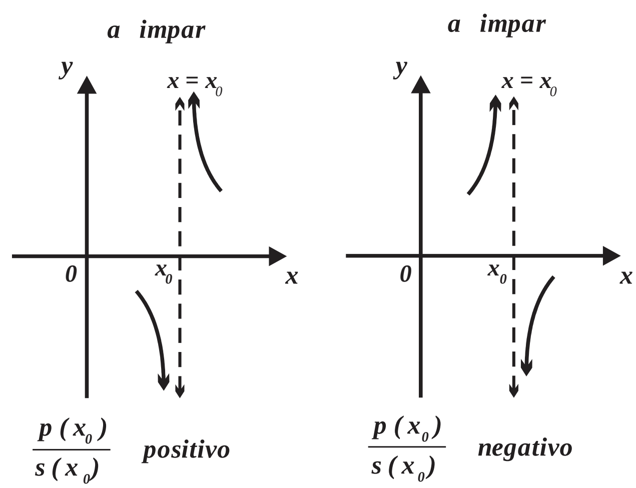
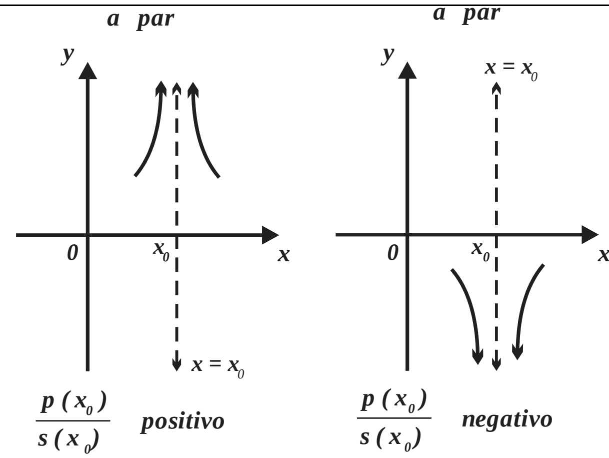


FIGURA II.10

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
	 **FIGURA II.11**	**7.** Indique que las asíntotas verticales no forman parte de la curva asociada a una función racional, si éste fuera el caso se violaría la definición de función (recuerde la regla de la recta vertical.
xi. Utilice las observaciones anteriores y proponga al estudiante que defina lo qué es una asíntota vertical.	Los comportamientos mostrados en las *figuras II.10.* y *II.11.* se llaman “asintóticos” y la recta de ecuación $x = x_0$ se denomina “asíntota vertical”. **DEFINICIÓN II.3** (ASÍNTOTAS VERTICALES) Sea r una función racional propia e irreducible, entonces: Si r crece indefinidamente en forma positiva, o crece indefinidamente en forma negativa, o crece indefinidamente en ambas formas, conforme las asignaciones a x son cada vez más próximas a x_0, entonces la recta de ecuación $x = x_0$ es “asíntota vertical” de la curva asociada a r.	
xii. Establezca una estrategia para determinar asíntotas verticales y el comportamiento de la curva asociada a una función racional propia e irreducible.	**ESTRATEGIA II.1** (TRAZO DE ASÍNTOTAS VERTICALES Y COMPORTAMIENTO A SU ALREDEDOR) Para determinar las asíntotas verticales de una función racional propia e irreducible r: **i.** Factorice (si es posible) $p\,(x)$ y $q\,(x)$. **ii.** Determine los ceros de $q\,(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$. **iii.** Si x_0 es uno de los ceros, una de las asíntotas verticales tiene ecuación $x = x_0$. **iv.** Asigne valores x tan próximos, como le sea posible a x_0 (tanto mayores como menores que x_0) y luego determine las imágenes correspondientes. **v.** Los puntos obtenidos indicarán el comportamiento de $r(x)$ en la proximidad de la asíntota.	
xii. Proponga actividades en las que se utilice la estrategia II.1 , incluya casos diversos.	**ACTIVIDAD II.7** (USO DE LA ESTRATEGIA II.1, ASÍNTOTAS VERTICALES DE UNA FUNCIÓN RACIONAL) **a.** Asíntotas verticales de $r(x) = \dfrac{2x}{x^2 - x - 20}$. **i.** $r(x) = \dfrac{2x}{x^2 - x - 20} = \dfrac{2x}{(x+4)(x-5)}$. **ii.** Los ceros del polinomio denominador son $x = -4$ y $x = 5$. **iii.** Las asíntotas verticales tienen ecuaciones $x = -4$ y $x = 5$. **iv.** Comportamiento de r alrededor de $x = -4$ y $x = 5$, vea la *figura II.12*.	

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

	x	$r(x)$	*signo*
	-4.1	-9.01098	*negativo*
asíntota	-4	*indefinida*	
	-3.9	8.76404	*positivo*
	4.9	-11.011236	*negativo*
asíntota	5	*indefinida*	
	5.1	11.20879	*positivo*

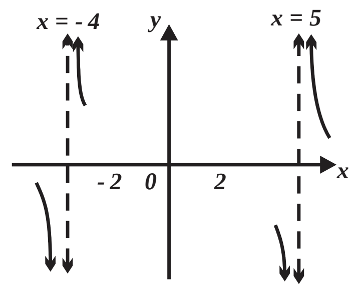


FIGURA II.12

b. Asíntotas verticales de $r(x)=\dfrac{4}{(x-1)^2(x+2)^2}$.

i. $r(x)=\dfrac{4}{(x-1)^2(x+2)^2}$.

ii. Los ceros del polinomio denominador son $x=-2$ y $x=1$.

iii. Las asíntotas verticales tienen ecuaciones $x=-2$ y $x=1$.

iv. Comportamiento de r alrededor de $x=-2$ y $x=1$, vea la *figura II.13*.

	x	$r(x)$	*signo*
	-2.1	41.62	*positivo*
asíntota	-2	*indefinida*	
	-1.9	47.56	*positivo*
	0.9	137.93	*positivo*
asíntota		*indefinida*	
	1.1	41.62	*positivo*

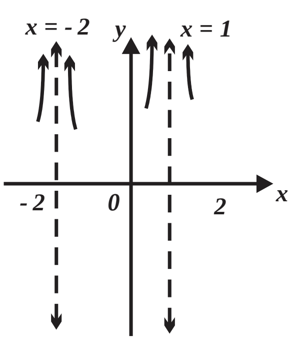


FIGURA II.13

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

c. Asíntotas verticales de $r(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$.

i. $r(x)=\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{1}{(x+2)(x-2)}$.

ii. Los ceros del polinomio denominador son $x=-2$ y $x=2$.

iii. Las asíntotas verticales tienen ecuaciones $x=-2$ y $x=2$.

iv. Comportamiento de r alrededor de $x=-2$ y $x=2$, vea la *figura II.14*.

	x	$r(x)$	*signo*
	–2.1	2.4390	*positivo*
asíntota	–2	*indefinida*	
	–1.9	–2.5641	*negativo*
	1.9	–2.5641	*negativo*
asíntota	2	*indefinida*	
	2.1	2.4390	*positivo*

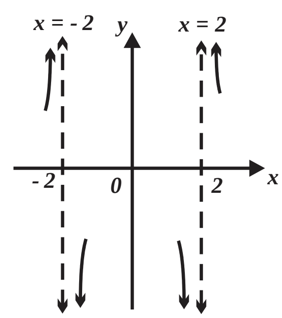


FIGURA II.14

△

xiii. Analice el comportamiento extremo de una función racional en términos del cociente de los términos dominantes.

Para asignaciones extremadamente grandes a la variable x (asignaciones que pueden ser positivas o negativas) de la función racional $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, la división de los términos dominantes $\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}=\dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ define el comportamiento extremo de su curva asociada.

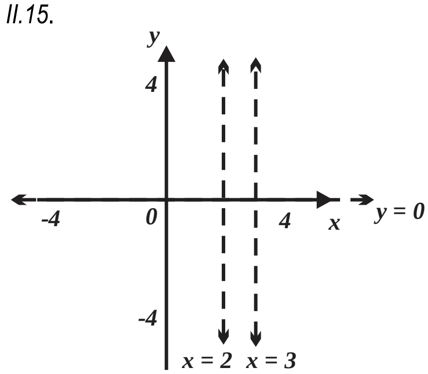
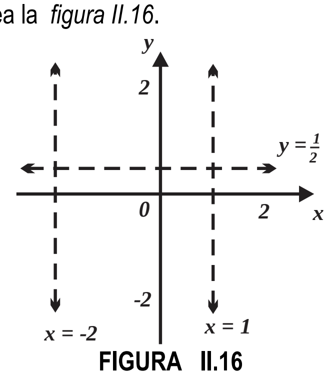
i. Si $n<m$, la curva asociada a r tiene a la recta de ecuación $y=0$ (eje x) como asíntota horizontal.

ii. Si $n=m$, la curva asociada a r tiene a la recta de ecuación $y=\dfrac{a_n}{b_n}$ como asíntota horizontal.

iii. Si $n>m$, la curva asociada a r no tiene asíntota horizontal.

xiv. Guíe al estudiante en la construcción de la definición de asíntota horizontal (puede hacerlo intuitivamente).

DEFINICIÓN II.4 (ASÍNTOTA HORIZONTAL)
Sea r una función racional irreducible.
Si r se aproxima a la recta de ecuación $y=y_0$ conforme se le asignan a x números cada vez mayores –positivos o negativos o en ambas formas, entonces la recta de ecuación $y=y_0$ se denomina “asíntota horizontal” de la curva de r.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
xv. Proponga actividades en las que se determinen las asíntotas de funciones racionales.	**ACTIVIDAD II.8** (ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN RACIONAL) **a.** Sí $r(x)=\frac{x-1}{x^2-5x+6}=\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$, entonces $p(x)=x-1$ y $q(x)=x^2-5x+6$ no tienen factores comunes (r es irreducible). Las asíntotas verticales tienen ecuaciones $x=2$ y $x=3$. Por otra parte, $\frac{a_n x^n}{b_m x^m}=\frac{x}{x^2}$ donde $n<m$. Por tanto, la línea recta $y=0$ es asíntota horizontal de la curva asociada a r, vea la *figura II.15*.  **FIGURA II.15** **b.** Puesto que $r(x)=\frac{2x^2-4x-6}{4x^2+4x-8}=\frac{2(x-3)(x+1)}{4(x+2)(x-1)}$, entonces las asíntotas verticales tienen ecuaciones $x=-2$ y $x=1$. También, $\frac{a_n x^n}{b_m x^m}=\frac{2x^2}{4x^2}=\frac{1}{2}$, dónde $n=m$, por tanto, la línea recta de ecuación $y=\frac{1}{2}$ es la asíntota horizontal de la curva asociada a r, vea la *figura II.16*.  **FIGURA II.16** **c.** En $r(x)=\frac{-7x^2+2x-2}{x^2-5x+2}$, $a_n x^n=-7x^2$ y $b_m x^m=x^2$, por tanto, la recta de ecuación $y=-7$ es la asíntota horizontal. **d.** En $r(x)=\frac{2x^2-6}{-x+1}$, $a_n x^n=2x^2$ y $b_m x^m=-x$, donde $n>m$, por tanto $r(x)$ no tiene asíntotas horizontales. △	**8.** Tenga en cuenta que: ¡la curva asociada a una función racional r, puede intersecar a una asíntota horizontal!

<table>
<tr><th>Observaciones y sugerencias</th><th>Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo</th><th>Dificultades y soluciones</th></tr>
<tr><td>xvi. Proponga funciones racionales cuya regla de correspondencia sea reducible, muestre el efecto de esta reducción.

xvii. Guíe al estudiante para que descubra el efecto en la curva asociada a una función al “eliminar” uno o más números del dominio.</td><td>

SIMPLIFICACIÓN DE LA REGLA DE CORRESPONDENCIA

ACTIVIDAD II.9 (SIMPLIFICACIÓN DE LA REGLA DE CORRESPONDENCIA)

a. Si $r(x)=\frac{x}{x}$, entonces $dom(r)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Puesto que $r(x)=\frac{x}{x}=1$, es decir, $r(x)=1$, se cumple que $r(x)=\frac{x}{x}$ es equivalente a $s(x)=1$, siempre que $dom(s)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

b. Sea $r(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+2x-8}$, entonces

$$dom(r)=(-\infty,-4)\cup(-4,2)\cup(2,+\infty).$$

Como $\frac{x^2-2x}{x^2+2x-8}=\frac{x(x-2)}{(x-2)(x+4)}=\frac{x}{x+4}$, podemos afirmar que $r(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+2x-8}$ es igual a $s(x)=\frac{x}{x+4}$ bajo la condición de que

$$dom(s)=(-\infty,-4)\cup(-4,2)\cup(2,+\infty).$$

c. Si $r(x)=\frac{x+3}{x^2+4x+3}$, entonces $dom(r)=(-\infty,-3)\cup(-3,-1)\cup(-1,+\infty)$. Observe que

$$\frac{x+3}{(x+3)(x+1)}=\frac{1}{x+1}.$$

Podemos afirmar que $r(x)=\frac{1}{x+1}$, bajo la condición

$$dom(s)=(-\infty,-3)\cup(-3,-1)\cup(-1,+\infty).$$

$\triangle$

El hecho de que las reglas de correspondencia de dos funciones sean iguales, es decir, $r(x)=s(x)$, pero que sus dominios no coincidan en un número finito de asignaciones a la variable x se manifiesta gráficamente en que las curvas asociadas a r y s no coinciden en un número finito de los puntos, vea *figura II.17*.

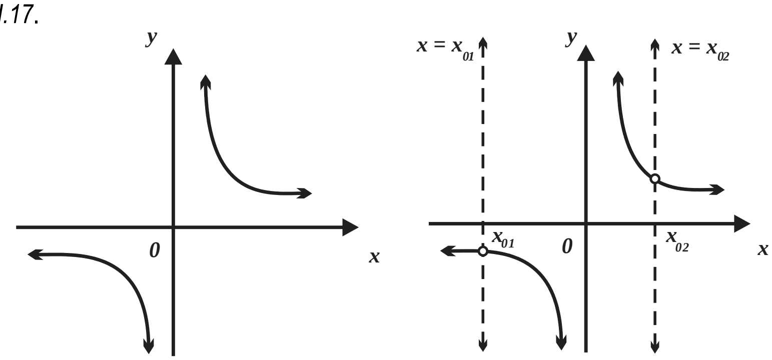
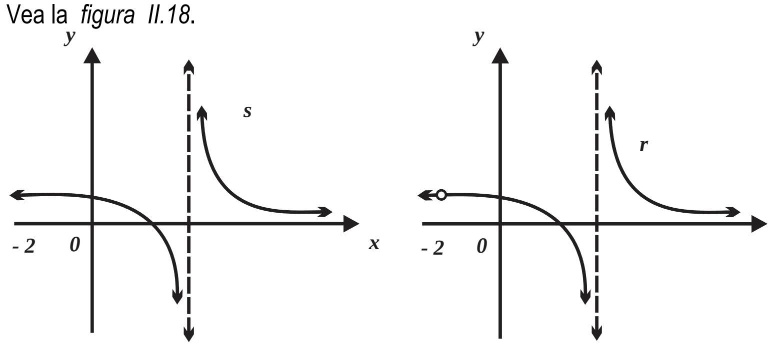
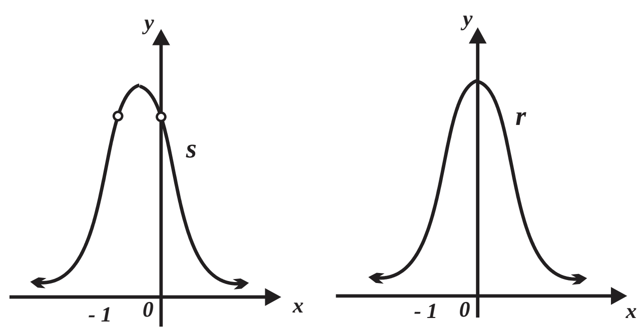


FIGURA II.17

Si la función racional r admite como factor a $x-x_0$ tanto en el numerador como el denominador, entonces la regla de correspondencia puede simplificarse, este hecho se manifiesta como un hueco en la curva asociada a r puesto que el número $x=x_0$ no pertenece al dominio de r.

</td><td>8. Tenga en cuenta que aunque algebraicamente las funciones sean equivalentes, esto no implica que las funciones sean iguales. Fortalezca el concepto de igualdad de funciones.</td></tr>
</table>

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
xviii. Proponga al estudiante la revisión de funciones racionables reducibles en las que identifique los "huecos" y que trace las curvas correspondientes.	**ACTIVIDAD II.10** (HUECOS DE UNA CURVA) **a.** Si $r(x)=\frac{x^2-4}{x^2-x-6}$, entonces $r(x)=\frac{x^2-4}{x^2-x-6}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-3)}$ y $dom(r)=(-\infty,-2)\cup(-2,3)\cup(3,+\infty)$. Puesto que $r(x)=\frac{x^2-4}{x^2-x-6}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\frac{x-2}{x-3}$ siempre que $x\neq -2$, entonces la curva asociada a $r(x)=\frac{x^2-4}{x^2-x-6}$ coincide con la curva asociada a $s(x)=\frac{x-2}{x-3}$, excepto en el punto $\left(-2,-\frac{4}{5}\right)$, en donde presenta un hueco. Vea la *figura II.18*.  **FI GURA II.18** **b.** Si $r(x)=\frac{4x^2+4x}{x^4+x}$, entonces $r(x)=\frac{4x^2+4x}{x^4+x}=\frac{4x(x+1)}{x(x+1)(x^2+x+1)}$ y $dom(r)=(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$ Puesto que $r(x)=\frac{4x^2+4x}{x^4+x}=\frac{4x(x+1)}{x(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{4}{x^2+x+1}$ siempre que $x\neq 0$ y $x\neq -1$, así, la curva asociada a $r(x)=\frac{4x^2+4x}{x^4+x}$ coincide con la curva asociada a $s(x)=\frac{4}{x^2+x+1}$, excepto cuando $s(0)=4$ y $s(-1)=4$, es decir, en los puntos $(0,4)$ y $(-1,4)$ en loa que tiene huecos, vea la *figura II.19*.  **FIGURA II.19**	**9.** T

<table>
<tr><th>Observaciones y sugerencias</th><th>Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo</th><th>Dificultades y soluciones</th></tr>
<tr><td>xix. Sintetice todos los aspectos relacionados con el trazo de la curva asociada a una función racional y así de origen a una estrategia para el trazo de ésta.

xx. Solicite al estudiante la aplicación de la estrategia antes construida.</td><td>
La sistematización de los aprendizajes tratados en la presente sección, constituyen la estrategia a seguir para bosquejar (trazo aproximado) la curva asociada a una función racional y se encuentran agrupados en la siguiente estrategia II.2.

ESTRATEGIA II.2 (BOSQUEJO DE LA CURVA ASOCIADA A UNA FUNCIÓN RACIONAL)
1. Si es posible factorice los polinomios numerador y denominador de r.
i. Si r es reducible cancele los factores comunes de p y q, y obtenga $s(x)=\frac{p_1(x)}{q_1(x)}$.
ii. Si $x-x_0$ es un factor común, entonces en el punto $h(x_0, s(x_0))$ marque un hueco en el plano cartesiano.
2. Determine los ceros de p_1 (en caso de que existan) y márquelos en el eje x. Determine el dominio de r.
3. Determine el punto de intersección de la curva asociada a s con el eje y.
4. Determine las asíntotas (verticales, horizontales) de s, así como el comportamiento alrededor de ellas.
5. Calcule el “signo de s” en cada intervalo generado por sus ceros.
6. Utilice segmentos suaves y continuos para trazar la curva asociada a s.

ACTIVIDAD II.11 (BOSQUEJO DE LA CURVA ASOCIADA A UNA FUNCIÓN RACIONAL)
a. Bosquejo de la curva asociada a $r(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2+9x+18}$.
1. Observe que $r(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2+9x+18}=\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+6)}=\frac{x-2}{x+6}$, por tanto, $r(-3)$ no existe y la curva asociada a $r(x)$ tiene un hueco en $h\left(-3, -\frac{5}{3}\right)$.
2. El único cero de s es $x=2$, por tanto, su curva asociada interseca al eje x en el punto $I_x(2, 0)$.
3. Como $r(0)=-\frac{1}{3}$, la curva asociada a $r(x)$ interseca al eje y en $I_y\left(0, -\frac{1}{3}\right)$. Además $dom(r)=(-\infty,-6)\cup(-6,-3)\cup(-3,+\infty)$.
4. La función s tiene una asíntota vertical de ecuación $x=-6$. Puesto que $\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\frac{x}{x}=1$, entonces la curva asociada a $r(x)$ tiene como asíntota horizontal la recta de ecuación $y=1$.
5.
<table>
<tr><th>INTERVALOS</th><th>x_p</th><th>$r(x_p)$</th><th>SIGNO DE $r(x)$</th></tr>
<tr><td>$(-\infty, -6)$</td><td>–7</td><td>9</td><td>positivo</td></tr>
<tr><td>$(-6, 2)$</td><td>0</td><td>$-\frac{1}{3}$</td><td>negativo</td></tr>
<tr><td>$(2, +\infty)$</td><td>3</td><td>$\frac{1}{9}$</td><td>positivo</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
</table>

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

6. La *figura II.20*. muestra un bosquejo de la curva asociada a r .

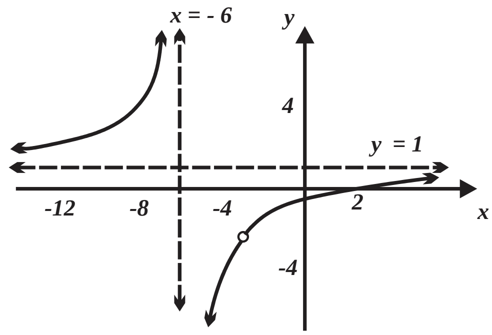


FIGURA II.20

b. Bosquejo de la curva asociada a $r(x) = -\dfrac{3x-6}{x+3}$.

1. $p(x) = -3x+6$ y $q(x) = x+3$ no tienen factores comunes.

2. El único cero es $x = 2$ y $I_x\ (\ 2\ ,\ 0\ )$.

3. $r(0) = 2$, la curva asociada a r interseca al eje y en $I_y\ (\ 0\ ,\ 2\ )$.

$$dom(\ r\ ) = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty).$$

4. La función r tiene asociada una asíntota vertical de ecuación $x = -3$. Dado que $\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m} = \dfrac{-3x}{x} = -3$, por tanto, la función r tiene asociada una asíntota horizontal de ecuación $y = -3$.

5.

INTERVALOS	x_p	$r(x_p)$	SIGNO DE $r(x)$
$(-\infty\ ,\ -3)$	-4	5	negativo
$(-3\ ,\ 2)$	1	$\frac{3}{4}$	positivo
$(2\ ,\ +\infty)$	3	$-\frac{1}{2}$	negativo

6. La *figura II.21*. muestra un bosquejo de la curva asociada a r .

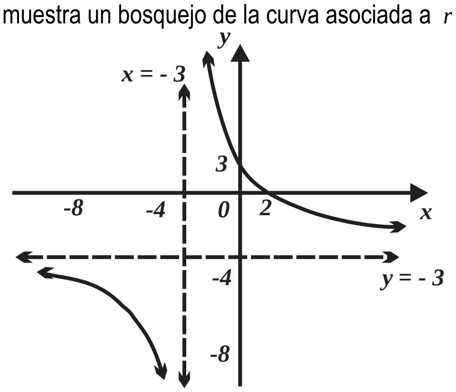


FIGURA II.21

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

c. Bosquejo de la curva asociada a $r(x)=-\dfrac{x}{x^2-5x-6}$.

1. $p(x)=-x$ y $q(x)=x^2-5x-6$ no tienen factores comunes.

2. El único cero es $x=0$ y $I_x(0,0)$. También $I_y(0,0)$

$$dom(r)=(-\infty,-1)\cup(-1,6)\cup(6,+\infty).$$

3. La función r tiene dos asíntotas verticales de ecuaciones $x=-1$ y $x=6$.

4. Por otra parte, puesto que $\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}=-\dfrac{x}{x^2}=-\dfrac{1}{x}$, entonces r tiene una asíntota horizontal de ecuación $y=0$.

5.

INTERVALOS	x_p	$r(x_p)$	SIGNO DE $r(x)$
$(-\infty,-1)$	–4	$-\dfrac{2}{15}$	negativo
$(-1,0)$	$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{2}{13}$	positivo
$(0,6)$	4	$-\dfrac{2}{5}$	negativo
$(6,+\infty)$	8	$\dfrac{4}{9}$	positivo

6. La *figura II.22*. presenta un bosquejo de la curva asociada a r.

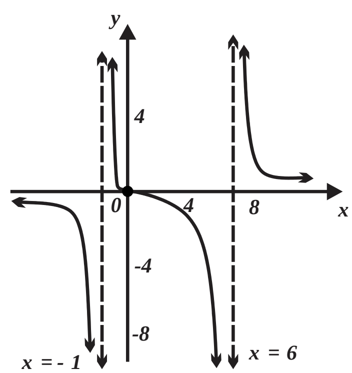


FIGURA II.22

d. Bosquejo de la curva asociada a $r(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-16}$.

1. $r(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-16}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-4)(x+4)}$.

2. Los ceros de $r(x)$ son $x=-2$ y $x=2$. Además

$$dom(r)=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty).$$

3. Puesto que $r(0)=\dfrac{1}{4}$, entonces $r(x)$ interseca al eje y en $I_y\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$.

4. Las asíntotas verticales tienen ecuaciones $x=-4$ y $x=4$. Por otra parte,

Observaciones	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y

y sugerencias		soluciones

como $\frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{x^2}{x^2} = 1$, entonces $y = 1$ es la ecuación de la asíntota horizontal.

5.

INTERVALOS	x_p	$r(x_p)$	SIGNO DE $r(x)$
$(-\infty\ ,\ -4)$	-6	$\frac{8}{5}$	positivo
$(-4\ ,\ -2)$	-3	$-\frac{5}{7}$	negativo
$(-2\ ,\ 2)$	0	$\frac{1}{4}$	positivo
$(2\ ,\ 4)$	3	$-\frac{5}{7}$	negativo
$(4\ ,\ +\infty)$	6	$\frac{8}{5}$	positivo

6. La *figura II.23*. corresponde a un bosquejo de la curva asociada a r .

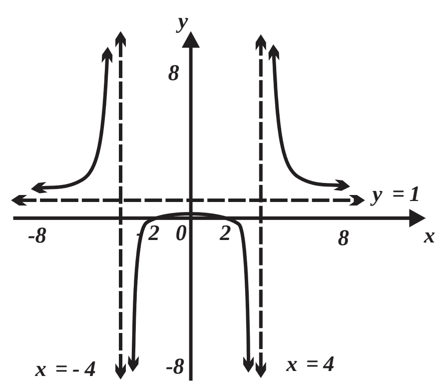


FIGURA II.23

e. Bosquejo de la curva asociada a $r(x) = \frac{x^2 + 2x + 14}{x^2 + 2x + 24}$.

1. $p(x) = x^2 + 2x + 14$ y $q(x) = x^2 + 2x + 24$ no son factorizables.

2. $r(x)$ no tiene ceros, por tanto, $dom(r) = IR$.

3. Puesto que $r(0) = \frac{7}{12}$, la curva asociada a r interseca al eje y en el punto $I_y\left(0\ ,\ \frac{7}{12}\right)$.

4. r no tiene asíntotas verticales, por otra parte, como $\frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{x^2}{x^2} = 1$, entonces $y = 1$ es la ecuación de la asíntota horizontal.

5. La siguiente tabla apoya en trazo del bosquejo de la curva correspondiente a r .

Observaciones	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y

y sugerencias		soluciones

x	$r(x)$
-4	$\frac{11}{16}$
-2	$\frac{7}{12}$
2	$\frac{11}{16}$

6. La *figura II.24* corresponde a un bosquejo de la curva asociada a r .

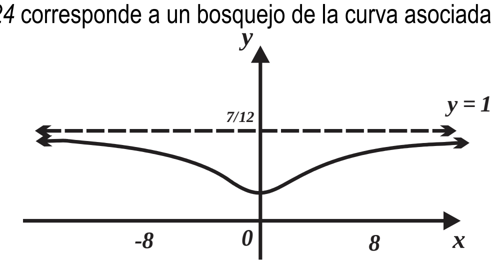


FIGURA II.24

△

Terminemos la presente sección señalando algunas aplicaciones de las funciones racionales.

ACTIVIDAD II.12 (APLICACIONES DE LAS FUNCIONES RACIONALES)
a. (INCREMENTO DE LA CONCENTRACIÓN DE ALCOHOL).
¿Qué cantidad de alcohol debe agregarse a $100\,ml.$, de una mezcla con una concentración del 35% de alcohol, para producir otra mezcla de alcohol con una concentración del $x\%$?
Inicialmente, la cantidad de alcohol en la mezcla es de $35\,ml.$, puesto que:

$$\frac{35\,ml.\ de\ alcohol}{100\,ml.\ de\ mezcla}\left(100\,ml.\ de\ mezcla\right)=35ml.\ de\ alcohol\ .$$

Sea la variable $x = mililitros\ \ de\ alcohol\ \ agregados\ \ a\ \ la\ \ mezcla$, entonces: $x+35$ es la cantidad de alcohol en la mezcla resultante y $x+100$ es el volumen de la mezcla, por tanto: $\dfrac{x+35}{x+100}$ es la concentración de alcohol en función del alcohol agregado. Así, $c\left(x\right)=\dfrac{x+35}{x+100}$ representa la concentración de alcohol en función del alcohol agregado, evidentemente $x \geq 0$.

b. (PERÍMETRO DE UN RECTÁNGULO DE ÁREA FIJA)
Una región rectangular contiene un área de 1000 metros cuadrados, ¿cómo varía el perímetro en función de su ancho?
Representemos por x el ancho del rectángulo y por y su largo, entonces $1000 = x \cdot y$ y $2x+2y=p$. De la primera ecuación obtenemos $y=\dfrac{1000}{x}$, su sustitución en la segunda ecuación da $p=2x+\dfrac{2000}{x}=\dfrac{2x^2+2000}{x}$, siempre que $x>0$.

Observaciones	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y

y sugerencias		soluciones

Por tanto, la función que describe el perímetro del rectángulo en función de su ancho es $p(x)=\dfrac{2x^2+2000}{x}$, donde $x>0$.

c. (POBLACIÓN DE MAMÍFEROS)
El número de cierto tipo de mamíferos en función del tiempo, en una región específica, se modela por medio de la función $p(t)=\dfrac{250+150t}{5+0.25t}$.

i. Por tanto, la población de esos mamíferos a los 10 años es $p(10)=\dfrac{250+150(10)}{5+0.25(10)}\approx 233$.

ii. La población de mamíferos a los 20 años es $p(20)=\dfrac{250+150(20)}{5+0.25(20)}\approx 325$.

iii. La población de mamíferos a los 40 años es $p(40)=\dfrac{250+150(40)}{5+0.25(40)}\approx 416$.

d. (PRODUCCIÓN DE OBJETOS)
El costo total de producir x unidades está dado por $p(x)=3x^2+x+48$ pesos. El costo promedio por unidad producida, es el costo total dividido por la cantidad de unidades producidas.

i. La función $C_P(x)=\dfrac{p(x)}{x}=\dfrac{3x^2+x+48}{x}$ representa el costo promedio por producir x unidades.

ii. El costo promedio (por unidad) al producir $x=10$ unidades es $C_P(10)=\dfrac{3(10)^2+(10)+48}{10}=35.8$ por unidad.

e. (OSCILACIÓN DE UNA PARTÍCULA)
En física se demuestra que la oscilación de una partícula que se fuerza para oscilar en un medio resistente tiene amplitud $A(r)$ dada por la función $A(r)=\dfrac{1}{(1-r^2)^2+kr^2}$ donde r es el radio de la frecuencia de la fuerza frente a la frecuencia natural de oscilación y k es una constante positiva que mide el efecto de amortiguación del medio resistente.

i. Si $k=1$, entonces $A(r)=\dfrac{1}{(1-r^2)^2+r^2}$.

ii. $A(r)=\dfrac{1}{(1-r^2)^2+r^2}$ no tiene asíntotas verticales puesto que $(1-r^2)^2+r^2\neq 0$ ¿por qué?

iii. $A(r)=\dfrac{1}{(1-r^2)^2+r^2}$ tiene como asíntota horizontal la recta de ecuación $y=x$.

f. (COSTO DE UN ENVASE CILÍNDRICO)
Se construirá un envase cilíndrico que contendrá un volumen fijo de 1000

Observaciones	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y

y sugerencias		soluciones

centímetros cúbicos de cierto líquido. El costo del material para fabricar las "tapas circulares" del cilindro es 3 pesos por centímetro cuadrado y el costo del material utilizado para construir la parte lateral es 2 pesos por centímetro cuadrado.

i. Sea: C el costo total del envase, ct el costo de las tapas y cl el costo de la parte lateral, entonces $C = ct + cl$.

ii. Si h representa la longitud de la altura, r la longitud del radio de las bases (superior e inferior), entonces el costo del envase en términos del costo de los materiales es $C = 3\pi r^2 + 3\pi r^2 + 2(2\pi r h) = 6\pi r^2 + 4\pi r h$.

iii. Puesto que el volumen del envase cilíndrico es $V = 1000 = \pi r^2 h$, para escribir el costo del envase en términos de la longitud del radio, despejamos la altura y la sustituimos en la ecuación del costo, así $V = 1000 = \pi r^2 h$, entonces $h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$ y al sustituirla en la ecuación del costo obtenemos

$$C(r) = 6\pi r^2 + \frac{4000}{r} \text{ pesos.}$$

iv. Si el radio es $r = 10$ centímetros, entonces el costo del envase es $C(10) = 6\pi(10)^2 + \dfrac{4000}{(10)} = 600\pi + 400$ pesos.

g. (DEPRECIACIÓN)

Como resultado de los avances tecnológicos en la producción de teléfonos celulares, que son cada vez más compactos y potentes, disminuye el precio de los que existen en el mercado actualmente. Supongamos que dentro de t meses, el precio de cierto modelo se rige por $p(t) = 4000 + \dfrac{3000}{10t + 5}$ pesos.

i. EL precio actual de un teléfono celular es $p(0) = 4000 + \dfrac{3000}{10(0) + 5} = 4600$ pesos.

ii. EL precio de un teléfono celular, a los cinco meses será de $p(5) = 4000 + \dfrac{3000}{10(5) + 5} = 4054.\overline{54}$ pesos.

iii. EL precio de un teléfono celular, a los cinco meses bajó $p(0) - p(5) = 4600 - 4054.\overline{54} = 545.\overline{46}$ pesos.

iv. EL precio de un teléfono celular será de 4200 pesos cuando:

$4200 = 4000 + \dfrac{3000}{10t + 5}$, entonces $200(10t + 5) = 3000$ o $10t + 5 = 15$, pasado un $t = 1$ mes.

v. EL precio de un teléfono celular a largo plazo será de 4000 pesos.

h. (RECOLECCIÓN DE FONDOS)

Una secta religiosa ha lanzado una campaña para reunir fondos. Los administradores de la secta estiman que tardarán $f(x) = \dfrac{100x}{1500 - 10x}$ semanas en conseguir el $x\%$ de sus objetivos.

i. Entonces, en $f(50) = \dfrac{100(50)}{1500 - 10(50)} = \dfrac{5000}{1000} = 5$ semanas alcanzarán el 50% de sus objetivos.

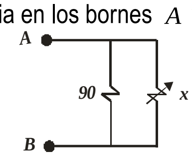
Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
	ii. En $f(100)=\frac{100(100)}{1500-10(100)}=\frac{10000}{500}=20$ semanas alcanzarán el 100% de sus objetivos. **iii.** Para determinar el porcentaje que alcanzaran en 2 semanas, resolvemos la ecuación $2=\frac{100x}{1500-10x}$, por tanto $3000-20x=100x$ o $3000=120x$, entonces en dos semanas alcanzarán el $x=25$ por ciento. △	

Ejercicios y actividades adicionales

Con el propósito de reforzar los aprendizajes alcanzados por los estudiantes, UD. puede implementar en el desarrollo de sus clases algunos de los siguientes ejercicios o actividades.

1. Suponga que el volumen V de un bloque de hielo, cuando se pone a temperatura ambiente ($20\ °C$), es inversamente proporcional al tiempo t transcurrido. Si un bloque de hielo con un volumen de 0.2 metros cúbicos tarda 60 minutos en reducir su volumen a la décima parte, determine $V(t)$.

2. Un resistor $R_1=90$ Ohms está conectado en paralelo con otro resistor de resistencia variable x, tal como lo muestra la figura. Determine la función que relaciona la resistencia en los bornes A y B.



3. Una caja de cartón, con base cuadrada y con tapa, contiene un volumen de 100 centímetros cúbicos. Determine una función que describa el área total de la caja en términos de la longitud de los lados de la base.

4. Una caja de cartón, con base cuadrada y *sin tapa* tiene volumen de 100 centímetros cúbicos. Determine la función que relaciona el área total de la caja y la longitud de los lados de la base.

5. a. Se desea construir una caja que debe tener base cuadrada y *sin tapa*, su volumen debe ser de 100 centímetros cúbicos. Si el precio del material que se utiliza en la base es el doble del que se utiliza en los lados, determine una función que relacione el costo total de la caja y la longitud de los lados de la base.
b. En el inciso a. suponga que el largo de la base es el doble del ancho. Determine una función que relacione el costo total de la caja y la longitud del ancho de la base.
c. En el inciso b. suponga que la caja tiene tapa, determine una función que relacione el costo total de la caja y la longitud del ancho de la base.

6. Se desea construir un tanque en forma de cilindro coronado por una semiesfera, el tanque debe tener capacidad de 6π metros cúbicos.
a. Determine la función que describe la altura en términos de su radio.
b. Determine la función que describe el área del tanque en función de su radio.
c. Suponga que el precio del material para construir la base es 200 pesos por metro cuadrado, que el precio del material para construir la parte esférica es 100 pesos por metro cuadrado, y que el precio del material de la parte cilíndrica es 150 pesos por metro cuadrado. Determine la función que describe el precio del tanque en función de su radio.

7. Se desea construir una ventana rectangular coronada por un semicírculo con radio de longitud x y que tenga un área de 4 metros cuadrados.
a. Determine la función que describe la altura de la parte rectangular, en términos de la longitud del radio.
b. Determine la función que describe la altura total de la ventana, en términos de la longitud del radio.
c. Suponga que el precio del material para construir la parte rectangular es 400 pesos por metro cuadrado y que el precio del material para construir la parte circular es 800 pesos por metro cuadrado, determine la función que describe el precio de la ventana en función de la longitud del radio de la parte circular.

8. Se desea construir un almacén en forma de cilindro coronado por un cono circular recto, con capacidad de 300π metros cúbicos.
a. Determine la función que describe la altura de la parte cilíndrica, en términos de la longitud del radio.
b. Si la altura del cilindro es la misma que la altura de la parte cónica, el precio del material para construir la parte circular es 400 pesos por metro cuadrado y el precio del material para construir la parte cónica es 600 pesos por metro cuadrado, determine la función que describe el precio del almacén en función de la longitud del radio.

9. La página (con forma de rectángulo) de un libro tiene x centímetros de ancho y y centímetros de largo, la superficie impresa es de 30 centímetros cuadrados y se encuentra entre los márgenes que tienen longitudes de 1 centímetro (en el ancho) y 2 centímetros (a lo largo). Determine la función que describe el área total de la página.

10. Determine el dominio, los ceros, el punto de intersección con el eje y y las ecuaciones de las asíntotas verticales.

a. $f(x)=\dfrac{x}{4x^2+2x}$. **b.** $f(x)=\dfrac{x+5}{4x^2+25}$. **c.** $f(x)=\dfrac{3x-9}{4x^2-36}$. **d.** $f(x)=\dfrac{x^2+5x}{x^3+6x^2+8x}$.

e. $f(x)=\dfrac{10x-5}{x^2+9x+18}$. **f.** $f(x)=\dfrac{2x^2+10x^2+12}{4x^2-36}$.

11. Determine el dominio, los ceros, el punto de intersección con el eje y, las ecuaciones de las asíntotas verticales y las ecuaciones de las asíntotas horizontales.

a. $Q(x)=\dfrac{4x-2}{2x+4}$. **b.** $Q(x)=\dfrac{2x^2-18}{3x^2+6}$. **c.** $Q(x)=\dfrac{2x^2-2x-4}{x^2-2x-8}$. **d.** $f(x)=\dfrac{2x^3+x^2-x}{2x^3-3x^2+x}$.

e. $r(x)=\dfrac{x-3}{(x-3)^2}$. **f.** $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$. **g.** $Q(x)=\dfrac{4x^2-9x+6}{x^2-4}$. **h.** $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+2x-8}$.

i. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+3x-10}$. **j.** $Q(x)=\dfrac{x^2+4x-14}{x^2+4x-10}$. **k.** $Q(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-2x-1}$.

12. Identifique las diferencias entre los pares de funciones, justifique su respuesta.

a. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ y $g(x)=x+1$. **b.** $r(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ y $g(x)=x-1$. **c.** $r(x)=\dfrac{x-3}{(x-3)^2}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x-3}$.

d. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x+2}$. **e.** $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ y $g(x)=x+2$.

13. Determine el comportamiento alrededor de los ceros y de las asíntotas verticales.

a. $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$. **b.** $f(x)=\dfrac{2x-4}{x^2+5x+6}$. **c.** $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+8x+12}$. **d.** $f(x)=\dfrac{3x+6}{x^3+5x^2+6x}$.

e. $f(x)=\dfrac{2x^2+12}{10x^2-40}$. **f.** $g(x)=\dfrac{x+2}{4x^2-6x+8}$. **g.** $f(x)=\dfrac{5x-10}{x^2-2x-15}$. **h.** $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3+1}$.

14. Construya una función racional con las siguientes características:
a. Dos ceros.
b. Asíntotas verticales en $x=1$ y $x=3$.
c. Asíntota horizontal $y=2$.

d. Interseque al eje de las ordenadas en $y=-2$.

15. Construya una función racional con las siguientes características:
a. Sin ceros.
b. Asíntotas verticales en $x=-1$ y $x=5$.
c. Asíntota horizontal $y=-4$.
d. Interseque al eje de las ordenadas en $y=-2$.

16. Construya una función racional con las siguientes características:
a. Asíntotas verticales en $x=2$ y $x=-4$.
b. Asíntota horizontal $y=2$.

17. Construya una función racional con las siguientes características:
a. Asíntotas verticales en $x=-3$ y $x=5$.
b. Asíntota horizontal $y=-2$.
c. Hueco en $x=1$.

18. Haga un bosquejo de la curva correspondiente.

a. $f(x)=\dfrac{4}{x+4}$. **b.** $f(x)=\dfrac{2x-4}{x^2+5x+6}$. **c.** $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x-2}$. **d.** $f(x)=\dfrac{4}{x^2-x-12}$.

e. $f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2-x}$. **f.** $f(x)=\dfrac{x-1}{2x^2-6x+4}$. **g.** $f(x)=\dfrac{3x-6}{(x-2)(x+4)}$. **h.** $f(x)=\dfrac{5x-10}{x^2-2x-15}$.

i. $f(x)=\dfrac{x}{x^3-5x+3}$. **j.** $Q(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+4x-10}$. **k.** $Q(x)=\dfrac{x^2}{x^2-49}$. **l.** $Q(x)=-\dfrac{x^2-11x+28}{x^2-4x-21}$.

19. Determine los ceros reales, la intersección con el eje y, las asíntotas y luego trace la curva asociada.

a. $p(x)=\dfrac{x^2-10x+25}{x-3}$. **b.** $q(x)=\dfrac{3x-8}{x^2+3x+3}$. **c.** $f(x)=\dfrac{-x}{x^2-24}$. **d.** $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2-25}$.

e. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$. **f.** $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^3-64}$. **g.** $f(x)=\dfrac{x^3-x}{x-1}$. **h.** $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x}$.

i. $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x^2+6}$. **j.** $f(x)=\dfrac{x^3+x^2}{x^2+2x}$.

20. Describa la curva asociada, sugerencia: simplifique.

a. $s(x)=\dfrac{x+b}{x+d}$. **b.** $s(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ si $c\neq 0$.

21. Trace la curva asociada, ¿Qué semejanzas existen? ¿Cuáles son las diferencias?

a. $Q(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$. **b.** $r(x)=\dfrac{x^4}{x-1}$. **c.** $s(x)=\dfrac{x^6}{x-1}$. **d.** $Q(x)=\dfrac{x^8}{x-1}$.

22. ¿Por qué $w(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+4}$ no tiene asíntotas verticales? ¿Por qué no tiene ceros?

23. Qué condiciones debe cumplir la función para que:
i. No tenga ceros.
ii. La curva correspondiente no interseque al eje x.
iii. La curva correspondiente no presente "huecos".
iv. No tenga asíntotas verticales.

a. $s(x)=\dfrac{Dx+E}{Ax^2+Bx+C}$. **b.** $t(x)=\dfrac{Dx^2}{Ax^2+Bx+C}$. **c.** $t(x)=\dfrac{Dx^2+Ex+F}{Ax^2+Bx+C}$.

24. Utilice un graficador, por ejemplo “Geogebra”, y haga las gráficas de $q_1(x)=\frac{x^2}{x^2-9}$, $q_2(x)=\frac{x^4}{x^2-9}$, $q_3(x)=\frac{x^6}{x^2-9}$ y $q_4(x)=\frac{x^8}{x^2-9}$.

a. ¿Qué semejanzas observa?
b. ¿Qué diferencias observa?

25. (CANTIDAD DE DROGA EN LA SANGRE)
La concentración de una droga en la sangre, después de haber sido consumida por una persona está dada por $d(t)=\frac{0.80t}{t^2+0.81}$ miligramos después de t horas.

a. ¿Qué concentración de droga hay después de 2 horas?
b. ¿Qué concentración de droga hay después de 8 horas?
c. ¿Cuánto tiempo transcurrió cuando la concentración de droga era del 20%?

26. (INCREMENTO DE LA CONCENTRACIÓN DE ALCOHOL)
Establezca la función que describe la concentración de alcohol en $100\,ml.$ de una mezcla al 40% de alcohol para producir una mezcla de alcohol al $x\%$.

27. (DEPRECIACIÓN)
Resultado de los avances tecnológicos en la producción de computadoras, cada vez más versátiles y potentes, disminuye el precio de las que existen en el mercado hoy en día. Supongamos que dentro de t meses, el precio de cierto modelo será $p(t)=8000+\frac{2000}{8t+4}$ pesos.

a. ¿Cuál es el precio actual de una computadora?
b. ¿Cuál será el precio de una computadora dentro de cinco meses?
c. ¿Cuánto bajó el precio de una computadora a los diez meses?
d. ¿En qué tiempo el precio de una computadora será de 8010 pesos?
e. ¿A largo plazo, cuál será el precio de una computadora?

28. (DEPRECIACIÓN)
Los precios de los automóviles disminuyen a consecuencia de su uso. Supongamos que dentro de t años, el precio de cierto modelo de automóvil será $p(t)=\frac{300\,000}{0.5t^2+1}$ pesos.

a. ¿Cuál es el precio actual de un automóvil?
b. ¿Cuál será el precio de un automóvil dentro de un año?
c. ¿Cuánto bajó el precio de un automóvil a los tres años?
d. ¿En qué tiempo el precio del automóvil será de 141000 pesos?
e. ¿A largo plazo, cuál será el precio de un automóvil?

29. (COSTO DE UN ENVASE)
Se construirá un envase en forma de prisma con base cuadrada, mismo que contendrá un volumen fijo de 2000 cc de líquido. El costo del material para fabricar las “bases cuadradas” es de 3 pesos por centímetro cuadrado y el costo del material utilizado para la parte lateral es de 2 pesos por centímetro cuadrado.

a. Si y es la longitud de la altura del envase y x es la longitud de lado de la base cuadrada, escriba el costo del envase en términos de estas dos variables.
b. Utilice la condición de que el envase contendrá un volumen fijo de 2000 centímetros cúbicos y obtenga la función que describe el costo del envase en términos de la longitud del lado de las bases.
c. Determine el costo del envase si un lado de su base mide 4 centímetros de longitud.

30. (PRODUCCIÓN DE GOLOSINAS)

El costo total de producir x kilogramos de golosinas está dado por $p(x)=2x^2+x+50$ pesos. El costo promedio por unidad producida, es el costo total dividido por la cantidad de unidades producidas.
a. Determine el costo de producir un kilogramo de golosinas.
b. Determine la función "costo promedio" por producir x kilogramos de la golosina.
c. Determine el costo promedio (por kilogramo) al producir $x=120$ kilogramos de golosinas.

31. (ESTIMACIÓN DE LA POBLACIÓN)

Se estima que dentro de t meses la población en cierta "ciudad "de paso" será de $P(t)=10\,000+\dfrac{10\,000}{10t+10}$ habitantes.
a. ¿Cuál es el número actual de habitantes?
b. ¿Cuántos habitantes habrá en 10 meses?
c. ¿Cuántos habitantes habrá en 20 meses?
d. Después de un largo tiempo, ¿cuántos habitantes se espera que haya?

32. (RECOLECCIÓN DE FONDOS)

Un club privado ha lanzado una campaña para reunir fondos. Los dirigentes estiman que tardarán $f(x)=\dfrac{8x}{120-x}$ semanas en conseguir el $x\%$ de sus objetivos.
a. Trace la parte relevante de la gráfica correspondiente.
b. ¿En cuántas semanas alcanzarán el 25% de sus objetivos?
c. ¿En cuántas semanas alcanzarán el 90% de sus objetivos?
d. ¿Qué porcentaje de objetivos alcanzarán en 3 semanas?

SECCIÓN II.2	FUNCIONES CON RADICALES DE ÍNDICE DOS

APRENDIZAJES Y CONTENIDOS TEMÁTICOS

SECCIÓN	APRENDIZAJES	CONTENIDOS TEMÁTICOS
II.2	**Apr.5** Explorará problemas que se modelen con funciones con radicales. **Apr.6** Identificará los elementos de la función: dominio, rango, ceros y traza su gráfica. **Apr.7** Problemas de aplicación.	**1.** Funciones de la forma: $f(x)=\sqrt{ax\pm b}$, $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ con a , b y $c \in IR$. **2.** Elementos de las funciones: Dominio. Rango. Ceros.

CONCEPTOS CLAVE

Los siguientes conceptos son fundamentales en un buen desarrollo del curso:

i. Función con radical, semi parábola, semi hipérbola y semi elipse.

TIEMPO ESTIMADO

En situaciones regulares se invierten 5 horas en el desarrollo de los aprendizajes antes señalados.

PROCESOS Y ALGORITMOS BÁSICOS

Bosquejo de la gráfica de una función racional.

DESARROLLO

(estrategias didácticas, actividades de enseñanza aprendizaje, materiales de apoyo, identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución).

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
i. Proponga objetos geométricos en los que sea posible relacionar longitudes y áreas, o volúmenes con áreas.	Los problemas que relacionan las dimensiones de objetos o estructuras con sus áreas suelen involucrar la construcción de funciones con regla de correspondencia de las formas: $f(x)=\sqrt{ax\pm b}$ y $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$, veamos algunas de ellos. **ACTIVIDAD II.13** (ÁREAS Y DIMENSIONES) **a.** Los envases con forma cilíndrica (concretamente con forma de cilindro truncado), tienen bases circulares de área $A=\pi r^2$ con la condición de que el radio sea no negativo ($r>0$). Para expresar el radio r de cada base de un cilindro en función del área A despejamos r de $A=\pi r^2$ y obtenemos $r=+\sqrt{\frac{A}{\pi}}$ ó $r(A)=\sqrt{\frac{A}{\pi}}$, siempre que $A>0$. **b.** Objetos esféricos (como globos, canicas, balines). Considerando que el área de una esfera se calcula utilizando la "fórmula" $A=4\pi r^2$ siempre que $r>0$, al despejar r obtenemos $r=\sqrt{\frac{A}{4\pi}}$, así, el radio de un objeto esférico en función del área de la esfera dado por la función $r(A)=\sqrt{\frac{A}{4\pi}}$, siempre que $A>0$. **c.** El volumen V de un cono circular recto (formas que presentan objetos como: lámparas, pirinolas, almacenes, pijas, herramientas, etc.) con altura de dimensión fija, digamos 3 unidades, y radio r está relacionado por la función $V=\frac{1}{3}\pi r^2(3)$. Si despejamos el radio de la fórmula anterior obtenemos $r=\sqrt{\frac{V}{\pi}}$, así, el radio del cono en función de su volumen está dado por la función $r(V)=\sqrt{\frac{V}{\pi}}$, siempre que $V>0$. **d.** La longitud l de los lados de un cubo (forman que presentan diversos objetos como: dados, envases, cajas, almacenes, bancos, lámpatras etc.) y su área se relacionan por $A=4l^2$, entonces la función que relaciona la longitud l del lado del cubo y su área es $l=\sqrt{\frac{A}{4}}$ o bien $l(A)=\sqrt{\frac{A}{4}}$, siempre que $A>0$. **e.** El radio r de un sector circular (figura con la que se pueden modelar fracciones de alimentos circulares, fracciones de materiales circulares, etc.) en función de su área A del sector se obtiene a partir de la "fórmula $A=\frac{1}{2}r^2\theta$" (donde el ángulo θ está medido en radianes), entonces, al despejar r obtenemos $r=\sqrt{\frac{2A}{\theta}}$, explícitamenter $r(A)=\sqrt{\frac{2A}{\theta}}$, siempre que $\theta>0$. **g.** El teorema de Pitágoras afirma: En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las longitudes de los cuadrados de los catetos y viceversa, si la suma de cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa, entonces el triángulo es rectángulo". Si en un triángulo rectángulo, h representa la longitud de la hipotenusa, a la longitud de un cateto (constante), entonces $h(x)=\sqrt{a^2+x^2}$, siempre que $x>0$. △	

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

ACTIVIDAD II.14 (TENDIDO DE UN CABLE)

Se pretende tender un cable desde una central eléctrica (que se encuentra en la ribera de un río cuyo ancho uniforme mide 900 metros), hasta una fábrica que se encuentra en la otra ribera del río y a 3000 metros agua abajo. El costo de tender el cable por bajo del agua es $\$50.00$ por metro, mientras que tenderlo sobre la tierra tiene un costo de $\$40.00$ por metro. Así, el costo total C de tendido del cable depende del costo C_1 de tenderlo bajo el agua y del costo C_2 de tenderlo sobre tierra. Ambos costos dependen del punto P sobre una de las riberas del río que pertenece a la trayectoria a seguir por el cable, la *figura II.25* muestra dos posibles trayectorias del cable.

Notación:
- E Central eléctrica.
- F Fábrica a la que es necesario proveer la electricidad.
- →▸▸ Trayectoria a seguir al tender el cable.
- P Punto de cambio de la trayectoria.

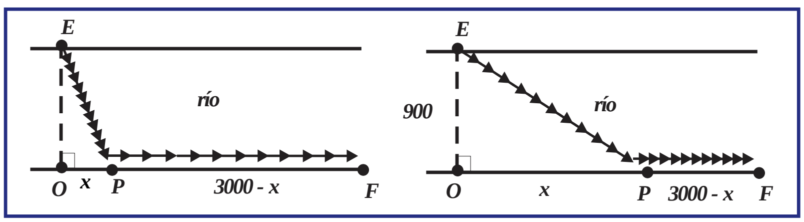


FIGURA II.25

En la trayectoria EPF , x representa la longitud del segmento de recta OP , si $OF = 3000$ metros, la trayectoria PF tiene longitud de $3000 - x$ metros. En el triángulo rectángulo EOP la hipotenusa EP es la trayectoria del cable bajo el agua (a determinar). Si aplicamos el teorema de Pitágoras obtenemos $(900)^2 + x^2 = (EP)^2$, entonces $EP = \sqrt{x^2 + 900^2}$. La *figura II.26* muestra que la trayectoria del cable tiene una longitud de $\sqrt{x^2 + 900^2}$ metros bajo el agua y de $3000 - x$ metros sobre tierra, la suma de ambas trayectorias es la longitud total del cable, esto es $EP + PF = \sqrt{x^2 + 900^2} + 3000 - x$. Pero $\text{Costo total} = \text{costo bajo el agua} + \text{costo sobre tierra}$, es decir

$C(x) = 50EP + 40PF$ o $C(x) = 50\sqrt{x^2 + 900^2} + 40(3000 - x)$, sí $0 < x \leq 3000$.

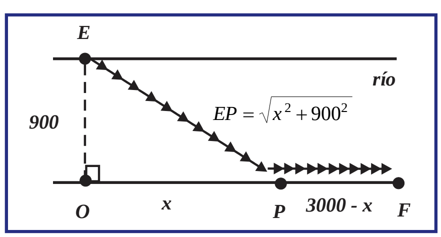


FIGURA II.26

△

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

ii. Desarrolle el análisis gráfico de $f(x)=\sqrt{ax\pm b}$ bajo la suposición de que el radicando es no negativo, razón por la que el único cero de la función, mismo quedefine el umbral que define el dominio de la función.

El único cero de la función $f(x)=\sqrt{ax+b}$ es $x=-\frac{b}{a}$, así, el número $x=-\frac{b}{a}$ genera los intervalos $\left(-\infty\ ,\ -\frac{b}{a}\right]$ y $\left[-\frac{b}{a}\ ,\ +\infty\right)$ en la recta real, vea la *figura II.27*. Por tanto, uno de estos dos intervalos es el dominio de la función $f(x)=\sqrt{ax+c}$ y la curva asociada a ella interseca al eje de las abscisas en el punto $I_x\left(-\frac{b}{a}\ ,\ 0\right)$).

FIGURA II.27

ESTRATEGIA II.3 (DOMINIO DE LA FUNCIÓN $f(x)=\sqrt{ax+b}$)

1. Determine la solución de la ecuación $ax+b=0$ y construya los intervalos $\left(-\infty\ ,\ -\frac{b}{a}\right]$ y $\left[-\frac{b}{a}\ ,\ +\infty\right)$.

2. Elija un número de prueba x_p en cada uno de los intervalos anteriores y sustituya x_p en $bx+c$.

i. Si obtiene un número positivo en el radicando, el intervalo del que eligió x_p es el dominio de la función $f(x)=\sqrt{ax+b}$.

ii. Si obtiene un número negativo en el radicando, el intervalo del que eligió x_p no es el dominio de la función $f(x)=\sqrt{ax+b}$.

ii. Induzca al estudiante a que construya una tabla como la de la derecha.

Por otra parte, el comportamiento extremo de $f(x)=\sqrt{ax+b}$ lo define el signo del parámetro a (también define el dominio). Supongamos que a es positivo, para asignaciones extremadamente grandes a la variable x, la función $f(x)=\sqrt{ax+b}$ crece indefinidamente en forma positiva.

Cuando el número a es negativo, para asignaciones extremadamente grandes y negativas a la variable x , la función $f(x)=\sqrt{ax+b}$ crece indefinidamente en forma positiva. La *tabla II.1* resume estas observaciones.

SIGNO DE a	x ACEPTA	COMPORTAMIENTO EXTREMO
POSITIVO	Asignaciones positivas	Positivo extremo
NEGATIVO	Asignaciones negativas	Positivo extremo

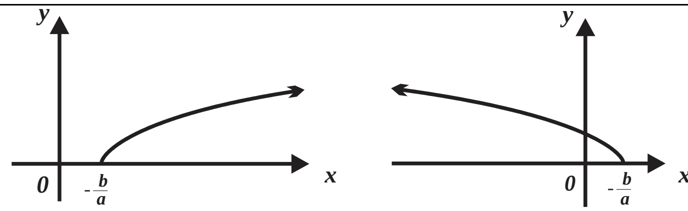
TABLA II.1

iii. Señale que la curva asocida a $f(x)=\sqrt{ax+b}$ recibe el nombre de semi parábola.

La *tabla II.1* fundamenta la *estrategia II.3*, que se aplica en el trazo de la curva asociada a la función de regla de correspondencia $f(x)=\sqrt{ax+b}$, vea la *figura II.28*. Por otra parte, la proyección perpendicular de la curva asociada a $f(x)=\sqrt{ax+c}$ sobre el eje de las ordenadas es el intervalo $img(f)=[0\ ,\ +\infty)$, intervalo que corresponde a la imagen de f .

1. El programa indicativo propone el esudio de la función $f(x)=\sqrt{ax\pm b}$, observe que el doble signo $\pm$ no es necesario.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones



a. b.

FIGURA II.28

iv. Proponga al estudiante que analice y trace las curvas asociadas a diversas funciones racionales.

ACTIVIDAD II.15 (TRAZO DE SEMI PARÁBOLAS)

a. Trazo de la curva asociada a la función $f\left(x\right)=\sqrt{2x+6}$.

1. Su único cero es la solución de la ecuación $2x+6=0$, es decir, es $x=-3$.

2.

INTERVALOS	x_p	$f\left(x_p\right)$	SIGNO DEL RADICANDO
$\left(-\infty\ ,\ -3\right]$	–4	$\sqrt{-2}$	negativo
$\left[-3\ ,\ +\infty\right)$	0	$\sqrt{6}$	positivo

Por tanto, $dom\left(f\right)=\left[-3\ ,\ +\infty\right)$, la semi parábola correspondiente se muestra en la *figura II.29.*

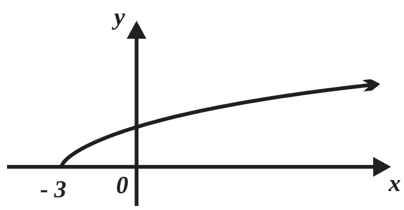


FIGURA II.29

b. Trazo de la curva asociada a la función $f\left(x\right)=\sqrt{-4x+5}$.

1. Su único cero es la solución de la ecuación $-4x+5=0$, es decir $x=\dfrac{5}{4}$.

2.

INTERVALOS	x_p	$f\left(x_p\right)$	SIGNO DEL RADICANDO
$\left(-\infty\ ,\ \dfrac{5}{4}\right]$	0	$\sqrt{5}$	positivo
$\left[\dfrac{5}{4}\ ,\ +\infty\right)$	2	$\sqrt{-3}$	negativo

Por tanto, $dom\left(f\right)=\left(-\infty\ ,\ \dfrac{5}{4}\right]$, la semi parábola correspondiente se muestra en la *figura II.30.*

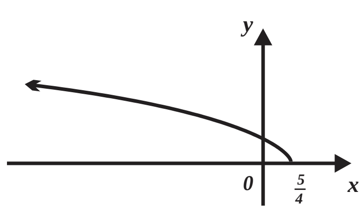


FIGURA II.30

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

c. Trazo de la curva asociada a la función $f(x) = -\sqrt{9x-18}$.

1. Su único cero es la solución de la ecuación $9x-18=0$, es decir, $x=2$.

2.

INTERVALOS	x_p	$f(x_p)$	SIGNO DEL RADICANDO
$(-\infty, 2]$	0	$-\sqrt{-18}$	negativo
$[2, +\infty)$	3	$-\sqrt{9}$	positivo

Por tanto, $dom(f) = [2, +\infty)$.

3. El signo negativo que precede al radical indica que la semi parábola correspondiente a $f(x) = -\sqrt{9x-18}$ se encuentra por abajo del eje de las abscisas (su eje de simetría), vea la *figura II.31.* Observe que

$$img(f) = (-\infty, 0].$$

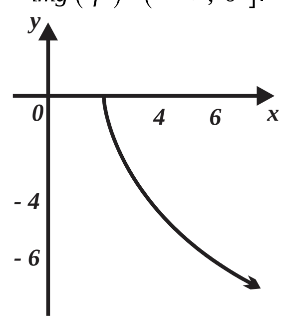


FIGURA II.31

d. Trazo de la curva asociada a $f(x) = -\sqrt{-2x+4}$.

1. Su único cero es la solución de la ecuación $-2x+4=0$, es decir, $x=2$.

2.

INTERVALOS	x_p	$f(x_p)$	SIGNO DEL RADICANDO
$(-\infty, 2]$	0	$-\sqrt{4}$	positivo
$[2, +\infty)$	3	$-\sqrt{-2}$	negativo

Por tanto, $dom(f) = (-\infty, 2]$.

3. El signo negativo que precede al radical indica que la semi parábola correspondiente a $f(x) = -\sqrt{-2x+4}$ se encuentra por abajo del eje de las abscisas (eje de simetría), vea la *figura II.32.* Note que $img(f) = (-\infty, 0]$.

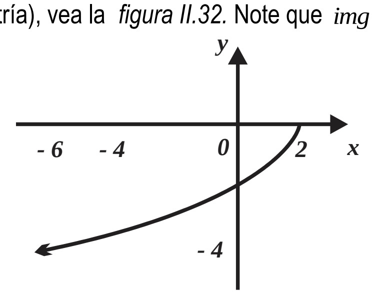


FIGURA II.32

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

e. Trazo de la curva asociada a la función $f(x)=\sqrt{-3x-1}$.

1. Su único cero es la solución de la ecuación $-3x-1=0$, por tanto $x=-\frac{1}{3}$.

2.

INTERVALOS	x_p	$f(x_p)$	SIGNO DEL RADICANDO
$\left(-\infty\ ,\ -\frac{1}{3}\right]$	-1	$\sqrt{2}$	positivo
$\left[-\frac{1}{3}\ ,\ +\infty\right)$	0	$\sqrt{-1}$	negativo

Así, $dom(f)=\left(-\infty\ ,\ -\frac{1}{3}\right]$.

3. La semi parábola correspondiente a la función $f(x)=\sqrt{-3x-1}$ se muestra en la *figura II.33*. Observe que $img(f)=[0\ ,\ +\infty)$.

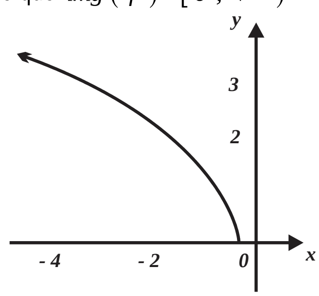


FIGURA II.33

△

FUNCIONES CON RADICANDO CUADRÁTICO

v. Guíe al estudiante que analice y trace las curvas asociada a $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ en términos de su número de ceros.

La función con regla de correspondencia $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ (sujeta a la condición $A\neq 0$) tiene como radicando una expresión cuadrática (de grado dos) en la variable x y sus ceros son las raíces (en caso de existir) de la ecuación cuadrática. En función del número de ráices de la ecuación $Ax^2+Bx+C=0$ analizaremos las características de la curva asociada a $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$.

CASO I (EL RADICANDO NO TIENE CEROS)

Supongamos que el radicando de $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ no tiene ceros (cuyo significado geométrico es que la curva que tiene asociada no interseca al eje de las abscisas).

vi. Solicite al estudiante que investigue la ley de la tricotomía.

Por la ley de la tricotomía se tiene que $Ax^2+Bx+C>0$ o que $Ax^2+Bx+C<0$

RADICANDO POSITIVO

Si $Ax^2+Bx+C>0$ (léase "Ax^2+Bx+C es mayor que cero"), entonces $dom(f)=(-\infty\ ,\ +\infty)$.

i. f es no negativa (su curva se encuentra en los cuadrantes I y II del plano cartesiano).

ii. Para asignaciones extremadamente a x (ya sea positivas o negativas), las imágenes bajo $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ son extremadamente grandes y positivas.

<table>
<tr>
<th>Observaciones y sugerencias</th>
<th>Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo</th>
<th>Dificultades y soluciones</th>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>

iii. Por otra parte, $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ puede escribirse en la forma $\frac{\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2}{r^2}-\frac{y^2}{s^2}=1$ donde $r^2=\frac{B^2-4AC}{4A^2}$ y $s^2=\frac{r^2}{A}$.

i**v.** La *figura II.34* muestra la forma de la curva asociada a f, esta curva es una rama de una hipérbola con eje focal vertical.

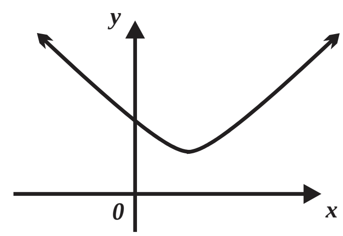


FIGURA II.34

RADICANDO NEGATIVO

Si $Ax^2+Bx+C<0$ (léase "Ax^2+Bx+C es menor que cero"), entonces $dom(f)=\varnothing$ y $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ no es una función.

<u>**CASO II RADICANDO CON UN CERO DE MULTIPLICIDAD 2**</u>

Sea $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ con un solo cero, y llamémosle x_1, entonces Ax^2+Bx+C puede reescribirse en la $A(x-x_1)^2$. Se tienen dos posibilidades (inducidas por el signo de A):

Si $A>0$, entonces $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}=\sqrt{A(x-x_1)^2}=\sqrt{A}\sqrt{(x-x_1)^2}$ por lo que $dom(f)=(-\infty,+\infty)$ y la curva asociada a $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}=\sqrt{A}\sqrt{(x-x_1)^2}=\pm\sqrt{A}(x-x_1)$ se muestra en la *figura II.35.*, note que las dos semirrectas tienen un extremo común que es el único cero de la función $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$.

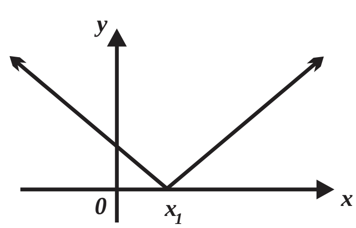


FIGURA II.35

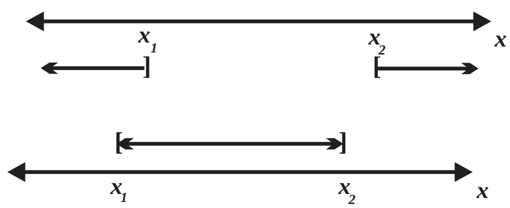
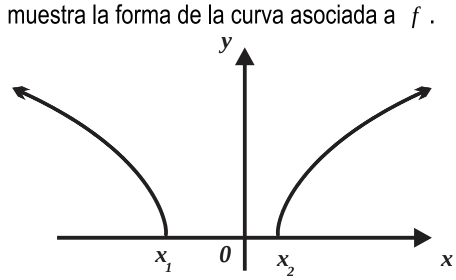
Si $A<0$, entonces $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}=\sqrt{A(x-x_1)^2}$, pero el radicando es negativo y en consecuencia la función $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ sólo está sí $x=x_1$, así, su dominio consta de un sólo número (que es un cero de la función) y el conjunto imagen sólo contiene al número cero, por tanto, la "curva que le correspond" consta de un sólo punto.

</td>
<td>

1. Por lo general los estudiantes no han tratado con hipérbolas, solicíteles una somera investigación.

2. La función $f(x)=\sqrt{A}\sqrt{(x-x_1)^2}$ es equivalente a la función $f(x)=\sqrt{A}\,|x-x_1|$ que incluye un valor absoluto de una expresión lineal, utilizar un recurso tabular podría aclarar esta situación.

</td>
</tr>
</table>

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
vii. Solicite al estudiante que investigue las características de una hipérbola con eje transverso horizontal..	**CASO III (EL RADICANDO TIENE DOS CEROS)** Sí $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ tiene dos ceros distintos y éstos son x_1 y x_2 (también, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_1<x_2$), entonces la función puede rescribirse en la forma $f(x)=\sqrt{A(x-x_1)(x-x_2)}$. Así, los dos ceros x_1 y x_2 generan tres sub intervalos a la recta real, estos sub intervalos son $(-\infty\ ,\ x_1\ ]$, $[\ x_1\ ,\ x_2\ ]$ y $[\ x_2\ ,\ +\infty)$, vea la *figura II.36*.  **FIGURA II.36** Por tanto, existen dos posibles dominios para la función $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}=\sqrt{A(x-x_1)(x-x_2)}$, éstos son $dom(f)=(-\infty\ ,\ x_1\ ]\cup[\ x_2\ ,\ +\infty)$ ó $dom(f)=[\ x_1\ ,\ x_2\ ]$. **SUB CASO III.a** Dominio de $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ el conjunto $dom(f)=(-\infty\ ,\ x_1\ ]\cup[\ x_2\ ,\ +\infty)$. Se cumple: **i.** f es no negativa. **ii.** Para asignaciones extremadamente grandes a x (ya sea positivas o negativas), las imágenes bajo $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ son extremadamente grandes y positivas. **iii.** Por otra parte, $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ puede escribirse en la forma $\frac{\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2}{r^2}-\frac{y^2}{s^2}=1$ donde $r^2=\frac{B^2-4AC}{4A^2}$ y $s^2=\frac{r^2}{A}$, luego los puntos $(x_1,0)$, $(x_2,0)$ son los vértices de una semihipérbola con eje focal horizontal. **iv.** La *figura II.37*. muestra la forma de la curva asociada a f.  **FIGURA II.37** **SUB CASO III.b.** Dominio de $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$, el conjunto $dom(f)=[\ x_1\ ,\ x_2\ ]$.	**3.** Seguramente el alumno desconoce la forma de una semi hipérbola, proponga que lo investigue.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

Dominio de $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$, el conjunto $dom(f)=[x_1, x_2]$.

i. f es no negativa (su curva se encuentra en los cuadrantes I y II del plano cartesiano).

ii. f sólo está definida sobre el intervalo $[x_1, x_2]$, por lo que carecede comportamiento extremo.

iii. $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ puede reescribirse en la forma $\frac{\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2}{r^2}+\frac{y^2}{s^2}=1$ donde $r^2=\frac{B^2-4AC}{4A^2}$ y $s^2=\frac{r^2}{A}$ (tenga en cuenta que $A<0$), luego los puntos $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ son los vértices de una semi elipse con eje focal horizontal (también puede ser la parte no negativa de una circunferencia).

iv. La *figura II.38*. muestra la forma de la curva asociada a la función $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$.

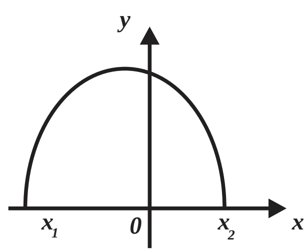


FIGURA II.38

ACTIVIDAD II.22 (BOSQUEJO DE LA GRÁFICA DE FUNCIONES CON RADICANDO CUADRÁTICO)

a. Trazo de la curva asociada a la función $f(x)=\sqrt{x^2-10x+24}$.

i. Puesto que $f(x)=\sqrt{x^2-10x+24}=\sqrt{(x-4)(x-6)}$, los ceros son los números $x_1=4$ y $x_2=6$.

INTERVALOS	x_p	SIGNO DE $x_p^2-10x_p+24$	f
$(-\infty, 4]$	0	24 , positivo	positiva
$[4, 6]$	5	-1 , negativo	no definida
$[6, +\infty)$	8	8 , positivo	positiva

Así, $dom(f)=(-\infty, 4]\cup[6, +\infty)$.

ii. La curva asociada a f interseca al eje de las abscisas en los puntos $I_{x1}(4, 0)$ y $I_{x2}(6, 0)$, al eje de las ordenadas en el punto $I_y(0, \sqrt{24})$.

iii. La curva asociada a f crece indefinidamente cuando a la variable x le son asignados valores extremadamente grandes, ya sean positivos o negativos, por tanto $img(f)=[0, +\infty)$. Vea la *figura II.39.*

viii. Proponga al estudiante actividades en las que identifique las características del radicando de una función con regla de correspondencia de la forma, $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ para que posteriormente trace la curva asociada.

4. Solicite al estudiante evidencias de que ha repasado el tema referente a las secciones cónicas.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

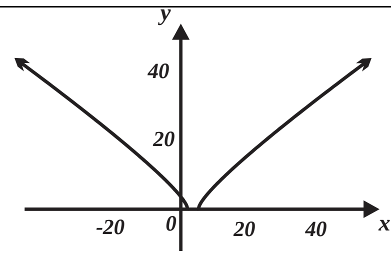


FIGURA II.39

b. Trazo de la curva asociada a $f(x)=\sqrt{-x^2-4x+12}$.

i. Puesto que $f(x)=\sqrt{-x^2-4x+12}=\sqrt{-(x+6)(x-2)}$, los ceros son los números $x_1=-6$ y $x_2=2$.

INTERVALOS	x_p	SIGNO DE $-x_p^2-4x_p+12$ $-x^2-4x+12$	f
$(-\infty\ ,\ -6\ ]$	-8	-20 , negativo	no definida
$[-6\ ,2]$	0	12 , positivo	positiva
$[\ 2\ ,\ +\infty)$	4	-20 , negativo	no definida

Así, $dom(f)=[-6,2]$.

ii. La curva asociada a $f(x)=\sqrt{-x^2-4x+12}$ interseca al eje de las abscisas en los puntos $I_{x1}(-6\ ,\ 0)$ y $I_{x2}(2\ ,\ 0)$, al eje de las ordenadas en el punto $I_y\left(0\ ,\ \sqrt{12}\right)$.

iii. La curva asociada a $f(x)=\sqrt{-x^2-4x+12}$ es una semielipse (positiva) con vértices en $I_{x1}(-6\ ,\ 0)$ y $I_{x2}(2\ ,\ 0)$. Vea la *figura II.39.*

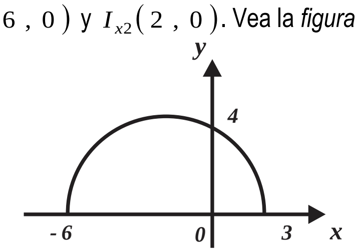


FIGURA II.39

c. Trazo de la curva asociada a $f(x)=\sqrt{x^2-2x+13}$.

i. Puesto que la función $f(x)=\sqrt{x^2-2x+13}$ no tiene ceros ($B^2-4AC=(-2)^2-4(1)(13)=-48$), determinemos el signo del radicando completando el trinomio cuadrado perfecto en la variable x, esto es $f(x)=\sqrt{x^2-2x+13}=\sqrt{(x-1)^2+12}$, por tanto $x^2-2x+13=(x-1)^2+12$ es siempre positivo (¿por qué?) y en consecuencia $dom(f)=IR$.

ii. La curva asociada a f no interseca al eje de las abscisas, pero interseca al eje de las ordenadas en el punto $I_y\left(0\ ,\ \sqrt{13}\right)$.

iii. La curva asociada a f crece indefinidamente cuando a x le son asignados

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

valores extremadamente grandes, ya sean positivos o negativos, por tanto $img\left(f\right)=\left[\sqrt{12}\,,+\infty\right)$. Vea la *figura II.40.*

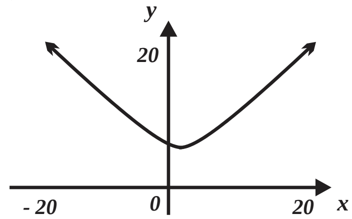


FIGURA II.40

d. Trazo de la curva asociada a la función $f\left(x\right)=\sqrt{-x^2+8x-26}$.

i. La función $f\left(x\right)=\sqrt{-x^2+8x-26}$ no tiene ceros puesto que $B^2-4AC=\left(8\right)^2-4\left(-1\right)\left(-26\right)=-40$.

ii. Determinamos el signo del radicando completando el trinomio cuadrado perfecto en la variable x, así $f\left(x\right)=\sqrt{-x^2+8x-26}=\sqrt{-\left(x-4\right)^2-10}$, por tanto su radicando es negativo (¿por qué?). Por lo anterior debemos concluir que $f\left(x\right)=\sqrt{-x^2+8x-26}$ no es una función.

e. Trazo de la curva asociada a la función $f\left(x\right)=\sqrt{9x^2-36x+36}$.

i. Puesto que $f\left(x\right)=\sqrt{9x^2-36x+36}=3\sqrt{x^2-4x+4}=3\sqrt{\left(x-2\right)^2}$ tiene como único cero al número $x=2$ y como dominio al conjunto $dom\left(f\right)=IR$.

ii. La curva asociada a $f\left(x\right)=\sqrt{9x^2-36x+36}$ interseca al eje de las abscisas en el punto $I_x\left(2\ ,\ 0\right)$ y al eje de las ordenadas en el punto $I_y\left(0\ ,\ 6\right)$.

iii. La curva asociada a $f\left(x\right)=\sqrt{9x^2-36x+36}$ crece indefinidamente cuando a x le son asignados valores extremadamente grandes, ya sean positivos o negativos, por tanto $img\left(f\right)=\left[0,+\infty\right)$. Vea la *figura II.41.*

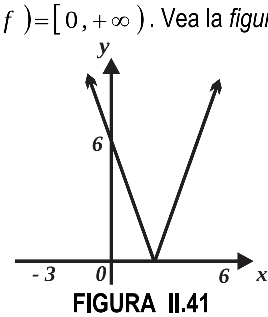


FIGURA II.41

△

Concluiremos el estudio de las funciones con radicales presentando algunas de sus aplicaciones.

ACTIVIDAD II.23 (APLICACIONES DE LAS FUNCIONES CON RADICALES)
a. ALTURA DEL PUNTO DE APOYO DE UNA ESCALERA
Una escalera de 8 metros de longitud está apoyada sobre una pared. El pie de la escalera dista x metros de la pared.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

I. Para determinar la función que describe la altura a la que se puede apoyar la escalera en la pared en función de la distancia de la base de la escalera a la base de la pared, nos apoyaremos en la *figura II.42.* La altura del punto de apoyo h, la longitud de la escalera y la distancia del pie de la escalera al pie de la pared x se relacionan por medio de la ecuación $h^2(x)+x^2=8^2$ (de acuerdo al teorema de Pitágoras, por tanto, $h(x)=\sqrt{8^2-x^2}$, siempre que $0\le x\le 8$.

II. Cuando la distancia entre el pie de la base de la escalera y el pie de la pared es 2 metros, la altura a la que se encuentra el punto apoyo de la escalera es $h(2)=\sqrt{8^2-2^2}=\sqrt{60}$ metros.

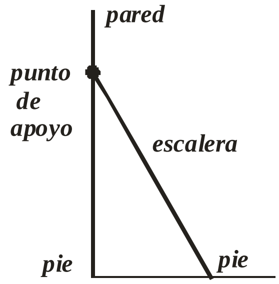


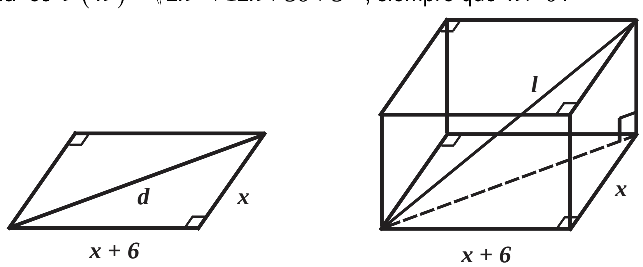
FIGURA II.42

b. DIAGONAL DE UNA ALBERCA

Una alberca tiene base rectangular, el lado mayor de la base mide 6 unidades más que el lado menor y su profundidad es 3 unidades.

i. La *figura II.43.a.* es un bosquejo de la base de la alberca. Sean: x y $x+6$ las longitudes de los lados de la base, y sea d la longitud de la diagonal, entonces $d^2=(x+6)^2+x^2$ (teorema de Pitágoras), entonces $d(x)=\sqrt{2x^2+12x+36}$, siempre que $x>0$.

ii. La *figura II.43b.* corresponde a un bosquejo de la alberca, por tanto, aplicando nuevamente el teorema de Pitágoras obtenemos que la longitud de la diagonal de la alberca es $l(x)=\sqrt{2x^2+12x+36+3^2}$, siempre que $x>0$.



a. **b.**

FIGURA II.43

c. TAMAÑO DE UNA PANTALLA DE TELEVISIÓN

El "tamaño" de las pantallas de televisión rectangulares se define como la longitud de su diagonal, con unidades como pulgadas (una pulgada equivale a 2.54 centímetros). Suponga que una pantalla de televisor mide $x+5$ pulgadas de base y x pulgadas de altura, vea la *figura II.44*.

i. Para determinar la función que describe el tamaño T de una pantalla aplicamos el teorema de Pitagoras a las longitudes de los lados x y $x+5$ y al tamaño T.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

Así, $T^2 = (x+5)^2 + x^2$ o bien $T(x) = \sqrt{2x^2 + 10x + 25}$.

ii. Para determinar el tamaño de una pantalla de 20 pulgadas de base, calculamos $T(20)$, obtenemos $T(20) = \sqrt{2(20)^2 + 10(20) + 25} \approx 32$ pulgadas.

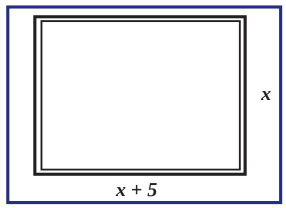


FIGURA II.44

c. RADIO DE UN TANQUE CILÍNDRICO

Un tanque tiene forma cilíndrica, su altura es el doble que la longitud del radio.

i. Puesto que un cilindro puede descomponerse en dos bases circulares (superior e inferior) y por una superficie rectangular, entonces su área es:

$$A = \textit{área de las dos tapas} + \textit{área de la superficie rectangular}$$

Es decir, $A = 2\pi r^2 + 2\pi r(2r)$, o bien $A = 6\pi r^2$, por tanto, la longitud del radio en función del área es $r(A) = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$, siempre que $A > 0$.

ii. Si el cilindro tiene área $A = 216\pi$, entonces e radio mide $r(216\pi) = \sqrt{\frac{216\pi}{6\pi}} = 6$ unidades lineales.

d. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

i. La distancia entre los puntos $A(4, x)$ y $B(1, 3)$ del plano cartesiano, es $d(x) = \sqrt{(4-1)^2 + (x-3)^2}$ unidades, por tanto $d(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 18}$.

ii. Para determinar la función que describe la distancia entre los puntos de la recta de ecuación $y = 2x+1$ y el punto $P(4, 1)$, debemos tener en cuenta que los puntos de la recta son de la forma $R(x, 2x+1)$, por tanto

$$d(x) = \sqrt{(x-4)^2 + (2x+1-1)^2} \text{ o bien } d(x) = \sqrt{5x^2 - 8x + 16}.$$

e. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Un salón tiene forma de prisma cuadrangular recto, su base es cuadrada y su altura mide 2 metros menos que la longitud de lado de la base. Para determinar la función que describe la longitud de los lados de la base en función del área del salón, debemos tener en cuenta que, el salón, está compuesto por dos bases (superior e inferior) y cuatro lados, por tanto,

$$A = \textit{área de las dos bases} + \textit{área de los cuatro lados}$$

Si representa por x la longitud de los lados de las bases (superior e inferior), entonces $A = 2x^2 + 4x(x-2)$ o bien $6x^2 - 8x - A = 0$, por tanto, al despejar x obtenemos $x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 24A}}{12} = \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{6}A} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{6}A}$, o bíen

$$x(A) = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{6}A}.$$

$\triangle$

Ejercicios y actividades adicionales

Con el propósito de reforzar los aprendizajes alcanzados por los estudiantes, UD. puede implementar en el desarrollo de sus clases algunos de los siguientes ejercicios o actividades.

1. En cada caso construya la función correspondiente.
a. El radio de un cono circular recto de altura de longitud $h=10$ en función de la longitud r del radio de la base.
b. La longitud del lado de una pirámide de base cuadrada y la altura de longitud $h=5$ en función del volumen.

2. a. En un círculo de radio de longitud $r=5$ debe inscribirse un rectángulo. Construya una función para calcular el área que encierra el rectángulo en términos de la longitud de su base.
b. En una esfera de radio de longitud $r=10$ se inscribe un cilindro circular recto, construya un modelo para obtener el volumen del cilindro en función del radio de la base.

3. Construya una función que dependa de la longitud de la altura para determinar la cantidad de lata (área total) que se utiliza para elaborar un envase cilíndrico que contenga un volumen de medio litro (500 centímetros cúbicos).

4. Se pretende tender un cable desde una central eléctrica, que se encuentra al lado de un río, hasta una fábrica que se encuentra al otro lado del río y 100 metros agua abajo (el ancho del río es uniforme y tiene 200 metros de ancho). El costo de tender el cable bajo el agua es $\$90.00$ por metro, mientras que el costo de tenderlo sobre la tierra es $\$60.00$ por metro. ¿Cuál es la expresión que describe el costo en términos de la trayectoria x sobre la que se debe tenderse el cable?

5. Determine el dominio, el rango (o recorrido) y trace la curva.
a. $f(x)=\sqrt{x^2-10x+21}$. **b.** $f(x)=\sqrt{x^2-36}$. **c.** $f(x)=\sqrt{x^2+6x+5}$. **d.** $f(x)=\sqrt{x^2+2x-24}$.
e. $f(x)=\sqrt{x^2-x-12}-2$. **f.** $f(x)=3\sqrt{x^2-2x-15}$. **g.** $f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{x^2-2x-48}$. **h.** $f(x)=\sqrt{2x^2-4x+8}$.
i. $f(x)=\sqrt{-x^2+9}$. **j.** $f(x)=\sqrt{2x^2-6x+4}$. **k.** $f(x)=\sqrt{-x^2+2x}$. **l.** $f(x)=\sqrt{-x^2-8x-12}$.
m. $f(x)=-4\sqrt{x^2-2x-3}$. **n.** $f(x)=\sqrt{x^2-2x-8}$. **o.** $f(x)=\sqrt{49-x^2}$. **p.** $f(x)=\sqrt{36-25x^2}$.
q. $f(x)=\sqrt{-x^2-6x-8}$. **r.** $f(x)=\sqrt{-x^2+10x-21}$. **s.** $f(x)=\sqrt{6-8x^2}+1$. **t.** $f(x)=\sqrt{x^2-4x+30}$.

6. Determine el dominio, el rango (o recorrido) y trace la curva.
a. $f(x)=\sqrt{x^2+6}$. **b.** $f(x)=\sqrt{2x^2+1}$. **c.** $f(x)=\sqrt{x^2+3x+18}$. **d.** $f(x)=\sqrt{x^2+2x+10}$.
e. $f(x)=-2\sqrt{2x^2+x+8}$. **f.** $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}+1$.

7. Discuta el comportamiento de las relaciones, justifique su respuesta.
a. $f(x)=\sqrt{-x^2-6}$. **b.** $f(x)=\sqrt{-2x^2-1}$. **c.** $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-9}$. **d.** $f(x)=\sqrt{-x^2+2x-4}$.
e. $f(x)=2-\sqrt{-x^2+3x-4}$. **f.** $f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}$. **g.** $f(x)=-2\sqrt{x^2+4x+4}$. **h.** $f(x)=\sqrt{-x^2-10x-25}+1$.

8. Construya una función cuyo radical sea de índice dos, su radicando de la forma $Ax+By+C$ y cumpla con las condiciones dadas (también trace la curva correspondiente):
a. Tenga como cero a $x=2$, cumpla $f(1)=1$.
b. Su dominio sea el intervalo $(-\infty, 4]$ y cruce al eje vertical en $I_y(0,3)$.
c. Su dominio sea el intervalo $(-\infty, -\frac{5}{4}]$ y contenga al punto $A(-1,9)$.
d. Contiene a los puntos $A(4,-1)$ y $B(7,-2)$
e. $(-\infty, 2]$ y cruce al eje vertical en $I_y(0,-\sqrt{3})$.

9. Construya una función tal que su radical sea de índice dos, su radicando sea un polinomio de segundo grado en la variable x y cumpla con las condiciones:
a. Tenga ceros en $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$, su dominio sea el intervalo $[-2\ ,\ 2\ ]$ y $f\ (0) = 2$.
b. Tenga ceros en $x_1 = -4$ y $x_2 = 4$, su dominio sea el intervalo $[-4\ ,\ 4\ ]$ y contenga al punto $A(0\ ,4)$.
c. Tenga ceros en $x_1 = -2$ y $x_2 = 6$ (de multiplicidad uno), su dominio sea el intervalo $[-2\ ,\ 6\ ]$ y $f\ (2) = 9$.
d. Su dominio sea el intervalo $(-\infty\ ,\ -1\ ] \cup [\ 1\ ,+\infty\ )$ y sea positiva.
e. Su dominio sea el intervalo $(-\infty\ ,\ 0\ ] \cup [\ 4\ ,+\infty\ )$ y $f\ (0) = 2$.
f. Su dominio sea el intervalo $(-\infty\ ,\ -4\ ] \cup [\ -2\ ,+\infty\ )$ y contenga al punto $I_y(0\ ,\ 4)$.

10. Construya una función tal que su radical sea de índice dos, su radicando sea un polinomio de segundo grado en la variable x y cumpla con las condiciones:
a. No tenga ceros, su dominio sea el intervalo $dom(\ f\ ) = (-\infty\ ,\ +\infty\ )$ y $img\ (\ f\ ) = [1\ ,\ +\infty\ )$.
b. No tenga ceros, $dom(\ f\ ) = IR$ y $img\ (\ f\ ) = [2\ ,\ +\infty\ )$.
c. No tenga ceros, $dom(\ f\ ) = IR$ y $img\ (\ r\ ) = (-\infty\ ,\ 4\ ]$.
d. Tenga $dom(\ f\ ) = IR$ y $img(\ f\ ) = [5\ ,\ +\infty\ )$.
e. Tenga $dom(\ f\ ) = IR$ y $img\ (\ r\ ) = (-\infty\ ,1\ ]$.

11. Una viga de 10 metros de longitud se apoya sobre un muro. El pie de la viga se encuentra a x metros de él. Determine la función que describe la altura del punto de apoyo en función de la distancia de separación del pie de la viga y la base del muro.

12. Una escalera de 8 metros de longitud está apoyada sobre un muro. El punto de apoyo de la escalera sobre el piso dista x metros del pie del muro.
a. Determine la función que describe la distancia de separación entre el pie del muro y el pie de la escalera en términos de la distancia del punto de apoyo de la escalera en el muro.
b. ¿A qué distancia se encuentran el pie de la escalera del pie del muro cuando el punto de apoyo de la escalera se encuentra a una distancia de 4 metros de la base del muro?
c. Suponga que la pared tiene 12 metros de altura, ¿A qué distancia del borde (superior) de la pared se encuentra el punto de apoyo de la escalera (en la pared) cuando la distancia del pie de la base de la escalera y el pie del muro es 5 metros?

13. Una ataúd tiene base rectangular, el lado mayor mide 2 metros más que el lado menor, y su altura mide 0.40 metros.
a. Determine la función que describe la longitud de la diagonal de la base del ataúd.
b. Determine la función que describe la longitud de la diagonal del ataúd.

14. Un tanque tiene forma cilíndrica, la altura del tanque es el doble que la longitud de su radio. El precio del material de sus bases es 200 pesos por unidad de área y el precio de la parte cilíndrica es 140 pesos por unidad de área.
a. ¿Cuál es la función que describe el radio del tanque cilindro en función de su costo?
b. ¿Cuál es el radio del tanque si éste tiene un costo de 5000 pesos?

15.
a. Determine la función que describe la distancia entre los puntos del plano cartesiano $A\ (-1\ ,\ 4)$ y $B\ (2\ ,\ y)$.
b. Determine la función que describe la distancia entre los puntos del plano cartesiano $A(1\ ,1)$ y $B(\ x\ ,\ 0)$.

16. Una ventana tiene forma de rectángulo coronado por una semicircunferencia. La longitud de la altura de la parte rectangular es el triple de la longitud de la base.
a. Determine la función que describe la longitud del radio de la corona en términos del área de la ventana.
b. ¿Cuál es la longitud del radio de la corona, si la ventana tiene un área de 12π unidades cuadradas?

17. Una ventana tiene forma de rectángulo coronado por una semicircunferencia. Las dimensiones de la parte rectangular están en proporción de 5 a 1.
a. Determine la función que describe la longitud del radio de la corona en términos del área de la ventana.
b. ¿Cuál es la longitud del radio de la corona de la ventana si ésta tiene un área de 20π unidades cuadradas?

18. Una ventana tiene forma de rectángulo coronado por una semicircunferencia. Las dimensiones de la parte rectangular están en proporción de 7 a 1. El precio, por unidad de longitud de la parte circular es el triple que el de la parte rectangular.
a. Determine la función que describe el radio en términos del área de la ventana.
b. ¿Cuál es el radio de la ventana si ésta tiene un área de 30π unidades cuadradas?

19. Un depósito tiene forma de cilindro coronado por una semiesfera, la longitud de la altura de la parte cilíndrica del depósito es el triple de la longitud de la longitud de la base.
a. ¿Cuál es la función que describe la longitud del radio del depósito en función de su área?
b. ¿Cuál es la longitud del radio del tanque si éste tiene un área de 50π unidades cuadradas?

20. Un depósito tiene forma de cilindro coronado por una semiesfera, la longitud de la altura de la parte cilíndrica del depósito es el triple de la longitud de la longitud de la base.
a. ¿Cuál es la función que describe la longitud del radio del depósito en función de su área?
b. ¿Cuál es la longitud del radio del depósito si éste tiene un área de 50π unidades cuadradas?

21. Un depósito tiene forma de cilindro coronado por una semiesfera, la altura de la parte cilíndrica del depósito está en razón de 4 a 3 con el radio del cilindro es. El precio, por unidad de área de la parte esférica es el doble que el de la parte cilíndrica.
a. ¿Cuál es la función que describe el radio del depósito en función de su precio?
b. ¿Cuál es el radio del tanque si éste tiene un precio de 500π pesos?

22.
a. En una región elíptica, el semieje mayor mide el doble que el semieje menor. Determine la función que describe la longitud del semieje mayor en función del área de la región elíptica.
b. En una región elíptica, la razón entre la longitud del semieje mayor y la longitud del semieje menor es 3 a 1. Determine la función que describe la longitud del semieje mayor en función del área de la región elíptica.

SD 1. CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES RACIONALES

APRENDIZAJES

Apr.2 Identificará los elementos de una función racional: ceros, asíntotas verticales y huecos, dominio y rango para graficarla.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

Funciones de la forma $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, dónde $p(x)$ y $q(x)\neq 0$ son polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual a dos. Dominio, rango, puntos de discontinuidad.

APERTURA

Revisión previa de los recursos:

a. Juliana Gómez (2013, septiembre 13) *Funciones racionales* [Presentación]. Recuperado de https://prezi.com/tnsw_kc_i4g1/funciones-racionales/

b. Roberto Cardil (No la indica) *Matemáticas visuales (funciones racionales)*. Recuperado de http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/rational/rational1.html

c. Genny Yah. (2012, mayo 21) *Artículo #1 "función racional 21 de mayo de 2012.* [Vídeo]. Recuperado de http://princesita-genny.blogspot.com/2012/05/articulo-1-funcion-racional.html

d. Agustín Martínez Pedreño (No la indica) *Asíntotas*. Recuperado de http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Asintotas_horizontales_verticales_oblicuas/Asintotas_horizontales.html

Discusión sobre los elementos que describen el comportamiento de la curva asociada a una función racional tales como asíntotas, ceros, intervalos en los que es positiva, intervalos en los que es negativa, comportamiento extremo.

DESARROLLO

1. Proporcione la definición de función racional.

____

2. Clasifique las funciones racionales en términos de los grados de los polinomios que las componen.

____

3. Proporcione ejemplos de funciones racionales propias y de funciones racionales impropias.

____

4. En términos de los factores comunes haga una clasificación las funciones polinomiales.

____

5. En el contexto de las funciones racionales, ¿qué es una asíntota vertical?

____

6. En el contexto de las funciones racionales, ¿qué es una asíntota horizontal?

____

7. En el contexto de las funciones racionales, ¿qué significa el hecho de que una función tenga una asíntota horizontal?

____

8. En el contexto de las funciones racionales y de su curva asociada, ¿qué significa que los polinomios componentes tengan factores comunes?

____

CIERRE

En la sopa de letras, encuentre las palabras referentes a las características a las funciones racionales, una vez que las haya seleccionado, enlístelas en la parte de abajo.

R	E	G	S	R	N	A	S	J	L	P	N	O	E	D	I	B	Z
E	C	R	H	A	E	P	R	O	P	I	A	R	M	O	D	X	C
D	U	E	A	L	U	I	E	T	A	L	S	E	I	P	O	V	H
U	R	S	U	L	A	R	O	A	R	A	I	Z	R	P	M	A	Q
C	A	C	E	R	O	S	S	A	T	I	N	A	D	A	I	T	Y
I	T	A	L	O	P	O	R	R	O	V	T	G	I	L	N	E	E
B	E	A	A	R	O	M	O	O	R	E	O	V	A	L	I	I	L
L	R	I	N	A	L	E	P	P	E	S	T	A	V	A	O	S	O
E	O	P	H	U	E	C	O	E	J	I	A	D	O	D	P	A	R
L	T	O	I	E	N	E	T	R	A	S	V	E	L	O	I	P	A
I	D	R	P	U	T	E	R	O	S	U	E	N	O	R	T	O	N
S	A	P	O	R	A	T	O	N	E	C	R	O	L	P	O	G	A
A	L	M	R	O	M	A	S	A	N	T	T	I	L	I	L	N	E
A	S	I	N	T	O	T	A	H	O	R	I	Z	O	N	T	A	L
N	A	M	A	R	J	O	N	A	R	A	C	A	T	T	A	R	A
L	L	O	U	E	O	L	E	R	O	J	A	P	E	O	C	X	S
A	P	I	R	R	E	D	U	C	I	B	L	E	O	G	A	T	O
R	A	R	R	B	O	L	E	S	R	A	P	E	R	A	N	T	E

1.___________________________________

2.___________________________________

3.___________________________________

4.___________________________________

5.___________________________________

6.___________________________________

7.___________________________________

8.____

9.____

SD 2. GRAFICACIÓN DE $f(x)=\dfrac{A}{x^2+bx+c}$ SIN ASÍNTOTAS VERTICALES

APRENDIZAJES

Apr.3 Graficará funciones que tengan asíntota horizontal diferente al eje de las x, asíntotas verticales, ceros, huecos, dominio y rango.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

Gráfica de funciones racionales con asíntotas verticales y Horizontales.

APERTURA

Discusión sobre los elementos que describen el comportamiento de la curva asociada a una función racional tales como asíntotas, ceros, intervalos en los que es positiva, intervalos en los que es negativa, comportamiento extremo.

DESARROLLO

1. ¿Por qué la función racional $f(x)=\dfrac{A}{x^2+k^2}$ no tiene asíntotas verticales?

____

2. Si en $f(x)=\dfrac{A}{x^2+k^2}$, A es un número positivo, ¿Qué signo tiene $f(x)=\dfrac{A}{x^2+k^2}$? ¿Por qué?

____

3. Dado que $f(x)=\dfrac{A}{x^2+k^2}$ es positiva (bajo la suposición de que es número a es positivo A), entonces la curva que tiene asociada se encuentra en los cuadrantes ____________________________ del plano cartesiano.

4. Para asignaciones positivas cada vez más grandes a la variable x, la función $f(x)=\dfrac{A}{x^2+k^2}$ asume imágenes cada vez más cercanas a ____________________________________.

5. Para asignaciones negativas cada vez más grandes a la variable x, la función $f(x)=\dfrac{A}{x^2+k^2}$ asume imágenes cada vez más cercanas a ____________________________________.

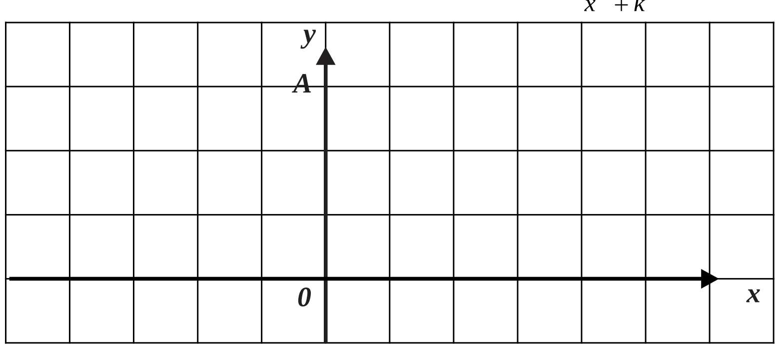
6. Por consiguiente, el eje x es una ______________________________________de la función $f(x)=\dfrac{A}{x^2+k^2}$.

7. ¿Qué ocurre (en tamaño) con $f(x)=\dfrac{A}{x^2+k^2}$ cuando se incrementa el valor de x? ____________________________.

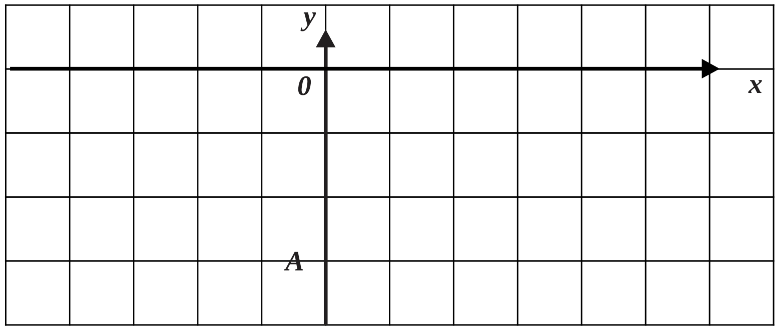
Entonces el valor máximo de $f(x)=\dfrac{A}{x^2+k^2}$ ocurre cuando x es igual a ________________________.

8. La curva asociada a $f(x)=\dfrac{A}{x^2+k^2}$ interseca al eje de las ordenadas en el punto _________________________.

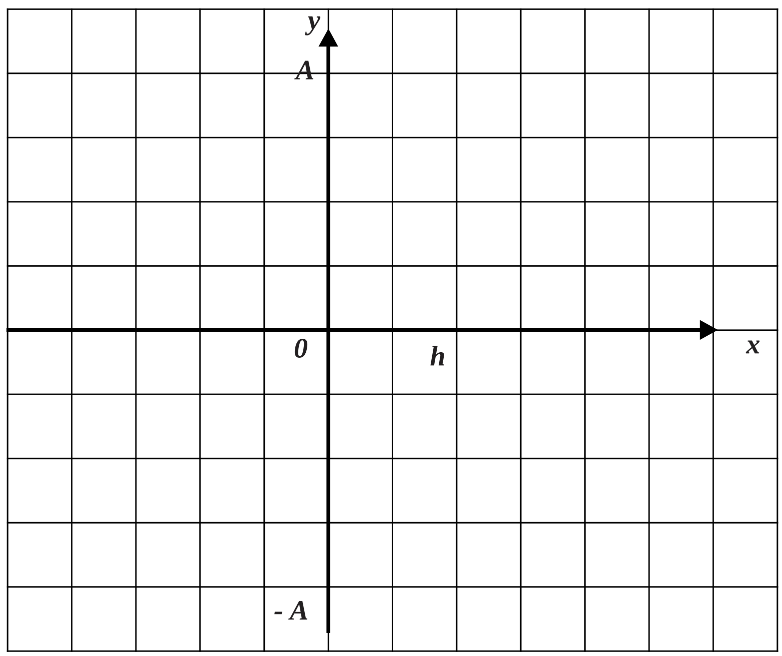
9. Con base en las observaciones anteriores bosqueja la curva asociada a $f(x)=\dfrac{A}{x^2+k^2}$.



10. Tome como base la curva trazada anteriormente y trace la curva asociada a $f(x)=\frac{A}{x^2+k^2}$ cuando $A<0$.



11. Tome como base el inciso anterior y trace las curvas asociadas a: $f(x)=\frac{A}{(x-h)^2+k^2}$ si $A>0$ y $f(x)=\frac{A}{(x-h)^2+k^2}$ si $A<0$ (recuerde que la introducción del parámetro h corresponde a un desplazamiento horizontal).



CIERRE

1. En $f(x)=\frac{A}{(x-h)^2+k^2}$ desarrolle el denominador, por tanto $f(x)=\frac{A}{(x-h)^2+k^2}=\frac{A}{\qquad\qquad}$.

2. En el desarrollo hecho en el inciso anterior haga los siguientes cambios: $b=2h$ y $c=h^2+k^2$, por tanto,

$$f(x)=\frac{A}{(x-h)^2+k^2}=\frac{A}{\qquad\qquad}=\frac{A}{\qquad}$$

3. Hemos construido un bosquejo de la curva asociada a $f(x)=\frac{A}{x^2+bx+c}$ bajo la condición de la inexistencia de asíntotas.

SD 3. GRAFICACIÓN DE $f(x)=\dfrac{A}{x^2+bx+c}$ CON UNA ASÍNTOTA VERTICAL

APRENDIZAJES

Apr.3 Graficará funciones que tengan asíntota horizontal diferente al eje de las x, asíntotas verticales, ceros, huecos, dominio y rango.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

Gráfica de funciones racionales con asíntotas verticales y horizontales.

APERTURA

Discusión sobre los elementos que describen el comportamiento de la curva asociada a una función racional tales como asíntotas, ceros, intervalos en los que es positiva, intervalos en los que es negativa, comportamiento extremo.

DESARROLLO

1. ¿Qué condiciones debe cumplir el denominador de la función polinomial $f(x)=\dfrac{A}{x^2+bx+c}$ para tener una sola asíntota vertical?

____.

2. Si en $f(x)=\dfrac{A}{x^2+bx+c}$, x_0 es la única raíz del polinomio denominador, entonces puede ser rescrita como:

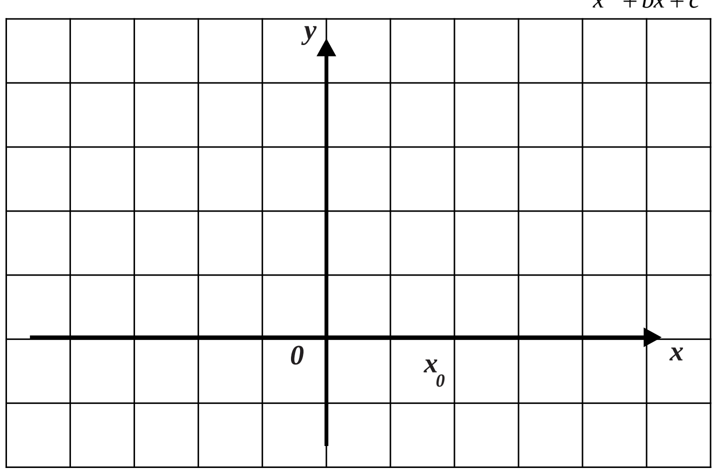
_________________, por tanto, _________________ tiene como asíntota vertical a la línea recta de ecuación ___________.

3. ¿Por qué $f(x)=\dfrac{A}{(x-x_0)^2}$, no tiene ceros? ____.

4. Tanto para asignaciones positivas o negativas cada vez más grandes a la variable x, la función $f(x)=\dfrac{A}{(x-x_0)^2}$ asume imágenes cada vez más cercanas a __________________________, por tanto, la curva asociada a $f(x)=\dfrac{A}{(x-x_0)^2}$ tiene como ____ al eje x.

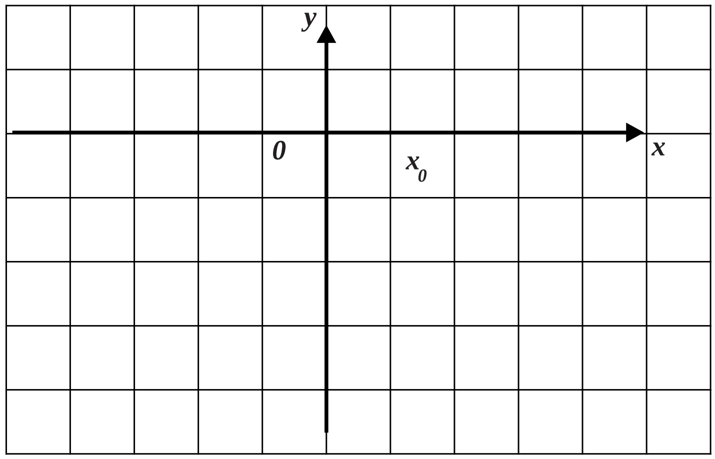
5. Si en $f(x)=\dfrac{A}{(x-x_0)^2}$ se cumple que A es mayor que cero, entonces su curva asociada se encuentra en los cuadrantes ______________________ del plano cartesiano.

6. Utilizando las observaciones anteriores, un bosquejo de la curva asociada a $f(x)=\dfrac{A}{x^2+bx+c}$ es:



7. Si en $f(x)=\dfrac{A}{(x-x_0)^2}$ se cumple que A es menor que cero, entonces su curva asociada se encuentra en los cuadrantes ______________________ del plano cartesiano.

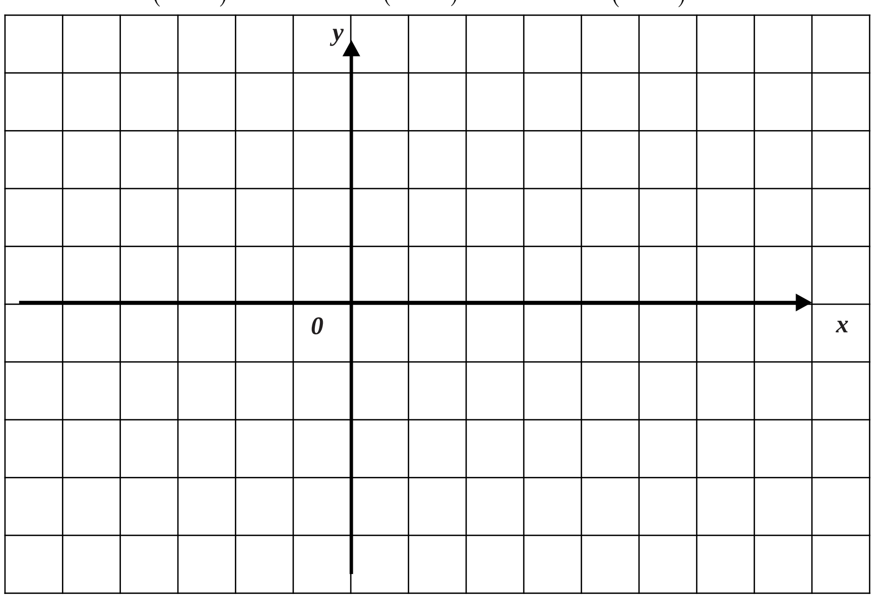
8. Utilizando las observaciones anteriores, un bosquejo de la curva asociada a $f(x)=\dfrac{A}{(x-x_0)^2}$, si A es menor que cero.



CIERRE

1. Sin tabular**,** bosqueje la curva asociada a:

a. $f(x)=\dfrac{2}{(x-3)^2}$. **b.** $f(x)=\dfrac{3}{(x+2)^2}$. **c.** $f(x)=\dfrac{-4}{(x+5)^2}$. **d.** $f(x)=\dfrac{\frac{1}{4}}{(x-7)^2}$.



2. Utilice un software graficador (geogebra o symbolab) y grafique:

a. $f(x)=\dfrac{2}{(x-3)^2}$. **b.** $f(x)=\dfrac{3}{(x+2)^2}$. **c.** $f(x)=\dfrac{-4}{(x+5)^2}$. **d.** $f(x)=\dfrac{\frac{1}{4}}{(x-7)^2}$.

Compare sus resultados con los obtenidos en **1.**

SD 4. GRAFICACIÓN DE $f(x)=\dfrac{A}{x^2+bx+c}$ CON DOS ASÍNTOTAS VERTICALES

APRENDIZAJES

Apr.3 Graficará funciones que tengan asíntota horizontal diferente al eje de las x, asíntotas verticales, ceros, huecos, dominio y rango.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

Gráfica de funciones racionales con asíntotas verticales y horizontales.

APERTURA

Discusión sobre los elementos que describen el comportamiento de la curva asociada a una función racional tales como asíntotas, ceros, intervalos en los que es positiva, intervalos en los que es negativa, comportamiento extremo.

DESARROLLO

1. ¿Qué condiciones debe cumplir el denominador de la función polinomial $f(x)=\dfrac{A}{x^2+bx+c}$ para tener dos asíntotas verticales?

____.

2. Si en $f(x)=\dfrac{A}{x^2+bx+c}$, x_0 y x_1 son las raíces del polinomio denominador, entonces puede ser rescrita como:

__________________, por tanto, __________________ tiene como asíntotas verticales a la líneas rectas con ecuaciones

_______________________ y _______________________.

3. ¿Por qué $f(x)=\dfrac{A}{(x-x_0)(x-x_1)}$, no tiene ceros? ____________________________________.

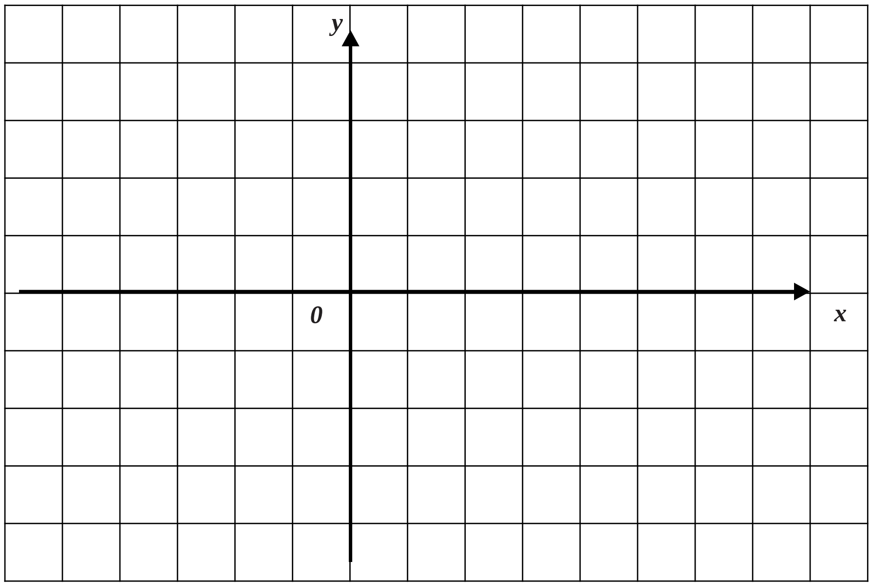
4. Tanto para asignaciones positivas o negativas cada vez myores a la variable x, la función $f(x)=\dfrac{A}{(x-x_0)(x-x_1)}$ asume imágenes cada vez más cercanas a ___________________________, por tanto, la curva asociada a $f(x)=\dfrac{A}{(x-x_0)(x-x_1)}$ tiene como ____ al eje x.

5. Suponga que A es positiva y complete la siguiente tabla.

x	$f(x)=\dfrac{A}{(x-x_0)(x-x_1)}$	Signo de $f(x)$
$0.9x_0$		
$0.99x_0$		
x_0		
$1.01x_0$		
$1.1x_0$		
$0.9x_1$		
$0.99x_1$		
x_1		
$1.01x_1$		
$1.1x_1$		

6. ¿Cuál es el signo de $f(x)$ sobre el intervalo $(x_0\ ,\ x_1)$? ______________________________________.

7. Utilizando las observaciones anteriores, un bosquejo de la curva asociada a $f(x)=\dfrac{A}{(x-x_0)(x-x_1)}$ es:



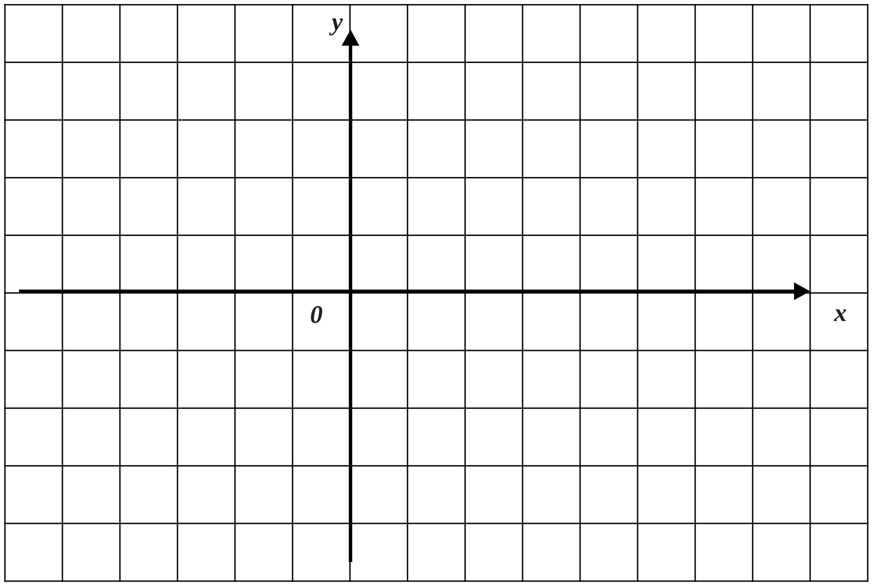
8. Suponga que A es negativa y complete la siguiente tabla.

x	$f(x)=\dfrac{A}{(x-x_0)(x-x_1)}$	Signo de $f(x)$
$0.9x_0$		
$0.99x_0$		
x_0		
$1.01x_0$		
$1.1x_0$		
$0.9x_1$		
$0.99x_1$		
x_1		
$1.01x_1$		
$1.1x_1$		

9. ¿Cuál es el signo de $f(x)$ sobre el intervalo $(x_0\ ,\ x_1)$? ______________________________________.

10. Utilizando las observaciones anteriores en los incisos 2., 3., 4., 8. y 9. haga un bosquejo de la curva asociada a

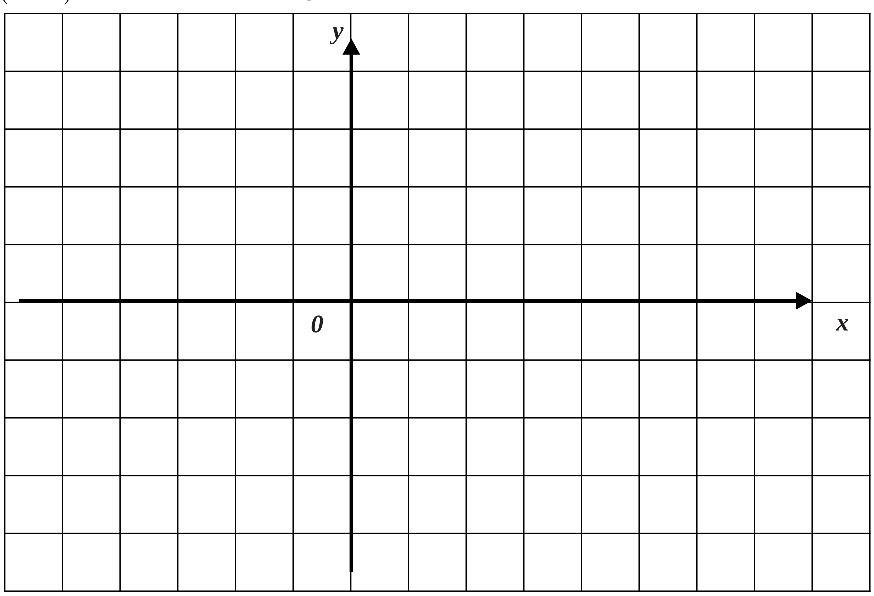
$$f(x)=\frac{A}{(x-x_0)(x-x_1)}:$$



CIERRE

1. Sin tabular, bosqueje la curva asociada a:

a. $f(x)=\dfrac{2}{(x-3)(x'+2)}$. **b.** $f(x)=\dfrac{3}{x^2-2x-3}$. **c.** $f(x)=\dfrac{-4}{x^2+6x+8}$. **d.** $f(x)=\dfrac{-2}{x^2+x-6}$.



2. Utilice un software graficador, trace la curavas asociada a:

a. $f(x)=\dfrac{2}{(x-3)(x'+2)}$. **b.** $f(x)=\dfrac{3}{x^2-2x-3}$. **c.** $f(x)=\dfrac{-4}{x^2+6x+8}$. **d.** $f(x)=\dfrac{-2}{x^2+x-6}$.,

y comente sus observaciones.

SD 5. CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES DE LA FORMA $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$

APRENDIZAJES

Apr.5 Explorará problemas sencillos que se modelen con Funciones con Radicales.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

Funciones de la forma $f(x)=\sqrt{Ax+B}$, $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ con *A*, *B* y *C* en los números reales.

APERTURA

Discusión sobre: el teorema de Pitágoras, “las fórmulas” para el cálculo de áreas de superficies y los volúmenes de sólidos geométricos

DESARROLLO

1. TEOREMA DE PITÁGORAS

a. ¿Qué establece el teorema de Pitágoras (dos partes)?

i. “En un triángulo____”.

ii. Si en un triángulo ____”, entonces es rectángulo.

b. Trace un triángulo rectángulo con las siguientes características: longitud de la hipotenusa, diez unidades y, las longitudes de los catetos estén representadas por x y $f(x)$ respectivamente.

c. En el triángulo que trazó en el inciso anterior aplique el teorema de Pitágoras y despeje $f(x)$.

____

d. ¿Para que asignaciones a la variable independiente está bien definida la función $f(x)$? Explique.

____

2. DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UN PUNTO DE UNA LÍNEA RECTA

a. Un punto que pertenece a la línea recta de ecuación $2x+y-4=0$ tiene abscisa x, entonces su ordenada es _____________ y en consecuencia, el punto es $(x,\qquad)$.

b. ¿Qué “fórmula” se utiliza para calcular la distancia entre dos puntos?

____.

c. Utilice la “fórmula” del inciso anterior para calcular la distancia entre el punto del inciso **a.** y el punto $(4, 5)$.

____.

d. Nombre la distancia que antes calculó como $f(x)$.

____.

3. FLUJO A TRAVÉS DE UN CANAL

Con una lámina rectangular cuyo ancho mide 80 centímetros se construirá un canal de sección transversal rectangular. El proceso de construcción consiste en doblar x centímetros dos de los bordes (paralelos) de la lámina de manera que formen un ángulo de noventa grados respecto a la horizontal (la base).

a. Trace una figura que muestre la sección transversal del canal.

____.

b. Establezca una relación con la que sea posible calcular el área A de la sección transversal del canal en términos de la longitud de los lados del canal.

____.

c. Establezca una relación con la que sea posible calcular la altura del canal en función del área de su sección transversal.

____.

4. DIAGONAL DE UNA CAJA CON FORMA DE PRISMA DE BASE CUADRADA.

Una caja tiene forma de prisma cuadrangular, las regiones cuadradas que lo conforman tienen longitud de lado x. El lado de las regiones rectangulares es el doble del ancho mas una unidad.

a. Trace una figura que muestre la caja.

____.

b. Aplique el teorema de Pitágoras (dos veces) y obtenga la relación entre las dimensiones de la caja y la longitud de su diagonal.

____.

c. Establezca la regla de correspondencia de la función que describe la longitud de la diagonal en términos de la longitud de los lados de la región cuadrada.

____.

d. ¿Para qué asignaciones a x tiene sentido la regla de correspondencia del inciso anterior?

____.

5. CAJA CON FORMA DE PRISMA CORONADO CON UN SEMICILINDRO.

Una caja tiene forma de prisma cuadrangular coronado por un semicilindro. La altura de la parte en forma de prisma mide x unidades, su ancho mide $2x+2$ unidades y el largo mide 10 unidades.

a. Trace una figura que muestre la caja.

____.

b. Determine el área de la parte correspondiente al cilindro en términos de la variable x.

____.

c. Determine el área de al parte correspondiente al prisma en términos de la variable x.

____.

d. Determine el área total de la caja en términos de variable x.

____.

e. Determine una función que describa la altura x del prisma que es parte de la caja en función del área de la caja.

____.

CIERRE

1. Enliste las funciones obtenidas en los cinco incisos anteriores:

____.

2. Construya el patrón (tipo de función) del que las funciones antes señaladas son casos particulares.

____.

SD 6. GRAFICACIÓN DE $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ CON DOS CEROS

APRENDIZAJES

Apr.6 Identificará los elementos de la función: dominio, rango, ceros y traza su gráfica.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

Gráfica de funciones con radicales

APERTURA

Comentarios sobre: la obtención de las raíces de un polinomio cuadrático, la elipse y la hipérbola.

DESARROLLO

1. ¿Qué condiciones debe cumplir la función $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ para tener dos ceros?

____.

2. Suponga que $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ tiene como ceros a los números x_0 y x_1. Factorice A y reescriba $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ en términos de A, y de los ceros x_0 y x_1.

____.

3. Considere que en $f(x)=\sqrt{A(x-x_0)(x-x_1)}$ se cumple que $x_0<x_1$, haga una figura que muestre los intervalos en que los ceros x_0 y x_1 dividen a la recta real.

____.

4. Si en $f(x)=\sqrt{A(x-x_0)(x-x_1)}$ se cumple $A>0$. ¿Qué signos deben tener $x-x_0$ y $x-x_1$ para que la función $f(x)=\sqrt{A(x-x_0)(x-x_1)}$ esté bien definida?

$x-x_0$ ______________ y $x-x_1$ ________________, por tanto, _______________________.

Sin embargo, también puede ocurrir que:

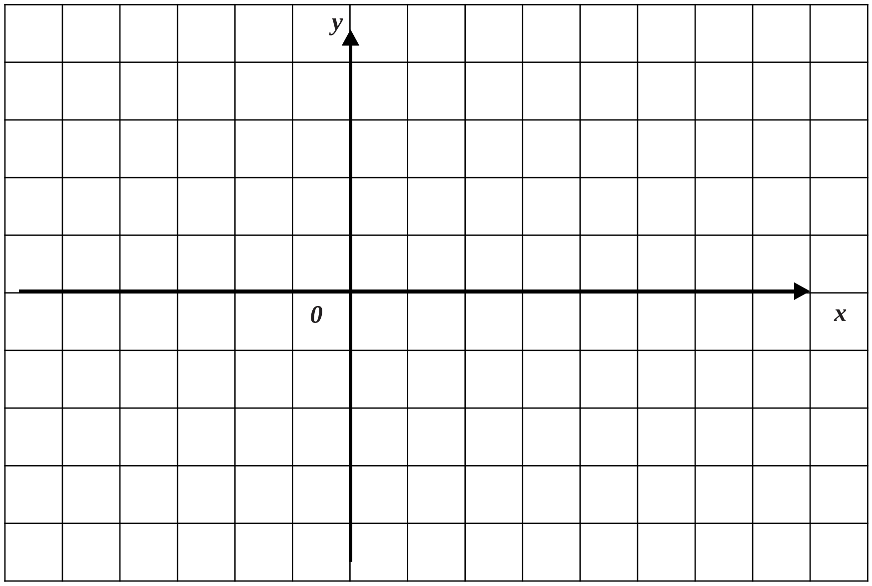
$x-x_0$ ______________ y $x-x_1$ ________________, por tanto, _______________________.

i. Por tanto, si $A>0$ en $f(x)=\sqrt{A(x-x_0)(x-x_1)}$, entonces $dom(f)=$ _______________________.

ii. Sean $A>0$ y $x_0<x_1$ en $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}=\sqrt{A(x-x_0)(x-x_1)}$. ¿Qué valores asume $f(x)$ cuándo a x le son asignados valores extremadamente grandes (tanto positivos como negativos)?

____.

iii. Suponga que la curva asociada a $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}=\sqrt{A(x-x_0)(x-x_1)}$ es suave y contínua, utilice las observaciones anteriores y trácela.



5. Suponga que en $f(x)=\sqrt{A(x-x_0)(x-x_1)}$ se cumple $A<0$. ¿Qué signos deben tener $x-x_0$ y $x-x_1$ para que la función $f(x)=\sqrt{A(x-x_0)(x-x_1)}$ esté bien definida?

$x-x_0$ ____________________ y $x-x_1$ ___________________________, por tanto, _____________________________________.

Sin embargo, también puede ocurrir que:

$x-x_0$ ____________________ y $x-x_1$ ___________________________, por tanto, _____________________________________.

i. Por tanto, si $A<0$ en $f(x)=\sqrt{A(x-x_0)(x-x_1)}$, entonces $dom(f)=$ _____________________________________.

ii. ¿Por qué $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}=\sqrt{A(x-x_0)(x-x_1)}$ no tiene comportamiento extremo?

____.

iii. ¿Por qué $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}=\sqrt{A(x-x_0)(x-x_1)}$ es positiva?

____.

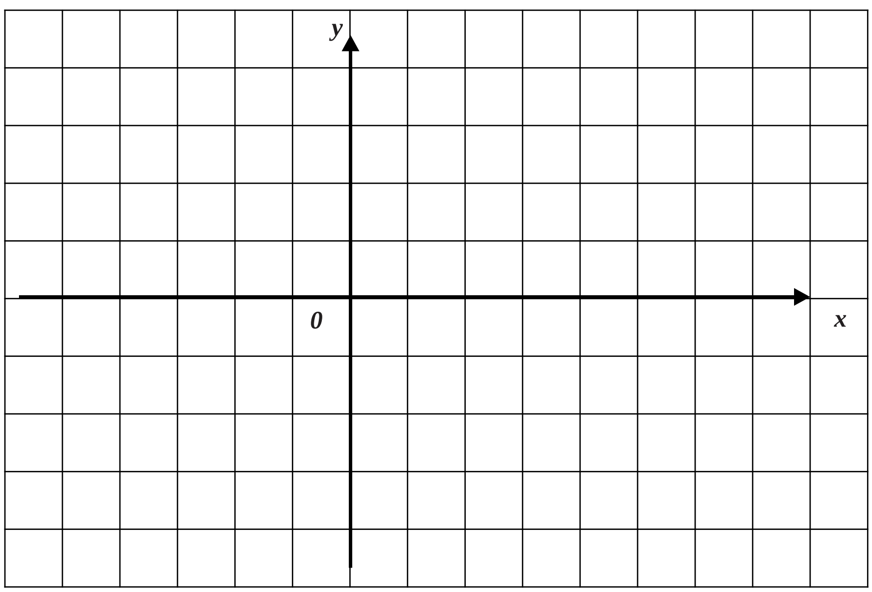
iv. $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ puede escribirse en la forma $\frac{\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2}{r^2}+\frac{y^2}{s^2}=1$, donde: $f(x)=y$, $r^2=\frac{B^2-4AC}{4A^2}$ y $s^2=\frac{r^2}{A}$, ¡verifíquelo realizando los despejes necesarios!

____.

v. ¿Qué representa la ecuación en $\frac{\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2}{r^2}+\frac{y^2}{s^2}=1$ el plano cartesiano?

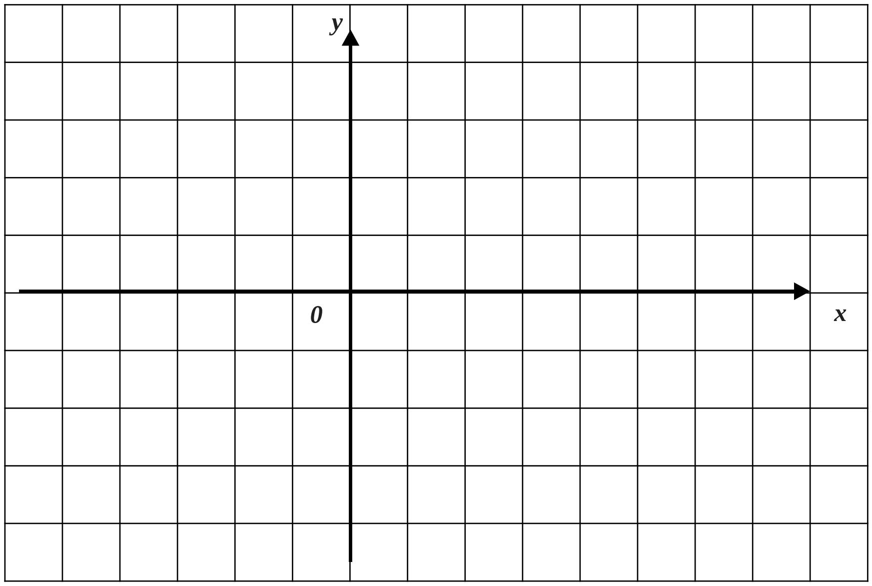
____.

vi. Considerando que $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}=\sqrt{A(x-x_0)(x-x_1)}$ es no negativa y que la curva que tiene asociada se encuentra en los cuadrantes I y II del plano cartesiano, dibújela.



CIERRE

1. Verifique que las funciones con regla de correspondencia:
a. $f(x)=\sqrt{x^2-x+6}$. **b.** $f(x)=\sqrt{-x^2+2x+3}$. **c.** $f(x)=\sqrt{x^2+6x+8}$. **d.** $f(x)=\sqrt{-x^2-x+6}$.
Tienen dos ceros y haga un bosquejo de su gráfica.



2. Utilice un software graficador, trace la curavas asociada a:
a. $f(x)=\sqrt{x^2-x+6}$. **b.** $f(x)=\sqrt{-x^2+2x+3}$. **c.** $f(x)=\sqrt{x^2+6x+8}$. **d.** $f(x)=\sqrt{-x^2-x+6}$. Contraste sus resultados con los del inciso anterior y comente sus observaciones.

SD 7. GRAFICACIÓN DE $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ CON UN CERO

APRENDIZAJES

Apr.6 Identificará los elementos de la función: dominio, rango, ceros y traza su gráfica.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

Gráfica de funciones con radicales

APERTURA

Comentarios sobre: obtención de las raíces de un polinomio cuadrático, el trazo de la gráfica de una recta, la relación entre el índice de un radical y el radicando.

DESARROLLO

1. ¿Qué condiciones debe cumplir la función $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ para tener un sólo cero?

____.

2. Suponga que $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ tiene como único cero al número x_0, factorice A y reescríbala en términos de A y de x_0.

____.

3. Suponga que en $f(x)=\sqrt{A(x-x_0)^2}$ se cumple que $A>0$, ¿por qué $A(x-x_0)^2$ es positivo o cero?

____.

a. Si $A>0$ determine el dominio de la función $f(x)=\sqrt{A(x-x_0)^2}$.

____.

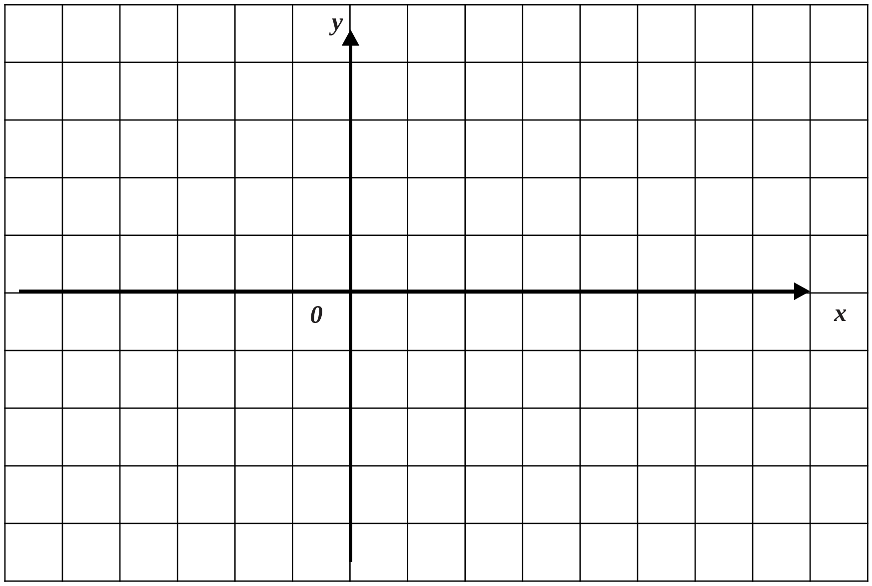
b. Si $A>0$, simplifique $f(x)=\sqrt{A(x-x_0)^2}$.

____.

c. ¿Por qué $f(x)=\sqrt{A(x-x_0)^2}$ es equivalente a $f(x)=\begin{cases}\sqrt{A}(x-x_0) & si\ \ x\geq x_0\\ -\sqrt{A}(x-x_0) & si\ \ x<x_0\end{cases}$?

____.

d. Trace la curva asociada a $f(x)=\sqrt{A(x-x_0)^2}$ (suponga que $A>0$).



2. Suponga que en $f(x) = \sqrt{A(x - x_0)^2}$ se cumple que $A < 0$, ¿por qué $A(x - x_0)^2$ es negativo o cero?

____.

a. Si $A < 0$, determine el dominio de la función $f(x) = \sqrt{A(x - x_0)^2}$.

____.

b. Si $A < 0$, determine $f(x_0)$.

____.

c. Por tanto, la "curva" asociada a $f(x) = \sqrt{A(x - x_0)^2}$ con $A < 0$ y un solo cero consiste de un solo

____.

CIERRE

1. Verifique que las funciones con regla de correspondencia:

a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$.

b. $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 2}$.

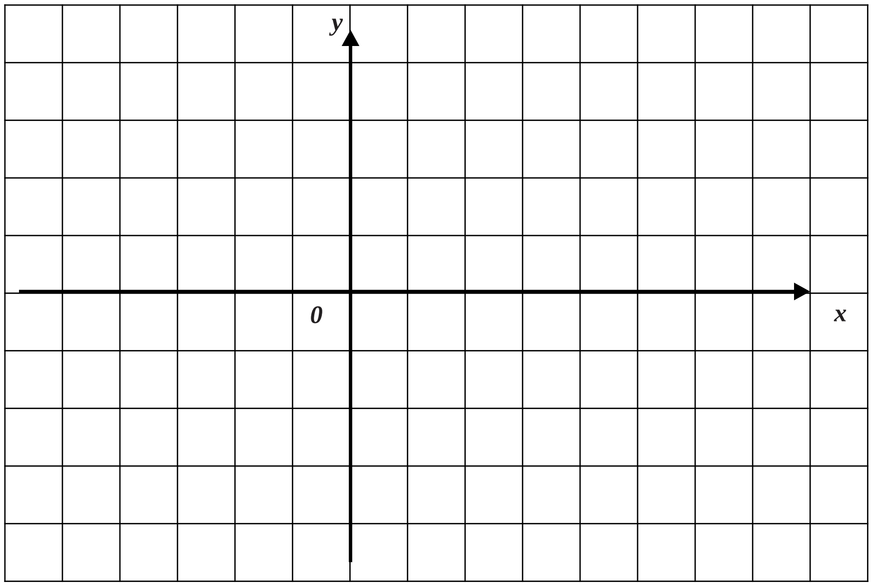
c. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 4x + 2}$.

d. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 6x + 18}$.

e. $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x - 1}$.

f. $f(x) = \sqrt{-x^2 + 12x - 12}$.

Tienen un cero y bosqueje su gráfica.



2. Utilice un software graficador, trace la curavas asociada a:
a. $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}$. **b.** $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-2}$. **c.** $f(x)=\sqrt{2x^2-4x+2}$. **d.** $f(x)=\sqrt{2x^2+6x+18}$.
e. $f(x)=\sqrt{-x^2+2x-1}$. **f.** $f(x)=\sqrt{-x^2+12x-12}$. Contraste sus resultados con los del inciso anterior y comente sus observaciones.

UNIDAD III	# FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

PROPÓSITOS:

Al finalizar la unidad el alumno:

Utilizará las funciones exponencial y logarítmica para representar formas de variación de fenómenos de la naturaleza, que éstas permitan modelar.

Retomará los conceptos de dominio y rango, así como el análisis de las relaciones entre los parámetros de estas funciones y su gráfica.

INTRODUCCIÓN

Tanto los logaritmos como los exponentes surgen como herramientas del cálculo, Arquímedes utilizó y redujo la multiplicación de dos números (potencias de 2, por ejemplo), utilizando una suma de logaritmos, sin embargo, el auge de los logaritmos, como herramienta del cálculo, en navegación, finanzas y astronomía, inicia en el siglo XVI con Stifel, y se consolida a inicios del siglo XVII con Neper y Joost Bürgi, y posteriormente; comienzan a consolidarse con la construcción de las primeras tablas de logaritmos de base 10, que realizó el reverendo Henry Briggs.
Las tablas de logaritmos de Henry Briggs fueron evolucionando y perfeccionandose a través de los años, y se utilizaron, tanto en el cálculo del crecimiento de poblaciones, como en la enseñanza de las matemáticas hasta hace, relativamente, poco tiempo. La era de la computación les proporcionó un fuerte impulso en su desarrollo, pero también hizo que se volvieran obsoletas e innecesarias.
Con la construcción del Cálculo Infinitesimal, las funciones exponenciales y logarítmicas incrementaron su importancia desde un punto de vista teórico - práctico, esto, como resultado de la versatilidad y aplicabilidad de sus propiedades diferenciales. Actualmente, dada la importancia teórico - práctica de las funciones exponenciales y logarítmicas ha inducido a que sean incluidas en casi la totalidad de las ramas de la Matemática, sobre todo, en aquellas ramas en las que las nociones del cálculo diferencial e integral están presentes. Las funciones exponenciales y logarítmicas desempeñan un papel significativo en el saber, por ejemplo, se utilizan en matemáticas financieras para calcular el valor de las inversiones a plazo, en demografía y en biología para predecir el comportamiento de una población, en arqueología y química para fechar objetos antiguos, en psicología para estudiar fenómenos de aprendizaje, en medicina para analizar la propagación de las epidemias, en comunicación para estudiar la propagación de rumores, en la industria para estimar la factibilidad de la producción, en probabilidad son el eje rector de la normalidad, en electrónica en el comportamiento de la carga de condensadores, etc. En suma, las funciones exponenciales y logarítmicas son de gran utilidad en la modelación, estudio y análisis de diversos fenómenos de la naturaleza, de la industria y de la matemática misma.

PRESENTACIÓN

Esta unidad, titulada "Funciones exponenciales y logarítmicas", se divide en tres secciones, estas son:
La sección III.1 "La función exponencial", inicia con la descripción de fenómenos en los que la rapidez con que cambia la variable dependiente (o función) es proporcional a la función misma, como son: el crecimiento de un principal en forma contínua, la eliminación de una sustancia ingerida por una persona, la adaptación del fractal conocido como triángulo de Sierpinski, entre otros. Recoje las características en común que presentan los modelos que describen las situaciones que antes mencionamos, para posteriormente formalizarlas matemáticamente, y así, generar la definición de función exponencial. Posteriormente, a partir de la construcción de registros tabulares, obtenemos el patrón de comportamiento de la curva que tiene asociada una función exponencial, considerando para bases mayores que la unidad, así como bases cuyo valor se encuentra entre cero y uno. Continuamos con el trazo de curvas asociadas a funciones exponenciales estudiando el efecto producido al variar los parámetros que incluye su regla de correspondencia. En esta sección también se analiza el efecto del signo del exponente (de las funciones exponenciales) con el carácter de su monotonía (crecimiento y decaimiento) de las funciones exponenciales, por último, en esta sección, presentamos diversas situaciones de la vida real que se relacionan con el crecimiento y/o decaimiento exponencial.
En la sección III.2 "La función logaritmo"; el estudio de la función logaritmo se desarrolla interpretando la ecuación exponencial $a^x = y_0$ como un logaritmo, y asignándole una notación. Antes del establecimiento formal de la definición de la función logarítmica, se presenta la teoría relativa a la forma en que se construye la función inversa (de una función invertible) a partir de otra función que presenta las características que garantizan la existencia de la función que se desea construir. Posteriormente, presentamos y justificamos el proceso a seguir en el trazo de la curva asociada a la función inversa a partir de la curva asociada a la fución que se desea invertir. Después definimos formalmente la función logarítmica de base a y aplicando los procesos, que antes hemos señalado, obtenemos los elementos (dominio, rango y forma de la curva que tiene asociada) de la función logaritmo. La sección III.2 concluye con el estudio y la caracterización de las fuciones logarítmicas más relevantes en las diversas ramas del conocimiento: función logaritmo (base diez) y función logaritmo natural.
La sección III.3 "Exponentes y logaritmos", considera que los "logaritmos" son las imágenes de números reales bajo una función logarítmica; supone que las propiedades conocidas como "leyes de los exponentes" son válidas, y con esta suposición las aplica para justificar las propiedades operativas de los logaritmos. Posteriormente, utilizamos las propiedades de los logaritmos para "expandir" y "comprimir" expresiones algebraicas. A continuación desarrollamos y deducimos las propiedades conocidas como: "cambio de base logarítmico y cambio de base exponencial" y sus aplicaciones. Utilizamos todas las propiedades de los exponentes y de los logaritmos en la resolución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales. Concluimos la sección con la presentación de problemas en los que su resolución requiere del uso de funciones logarítmicas y/o exponenciales.

PUNTOS PROBLEMÁTICOS

POSIBLES DIFICULTADES (PROGRAMA)	SUGERENCIAS DE APOYO
Con base en nuestra experiencia, con respecto al desarrollo de los aprendizajes y temática que incluye el programa de la asignatura de Matemáticas IV, en la unidad titulada “Funciones exponenciales y logarítmicas”, consideramos: Congruencia entre los aprendizajes y la temática.	
Fila 1. No aplican.	**1.** No aplican.
Fila 2. **a.** Dado el tipo de función, cuya regla de correspondencia es de la forma $f\left(x\right)=a\cdot b^{x}$, el caso en que $a<0$ carece de interés en aplicaciones. **b.** No es señalada la equivalencia de un signo negativo antecediendo a la variable independiente y una base comprendida entre cero y uno.	**2.** **a.** Evíte este caso. **b.** Señale la equivalencia, una dificultad presente en la unidad “Funciones exponenciales y logarítmicas” del programa indicativo consiste en que no hacen referencia de las propiedades de los exponentes.
Fila 3. No aplican.	**3.** No. Aplican.
Fila 4. Este aprendizaje tiene mayor sentido si se considera que la comparación entre las gráficas de las funciones que señala tienen todas bases mayores que uno, o todas las funciones tienen bases comprendidas entre cero y uno.	**4.** Proponga funciones donde las bases se encuentran en los rangos señalados en la fila 4.
Fila 5. No aplican.	**5.** No aplican.
Fila 6. Antes no han sido tratados los elementos propios de las las funciones invertibles, ni las características que debe tener una función para que exista su función inversa.	**6.** Proponga videos con los cuales el alumno adquiera una visión intuitiva de éstos conceptos, en el salón de clase señale las condiciones adecuadas para la adqusición de éstos conceptos. ¡No utilice como ejemplos las operaciones aritméticas!
Fila 7. Generalidad del aprendizaje.	**7.** Sólo trace las curvas asociadas a funciones logarítmicas con base dos, y tres.
Fila 8. La justificación de las propiedades de los logaritmos se fundamenta en las propiedades de los exponentes, sin embargo, estas propiedades no se señalan en los aprendizajes previos.	**8.** Debe tratar las propiedades de los exponentes.
Fila 9. Sin aplicación.	**9.** Sin aplicación.
Fila 10. Sin aplicación.	**10.** Sin aplicación.

POSIBLES DIFICULTADES (ALUMNOS)	SUGERENCIAS DE APOYO
Basándonos en nuestra experiencia, con respecto al desarrollo de los aprendizajes y temática incluidos en el programa de la asignatura de Matemáticas IV, en la unidad correspondiente a Funciones exponenciales y logarítmicas, consideramos: Congruencia entre los aprendizajes y la temática.	
Fila 1. Al momento, el estudiante desconoce las funciones exponenciales; así como su carácter de crecimiento y decrecimiento.	**1.** Debe tratar estos contenidos de forma intuitiva.
Fila 2. **a.** El carácter de continuidad de $f(x)=a\cdot b^{x}$ se da por hecho sin justificación alguna. **b.** Olvido o escasa habilidad en el uso de las propiedades de los exponentes.	**2.** **a.** Puede ayudar el señalar que existe el Teorema del Valor Intermedio. **b.** Puede establecerlas para números enteros y luego generalizarlas.
Fila 3. No aplican.	**3.** No aplican.
Fila 4. No aplican.	**4.** No aplican.
Fila 5. No aplican.	**5.** No aplican.
Fila 6. En los cursos previos de matemáticas, el alumno no ha tenido relación con los conceptos y métodos inherentes a funciones invertibles, no los maneja.	**6.** Trate esta parte de la temática de forma intuitiva y utilice casos particulares.
Fila 7. El alumno presenta serios problemas con el concepto y la aplicación de la reflexión, de la curva asociada de una función exponencial decreciente respecto a la línea recta asociada a la función identidad.	**7.** El uso de un software adecuado puede ser de gran apoyo en la solución de este problema.
Fila 8. No aplican.	**8.** No aplican.
Fila 9. Dependerán del grado de dificultad de las aplicaciones o ecuaciones propuestas, por lo general, estarán relacionados con las sustituciones a realizar.	**9.** Mida las habilidades y grado de conocimiento de los estudiantes y proponga actividades de acuerdo al resultado del diagnóstico.
Fila 10. Lo mismo que en la fila 10.	**10.** Lo mismo que en 9.

TIEMPO REQUERIDO

16 Horas

RECURSOS GENERALES

BIBLIOGRAFÍA GENERAL

Barnett, R., (2007) *Precálculo Funciones y gráficas*. México: MCGRAW HILL (4ª Edición).
Demana, F., (2007) *Precálculo Grafico Numerico Algebraico.* México: PEARSON (7ª Edición).
Stewart, J., (2007) *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo.* México: CENGAGE LEARNING (7ª Edición).
Larson, R., (2008) *Precálculo. México.* REVERTÉ (7ª Edición).
Sobel, M., (1998) *Precálcu*lo. México: PRENTICE HALL HISPANOAMERICANA (4ª Edición).
Swokowski, E., (2015) *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: CENGAGE Learning. (13ª edición).
Zill, D., (2008) *Precálculo con avances de cálculo*: México. MC GRAW HILL (4° Edición).

SITIOS WEB

www.matesfacil.com (Recuperado agosto de 2018)
https://www.google.com.mx/search?q=portal+academico+cch&oq=PORTAL+ACA&aqs=chrome.0.0j69i57j69i60j0l3.6191j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8
Eduardo Sáenz de Cabezón (2015 noviembre 18). ¿Qué es el número e? (Vídeo) Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=Z5czpA-fyMU
Mathutoriales MB (2015 diciembre 17). ¿QUÉ ES EL NÚMERO E?
Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=Grm1DXPV9is
Matemáticas On LineFunción Inversa Definición y Ejemplos (2014 marzo 31) Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=j1Z746lff4E
Andrea Montonati (2017 marzo 26) Función logarítmica. Definición. Gráficos
Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=pGTswmcGUiM
El Profe Diego (2017 marzo 26) Función Logarítmica - Definición, Propiedades y Aplicaciones
Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=FyQxivCiHns

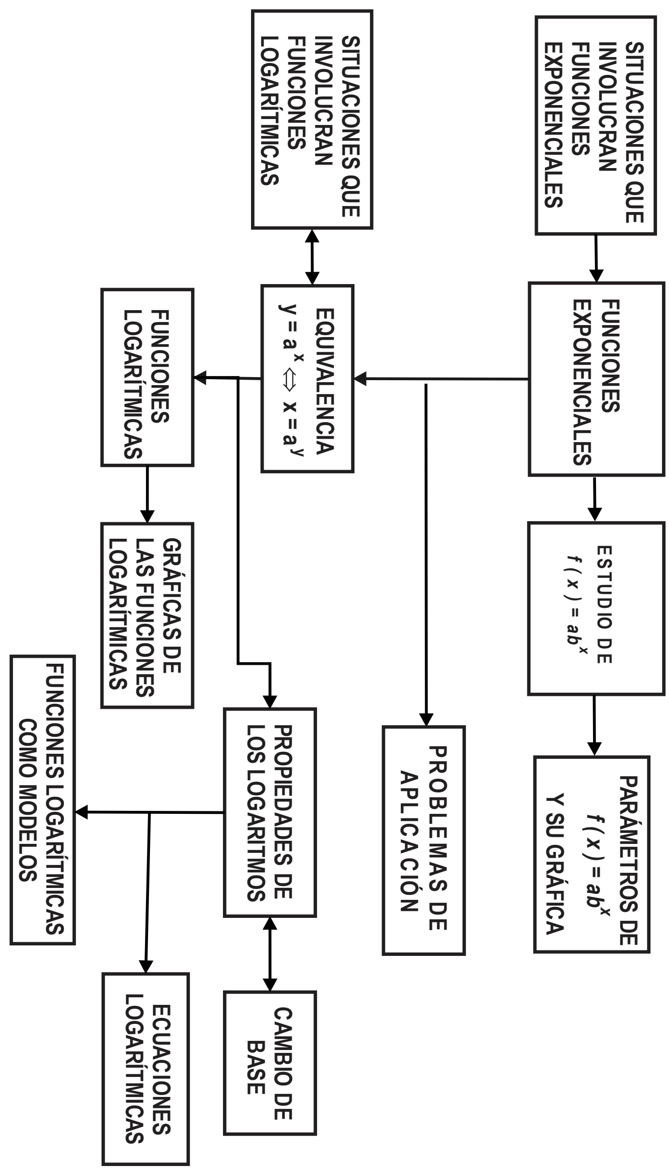
DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS

Ordenador
Proyector de vídeos

SOFTWARE

Geogebra
Symbolab

ESTRUCTURA TEMÁTICA: UNIDAD III.1 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS



SECCIÓN III.1	LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

APRENDIZAJES Y CONTENIDOS TEMÁTICOS

SECCIÓN	APRENDIZAJES	CONTENIDOS TEMÁTICOS
III.1	**Apr.1** Explorará situaciones o fenómenos que corresponden a crecimiento o decaimiento exponencial, las relaciones o condiciones existentes y analizará la forma de variación. **Apr.2** Identificará dominio y rango de una función exponencial y trazará su gráfica. **Apr.3** Identifica patrones de cambio involucrados en el crecimiento o decrecimiento de una función exponencial y bosquejará su gráfica. **Apr.4** Analizará la relación entre las gráficas de funciones exponenciales con diferentes bases incluyendo el número e. **Apr.5** Resolverá problemas en diferentes contextos, que se modelen con funciones exponenciales.	Situaciones que involucran crecimiento o decaimiento exponencial. Estudio analítico y gráfico del comportamiento de funciones exponenciales del tipo: $f(x)=a\cdot b^x$ con $b>1$ o $0<b<1$ y $a\neq 0$. Relación entre los parámetros de $f(x)=a\cdot b^x$ con su gráfica. Importancia de la función $f(x)=a\cdot b^x$ y sus aplicaciones. Problemas de aplicación.

CONCEPTOS CLAVE

Los siguientes conceptos son fundamentales para un buen desarrollo del curso:

i. Base, exponente.
ii. Crecimiento exponencial y decaimiento exponencial.
iii. Base natural (el número e).

TIEMPO ESTIMADO

En situaciones regulares se invierten 7 horas para el desarrollo de los aprendizajes antes señalados.

PROCESOS Y ALGORITMOS BÁSICOS

El alumno debe utilizar y manejar los procesos de:
i. Trazo de la curva asociada a una función exponencial.

DESARROLLO

Estrategias didácticas, actividades de enseñanza aprendizaje, materiales de apoyo, identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución.

<table>
<tr><th>Observaciones y sugerencias</th><th>Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo</th><th>Dificultades y soluciones</th></tr>
<tr>
<td>

i. Inicialmente proponga problemas cuya modelación pueda darse en términos de variables continuas.

ii. Proponga por lo menos un problema que pueda ser modelado con una función exponencial creciente y otro por una función exponencial decerciente.

</td>
<td>

Las funciones exponenciales se utilizan para describir fenómenos en los que la rapidez con que cambia la variable dependiente (o función) es proporcional a la función, por ejemplo, en la acumulación o en la eliminación de sustancias en una persona, el almacenamiento de carga en un capacitor, la desintegración de sustancias, la variación de la temperatura de un objeto inmerso en un medio específico, también en algunos casos discretos como el crecimiento o disminución del tamaño de las poblaciones (bacterias, roedores, plantas, etc.), en el interés compuesto de una cantidad de dinero.

ACTIVIDAD III.1 (SITUACIONES QUE INVOLUCRAN FUNCIONES EXPONENCIALES)
a. MODELO EXPONENCIAL
Si el interés generado por cierta cantidad de dinero invertida (principal) es reinvertido, de manera que los intereses también se reinvierten, entonces se genera el interés compuesto. Así, el interés es convertido en principal, por lo que para inversiones posteriores existe interés sobre interés.
Se inicia con un capital inicial P, que es invertido a una tasa de r por ciento, compuesto en un periodo t, al término del primer periodo la cantidad compuesta es $S=P+rP$ o $S(t)=P(1+r)^1$ pesos.

Al término del primer periodo se cuenta con $S(t)=P(1+r)^1$, misma que se reinvierte por otro periodo t, al término del segundo periodo los intereses generados son $rP(1+r)$ y la cantidad compuesta es

$$S(2)=P(1+r)+r[P(1+r)]=P(1+r)(1+r)=P(1+r)^2.$$

Así, al término del segundo periodo se tiene $S(2)=P(1+r)^2$, cantidad que se invierte en un tercer periodo, por lo que a su término los intereses generados son $rP(1+r)^2$ y la cantidad compuesta es

$$S(3)=P(1+r)^2+r\left[P(1+r)^2\right]=P(1+r)^2(1+r)=P(1+r)^3.$$

Si el proceso continúa, el monto compuesto al término del periodo t es $P(1+r)^t$. En general, al término de los t periodos la cantidad compuesta se modela por la función $S(t)=P(1+r)^t$, vea la *tabla III.1*.

<table>
<tr><th>NÚMERO DE AÑOS</th><th>CANTIDAD COMPUESTA</th></tr>
<tr><td>0</td><td>P</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$P(1+r)$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$P(1+r)^2$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$P(1+r)^3$</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>n</td><td>$P(1+r)^t$</td></tr>
</table>

TABLA III.1

Supongamos que modificamos la estrategia de inversión, que los intereses son pagados k veces en cada periodo t y se reinvierten, entonces, el capital al término del periodo t es $S(t)=P\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}$.

</td>
<td>

1. Tenga en cuenta que los modelos (funciones) que propone son ideales por lo que sólo tienen cierto rango de validéz.

</td>
</tr>
</table>

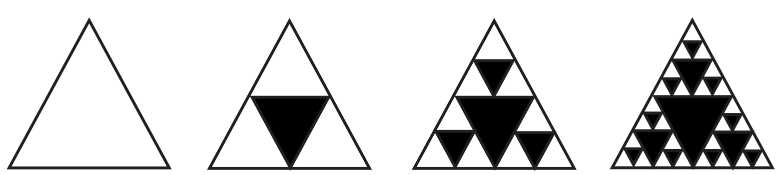
Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
	El hecho de que los intereses sean pagados y capitalizados al instante significa, que el número de periodos de pago crece indefinidamente, así, en $\left(1+\frac{r}{k}\right)^k$, k (número de pagos en el periodo t) crece indefinidamente y tiene como resultado un número que se representa por e^r, por este hecho la función anterior se tranforma en $S(t)=Pe^{rt}$. **b.** MODELO EXPONENCIAL Suponga que un individuo, en un tiempo específico, elimina en el trayecto del día a través de la orina el 20% de una droga que consumió. Si la cantidad de droga que consumió fue 10 miligramos, y si $D(t)$ representa la cantidad de droga presente en el cuerpo del individuo a los t días, entonces, inicialmente se tienen $D(0)=10$ miligramos de droga. Al primer día (después de haber sido consumida la droga) el cuerpo de la persona tiene $D(1)=(0.8)(10)=8$ miligramos de droga. Así, al segundo día el cuerpo de la persona contiene $D(2)=(0.8)(0.8)(10)=(0.8)^2(10)$ miligramos de droga, al tercer día contiene $D(3)=(0.8)(0.8)^2(10)=(0.8)^3(10)$ miligramos de droga, etc. La *tabla III.2* describe la cantidad de droga presente en el cuerpo del individuo.	**2.** Debe profundizar en la importancia del número de Euler. **3.** La distinción entre funciones continuas y funciones discretas confunde al estudiante, distinga el dominio en los ejemplos que utilice.

DÍA	CANTIDAD DE DROGA (miligramos)
0	$D(0)=10$
1	$D(1)=(0.8)^1(10)=8$
2	$D(2)=(0.8)^2(10)=6.4$
3	$D(3)=(0.8)^3(10)=5.12$

TABLA III.2

En general, después de t días, la cantidad de droga presente en el organismo se obtiene por la función $D(t)=10(0.8)^t$, con la condición de $t\geq 0$.

c. MODELOS EXPONENCIALES
La *figura III.1* muestra un triángulo equilátero cuya área es una unidad cuadrada (fase 0). Si unimos los puntos medios de los lados con segmentos rectilíneos obtenemos la *figura III.1.b.*, misma que contiene cuatro triángulos equiláteros congruentes pero sólo tres comparten su orientación (fase 1). Si repetimos el proceso anterior con los tres triángulos blancos en la misma forma que el triángulo original (fase 2) obtenemos la *figura III.1.c.,* etc.



a. b. c. d.
FIGURA III.1

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

iv. Guíe al estudiante en la formalización de la definición de función exponencial.

v. Aclare el hecho de que en $f(x)=a^x$, es necesaria la condición $a>0$.

vi. Utilice registros tabulares para apoyar la construcción de la curva asociada a una función exponencial. Guíe a los estudiantes para que utilicen las propiedades de los exponentes.

a. Suponga que, en cada fase, es de nuestro interés el número de triángulos blancos y el área que encierran.

Inicialmente (fase 0), un triángulo compone a la región blanca, su área es una unidad.

En la fase 1, tres triángulos componen la región blanca, el área de todos ellos es $\frac{3}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)^1$ de unidad cuadrada.

En la fase 2, $9=3^2$ triángulos componen la región blanca, el área de cada uno de ellos es $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2$; por tanto, el área de la región blanca es $3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2$.

En la fase 3, $27=3^3$ triángulos componen la región blanca, el área de uno de los triángulos e $\frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^3$; por tanto, el área de la región blanca es $3^3\left(\frac{1}{4}\right)^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3$.

La *tabla III.3* describe el comportamiento del área de la figura generada.

FASE	NÚMERO DE TRIÁNGULOS	ÁREA DE CADA TRIÁNGULO	ÁREA DE LA REGIÓN BLANCA
0	1	1	$\left(\frac{3}{4}\right)^0$
1	$3=3^1$	$\left(\frac{1}{4}\right)^1$	$\left(\frac{3}{4}\right)^1$
2	$9=3^2$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2$
3	$27=3^3$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	3^n	$\left(\frac{1}{4}\right)^n$	$\left(\frac{3}{4}\right)^n$

TABLA III.3

Generalización:

1. El número de triángulos en la fase n es $N(n)=3^n$, siempre que, n sea cero o un número natural.

2. El área de región blanca es $A(n)=\left(\frac{3}{4}\right)^n$ siempre que n sea un número natural.

4. Para explicar la Continuidad de las funciones exponenciales, recurra (intuitivamente) al teorema del valor intermedio.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
vii. Utilice registros como primera herramienta de análisis de la curva asociada a una función exponencial.	**DEFINICIÓN III.1** (FUNCIÓN EXPONENCIAL) Sean $a>0$ y $a\neq 1$. **a.** La función $f(x)=a^x$ se denomina función exponencial de base a en la variable x. **b.** Si $f(x)=a^x$, entonces $dom(f)=(-\infty,+\infty)$ e $img(f)=(0,+\infty)$. En la función exponencial $f(x)=a^x$: **1.** La variable independiente es el exponente x, y está bien definida para cualquier asignación a la variable x. **2.** La base a es positiva (lo que se escribe como $a>0$), de no ser así $f(x)=a^x$ no siempre estaría definida (recuerde que expresiones como $(-2)^{\frac{1}{2}}$, $(-4)^{\frac{3}{4}}$, $(-6)^{\frac{5}{6}}$ (entre otras) no están definidas en el sistema de los números reales para una gran diversidad de asignaciones a la variable x. **3.** Si $a=1$, entonces $f(x)=a^x=1^x=1$, es decir, equivale a una función constante. **4.** La curva asociada a $f(x)=a^x$ tiene como dominio el conjunto $dom(f)=(-\infty,+\infty)$, y puede demostrarse que su curva asociada es suave y continua. **ACTIVIDAD III.2** (GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES CON BASE MAYOR QUE 1) Para efectuar el trazo de la curva asociada a cada una de las funciones $f(x)=2^x$, $f(x)=3^x$ y $f(x)=10^x$, nos basaremos en la *tabla III.4* y supondremos que las curvas asociadas son suaves y continuas. (ver TABLA III.4 abajo) Así, las curvas asociadas a las funciones anteriores cumplen: **i.** Intersecan al eje de las ordenadas en el punto $I_y(0,1)$. **ii.** Tienen como asíntota horizontal al eje x. **iii.** Son positivas (todas sus imágenes son positivas). **iv.** Son crecientes, los valores de sus imágenes se incrementan al ser incrementados los valores asignados a la variable x. **v.** Si se desplaza (de izquierda a derecha) una recta tangente a través de la curva, ésta recta tangente siempre estará por "abajo" de ella.	

x	$f(x)=2^x$	$f(x)=3^x$	$f(x)=10^x$
–4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{10000}$
–2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{100}$
–1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{10}$
0	1	1	1
1	2	3	10
2	4	9	100
4	16	81	10000

TABLA III.4

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

viii. Haga que el estudiante descubra la posición de la curva asociada a una función exponencial con respecto a las curvas de otras funciones exponenciales (de base mayor a uno).

v. En $f(x)=a^x$ (para $a=2,\ 3,\ 10$), si la base es mayor, entonces la curva asociada a $f(x)=a^x$ (para $a=2,\ 3,\ 10$) tiene un crecimiento más rápido en el primer cuadrante del plano cartesiano, pero en el segundo cuadrante su crecimiento es más lento

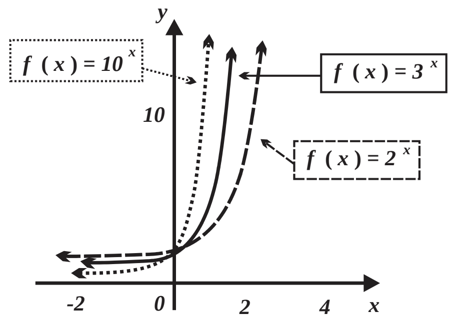


FIGURA III.2

Son casos particulares las funciones exponenciales $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$. Estas funciones pueden ser reescritas como $f(x)=2^{-x}$ y $f(x)=3^{-x}$ respectivamente. Además, la curva asociada a una función exponencial es suave y continua, y tomandode como apoyo la *tabla III.5* obtenemos las curvas de la *figura III.2*.

ix. Haga que el estudiante descubra la posición de la curva asociada a una función exponencial respecto a las curvas de otras funciones exponenciales (de base comprendida entre cero y uno).

Para trazar las curvas asociadas a las funciones $f(x)=2^{-x}$ y $f(x)=3^{-x}$, consideramos la *tabla III.5* y el hecho de que éstas curvas son suaves y continuas.

x	$f(x)=2^{-x}$	$f(x)=3^{-x}$
–4	16	81
–2	4	9
–1	2	3
0	1	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{81}$

TABLA III.5

Así, la curva asociada a la función $f(x)=a^x$, sujeta a la condición $0<a<1$:

i. Interseca al eje de las ordenadas en el punto $I_y(0\ ,\ 1)$.

ii. Tiene como asíntota horizontal al eje x.

iii. Es positiva.

iv. Es decreciente, sus imágenes disminuyen al ser incrementada la asignación a la variable x.

v. Si se desplaza (de izquierda a derecha) una recta tangente a través de la curva, ésta recta tangente siempre estará por "abajo" de ella.

vi. Si $a_2>a_1>1$, entonces $f(x)=a_2^x$ decrece con mayor rapidez que

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

$f(x)=a_1^x$ en el segundo cuadrante y lo hace en forma más lenta en el primer cuadrante. Vea la figura III.3.

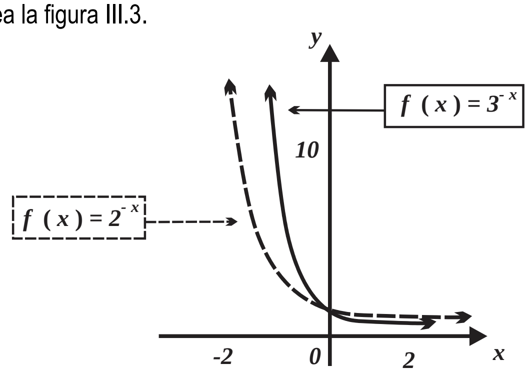


FIGURA III.3

△

5. Comente algunas características de este tipo de números.

x. Señale la importancia del número e y utilice un registro tabular para hacer una aproximación a su valor.

ACTIVIDAD III.3 (APROXIMACIÓN AL NÚMERO e)

El número e (en honor al eminente matemático Leonhard Euler), es uno de los números más importantes de las matemáticas. El número e se denomina número de Euler o constante de Napier, lo reportó por primera vez el matemático escocés John Napier, este número es irracional (no puede expresarse como una fracción); por tanto, es imposible escribirlo utilizando un número finito de cifras decimales o en forma de decimal periódico. El número e, es trascendente, es decir, no es la raíz de una ecuación polinomial con coeficientes racionales. Por otro lado, es probable que la función exponencial de mayor utilidad sea la que tiene como base el número e, es decir $f(x)=e^x$. Hagamos una aproximación del valor del número e, para esto, asignaremos números cada vez mayores a la variable x en la expresión $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, vea la *tabla III.6*.

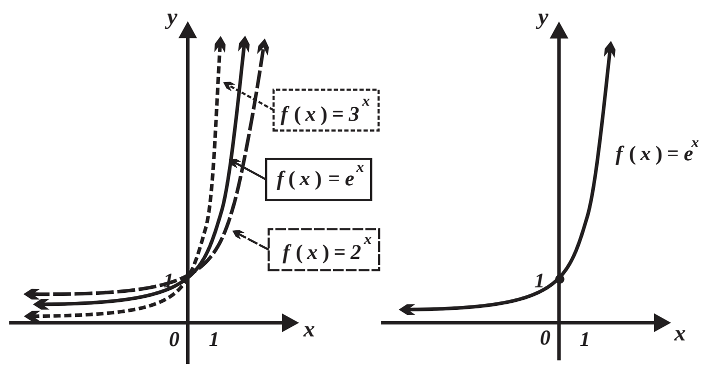
x	$\frac{1}{x}$	$1+\frac{1}{x}$	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
1	1	2	2
10	0.1	1.1	2.59374
100	0.01	1.01	2.70481
1000	0.001	1.001	2.71692
10000	0.0001	1.0001	2.71814
100000	0.00001	1.00001	2.71826
1000000	0.000001	1.000001	2.71828
10000000	0.0000001	1.0000001	2.718281

TABLA III.6

xi. Proponga al estudiante la formalización de la función exponencial natural.

A medida que incrementemos el valor de las asignaciones a la variable x el valor de la expresión $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ estará más próximo al número e.

△

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
xii. Proponga al estudiante la formalización de la función exponencial natural.	**DEFINICIÓN III.2** (FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL) **a.** El número e (con doce dígitos de aproximación es $2.718281828459\ldots$) se denomina base natural o neperiana. **b.** La función $f(x)=e^{x}$, tal que: $dom(f)=(-\infty,+\infty)$ e $img(f)=(0,+\infty)$, se denomina función exponencial natural.	
xiii. Proponga al estudiante el trazo de la curva asociada a la función exponencial natural, considerando que $2<e<3$.	**ACTIVIDAD III.4** (CARACTERÍSTICAS DE $f(x)=e^{x}$) Puesto que $2<e<3$, la curva asociada a la función exponencial natural $f(x)=e^{x}$, se muestra en la *figura III.4*.  **FIGURA III.4** △	
xiv. Guíe al estudiante para que descubra (o en su caso recuerde) que en $f(x)=Da^{x}+k$ el parámetro D involucra una translación horizontal de la curva asociada a $f(x)=a^{x}$ (es decir, que $f(x)=Da^{x}+k$ puede escribirse en la forma $f(x)=a^{(x-h)}+k$.	**ACTIVIDAD III.5** (CARACTERÍSTICAS DE $f(x)=e^{x}$) Puesto que $f(x)=e^{x}$ es un caso especial de la función $f(x)=a^{x}$ su curva asociada satisface las condiciones: **i.** Interseca al eje de las ordenadas (eje y) en el punto $I_{y}(0\,,1)$. **ii.** Tiene como asíntota horizontal al eje x. **iii.** Es creciente y sus rectas tangentes se encuentran por debajo de ella. **iv.** Es suave y continua. △ Utilizando la curva asociada a la función exponencial (de regla de correspondencia $f(x)=a^{x}$) es posible trazar la curva asociada a la función exponencial de regla de correspondencia $f(x)=a^{(x-h)}+k$ (o equivalentemente, de regla de correspondencia de la función $f(x)=Da^{x}+k$). **OBSERVACIÓN** **i.** La curva asociada a $f(x)=a^{(x-h)}$, se genera desplazando horizontalmente h unidades la curva asociada a $f(x)=a^{x}$ (a la derecha del eje y si h es positiva, a la izquierda del eje y si h es negativa). **ii.** La curva asociada a $f(x)=a^{(x-h)}+k$, se construye desplazando verticalmente k unidades la curva asociada a $f(x)=a^{(x-h)}$ (hacia arriba si k es positiva y hacia abajo si k es negativa). Ahora analicemos el papel que desempeña una constante D de la función $g(x)=Da^{x}$ en el trazo de la curva	

<table>
<tr><th>Observaciones y sugerencias</th><th>Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo</th><th>Dificultades y soluciones</th></tr>
<tr><td></td><td>
asociada a una función exponencial. Si en $g(x)=a^{x-h}$, aplicamos las leyes de los exponentes obtenemos $g(x)=a^{x-h}=a^x a^{-h}$, regla de correspondencia que puede escribirse como $f(x)=a^{x-h}=Da^x$, siempre que $D=a^{-h}$, por tanto, el factor constante D en $g(x)=a^{x-h}=Da^x$ se relaciona con un desplazamiento horizontal de la curva correspondiente $f(x)=a^x$. Así, la curva asociada a $g(x)=Da^x$ se obtiene desplazando horizontalmente la curva asociada a $f(x)=a^x$ un total de $D=a^{-h}$ unidades.

ACTIVIDAD III.6 (TRAZO DE CURVAS EXPONENCIALES)
a. La curva asociada a $f(x)=\frac{1}{3^5}3^x=3^{x-5}$, vea la figura III.5, se obtuvo desplazando horizontalmente 5 unidades a la derecha la curva asociada a la función a $f(x)=3^x$ (curva punteada en la *figura III.5*). También $dom(f)=(-\infty,+\infty)$ e $img(f)=(0,+\infty)$.

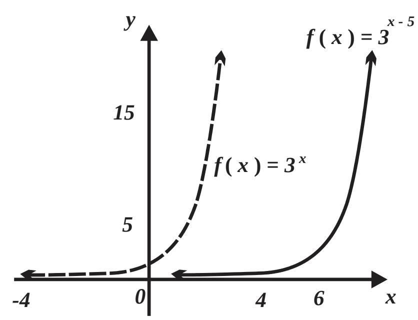


FIGURA III.5

b. La curva asociada a $f(x)=\frac{1}{e}e^x-2=e^{x-1}-2$ (curva continua de la *figura III.6)* se generó desplazando horizontalmente 1 unidad a la derecha y 2 unidades verticalmente hacia abajo, la curva de $f(x)=e^x$ (curva punteada en la *figura III.6*). También $dom(f)=(-\infty,+\infty)$ e $img(f)=(-2,+\infty)$.

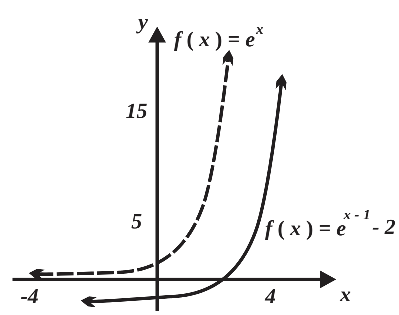


FIGURA III.6
c. La curva asociada a $f(x)=\frac{1}{3^7}3^x+4=3^{x-7}+4$ (vea la *figura III.7*) se obtuvo del desplazamiento horizontal de 7 unidades a la derecha la curva asociada a
</td><td>
6. Recuerde al estudiante las propiedades de las potencias (de forma más general, las propiedades de los exponentes).

7. Hasta el momento no hemos tratado los aprendizajes necesarios para determinar la magnitud del desplazamiento señalado, es decir, obtener el valor de h en la ecuación $D=a^{-h}$ (en la siguiente sección veremos cómo resolver esta problemática, por lo que en las líneas siguientes sólo trataremos casos específicos).
</td></tr>
</table>

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

$f(x)=3^x$ y a continuación cuatro unidades verticalmente hacia arriba la curva antes obtenida. Las proyecciones de la curva asociada a $f(x)=3^{x-7}+4$ sobre los ejes coordenados son: $dom(f)=(-\infty,+\infty)$ e $img(f)=(4,+\infty)$.

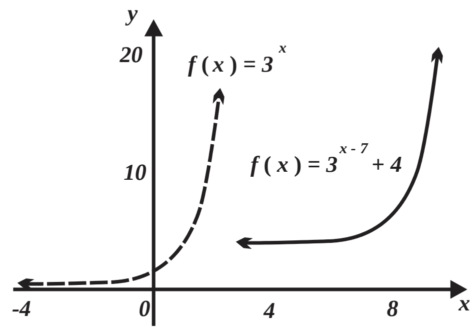


FIGURA III.7

d. La curva asociada a la función $f(x)=e^4e^{-x}-3=\left(\frac{1}{e}\right)^{x-4}-3$ (curva continua en la *figura III.8*) se obtuvo desplazando horizontalmente 4 unidades a la derecha y luego 3 unidades verticalmente hacia abajo la curva asociada a $f(x)=e^{-x}=\left(\frac{1}{e}\right)^x$ respecto al eje de las ordenadas, que se obtiene efectuando una reflexión de la curva asociada a $f(x)=e^x$. También $dom(f)=(-\infty,+\infty)$ e $img(f)=(-3,+\infty)$.

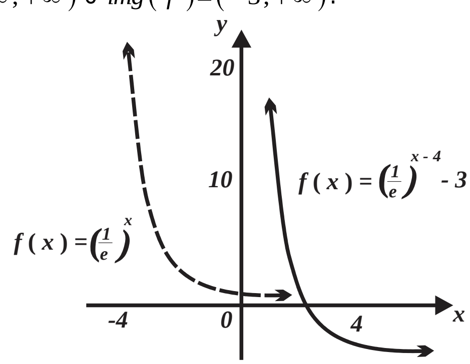


FIGURA III.8

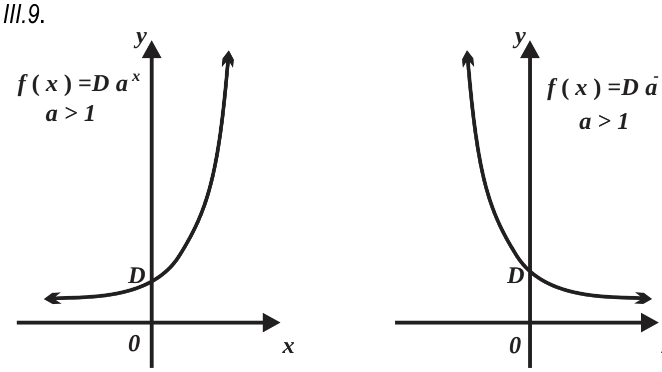
△

Funciones exponenciales con bases diferentes están relacionadas, es decir, es posible transformar la base de una de ellas en términos de la otra.

Supongamos que las funciones exponenciales $f(x)=a^x$ y $g(x)=b^{mx}$ son iguales, entonces, se cumple $a^x=b^{mx}$, o equivalentemente $a^x=\left(b^m\right)^x$, por tanto; $a=b^m$. Así, una función exponencial puede escribirse en la base que se desee (siempre que ésta base sea no negativa), sin embargo, este proceso requiere resolver, para m, la ecuación $a=b^m$ (que resulta de igualar $f(x)=a^x$ con $f(x)=b^{mx}$). Por el momento sólo efectuaremos cambios de base para ciertos casos, sin embargo, posteriormente generalizaremos los métodos involucrados en el proceso de "cambio de base".

8. Hasta el momento no contamos con los elementos teóricos para transformar la base de una función exponencial específica (sólo lo podemos hacer en casos específicos), esta problemática la trataremos posteriormente.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
xv. Guíe al estudiante en el cambio de base inmediatos en funciones exponenciales.	**ACTIVIDAD III.7** (CAMBIOS DE BASE INMEDIATOS) **a.** Para rescribir $f(x)=8^x$ con base dos, es decir, en la forma $f(x)=2^{mx}$, se cumple $8=2^m$; por tanto, $m=3$ (puesto que $2^3=8$) y como consecuencia $f(x)=2^{3x}$. **b.** Para rescribir $f(x)=9^x$ con base tres, es decir, en la forma $f(x)=3^{mx}$, se debe cumplir $9=3^m$, así, $m=2$ (puesto que $3^2=9$); por tanto, $f(x)=9^x=3^{2x}$. **c.** Para rescribir $f(x)=2^x$ en base $\frac{1}{2}$, se debe cumplir $2=\left(\frac{1}{2}\right)^m$; por tanto, $m=-1$ y $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$. **d.** La función $f(x)=2^x$ en base 4, puesto que $f(x)=2^x=\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^x=4^{\frac{1}{2}x}$. $\triangle$	
xvi. Una primera aplicación en la que intervienen las funciones exponenciales en la resolución de ecuaciones, proponga al estudiante la solución de algunas de ellas.	**RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON INCÓGNITA EN EL EXPONENTE** La relación $a^x=m$, en la que x es la incógnita (se interpreta como: ¿a qué exponente x debe elevarse el número a para obtener el número m?, y se denomina “ecuación exponencial”. Resolver una ecuación exponencial significa determinar el valor de x (si es que existe) en $a^x=m$ (este tipo de ecuaciones fundamenta la necesidad de definir una nueva familia de funciones, las funciones logarítmicas, que trataremos en la próxima sección). **ACTIVIDAD III.8** (SOLUCIÓN DE ECUACIONES EXPONENCIALES) **a.** La solución de ecuación $2^{x-1}=16$ es $x=5$, puesto que $2^{5-1}=2^4=16$. **b.** Para resolver $3(4)^{2x+1}=192$ observe que $4^{2x+1}=64$ o $4^{2x+1}=4^3$; por tanto, $2x+1=3$ y $x=1$ (los exponentes son iguales, dado que las bases son iguales). **c.** Para resolver la ecuación $2\left(\frac{1}{5}\right)^{4-x}=50$, notemos que $\left(\frac{1}{5}\right)^{4-x}=25$, por las leyes de los exponentes obtenemos $5^{x-4}=25$ o $5^{x-4}=5^2$, de donde, $x-4=2$, y $x=6$. **d.** La ecuación $16^{x-2}=32^{x+2}$ es equivalente a la ecuación $\left(2^4\right)^{x-2}=\left(2^5\right)^{x+2}$, por tanto $2^{4x-8}=2^{5x+10}$, de donde, $4x-8=5x+10$, así $x=-18$. **e.** La ecuación $2^{x^2+4x}=\frac{1}{8}$ es equivalente a $2^{x^2+4x}=2^{-3}$, entonces $x^2+4x=-3$, luego $x^2+4x+3=0$, así, las soluciones son $x_1=-3$ y $x_2=-1$. **f.** La ecuación $64^{8-x^2}=16^{3x+4}$ es equivalente a la $\left(4^3\right)^{8-x^2}=\left(4^2\right)^{3x+4}$, entonces $4^{24-3x^2}=4^{6x+8}$, por tanto; $3x^2+6x-16=0$, y $x_1=\frac{-6+\sqrt{228}}{6}$ y $x_2=\frac{-6-\sqrt{228}}{6}$. $\triangle$	

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
	Ahora revisaremos el papel que desempeña el signo del parámetro k en la función $f(x)=a^{-kx}$, suponiendo que $a>1$?, así como algunas de las aplicaciones de las funciones exponenciales.	
xvii. Establezca la equivalencia de las funciones: $f(x)=a^{kx}$ con $a>1$ y $k>0$ y $f(x)=a^{kx}$ con $0<a<1$ y $k<0$.	Antes mencionamos que la curva asociada a la función $f(x)=a^{kx}$ con $a>1$ y $k>0$ es creciente sobre todo su dominio, y que es decreciente si $a<1$, vea la *figura III.9*.  **FIGURA III.9**	**9.** El concepto de función creciente (o decreciente) no ha sido tratado antes, refiérase a él intuitivamente.
	Sí cierta situación o problema se modela mediante la función $f(x)=a^{kx}$ con $a>1$ y $k>0$, se dice que corresponde a un problema de crecimiento exponencial, similarmente, cuando alguna situación tiene como modelo la función $f(x)=a^{kx}$, con $a>1$ y $k<0$, pertenece a un problema de decaimiento exponencial.	
xviii. Defina modelos de crecimiento y decaimiento exponencial.	**DEFINICIÓN III.3** (CRECIMIENTO Y DECAIMIENTO EXPONENCIAL) Cualquier problema cuyo modelo sea la función $f(x)=Da^{kx}$ (con $a>1$) y: **a.** Sí $k>0$, corresponde a un problema de crecimiento exponencial. **b.** Sí $k<0$, corresponde a un problema de decaimiento exponencial. **c.** El coeficiente $D=f(0)$ se denomina cantidad o valor inicial.	
xix. Proponga al alumno que identique las características de las funciones exponenciales crecientes y de las funciones exponenciales decrecientes.	**ACTIVIDAD III.9** (IDENTIFICACIÓN DE FUNCIONES EXPONENCIALES) **a.** La función $f(t)=12(2)^{3t}$, es un modelo de crecimiento exponencial, tiene cantidad inicial $D=12$. **b.** La función $f(t)=8(3)^{-\frac{1}{2}t}$ es un modelo de decaimiento exponencial (puesto que $k=-\frac{1}{2}$) y tiene cantidad inicial $D=8$. **c.** La función $f(t)=\frac{1}{5}(4)^{\frac{1}{8}t}$ es un modelo de crecimiento exponencial, la constante $k=\frac{1}{8}$ es positiva, su cantidad o valor inicial es $D=\frac{1}{5}$. △	
xx. Proponga actividades diversas relacionadas con aplicaciones de las funciones exponenciales.	**ACTIVIDAD III.10** (CRECIMIENTOS) **a.** CRECIMIENTO DE BACTERIAS Supongamos que el número de bacterias en un cultivo se obtiene con el modelo $f(t)=D2^{k\cdot t}$, donde t representa el número de horas. Sí se sabe que al transcurrir 4 horas, el cultivo tiene $\sqrt[8]{2}D=2^{\frac{1}{8}}D$ bacterias:	

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
	i. Para determinar k, notemos que en $t=4$ horas existen $2^{\frac{1}{8}}D$ bacterias y además que $f(4)=(D)2^{4\cdot k}$, entonces $(D)2^{4\cdot k}=2^{\frac{1}{8}}(D)$, así, $2^{\frac{1}{8}}=2^{4k}$; por tanto, $\frac{1}{8}=4k$ o $k=\frac{1}{32}$. **ii.** Por consiguiente, si sustituimos $k=\frac{1}{32}$ en la función $f(t)=D\left(2^{k\cdot t}\right)$ obtenemos $f(t)=\frac{1}{32}(2)^{\frac{t}{32}}$. **b.** CRECIMIENTO DE UNA POBLACIÓN En 1980 la India tenía 651 millones. La población ha estado creciendo a una tasa fija de 2% anual. La población de la India $N(t)$, t años más tarde puede aproximarse por la función $N(t)=651e^{0.02t}$. Suponga que la tasa de crecimiento es continua. La población de la India $N(t)=651e^{0.02t}$ $t=30$ años después es $N(30)=651e^{0.02\cdot 30}=651e^{0.60}=1186$, aproximadamente 1186 millones. Note que el número de pobladores es una variable discreta, sin embargo ha sido descrita utilizando un modelo continuo. $\triangle$ **ACTIVIDAD III.11** (DEPRECIACIÓN DE UN AUTOMÓVIL) El precio actual de un automóvil es $\$150000$. El automóvil se deprecia 12% durante cada uno de los 5 primeros años de uso, entonces al primer año su valor es $\$150000(0.88)$ pesos, , al segundo año tendrá un valor de $\$150\,000(0.88)(0.88)=\$150\,000(0.88)^2$ pesos. Así, la función que describe el valor del automóvil en el año n es $V(t)=150{,}000(0.88)^t$ pesos. En $t=5$ años, su valor es $V(5)=150{,}000(0.88)^5=79\,160$ pesos. $\triangle$ **ACTIVIDAD III.12** (DECAIMIENTO RADIACTIVO) La vida media de una sustancia radiactiva, se define como el tiempo que transcurre en desintegrarse la mitad de la sustancia como resultado de su decaimiento. La función, en términos del tiempo t, para calcular la vida media de una sustancia radiactiva es $Q(t)=Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$, donde Q es la cantidad de sustancia radiactiva existente en el tiempo t, Q_0 es su cantidad inicial y h representa la vida media. Si el Bario 140 tiene una vida media de 13 días, e inicialmente se cuenta con 500 miligramos: **i.** Calculemos la cantidad, en miligramos, de Bario una vez que han transcurrido 26 días. Inicialmente, la cantidad en miligramos de Bario es $Q_0=500$, la vida media del Bario es $h=13$. A los $t=26$ días, $Q(26)=500\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{26}{13}}=500\left(\frac{1}{2}\right)^2=125$, es decir, quedan 125 miligramos de Bario. **ii.** Para determinar la cantidad, en miligramos, de Bario después de 100 días se toma en cuenta que: inicialmente $Q_0=500$, que la vida media del Bario es de	**10.** La cantidad de bacterias es discreta, ¿qué opina sobre el modelo continuo utilizado en su modelación?

<table>
<tr><th>Observaciones y sugerencias</th><th>Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo</th><th>Dificultades y soluciones</th></tr>
<tr><td></td><td>

$h = 13$ días y que $t = 100$, por consiguiente $Q\left(100\right) = 500\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100}{13}} = 2.4$, es decir, después de 100 días quedan 2.4 miligramos de Bario.

△

ACTIVIDAD III.13 (INTERÉS COMPUESTO)

El monto final de una inversión se calcula con la función $S\left(n\right) = P\left(1+r\right)^n$, P es el capital inicial, r es la tasa de inversión y n el número de periodos.

a. Para calcular el monto acumulado por un principal de $\$7\,500$ durante 8 años al 8% de interés, capitalizado semestralmente, debemos tener en cuenta que el número de semestres (periodos) en 8 años es 16, por tanto,

$$S = 7\,500\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^{16} \approx 14{,}047 \text{ pesos.}$$

b. Para determinar el monto final acumulado por $\$12\,000$, durante 10 años al 10% capitalizado trimestralmente, se toma en cuenta que el número de trimestres en 10 años es 40, por tanto, $S = 12{,}000\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{40} \approx 26496$ pesos.

△

ACTIVIDAD III.14 (ENFRIAMIENTO)

Cuando la diferencia entre la temperatura de un cuerpo (que se encuentra a una temperatura inicial T_0) y la temperatura del medio que lo contiene (que tiene temperatura fija T_m mayor a T_0) no es demasiado grande, la rapidez con que el cuerpo se enfría (cambia su temperatura), es proporcional a la diferencia de la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio ambiente. La solución del modelo correspondiente conduce a la función $T\left(t\right) = T_m + \left(T_0 - T_m\right)e^{-kt}$ con la condición $t \geq 0$.

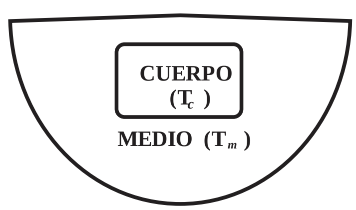


FIGURA III.10

△

</td><td></td></tr>
</table>

Ejercicios y actividades adicionales

Con el propósito de reforzar los aprendizajes alcanzados por los estudiantes, UD. puede implementar en el desarrollo de sus clases algunos de los siguientes ejercicios o actividades.

1. El número de bacterias, en un cultivo se reproduce en forma exponencial y está dado por la función $f(t)=600(3)^t$, en la que t representa el tiempo transcurrido en horas, después de las $7:00$ en que se hizo la primera observación. De acuerdo con lo anterior complete la tabla y trace el la curva asociada que corresponde.

t	0	1	2	3	4	5
Número de bacterias						

2. Si un principal P se invierte al 6% anual, el monto alcanzado después de x años se calcula utilizando la función $S=P(1.06)^t$, en donde S es el capital final y t el tiempo transcurrido (en años). Si el principal P inicial es $\$1000$, complete la tabla y dibuje la curva correspondiente.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
S									

3. Un medicamento se elimina mediante la orina, su dosis inicial es 50 miligramos. Si t representa el número de horas transcurridas después de la ingestión del medicamento. La cantidad de medicamento presente en el cuerpo se obtiene mediante la función $f(t)=50(0.9)^t$. Complete la tabla y dibuje la gráfica correspondiente.

t	0	1	2	4	6	8	10	15	18
D									

4. En una reserva ecológica se introducen 50 zánganos, mismos que se reproducen exponencialmente de acuerdo a la función $f(t)=50(1.2)^t$, donde t es el número de años transcurridos desde que se inicia la actividad. Determine el número de zánganos que habrá después de 3, 5 y 10 años. Represente el crecimiento de la población por medio de una tabla y luego gráficamente.

5. De una lámina cuadrada de longitud de lado 1, se cortarán tantos cuadriláteros como se desee, suponga que la base del cuadrilátero que se corta tiene base igual a la mitad del cuadrilátero previo. Determine la función que describe el área del cuadrilátero n.

6. Con un segmento de recta de longitud l se efectúa el siguiente proceso: Se divide en tres segmentos congruentes, se elimina la parte central, y se remplaza la parte central eliminada con dos segmentos de recta congruentes de forma que dos extremos coincidan y los otros dos extremos coincidan con los extremos (internos) de los segmentos no eliminados. Determine la función que describe el perímetro después que el proceso se ha efectuado n veces.

7. Una población de 5000 insectos crece a una razón de 1% diario.

a. Determine el modelo que describe el número de insectos después de t días.

b. Determine el número de insectos a los 10 días (redondee su resultado al entero más cercano).

8. Una población de microbios se duplica cada minuto, determine la función que describe la cantidad de microbios después de n minutos.

9. Una máquina ocupa una cantidad específica de materia, de forma que la materia se reduce a la cuarta parte cada hora, determine la función que describe la cantidad de materia disponible después de n horas.

10. El precio inicial de una máquina para cosechar trigo es $\$650\,000$. Si esta máquina se deprecia 6% anualmente.

a. Obtenga una expresión para calcular el precio de la máquina después de x años.

b. Elabore una tabla de precios para los primeros 10 años de uso de la máquina.

c. Represente gráficamente el proceso de devaluación de la máquina.

11. De un elemento radiactivo quedan Q gramos después de t días, suponga que $Q=20e^{-0.208t}$.

a. ¿Cuál es la cantidad inicial del elemento radiactivo?

b. ¿Cuántos gramos quedan del elemento a los 15 días?

c. ¿Cuántos días deben transcurrir para que quede la mitad del elemento radiactivo?

12. Una cierta sustancia radiactiva se redujo a la mitad en 10 años. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que solo quede el 10 por ciento de un gramo?

13. ¿Cuáles de las siguientes relaciones representan funciones exponenciales definidas sobre los números reales? Justifique su respuesta.

a. $f(x)=8^x$. **b.** $g(x)=(-2)^x$. **c.** $k(x)=\left(\frac{7}{4}\right)^{-x}$. **d.** $m(x)=\left(3^{-2}\right)^{-x}$.

e. $h(x)=6^{-x}$. **f.** $j(x)=\left(-\frac{2}{5}\right)^{-x}$. **g.** $n(x)=(-4)^{-x}$. **h.** $p(x)=-4^{-x}$.

14. Rescriba las funciones de forma que el exponente sea positivo. Trace la curva correspondiente, determine el dominio y el rango (recorrido).

a. $f(x)=(3.2)^{-x}$. **b.** $g(x)=0.9^{-x}$. **c.** $h(x)=4^{-x}$. **d.** $i(x)=6(100)^{-x}$.

e. $b(x)=0.9^{-x}$. **f.** $c(x)=(0.4)^{-x}$. **g.** $d(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^{-x}$. **h.** $e(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$.

i. $k(x)=-3(9)^{-x}$. **j.** $f(x)=\left(\frac{4}{9}\right)^{-x}$.

15. Determine el dominio, el conjunto imagen y trace la curva asociada.

a. $f(x)=\frac{3}{20}(3)^{x-5}+4$. **b.** $g(x)=-4^{x+3}-18$. **c.** $f(x)=-\frac{2}{5}(3)^{x-1}-5$. **d.** $m(x)=5(6)^{x+1}+40$.

e. $f(x)=-\frac{1}{5}(3)^{x-2}+24$. **f.** $g(x)=-2(3)^{x+\frac{1}{2}}-1$. **g.** $h(x)=\frac{2}{5}(3)^{x-\frac{2}{3}}-2$. **h.** $a(x)=-5(8)^{x+4}+4$.

16. Determine el dominio, el conjunto imagen y trace la curva.

a. $g(x)=2e^{x+3}-1$. **b.** $h(x)=\frac{8}{15}e^{x-1}+7$. **c.** $i(x)=-6e^{x-10}-31$. **d.** $j(x)=\frac{13}{9}e^{x-10}+15$.

e. $s(x)=8e^{-x}+5$. **f.** $t(x)=2e^{-x+12}+2$. **g.** $v(x)=-e^{-x}+5$. **h.** $w(x)=-4e^{-x+12}$.

17. ¿Cómo obtendría la curva asociada a $f(x)=a^x$ a partir de la curva asociada a $f(x)=a^{-x}$? Explique.

18. Describa cómo obtener la curva asociada a g utilizando la curva de f.

a. $f(x)=2^x$, $g(x)=2^{x-3}+1$. **b.** $f(x)=3^x$, $g(x)=\frac{1}{2}\cdot 3^{x+1}+1$. **c.** $f(x)=4^x$, $g(x)=-4^{x+2}-2$.

d. $f(x)=10^x$, $g(x)=\frac{1}{100}\cdot 10^{-x-1}+4$. **e.** $f(x)=e^x$, $g(x)=3e^{x+2}-2$.

19. Determine la regla de correspondencia de la función exponencial que satisface las condiciones:

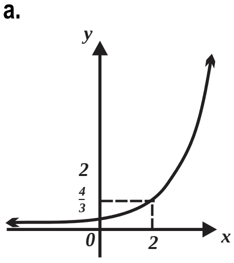
a. Interseque al eje de las ordenadas en $I_y\left(0\ ,\ \frac{1}{2}\right)$, tenga como asíntota horizontal a la recta de ecuación $y=0$ y contenga al punto $p(2\ ,8)$.

b. Interseque al eje de las ordenadas en $I_y(0\ ,\ 5)$, tenga como asíntota horizontal a la recta de ecuación $y=1$ y contenga al punto $p(1\ ,\ 13)$.

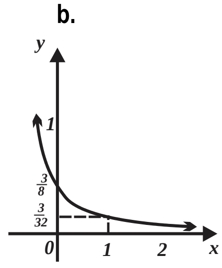
c. Tiene como asíntota horizontal la recta de ecuación $y=3$ y contiene a los puntos $I_y(0\ ,\ 6)$ y $J(1\ ,\ 12)$,

20. Determine la ("mejor") regla de correspondencia para la curva exponencial de la figura.

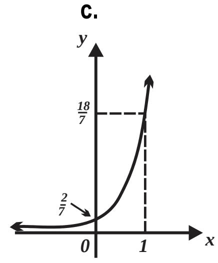
a.



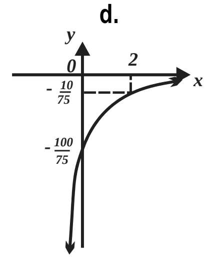
b.



c.



d.



21. Determine los pares de funciones exponenciales, que tienen asociada la misma curva.

a. $f(x)=3^{2x-4}$, $g(x)=3^{2x}+4$ y $h(x)=9^{x-2}$. **b.** $f(x)=4^{3x-2}$, $g(x)=2\left(2^{3x-2}\right)$ y $h(x)=2^{3x-1}$.

22. Resuelva:

a. $3^{x+3}=81$. **b.** $4^{x-3}=64^{x+3}$. **c.** $3^{x^2+1}=243$. **d.** $2^{1-x^2+3x}=\frac{1}{8}$. **e.** $4^{x^2+7x}=64^{x-1}$.

f. $2^{2x-1}=8$. **g.** $2^{1-x^2}=\frac{1}{8}$. **h.** $4^{x+1}+2^{x+3}=320$. **i.** $2^{x+1}+2^{x}+2^{x-1}=28$.

23. Identifique si la función es una función de crecimiento o una función de decaimiento exponencial y determine: el valor inicial, y la constante de crecimiento o decrecimiento.

a. $f(x)=3\cdot 2^{-x}$. **b.** $g(x)=\frac{1}{2}\cdot 0.9^{-x}$. **c.** $h(x)=5\cdot 4^{-2x}$. **d.** $a(x)=4\left(\frac{2}{7}\right)^{4x}$.

e. $g(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{-2x}$. **f.** $f(x)=3\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{5}x}$. **g.** $m(x)=6\left(\frac{4}{5}\right)^{-x}$. **h.** $f(x)=2(1.4)^{x}$.

24. Determine la regla de correspondencia de la función exponencial que satisface las condiciones indicadas.

a. Valor inicial 3, constante de decrecimiento 3 y base 0.2.

b. Valor inicial $\frac{3}{7}$, constante de crecimiento 0.2 y base 3.

c. Valor inicial 6, constante de crecimiento 4 y base 7.

d. Valor inicial $\frac{5}{3}$, constante de decrecimiento y base 0.5.

25. Si dentro de t años la población de cierta región será de $p(t)=50e^{0.02\cdot t}$ millones.

a. ¿Cuál es la población actual?

b. ¿Cuál será la población dentro de 20 años?

26. En 1985 el gobierno del Estado de Chihuahua implementó un programa para la protección del borrego cimarrón, con el cual se pretendió incrementar la población de estos animales de acuerdo a la función $N(t)=200(1.3)^{t}$. Donde $N(t)$ es el número de borregos cimarrones después de t años. En 1985 había 200 borregos cimarrrones. Estime el número de borregos cimarrones en el año:

a. 2000. **b.** 2010. **c.** 2013. **d.** 2017. **e.** 2022.

27. Se estima que la población de un país ha crecido exponencialmente. Si en este país había una población de 60 millones en el año 2000 y de 90 millones en el año 2010, ¿cuál será la población en el año 2015?

28. El número de hamburguesas vendidas por una cadena de comida rápida creció exponencialmente. Si se vendieron 4 millones en 2008 y 9 millones en 2014, ¿cuántas hamburguesas se vendieron en 2010?

29. Suponga que el crecimiento de cierta clase de bacterias sigue una ley exponencial y que el número de bacterias t horas después de las $7:00$ horas está dado por la función $n(t)=600(3)^{\frac{1}{2}t}$.

a. Calcule el número de bacterias a las $8:00$ $A.M.$, a las $10:00$ $A.M.$ y a las $12:00$ $A.M.$

b. Trace la curva asociada desde $t=0$ hasta $t=5$.

30. En 1975 la población mundial era alrededor de 4000 millones de personas y esta población aumentaba alrededor del 2% anual. Suponga que el incremento de la población obedece a la función $P(t)=4(1.02)^{t}$, en la que P representa el número de personas en miles de millones y t los años después de 1975.

a. ¿Cuál será la población en los años 2024 y 2050?

b. Investigue la población actual del planeta y compare ese dato con el obtenido en el problema.

31. El isótopo radiactivo ^{210}Bi tiene una vida media de 5 días. Si existen 100 miligramos de esta sustancia en el instante $t=0$, entonces la cantidad restante de ^{210}Bi en el instante t está dado por la función $f(t)=100(2)^{-\frac{1}{5}t}$.

a. ¿Qué cantidad de ^{210}Bi resta después de 5 días?

b. ¿Después de 10 días?
c. ¿Después de 20.5 días?
d. Trace la gráfica de f desde $t=0$ hasta $t=30$.

32. Una sustancia radioactiva tiene una vida media de 90 minutos.
a. ¿Qué parte de la cantidad inicial de sustancia quedará después de 2 horas?
b. ¿Después de 3 horas?

33. Si 25 gramos de azúcar se añaden a cierta cantidad de agua, la cantidad de azúcar $Q(t)$ que no se disuelve después de t minutos se calcula con la función $Q(t)=25(0.8)^t$. Trace una gráfica que muestre $Q(t)$ en cualquier momento desde $t=0$ hasta $t=30$.

34. Suponga que el porcentaje de inflación es de 9% anual y que la relación $P(t)=P_0(1.09)^t$ proporciona el precio de un artículo que actualmente cuesta P_0 después de t años. Calcule el precio esperado para cada uno de los artículos indicados después del periodo señalado.
a. Un kilogramo con costo de café de $\$65.00$ después de 3 años.
b. Una lata de chiles con costo de $\$7.50$ a los 5 años.
c. Un frasco de mermelada de $\$20.50$ a los 10 años.
d. Un comedor con costo de $\$75000.00$ en 2 años.
e. Un motor con costo de $\$6300.00$ después de 6 años.

SECCIÓN III.2	LA FUNCIÓN LOGARITMO

APRENDIZAJES Y CONTENIDOS TEMÁTICOS

SECCIÓN	APRENDIZAJES	CONTENIDOS TEMÁTICOS
III.2	**Apr.6** Verificará mediante gráficas o tablas que la función logarítmica es la función inversa de la exponencial. Expresa verbalmente las relaciones: $y(x)=a^x \Leftrightarrow x(y)=log_a y$. **Apr.7** Graficará funciones logarítmicas e identificará su dominio y rango.	La función logaritmo como inversa de la función exponencial. Definición, gráfica, dominio y rango. Situaciones que involucren variación de tipo logarítmico.

CONCEPTOS CLAVE

Los siguientes conceptos son fundamentales para un buen desarrollo del curso:

i. Función invertible, función inversa.
ii. Función logarítmica.
iii. Base, base natural (el número e).

TIEMPO ESTIMADO

En situaciones regulares se invierten 4 horas para el desarrollo de los aprendizajes antes señalados.

PROCESOS Y ALGORITMOS BÁSICOS

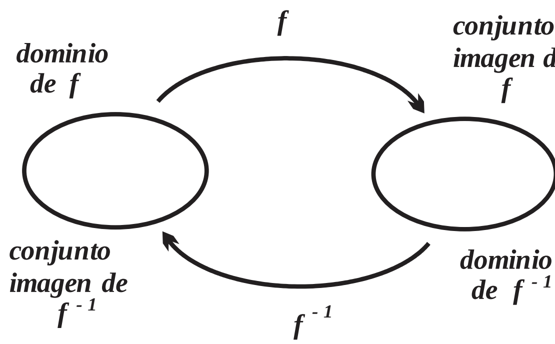
El alumno debe utilizar y manejar los procesos de:

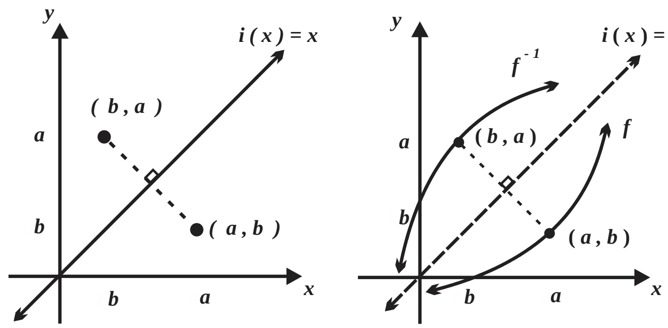
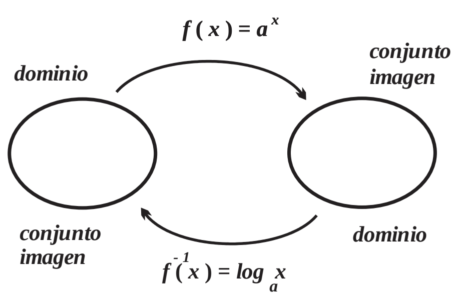
i. Trazo de la curva asociada a una función a partir de la curva asociada a la función inversa.

DESARROLLO

Estrategias didácticas, actividades de enseñanza aprendizaje, materiales de apoyo, identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución.

Observaciones y sugerencias	**Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo**	**Dificultades y soluciones**
i. Proponga al estudiante que obtenga la solución de ecuacines de la forma $a^x = y_0$. Interprete $a^x = y_0$ en términos de la base y el número y_0.	La ecuación $a^x = y_0$, con incógnita x, se interpreta: "el exponente al que debe elevarse el número a para obtener el número y_0". Al relacionar este hecho con las funciones, parte de nuestro propósito consiste en construir una función que "opere en forma inversa a la función exponencial", es decir, construir una función cuyo conjunto imagen esté constituido por los exponentes a los que se debe elevar la base para obtener números específicos, revisemos la *actividad III.15*. **ACTIVIDAD III.16** (DETERMINACIÓN DE EXPONENTES) **a.** Si $3^{y_0} = 1$, entonces " $y_0 = 0$ es el número al que se debe elevar el número 3 para obtener 1, luego 0 pertenece al conjunto imagen de la función. **b.** Si $3^{y_0} = 9$, entonces $y_0 = 2$ es el número al que se debe elevar el número 3 para obtener 9, luego 2 pertenece al conjunto imagen de la función. **c.** Si $3^{y_0} = 81$, entonces $y_0 = 4$ es el número al que se debe elevar el número 3 para obtener 81, luego 4 pertenece al conjunto imagen de la función. **d.** Si $3^{y_0} = \frac{1}{9}$, entonces $y_0 = -2$ es el número al que se debe elevar el número 3 para obtener $\frac{1}{9}$, luego -2 pertenece al conjunto imagen de la función. **e.** Si $3^{y_0} = x_0$, entonces y_0 es el número que se obtiene al elevar el número 3 para obtener x_0, luego x_0 pertenece al conjunto imagen de la función. △	**1.** La base de $a^x = y_0$ no puede ser negativa, insista en esto. **2.** La base en $a^x = y_0$ resulta irrelevante cuando es uno, insista en esto.
ii. Generalice las observaciones de la actividad III.15 y haga ver que existe una notación específica en relación a la lectura anterior.	A continuación generalizamos las observaciones de la *actividad III.15.* Sí $a^{x_0} = y_0$, entonces x_0 es el número al que ha de "elevarse" la base " a " para "obtener" el número y_0. La notación formal que utilizaremos para referirnos a este hecho es $log_a y_0 = x_0$; por tanto, la expresión $log_a y_0 = x_0$ es equivalente a $a^{x_0} = y_0$. En el contexto de las funciones, $y(x) = a^x$ es equivalente a $x = log_a y(x)$. Así $y = a^x \Leftrightarrow x = log_a y$.	
iii. Proponga al alumno actividades para que transite entre las formas $y = a^x$ y $x = log_a y$.	**ACTIVIDAD III.16** (TRÁNSITO ENTRE LAS FORMAS $y = a^x$ y $x = log_a y$) **a.** Si $3^4 = 81$, entonces $4 = log_3 81$ y viceversa, si $log_3 81 = 4$, entonces $3^4 = 81$. **b.** Si $5^3 = 125$, entonces $3 = log_5 125$ y viceversa, si $log_5 125 = 3$, entonces $5^3 = 125$. **c.** Si $10^{-2} = \frac{1}{100}$, entonces $-2 = log_{10} \frac{1}{100}$ y viceversa, si $log_{10} \frac{1}{100} = -2$, entonces $10^{-2} = \frac{1}{100}$. **d.** La expresión $4^3 = 64$ en forma "logarítmica es $log_4 64 = 3$. **e.** La expresión $6^2 = 36$ en forma "logarítmica es $log_6 36 = 2$. **f.** La expresión $10^{-3} = \frac{1}{1000}$ en forma "logarítmica es $log_{10} \frac{1}{1000} = -3$. △ La construcción de la "función logaritmo" requiere del estudio y conocimiento de "función inversa".	**3.** El tránsito entre las formas $y = a^x$ y $x = log_a y$ es complicado para el estudiante cuando la base es un número racional. Insista en el uso de las propiedades de los exponentes.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
iv. Introduzca los conceptos de función invertible y de función inversa, utilice figuras adecuadas. **v.** Considere la relación existente entre los puntos de las curvas de dos funciones inversas relativas y trace la curva asociada a la función inversa considerando que conoce la curva asociada a la función.	Para indicar que la función f tiene como dominio el conjunto $dom(f)$ y conjuno imagen (rango o recorrido) el conjunto $img(f)$, se utiliza la notación $f:dom(f)\rightarrow img(f)$. Bajo ciertas condiciones es posible construir una nueva función (a partir de f) intercambiando los conjuntos $dom(f)$ e $img(f)$, ésta nueva función se representa por f^{-1} y se denomina "función inversa de f", vea la *figura III.11*.  **FIGURA III.11** Así, cuando sea posible construir la función f^{-1} a partir de la función f mediante el proceso antes descrito, diremos que f es invertible y su inversa es f^{-1}, y viceversa, que f^{-1} es invertible y su inversa es f. $f : dom(f) \longrightarrow img(f) \qquad f^{-1} : img(f) \longrightarrow dom(f)$ **FIGURA III.12** **DEFINICIÓN III.4** (FUNCIÓN INVERSA) **a.** Si f y g son funciones tales que: $f(g(x))=x$ para toda x en el dominio de g y $g(f(x))=x$ para toda x en el dominio de f, entonces se denominan invertibles. **b.** La función g es la inversa de la función f y se representa por f^{-1}. **c.** La función f es la inversa de la función g y se representa por g^{-1}. Con la curva asociada a la función f (bajo la suposición de que es invertible), se puede trazar la curva asociada a f^{-1}. Si el punto (a,b) pertenece a la curva asociada a f, entonces el punto (b,a) pertenece a la curva asociada a f^{-1}. Tal como lo muestra la *figura III.13*, el punto (b,a) es la "reflexión" del punto (a,b) respecto a la línea recta de ecuación $i(x)=x$. Generalizando esta observación, se sigue que la curva asociada a la función f^{-1} es el reflejo de la curva de f respecto a la recta de ecuación $i(x)=x$. Recíprocamente, la curva asociada a la función f es el reflejo de la curva asociada a f^{-1} respecto a la línea recta asociada a $i(x)=x$.	**4.** Trate de manera gráfica e intuitiva el concepto de función inversa, en este momento, los alumnos no tienen los elementos teóricos para hacer un estudio formal de la función inversa. **5.** El uso de esquemas puede facilitar la compresión del concepto de funciones invertibles. **6.** Debe tener en cuenta que, en el proceso de inversión de funciones intervienen dos funciones, y que, la función inversa asociada a una función es única.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
vi. Haga notar al estudiante, que la función exponencial satisface las condiciones de las funciones invertibles, y que por tanto, tiene inversa, defina la función inversa que le corresponde.	 **FIGURA III.13** No todas las funciones son invertibles, para que una función *(continua) lo* sea, es necesario que sobre su dominio, *sea estrictamente creciente* (esto significa que: si incrementamos el valor de las asignaciones a la variable independiente, entonces, se incrementan las imágenes correspondientes) o sea *estrictamente decreciente* (es decir, si incrementamos el valor de las asignaciones a la variable independiente, entonces, disminuyen los valores de las imágenes correspondientes). En particular, la función $y\left(x\right)=a^{x}$ (siempre que $a>1$ y $a\neq1$), es creciente (o decreciente en caso de que $0<a<1$) , en consecuencia, es invertible. **DEFINICIÓN III.5** (FUNCIÓN LOGARITMO DE BASE ***a***) **a.** Sean: $x>0$, $a>0$ y $a\neq1$, entonces $f\left(x\right)=log_{a}x$ si y sólo si $x=a^{f\left(x\right)}$. **b.** La función $f\left(x\right)=log_{a}x$ se denomina función logaritmo con base a . **c.** $f\left(x\right)=log_{a}x$ se lee "logaritmo base a de x" y es la función inversa de $f\left(x\right)=a^{x}$. La *figura III.14* ilustra la relación entre las funciones $f\left(x\right)=log_{a}x$ y $f\left(x\right)=a^{x}$.  **FIGURA III.14** **ACTIVIDAD III.17** (FUNCIONES EXPONENCIALES E INVERSAS) **a.** Si $f\left(x\right)=2^{x}$, entonces $f^{-1}\left(x\right)=log_{2}x$, $dom\left(log_{2}x\right)=\left(0,+\infty\right)$ e $img\left(log_{2}x\right)=\left(-\infty,+\infty\right)$. **b.** Si $f\left(x\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^{x}$, entonces $f^{-1}\left(x\right)=log_{\frac{2}{5}}x$, $dom\left(log_{\frac{2}{5}}x\right)=\left(0,+\infty\right)$ e	**7.** Con un compás puede efectuar fácilmente los trazos necesarios para el trazo de la curva de la función inversa a partir de la curva de la función original.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

$img\left(log_{\frac{2}{5}}x\right)=(-\infty,+\infty)$.

c. Si $f(x)=e^x$, entonces $f^{-1}(x)=log_e x$, $dom(log_e x)=(0,+\infty)$ e $img(log_e x)=(-\infty,+\infty)$.

△

Las funciones $f(x)=log_a x$ y $g(x)=a^x$ son inversas entre sí; por tanto, las propiedades mostradas en la *tabla III.7* están justificadas por las propiedades de la función $g(x)=a^x$, que tratamos en la sección anterior.

vii. Propponga al estudiante que construya una tabla en la que compare las propiedades de las de las funciones $f(x)=log_a x$ y $g(x)=a^x$.

FUNCIÓN	$g(x)=a^x$	$f(x)=log_a x$
Dominio	$(-\infty\ ,\ +\infty)$	$(0\ ,\ +\infty)$
Conjunto imagen (o rango)	$(0\ ,\ +\infty)$	$(-\infty\ ,\ +\infty)$
Asíntotas	el eje x	el eje y
Intersecciones con los ejes coordenados	$I_y(0\ ,\ 1)$	$I_x(1\ ,\ 0)$
Creciente	$a>1$	$a>1$
Decreciente	$0<a<1$	$0<a<1$
Curva asociada	suave y continua	suave y continua

TABLA III.7

Las propiedades de la función $g(x)=a^x$ presentes en la *tabla III.7* y el hecho de ser la inversa de la función $f(x)=log_a x$, garantizan que el comportamiento de la curva asociada a éta última es como lo muestra la *figura III.15*.

viii. Proponga al estudiante el trazo de las curvas asociadas a diversas funciones logarítmicas utilizando el hecho de que son inversas de funciones exponenciales específicas.

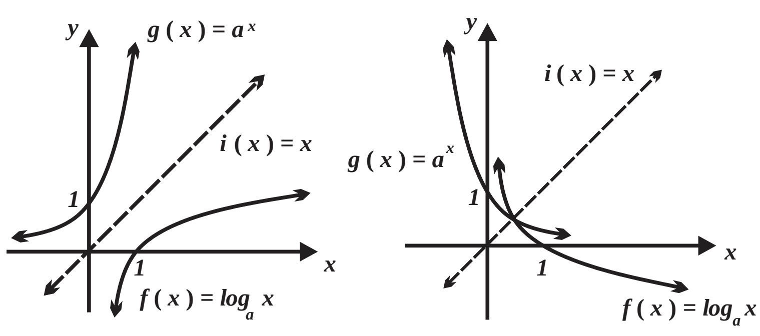


FIGURA III.15

ACTIVIDAD III.18 (TRAZO DE GRÁFICAS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS)
a. Para trazar la curva asociada a $f(x)=log_2 x$ reflejamos la curva asociada a $g(x)=2^x$ respecto a la línea recta de ecuación $i(x)=x$, como lo muestra la *figura III.16*.

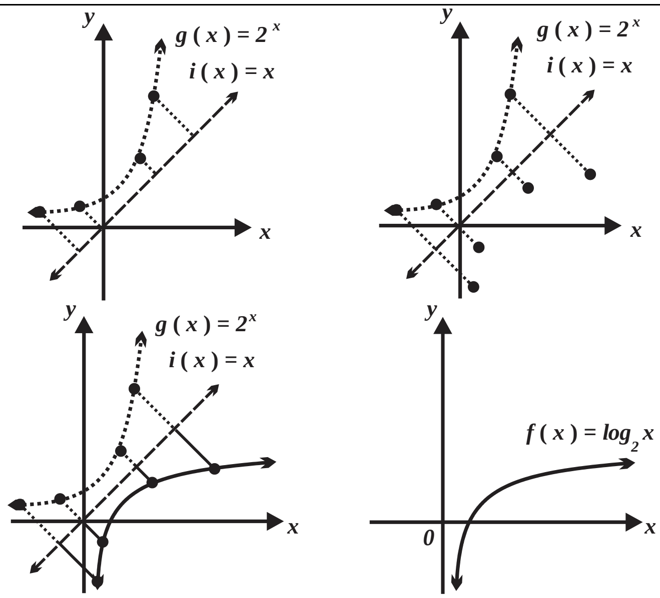
<table>
<tr><th>Observaciones y sugerencias</th><th>Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo</th><th>Dificultades y soluciones</th></tr>
<tr><td>ix. Proponga al estudiante el trazo de la curva asociada de una función logarítmica a partir de la curva asociada a su función inversa.</td><td>


FIGURA III.16

b. Para trazar la curva asociada a $f\left(x \right)= log_{\frac{1}{2}} x$ reflejamos la curva asociada a $g\left(x \right)=2^{-x}$ respecto a la línea recta asociada a $i\left(x \right)=x$, vea la figura III.17.

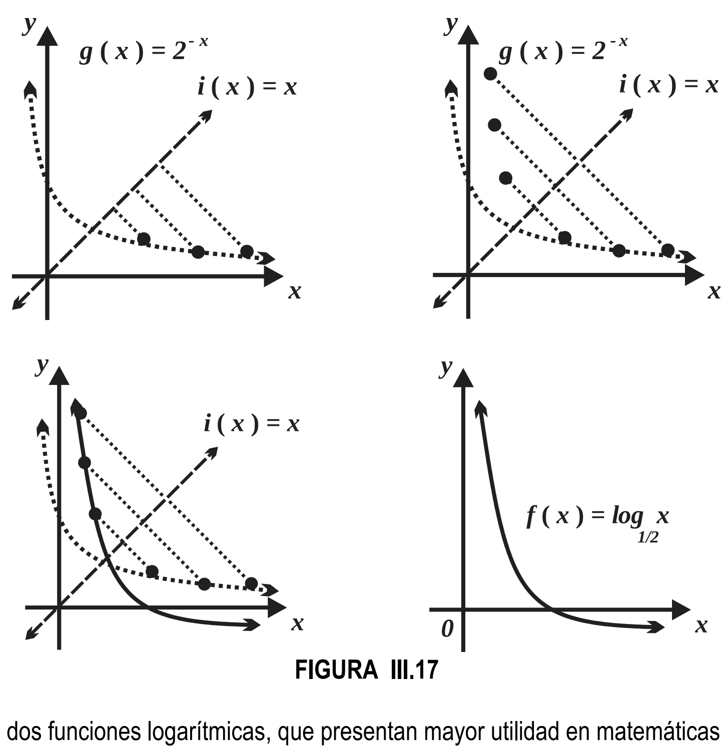
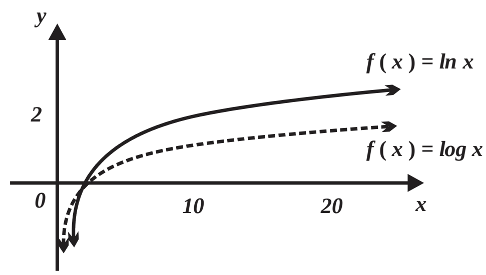


FIGURA III.17

Las dos funciones logarítmicas, que presentan mayor utilidad en matemáticas son las de base e y base 10, por lo que reciben un nombre especial.
</td><td></td></tr>
</table>

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
x. No olvide referirse a las funciones logarítmicas de mayor relevancia.	**DEFINICIÓN III.6** (FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL Y FUNCIÓN LOGARITMO) **a.** Si $a=e$, entonces la función $f(x)=log_e x=ln\ x$ se denomina "función logaritmo natural". **b.** Si $a=10$, entonces la función $f(x)=log_{10} x=log\ x$ se denomina "función logaritmo". La *figura III.18* muestra la curva asociada a cada una de las funciones $f(x)=ln\,x$ y $f(x)=log_{10} x$.  **FIGURA III.18**	

Ejercicios y actividades adicionales

Con el propósito de reforzar los aprendizajes alcanzados por los estudiantes, UD. puede implementar en el desarrollo de sus clases algunos de los siguientes ejercicios o actividades.

1. Rescriba en la forma $x=log_a y$:

a. $y=4^x$. **b.** $y=(2x+3)^x$. **c.** $y=(x-3)^{3x-2}$. **d.** $y=\left(x^2+4\right)^{x+5}$

e. $x+1=\left(x^2+1\right)^{x+2}$. **f.** $2x+7=(1-x)^{4x+2}$.

2. Rescriba en la forma $y=a^x$:

a. $x=log_6 y$. **b.** $3x-2=log_4 y$. **c.** $x-5=log_{(x-4)} y$. **d.** $3x-2=log_{(x-4)} y$.

3. Construya una tabla de valores para f^{-1}, si f es invertible y tiene asignada la tabla dada a continuación.

a.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{1}{160}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{16}{10}$	$\frac{64}{10}$

b.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$

4. Determine la "función exponencial" equivalente (en términos de la función inversa).

a. $f(x)=log_3(x-2)$. **b.** $f(x)=\frac{1}{2}log_2(x-3)$. **c.** $f(x)=log_2(x-1)+2$. **d.** $f(x)=-\frac{1}{3}log_7 x+3$.

e. $f(x)=log_4(x-3)-2$. **f.** $f(x)=log_3(-x)+1$.

5. Exprese en forma exponencial.

a. $y = log_{10} 10000$. **b.** $y = log_5 625$. **c.** $y = log_3 2187$. **d.** $y = log_2 1024$.

e. $y = log_2 \frac{1}{128}$. **f.** $y = log_4 4096$. **g.** $y = log_{10} \frac{1}{1000}$. **h.** $y = log_5 \frac{1}{625}$.

i. $y = log_3 \frac{1}{243}$. **j.** $y = log_4 \frac{1}{256}$.

6. Sin utilizar calculadora obtenga.

a. $log_{10} 10000$. **b.** $log_5 625$. **c.** $log_3 2187$. **d.** $log_4 4096$.

e. $log_2 1024$. **f.** $log_{10} \frac{1}{1000}$. **g.** $log_5 \frac{1}{625}$. **h.** $log_3 \frac{1}{243}$.

7. Rescriba en forma logarítmica.

a. $5^4 = 625$. **b.** $4^3 = 64$. **c.** $10^{-3} = 0.001$. **d.** $12^0 = 1$.

e. $2^6 = 64$. **f.** $10^{-1} = 0.1$. **g.** $y^x = z$. **h.** $v^w = u$.

8. Determine $f^{-1}(x)$ y trace la curva asociada.

a. $f(x) = 9^x$. **b.** $f(x) = (2.2)^x$. **c.** $f(x) = 6^x$. **d.** $f(x) = 7^x$. **e.** $f(x) = (4/5)^x$.

f. $f(x) = -(9)^x$. **g.** $f(x) = -(6)^x$. **h.** $f(x) = (8/3)^x$. **i.** $f(x) = (1/2)^x$. **j.** $f(x) = (1/10)^x$.

9. Suponga que conoce la forma de la curva asociada a $f(x) = log_3 x$. Sin utilizar calculadora, explique cómo trazaría la curva asociada a:

a. $f(x) = log_3(x-2)+1$. **b.** $f(x) = log_3(x-1)+2$. **c.** $f(x) = 4log_3(x-4)+1$. **d.** $f(x) = \frac{2}{5} log_3(x+4)-3$.

e. $f(x) = 3^{x-2} - 1$. **f.** $f(x) = 3^{x-1} + 2$. **g.** $f(x) = (4)3^{x+4} + 1$. **h.** $f(x) = -\left(\frac{3}{4}\right)3^{-x+1} + 2$.

10. Suponga que conoce la forma de la curva asociada a $f(x) = ln\ x$. Sin utilizar un graficador, explique cómo trazaría la curva asociada a:

a. $f(x) = 4ln\ (x-2)$. **b.** $f(x) = \frac{2}{3} ln\ (x+2)$. **c.** $f(x) = \frac{8}{5} ln\ (2-x)+3$. **d.** $f(x) = -2 \cdot ln\ (4-x)$.

e. $f(x) = \frac{8}{5} e^{x+1}$. **f.** $f(x) = -2e^{4-x}$.

11. Suponga que conoce la forma de la curva asociada a $f(x) = e^{-x}$. Sin utilizar calculadora, explique cómo trazaría la curva asociada a:

a. $f(x) = -4ln\ (x-2)$. **b.** $f(x) = -\frac{2}{3} ln\ (x+3)-1$. **c.** $f(x) = \frac{8}{5} ln\ (2-x)+3$. **d.** $f(x) = -2ln\ (4-x)-1$.

12. Trace la curva asociada, determine el dominio y el recorrido.

a. $f(x) = log_3(x-2)$. **b.** $f(x) = log_6(x+2)$. **c.** $f(x) = log_2(x-1)+2$. **d.** $f(x) = \frac{1}{2} log_2(x-3)$.

e. $f(x) = -\frac{1}{3} log_7 x + 3$. **f.** $f(x) = log_4(x-3)-2$. **g.** $f(x) = log_3(-x)+1$. **h.** $f(x) = 4 - log_2(2-x)$.

SECCIÓN III.3	EXPONENTES Y LOGARITMOS

APRENDIZAJES Y CONTENIDOS TEMÁTICOS

SECCIÓN	APRENDIZAJES	CONTENIDOS TEMÁTICOS
III.3	**Apr.8** Operará con logaritmos de distintas bases y aplicará las propiedades de éstos. **Apr.9** Resolverá problemas en diferentes contextos que se modelen con funciones logarítmicas y exponenciales. **Apr.10** Resolverá problemas de aplicación empleando los conocimientos adquiridos anteriormente.	Propiedades de los logaritmos. Cambio de base. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales. Resolución de problemas

CONCEPTOS CLAVE

Los siguientes conceptos son fundamentales para el desarrollo del curso:

i. Base, exponente.
ii. Cambio de base (exponencial y logarítmico).

TIEMPO ESTIMADO

En situaciones regulares se invierten 7 horas para el desarrollo de los aprendizajes antes señalados.

PROCESOS Y ALGORITMOS BÁSICOS

El alumno debe utilizar y manejar los procesos de:
i. Aplicación de las propiedades de los exponentes y de los logaritmos.
ii. Cambio de base.
iii. Simplificación de expresiones que contienen exponentes y logaritmos.

DESARROLLO

Estrategias didácticas, actividades de enseñanza aprendizaje, materiales de apoyo, identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución.

Observaciones y sugerencias	**Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo**	**Dificultades y soluciones**
i. Señale la utilidad de los logaritmos.	Los logaritmos (interpretados como imágenes de números no negativos bajo la función $g(x)=log_a x$), independientemente de la base elegida, satisfacen un conjunto de propiedades que son útiles (entre otras cosas) en la simplificación de las operaciones aritméticas. En particular, utilizando logaritmos es posible escribir productos como sumas, potencias como productos, raíces como productos, etc.	**1.** Tenga en cuenta que el programa de la asignatura no incluye las propiedades de los exponentes, previamente solicite al estudiante que las investigue o que las recuerde.
ii. Junto con los estudiantes deduzca algunas de las propiedades de los logaritmos.	Asignemos a la variable x de la función $y=log_a x$ los valores no negativos m y n, y denotemos por y y z las imágenes correspondientes, es decir, $y=log_a m$ y $z=log_a n$. Note que estas expresiones son equivalentes a $a^y=m$ y $a^z=n$. **i.** Su producto es $a^y.a^z=m\cdot n$, es decir, $m\cdot n=a^{y+z}$, expresión que en forma logarítmica equivale a $log_a(m\cdot n)=y+z$. De: $y=log_a m$, $z=log_a n$ y $log_a(m\cdot n)=y+z$, obtenemos $$log_a(m\cdot n)=log_a(m)+log_a(n).$$ **ii.** Su división es $\frac{a^y}{a^z}=\frac{m}{n}$, es decir, $a^{y-z}=\frac{m}{n}$, expresión que en forma logarítmica equivale a $y-z=log_a\left(\frac{m}{n}\right)$. De $y=log_a m$, $z=log_a n$ y $log_a\left(\frac{m}{n}\right)=y-z$ obtenemos $log_a\left(\frac{m}{n}\right)=log_a(m)-log_a(n)$. **iii.** Si en $log_a(mn)=log_a(m)+log_a(n)$, $m=n$, entonces $log_a(m\cdot m)=log_a(m)+log_a(m)$ o bien $log_a\left(m^2\right)=2log_a(m)$, repitiendo n veces este proceso obtenemos $log_a\left(m^n\right)=nlog_a(m)$ (en caso de que n sea un número real, la justificación requiere otro tipo de conocimientos). **iv.** Por otro lado, puesto que $a^0=1$ $(a\neq 0)$, entonces $log_a(1)=0$.	**2.** Las deducciones aquí presentadas son informales y con los elementos hasta aquí tratados no es posible realizar una deducción formal.
iii. Formalice las propiedades de los logaritmos (como un teorema).	**TEOREMA III.1** (PROPIEDADES OPERATIVAS DE LOS LOGARITMOS) Si $m\neq 0$ y $n\neq 0$ son números positivos y $a\neq 1$ también es un número positivo, entonces: **a.** $log_a(mn)=log_a(m)+log_a(n)$ (pp). **b.** $log_a\left(\frac{m}{n}\right)=log_a(m)-log_a(n)$ (pd). **c.** $log_a\left(m^n\right)=n\,log_a(m)$ (pe). **d.** $log_a(1)=0$. **ACTIVIDAD III.19** (USO DE LAS PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS) **a.** Para reescribir $log_8\left(10x^3y^2\right)$ sin exponentes: $log_8\left(10x^3y^2\right)=log_8(10)+log_8\left(x^3\right)+log_8\left(y^2\right)$ (pp). $=log_8(10)+3\,log_8 x+2\,log_8 y$ (pe). **b.** Para reescribir $log_3\left(\frac{(x-y)^2(x+2)^3}{\sqrt{2x+1}}\right)$ sin exponentes: $log_3\left(\frac{(x-y)^2(x+2)^3}{\sqrt{2x+1}}\right)=log_3\left((x-y)^2(x+2)^3\right)-log_3\left(\sqrt{2x+1}\right)$ (pd). $=log_3(x-y)^2+log_3(x+2)^3-log_3\left(\sqrt{2x+1}\right)$ (pp).	**3.** En el uso de las propiedades de los logaritmos es muy importante tener en cuenta las hipótesis, si éste no es el caso se pueden cometer errores graves.

Observaciones y sugerencias	**Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo**	**Dificultades y soluciones**
iv. Proponga actividades en las que el alumno expanda expresiones algebraicas utilizando las propiedades de los logaritmos.	$=2\,log_3\,(\,x-y\,)+3\,log_3\,(\,x+2\,)-\frac{1}{2}log_3\,(\,2x+1\,)$ (pp). **c.** Para reescribir $ln\left(\frac{\sqrt[3]{x^2-5x}}{x\sqrt{(2x-y\,)}}\right)$ sin exponentes: $ln\left(\frac{\sqrt[3]{x^2-5x}}{x\sqrt{(2x-y\,)}}\right)=ln\left(\sqrt[3]{x^2-5x}\right)-ln\left(x\sqrt{(2x-y\,)}\right)$ (pd). $=ln\left(\sqrt[3]{x^2-5x}\right)-ln\,(\,x\,)-ln\left(\sqrt{(2x-y\,)}\right)$ (pp). $=\frac{1}{3}ln\left(x^2-5x\right)-ln\,(\,x\,)-\frac{1}{2}ln\,(\,2x-y\,)$ (pe). **d.** Utilizando las *propiedades* (pd) y (pe) en $y=log_4\,64x^6$ obtenemos $y=log_4\,64x^6=log_4\,x^6+log_4\,64=6\,log_4\,x+3$. △	
iv. Proponga actividades en las que el alumno comprima expresiones algebraicas utilizando las propiedades de los logaritmos.	**ACTIVIDAD III.20** (AGRUPANDO CON LOGARITMOS) **a.** $\frac{1}{4}log_3\,(\,x\,)+5log_3(\,x-2\,)=log_3\,(\,x\,)^{\frac{1}{4}}+log_3(\,x-2\,)^5$ $=log_3\left[\,(\,x\,)^{\frac{1}{4}}(\,x-2\,)^5\,\right]$, propiedades: (pe) y (pp). **b.** $8ln\,(\,x+4\,)-4ln(\,x+8\,)=ln\,(\,x+4\,)^8-ln(\,x+8\,)^4=ln\,\frac{(\,x+4\,)^8}{(\,x+8\,)^4}$, propiedades: (pe) y (pd). **c.** $\frac{1}{5}\left[\,log_6\,(\,x+4\,)-log_6\,(\,x+2\,)\,\right]=\frac{1}{5}\left[\,log_6\,\frac{(\,x+4\,)}{(\,x+2\,)}\,\right]=log_6\,\sqrt[5]{\frac{(\,x+4\,)}{(\,x+2\,)}}$, propiedades: (pd) y (pe). △ **CAMBIO DE BASE LOGARÍTMICO** Es posible cambiar la base de una función logarítmica, es decir, escribirla en otra base. La función $f\,(\,x\,)=log_a\,x$ (en base a) puede escribirse en base b. Dado que $x=a^y$ es equivalente a $y=log_a\,x$, si aplicamos $log_b\,x$ a $x=a^y$, obtenemos $log_b x=log_b\left(a^y\right)$ o $log_b x=y\cdot log_b a$, de donde, $y=\frac{log_b x}{log_b a}$. Si $y=log_a\,x$, entonces $y=log_a x=\frac{log_b x}{log_b a}$. La relación $log_a x=\frac{log_b x}{log_b a}$ se conoce como expresión de cambio de base. **TEOREMA III.2** (CAMBIO DE BASE LOGARITMICO) Si $f\,(\,x\,)=log_a\,x$, $g\,(\,x\,)=log_b\,x$ y x es positiva, entonces $f\,(\,x\,)=log_a x=\frac{1}{log_b a}log_b x$. El *teorema III.2* establece el método a seguir (y las condiciones que deben cumplirse) para reescribir la función $f\,(\,x\,)=log_a\,x$ (cuya base es a) en una nueva base b.	

<table>
<tr><th>Observaciones y sugerencias</th><th>Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo</th><th>Dificultades y soluciones</th></tr>
<tr><td>

v. Guíe al estudiante en la deducción de la relación de cambio de base logarítmico, posteriormente formalice esta propiedad como un teorema.

vi. Proponga actividades en las que el alumno cambie bases de funciones logarítmicas.

</td><td>

$$f(x)=\log_a x=\frac{1}{\log_{\underset{\text{nueva base}}{b}}\underset{\text{base original}}{a}}\log_{\overset{\text{nueva base}}{b}} x$$

FIGURA III.19

ACTIVIDAD III.21 (CAMBIO DE BASE)

a. Para reescribir $f(x)=\log_4 x$ en base 2, se toma en cuenta que $a=4$ y $b=2$, por tanto, $\log_4 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2 x$, de donde $f(x)=\log_4 x=\frac{1}{2}\log_2 x$ en base 2 es $f(x)=\frac{1}{2}\log_2 x$.

b. Para reescribir $f(x)=\log_{81} x$, en base 3, se toma en cuenta que $a=81$ y $b=3$, por consiguiente; $\log_{81} x=\frac{\log_3 x}{\log_3 81}=\frac{1}{4}\log_3 x$, en consecuencia; $f(x)=\log_{81} x=\frac{1}{4}\log_3 x$.

c. Para reescribir $f(x)=\log_{10} x$ en base e, se toma en cuenta que $a=10$ y $b=e$, por tanto, $\log_{10} x=\frac{\log_e x}{\log_e 10}$, de donde $f(x)=\log_{10} x=\frac{1}{\log_e 10}\log_e x$.

d. Para rescribir $f(x)=\log_2 8x$ en base 4, puesto que $y=\log_2 8x=\log_2 x+\log_2 8=\log_2 x+3$, entonces

$$f(x)=\log_2 8x=\log_2 x+3=\frac{\log_4 x}{\log_4 2}+3=\frac{1}{\sqrt{2}}\log_4 x+3$$, en resumen

$$f(x)=\log_2 8x=\frac{1}{\sqrt{2}}\log_4 x+3.$$

△

</td><td></td></tr>
<tr><td>

vii. Guíe al estudiante en la obtención de la expresión para cambiar la base de una función exponencial.

</td><td>

CAMBIO DE BASE EXPONENCIAL

Es posible reescribir una función exponencial en una base distinta. Para reescribir la función $f(x)=a^x$ en la forma $f(x)=b^{kx}$, se requiere resolver la ecuación $\left(b^k\right)^x=a^x$, de donde obtenemos $b^k=a$ y, en consecuencia, $k=\log_b a$, sustituyendo esta última expresión en $f(x)=b^{kx}$ obtenemos $f(x)=b^{(\log_b a)x}$, es decir, $a^x=b^{(\log_b a)x}$.

TEOREMA III.3 (CAMBIO DE BASE EXPONENCIAL)

Si $f(x)=a^x$, $f(x)=b^{kx}$, entonces $f(x)=a^x=b^{(\log_b a)x}$.

El *teorema III.3* establece el método a seguir (y las condiciones que deben cumplirse) para reescribir la función logarítmica $f(x)=a^x$ (cuya base es a) en la base b.

</td><td></td></tr>
</table>

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
viii. Construya un esquema que facilite la comprensión y aplicación del teorema de cambio de base exponencial.	nueva base $f(x) = a^x = b^{(\log_b a)\,x}$ nueva base base original **FIGURA III.20** **ACTIVIDAD III.22** (CAMBIO DE BASE EN FUNCIONES EXPONENCIALES) **a.** Para reescribir $f(x)=4^x$ con base 2, sean $a=4$, $b=2$, entonces $f(x)=4^x=2^{(\log_2 4)x}=2^{(2)x}$. **b.** Para reescribir $f(x)=3^x$ con base e, entonces $a=3$, $b=e$ y $f(x)=3^x=e^{(\log_e 3)x}=e^{(\ln 3)x}$. **c.** Para reescribir $f(x)=5^x$ en base 7, entonces $a=5$, $b=7$ y $f(x)=5^x=7^{(\log_7 5)x}$. $\triangle$ Las funciones $f(x)=a^x$ y $g(x)=\log_a x$ son inversas entre sí, es decir, al “evaluar” una de ellas en la otra se obtiene como resultado la función identidad $i(x)=x$. Este proceso es de gran utilidad en la resolución de ecuaciones si la incógnita se encuentra en el exponente.	
ix. Proponga a los estudiantes que resuelvan ecuaciones en las que la incógnita se encuentre un exponente o en un logaritmo.	**ACTIVIDAD III.23** (RESOLUCIÓN DE ECUACIONES) **a.** Para resolver $\log_4 (x-2)^3=2$, aplicamos $f(x)=4^x$ a la ecuación, obtenemos $(x-2)^3=4^2$ o $(x-2)^3=16$, de donde $x=\sqrt[3]{16}+2$. **b.** Para resolver $e^{x^2+5x}=e^{-6}$ aplicamos $f(x)=\ln x$, a ambos miembros de la ecuación y obtenemos $x^2+5x=-6$ o $x^2+5x+6=0$, entonces $(x+2)(x+3)=0$, y finalmente $x=-2$ y $x=3$. **c.** La ecuación $\log_4(3x+8)-\log_4 12=\log_4(x-1)$, puede reescribirse como $\log_4 \frac{3x+8}{12}=\log_4(x-1)$. Si aplicamos $f(x)=4^x$ a ambos miembros de la ecuación $\log_4 \frac{3x+8}{12}=\log_4(x-1)$ obtenemos $\frac{3x+8}{12}=x-1$, cuya solución es $20=9x$ y $x=\frac{20}{9}$. **d.** Para resolver la ecuación $\log_2 x+\log_2(x-1)=\log_2 6$, primero la reescribimos como $\log_2 x(x-1)=\log_2 6$. Posteriormente, aplicamos $f(x)=2^x$ a ambos miembros de ella, obtenemos $x(x-1)=6$ o $x^2-x-6=0$, entonces $(x-3)(x+2)=0$, así $x_1=3$ y $x_2=-2$, sin embargo, éste último valor de x no es solución de la ecuación inicial ¿por qué? **e.** Para resolver la ecuación $(67.38)(1.026)^x=100$, primero despejamos el término que contiene a la incógnita, obtenemos $(1.026)^x=\frac{100}{67.38}=1.484$, a continuación aplicamos logaritmos a ambos miembros, obtenemos	

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
x. Proponga situaciones cuya resolución implique el uso de funciones exponenciales o logarítmicas.	$x \cdot log(1.026) = log(1.484)$, por tanto, $x = \frac{log(1.484)}{log(1.026)}$. △ La descripción de las siguientes situaciones requieren del uso de las *funciones logarítmicas* o exponenciales. **ACTIVIDAD III.24** (DESTRUCCIÓN DEL OZONO DE LA ATMÓSFERA) **a.** La emisión de "aerosoles" destruye el ozono de la atmósfera. Bajo la suposición de que la cantidad del ozono decae exponencialmente a una razón continua del 0.15% anual. Determinemos el tiempo en que desaparecerá la mitad del ozono de la atmósfera. Sea M_0 la cantidad inicial de ozono en la atmósfera, entonces $M = M_0 e^{-0.0015 \cdot t}$, deseamos determinar el tiempo t_m de manera que $M = \frac{1}{2} M_0$. Así, de $\frac{1}{2} M_0 = M_0 e^{-0.0015 \cdot t_m}$, luego $\frac{1}{2} = e^{-0.0015 \cdot t_m}$, de donde obtenemos $-0.0015 t_m = ln\left(\frac{1}{2}\right)$; por tanto, $t_m = \frac{1}{-0.0015} ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx 462.98$ años. **ACTIVIDAD III.25** (INTENSIDADES) **a.** Un decibel, denominado así por Alexander Graham Bell, es el incremento mínimo del volumen de un sonido detectable por el oído humano. Los físicos han demostrado que cuando ocurren dos sonidos de intensidades I_1 y I_2, la diferencia de volumen es L decibeles, donde $L = 10\, log_{10} \frac{I_2}{I_1}$. **b.** En la escala de Ritcher, la magnitud R de un terremoto de intensidad I está dada por $R(I) = \frac{ln\, I}{ln 10}$ o $R(I) = log\ I$. **c.** El 19 de septiembre de 1985 un terremoto sacudió la Ciudad de México con una intensidad de 8.1 grados en la escala de Richter. ¿Cuántas veces fue más intenso respecto a la actividad sísmica que puede medirse? En la escala de Richter, la magnitud de un terremoto de intensidad I está dada por $R = log\ I$, donde I es el número de veces que es más intenso el sismo respecto de la actividad sísmica más pequeña que puede medirse. Luego $8.1 = log\ I$ y $I = 10^{8.1} \approx 1258925412$. **d.** La intensidad de un haz de luz que se proyecta verticalmente hacia abajo y dentro del agua está dada por la función $I(x) = Ke^{-1.4x}$, en esta función K representa la intensidad de la luz en la superficie. De acuerdo con lo anterior determinemos la profundidad del cristal en la que la intensidad de la luz es la tercera parte de la intensidad de su superficie. En la superficie $x = 0$, entonces $I(0) = Ke^{-1.4}$. Debemos determinar el valor de x tal que $I(x) = \frac{1}{3} K$, luego $Ke^{-1.4x} = \frac{1}{3} K$, o bien, $e^{-1.4x} = \frac{1}{3}$. Aplicamos $ln\, x$ a ambas partes de la ecuación, obtenemos $-1.4x = ln \frac{1}{3}$, o bien $x = \frac{-ln\ 3}{-1.4} = \frac{-1.099}{-1.4}$, así $x \approx 0.78$ metros, de profundidad. △	

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
	ACTIVIDAD III.26 (APLICACIONES DE LAS FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES) **a.** TRABAJO El trabajo (en Joules) realizado por una muestra de un Kilogramo de gas nitrógeno cuando su volumen cambia de un valor inicial V_i a un valor final V_f durante un proceso a temperatura constante está dado por $W = 8.1\times10^4 \, ln \frac{V_f}{V_i}$. **b.** POBLACIÓN En Biología, para cierta población de células, el número N de células en el instante t está dado por la relación $N(t) = N_0(2)^{\frac{t}{k}}$ donde N_0 es el número de células en $t = 0$ (inicialmente) y k es una constante positiva. Por consiguiente, el tiempo en que se tiene una población de N_1 es $t = k \, log_2 \frac{N_1}{N_2}$. **c.** DUPLICACIÓN DE UN PRINCIPAL Suponga que deseamos determinar el tiempo de duplicación de un principal de $\$800$, invertido a una tasa del $10\,\%$ anual capitalizable trimestralmente. Dado que $S = 1600$, $P = 800$, que un año tiene cuatro trimestres y que la relación entre éstas cantidades es $S_n = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$, obtenemos $1600 = 800\left(1+\frac{0.10}{4}\right)^{4t}$, o bien, $1600 = 800(1+0.025)^{4t}$, entonces $2 = (1.025)^{4t}$. Si aplicamos logaritmos a ambas partes de la ecuación y despejamos t obtenemos $t = \frac{log\,2}{4\,log\,1.025} \cong 7$. **d.** DENSIDAD DE POBLACIÓN Supongamos que la densidad de población a x kilómetros de la Ciudad de México se modela por la función $P(x) = Ae^{-kx}$. Calculemos el valor de la constante k, considerando que la densidad de población en el centro de la Ciudad de México es 15 mil personas por kilómetro cuadrado, y que la densidad a 10 kilómetros del centro es 9 mil personas por kilómetro cuadrado. La primera condición se representa por $P(0) = 15$, o bien, $15 = Ae^{-k\cdot0} = A$, entonces $P(x) = 15e^{-kx}$. La segunda condición indica que $P(10) = 15e^{-10k} = 9$, o bien $e^{-10k} = \frac{9}{15}$. Si aplicamos la función logaritmo natural en ambas partes de la ecuación anterior obtenemos $-10k = ln\frac{3}{5}$, entonces $k = -\frac{ln\,3/5}{10} = 0.051$. △	

Ejercicios y actividades adicionales

Con el propósito de reforzar los aprendizajes alcanzados por los estudiantes, UD. puede implementar en el desarrollo de sus clases algunos de los siguientes ejercicios o actividades.

1. Suponga que x y y son positivas. "Expanda" las siguientes expresiones como una suma, o una diferencia, o como múltiplo de logaritmos.

a. $log_3 10x$. **b.** $log_3 x^{-4}$. **c.** $log_2 \sqrt{\frac{x^3}{y^2}}$. **d.** $log_6 3x$. **e.** $log_7 \left(x^4 y^6 \right)$. **f.** $log_4 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{y}}$.

g. $log_8 \frac{8}{x}$. **h.** $log_{12} \left(x^{-2} y^{-3} \right)$. **i.** $log_6 \frac{3x}{4}$. **j.** $log_{18} \frac{x^{-4}}{y^{-2}}$.

2. Exprese cada función en la forma $f(x) = log_a kx^n$.

a. $f(x) = 7log_{12} x - 2$. **b.** $f(x) = -6log\, x - 2$. **c.** $f(x) = \frac{1}{5} log_6 x - log_6 36$. **d.** $f(x) = -6ln\, x + ln\, 36$.

e. $f(x) = 4ln\, x + ln\, e^4$. **f.** $f(x) = ln\, x - ln\, \frac{1}{e}$. **g.** $f(x) = 3log_2 x - log_4 16$.

3. Reescriba las funciones de manera que contengan un solo logaritmo.

a. $f(x) = log_3 10x - log_3 x$. **b.** $g(x) = 3log_6 3x - 2log_6 5x$. **c.** $h(x) = log_6 \frac{8}{x} + 3log_6 \frac{2}{x}$. **d.** $a(x) = log_6 \frac{3x}{5} + log_6 7x$.

e. $b(x) = log_4 ax - 2log_4 x$. **f.** $c(x) = 3log_{10}\left(ax^3 \right) + log_{10}\left(b^3 \right)$. **g.** $d(x) = 3ln\, \frac{x^{-4}}{a^{-2}} - 2ln\, \frac{x^2}{a^2}$.

4. Reescriba la función en la base indicada.

a. $f(x) = log_4 x$, base 2. **b.** $f(x) = log_2 x$, base 4. **c.** $f(x) = log_{81} x$, base 3. **d.** $f(x) = ln\, x$, base 4.

e. $f(x) = ln\, x$, base $1/2$. **f.** $f(x) = 3log_2 \frac{1}{4} x$, en base 4. **g.** $f(x) = \frac{1}{2} log_4 16x$, en base e.

h. $f(x) = -3log_{10} \frac{x^3}{100}$, en base 5. **i.** $f(x) = 5 + 4log_2 \frac{1}{2} x$, en base 4. **j.** $f(x) = 7 - log_6 36x^3$, en base e.

5. Reescriba en la base indicada.

a. $f(x) = 4^x$, base 2. **b.** $f(x) = 3\left(4^x \right) - 2$, base 5. **c.** $f(x) = 8\left(4^x \right) - 2\left(4^{-x} \right)$, base 2. **d.** $f(x) = 14^x (x - 2)$, base $\frac{1}{2}$.

6. Utilice $a^x = e^{x \cdot ln\, a}$ y rescriba las funciones en la base natural.

a. $f(x) = 4^x$. **b.** $f(x) = 3\left(4^x \right) - 2$. **c.** $f(x) = 8\left(4^x \right) - 2\left(4^{-x} \right)$. **d.** $f(x) = 14^x (x - 2)$.

e. $f(x) = x^x$. **f.** $f(x) = x^{\sqrt{x+1}} - x^2$. **g.** $f(x) = x^{2x+1}$. **h.** $f(x) = x^{x^x}$.

7. Utilice $a^x = e^{x \cdot ln\, a}$ y reescriba las funciones en la base que se pide.

a. $f(x) = 4e^{4x}$ en base 2. **b.** $f(x) = 3e^x - 2e^{-2x}$ en base 3. **c.** $f(x) = 2\left(e^{5x} \right) + 4$ en base 4.

d. $f(x) = 5x^x (x - 1)$ en base e.

8. Demuestre que: si a y b son dos números positivos, entonces $\left(log_a b \right)\left(log_b a \right) = 1$.

9. Resuelva.

a. $log_8 (x - 5) = \frac{2}{3}$. **b.** $log_9 x = \frac{3}{2}$. **c.** $log_4 x = -\frac{3}{2}$. **d.** $log_3 (x - 4) = 2$. **e.** $log_{10} x^2 = -4$.

f. $2log_3 x = 3log_3 5$.

10. Resuelva.

a. $log_4 (x + 1) = 2 + log_4 (x - 2)$. **b.** $log_5 (2x - 1) + log_5 (x + 2) = 0$. **c.** $log_2 (3x + 1) - log_2 (2x + 4) = 0$.

d. $log_{(x-1)} 16 = 2$. **e.** $log_{(4x-6)} 100 = 1$. **f.** $2log_{(x-6)} 9 = 4$. **g.** $3log_{(x-4)} 5 = 3$. **h.** $\frac{1}{2} log_{(x+2)^{\frac{1}{2}}} 9 = 1$.

11. Resuelva.

a. $\frac{2^x+2^{-x}}{2}=1$. **b.** $e^{x^2}=e^{-2x+3}$. **c.** $4(3^x)=36$. **d.** $8+4log_2 x=16$. **e.** $2log_5 3x=4$.

f. $4(4^{6-2x})+13=77$. **g.** $\frac{5}{1+2e^{-3x}}=2$. **h.** $\frac{200}{1+25e^{2x}}=20$.

12. Resuelva.

a. $2^{x-1}+2^x+2^{x+1}=7$. **b.** $9^x-(7)3^x-18=0$. **c.** $3^{x-1}+3^x+(3)3^{x+1}=837$. **d.** $5^{x+2}=25^x$.

e. $4^{x-2}=(16)2^{x-3}$. **f.** $8^{2x+3}=4^{x+2}$. **g.** $(\frac{1}{4})2^{x+3}+48=(16)4^{x-2}$. **h.** $\sqrt[x]{27}=3^{x-2}$.

i. $2^{x+4}-4^{x+1}=16^x$. **j.** $\sqrt[x]{625}=5^{x+2}$.

13. Despeje x.

a. $a-20=50(1.2)^x$. **b.** $2^{x-4}=32$. **c.** $ln(x-13)=at+b$. **d.** $2^{x-2}=\frac{1}{32}$.

d. $ln(3x-1)-ln\,x=-4$. **e.** $(\frac{1}{4})^{x+1}=64$. **f.** $3^{x+2}=81$. **g.** $e^{4x+2}=e^4$.

14. La magnitud M, de Richter, de un terremoto se define en términos de la energía E (en Joules) que libera, por la expresión $log_{10}E=4.4+1.5M$.

a. Determine la energía para terremotos con magnitudes:

i. 5. **ii.** 6. **iii.** 8. **iv.** 10.

b. Quienes no están familiarizados con terremotos, les parece extraño que un terremoto de grado 6 se considere mucho más severo que uno de magnitud 3 grados, compare la cantidad de energía liberada en ambos casos.

15. El enfoque más común para la medición de la intensidad del sonido es el uso de los decibeles, así $B=10\log_{10}\frac{I}{I_0}$, donde $I_0=10^{-12}\,\frac{watts}{m^2}$. Calcule los niveles de intensidad de sonido para:

a. 80 decibeles. **b.** 90 decibeles. **c.** 100 decibeles. **d.** 120 decibeles.

16. En golf, la tarea es golpear una bola para que caiga en un hoyo pequeño. Si la superficie cercana al hoyo no es plana, el jugador debe juzgar cuánto debe curvar la trayectoria de la bola. Suponga que el jugador está en el punto $(-13,0)$, el hoyo en el punto $(0,0)$ y la trayectoria de la bola sobre $-13\le x\le 0$ es $y=-1.672x+72ln(1+0.02x)$. Muestre que la bola cae en el hoyo y estime el punto del eje y en el que el golfista golpeó la bola.

17. El trabajo, en Joules, realizado por una muestra de 1 Kilogramo nitrógeno, cuando su volumen cambia de un valor inicial V_i a un valor final V_f durante un proceso a temperatura constante está dado por $W=8.1\times 10^4 ln\frac{V_f}{V_i}$. Si tal muestra se expande de un volumen inicial de 3 litros a un volumen de 9 litros, determine el trabajo realizado por el gas.

18. La ecuación de oferta de un fabricante es $p(q)=log_{10}(10+\frac{q}{2})$. Donde q es el número de unidades que ofrece con el precio p por unidad. ¿A qué precio el fabricante ofrecerá 1980 unidades?

19. Para una compañía el costo c de producir q unidades de un producto está dada por la función $c(q)=2q\,ln\,q+20$, evalúe el costo sí $q=6$.

20. Se invierte un principal de $\$10000$ en una cuenta de ahorros con un interés capitalizable continuamente a una tasa del 7% anual. El monto S en la cuenta t años después está dado por $S=10000e^{0.07t}$.

a. ¿En cuánto tiempo habrá $\$35000$ en la cuenta de ahorros?

b. ¿En qué tiempo se duplicará el capital de la cuenta?

c. ¿Cuánto tiempo tardarán en duplicarse $\$1000$, sí se invierten al 12% de interés capitalizado trimestralmente?

21. Un medicamento, es eliminado a través de la orina. Una persona consume 10 miligramos del medicamento. Si la cantidad del medicamento que queda en el cuerpo t horas después de haber sido ingerido es $A(t)=10(0.8)^t$.

a. ¿En qué tiempo quedarán en el cuerpo 2 miligramos.

b. ¿Cuál es la vida media del medicamento?

22. El número de bacterias después de t horas se obtiene utilizando el modelo $N = N_0e^{0.34t}$, siendo N_0 el número inicial de bacterias. ¿Cuánto tardarán 400 bacterias en aumentar a 4000?

23. El número de gramos de una sustancia radiactiva después de t horas se determina mediante la relación $N = N_0e^{-0.45t}$, donde N_0 representa el número inicial de gramos. ¿En qué tiempo, 2500 gramos de la sustancia se reducirán a 1250 gramos?

24. Suponga que $B=10\log_{10}\frac{I}{I_0}$ donde $I_0=10^{-12}\,\frac{watts}{m^2}$, calcule el valor en decibeles de un sonido, sí:

a. $I=125\,I_0$ (un susurro).

b. $I=12{,}000\,I_0$ (nivel normal de la voz).

25. Si un sonido tiene el valor en decibeles que se indica, determine I en términos de I_o. Suponga que $B=10\log_{10}\frac{I}{I_0}$ donde $I_0=10^{-12}\,\frac{watts}{m^2}$.

a. $d=95$ (un camión de carga).

b. $d=118$ (heavy metal, el rock pesado).

26. Resuelva la ecuación $1.07^n=2$, que indica el tiempo necesario para que una inversión se duplique, cuando un capital se invierte al 7% de interés compuesto capitalizable anualmente.

27. La ley de enfriamiento de Newton establece que la rapidez con que se enfría un objeto es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio circundante. Así, la temperatura T de un objeto en un tiempo t está dada por $T=75e^{-2t}$. Exprese t como función de T.

28. Una persona que acaba de terminar un curso de cómputo. El porcentaje del curso que él recordará dentro de x meses está dado por la función $r(x)=92-47.9log\,(x+1)$ con $0\le x\le 46.9$. Determine el porcentaje del curso que recordará la persona en los tiempos señalados.

a. 3 meses.

b. 1.5 meses.

c. ¿En cuánto tiempo recordará sólo él 30 % del curso?

d. ¿En cuánto tiempo recordará sólo él 75 % del curso?

29. Una persona que acaba de terminar un curso de cómputo. El porcentaje del curso que él recordará dentro de x meses está dado por la función $r(x)=83.5-42.7log\,(x+1)$ con $0\le x\le 46.9$. Determine el porcentaje del curso que recordará la persona en los tiempos señalados.

a. 1.5 meses.

b. 0.3 meses.

c. ¿En cuánto tiempo recordará sólo él 37 % del curso?

d. ¿En cuánto tiempo recordará sólo él 62 % del curso?

SD 1. SITUACIONES DE CRECIMIENTO Y DECAIMENTO EXPONENCIAL

APRENDIZAJES

Apr.1 Explorará situaciones o fenómenos que corresponden a crecimiento o decaimiento exponencial, las relaciones o condiciones existentes y analizará las formas de variación.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

Situaciones que involucran crecimiento o decaimiento exponencial.

APERTURA

Revisión previa del significado de exponente.

Revisión previa de las propiedades de los exponentes.

DESARROLLO

a. Una persona ha consumido a gramos de cierta droga. Si la cantidad de droga en la sangre de la persona se reduce a la mitad cada hora.

i. ¿Qué cantidad de droga habrá en la sangre de la persona en una hora?

___

ii. ¿Qué cantidad de droga habrá en la sangre de la persona en dos horas? (Indique los productos utilizando exponentes).

___

iii. Complete la siguiente tabla (Indique los productos utilizando exponentes).

$tiempo$ $(horas)$	0	2	4	7	9	$\dots$	t
$cantidad\ de\ droga$ $(gramos)$							

iv. ¿Cuál es la regla de correspondencia de la función que describe los hechos anteriores.

___

b. En cierto municipio, el número de usuarios de Internet se duplica cada año. En este momento $10\,000$ de los habitantes del municipio utilizan internet.

i. Si el patrón de incremento de usuarios continúa, complete la siguiente tabla (utilice potencias para representar el número de usuarios).

$tiempo$ $(años)$	0	1	2	3	4	$\dots$	t
$usuarios\ de$ $internet$							

ii. ¿Cuál es la regla de correspondencia de la función que describe el número de usuarios en términos de los años trancurridos?

___

c. Sea un cuadrado cuya longitud es cuatro unidades.

Considere el siguiente proceso.

i. Primera etapa, se divide en dos partes congruentes (rectángulos) y se sombrea una de ellos, haga una figura que represente la situación y responda ¿cuál es la medida del área que ha sido sombrada?

---

ii. Segunda etapa, la región que no se sombreó en la etapa anterior se divide en dos partes congruentes y se sombrea una de ellos, haga una figura que represente la situación y responda ¿cuál es la medida del área que ha sido sombrada?

---

iii. Tercera etapa, la región que no se sombreó en la etapa anterior se divide en dos partes congruentes y se sombrea una de ellos, haga una figura que represente la situación y responda ¿cuál es la medida del área que ha sido sombrada?

---

iv. El proceso anterior se repite n veces. Complete la siguiente tabla (utilice exponentes).

etapa	0	1	2	3	4	5	6	…	t
área sombreada									

v. ¿Cuál es la regla de correspondencia de la función que describe el área sombreada?

CIERRE

a. Escriba los modelos obtenidos en la parte correspondiente al desarrollo.

---

b. Establezca el patrón (común) que presentan los modelos que antes construyó.

---

c. Formalización: Establezca la definición formal de función exponencial.

SD 2. GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL

APRENDIZAJES

Apr.2 Identificará patrones de cambio involucrados en el crecimiento o decrecimiento de una función exponencial y bosquejará su gráfica.
Apr.3 Identificará el dominio y rango de una función exponencial y trazará su gráfica.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

Estudio analítico y grafico del comportamiento de funciones exponenciales del tipo $f(x) = ab^x$ con $b > 1$ o $0 < b < 1$ y $a \neq 0$.

Relación entre los parámetros de $f(x) = ab^x$ con su gráfica.

APERTURA

Revisión de los significados de: potencia y exponente.

DESARROLLO

1. $f(x) = ab^x$ con $b > 1$.

En la barra de trabajo “entrada” del software geogebra escriba: $y = 2^x$ y ejecuta, luego $y = 3^x$ y ejecute, a continuación $y = 4^x$ y ejecuta, finalmente $y = 6^x$ y ejecute la acción. Posteriormente, selecciona un tamaño adecuado. En la barra de tareas selecciona archivo, imprimir, imprime y pega.

a. En el primer cuadrante del plano cartesiano, ¿qué ocurre con la curva asociada a $f(x)=b^x$ si se incrementa el valor del parámetro (de la base) b?

___

b. En el segundo cuadrante del plano cartesiano, ¿qué ocurre con la curva asociada a $f(x)=b^x$ si se incrementa el valor del parámetro (de la base) b?

___

c. Observe las curva que ha trazado y responda:

i. ¿En qué punto intersecan las curvas asociadas a la función $f(x)=b^x$, con $b>1$, al eje de las ordenadas?

___.

ii. ¿Qué ocurre con las ordenadas de los puntos (x, b^x) conforme se incrementan en forma negativa las asignaciones a la variable x?,

___, por tanto, el eje de las abscisas es una ___

iii. ¿Qué ocurre con las ordenadas de los puntos (x, b^x) conforme se incrementan las asignaciones a la variable x?

___, por tanto, $f(x)=b^x$ con $b>1$ es una función ___

iv. Imagine que traza una recta tangente a la curva asociada a $f(x)=b^x$ con $b>1$, y que luego lo desplaza sobre la curva y a la derecha, ¿en que posición se encuentra la línea recta tangente respecto a la curva asociada a $f(x)=b^x$ con $b>1$?

___, por tanto, la curva asociada a $f(x)=b^x$ con $b>1$, es

***<u>cóncava hacia arriba</u>*.**

2. $f(x)=ab^x$ con $0<b<1$.

a. ¿Por qué, sí $0<b<1$, entonces $f(x)=b^x$ se pede escribir como $f(x)=b_0{}^{-x}$? Explique:

___

b. En la barra de trabajo "entrada" del software geogebra escriba: $y=2^{-x}$ y ejecute, luego $y=3^{-x}$ y ejecute, a continuación $y=4^{-x}$ y ejecute, finalmente, $y=6^{-x}$ y ejecute la acción. Posteriormente, seleccione un tamaño adecuado. En la barra de tareas selecciona archivo, imprimir, imprime y pega.

c. En el primer cuadrante del plano cartesiano, ¿qué ocurre con la curva asociada a $f(x)=b_0^{-x}$ si se incrementa el valor del parámetro (de la base) b_0?

____

d. En el segundo cuadrante del plano cartesiano, ¿qué ocurre con la curva asociada a $f(x)=b_0^{-x}$ si se incrementa el valor del parámetro (de la base) b?

____

e. Observe la curva que ha trazado y responda:

i. ¿En qué punto intersecan las curvas asociadas a la función $f(x)=b_0^{-x}$ con $b_0>1$ al eje de las ordenadas?

____.

ii. ¿Qué ocurre con las ordenadas de los puntos $\left(x\ ,\ b_0^{\ x}\right)$ conforme se incrementan en forma positiva las asignaciones a la variable x?,

____, por tanto, el eje de las abscisas es una ______________________________ .

iii. ¿Qué ocurre con las ordenadas de los puntos $\left(x\ ,\ {b_0}^x \right)$ conforme se incrementan en forma negativa las asignaciones a la variable x ?

_____________________________________, por tanto, $f\left(x \right)=b^{-x}$ con $b_0 > 1$ es una función ________________________

iv. Imagine que traza una recta tangente a la curva asociada a $f\left(x \right)={b_0}^{-x}$ con $b_0 > 1$, y que luego lo desplaza sobre la curva y a la derecha, ¿en qué posición se encuentra la línea recta tangente respecto a la curva asociada a $f\left(x \right)=b^{-x}$ con $b > 1$?

____, por tanto, la curva asociada a $f\left(x \right)=b^{-x}$ con $b > 1$, es

***cóncava hacia arriba*.**

CIERRE

a. Características de $f\left(x \right)=b^{x}$ con $b > 1$.

i. La curva asociada a $f\left(x \right)=b^{x}$ con $b > 1$ es ____________________________ puesto que se encuentra en los cuadrantes I y II del plano cartesiano.

ii. La curva asociada a $f\left(x \right)=b^{x}$ con $b > 1$ es ____________________________ hacia arriba puesto que las rectas tangentes a sus puntos se encuentran por “debajo” de su curva.

iii. La curva asociada a $f\left(x \right)=b^{x}$ con $b > 1$ interseca al eje de las ordenadas en el punto ____________________________.

iv. La única asíntota de $f\left(x \right)=b^{x}$ con $b > 1$ es la recta de ecuación ____________________________.

b. Características de $f\left(x \right)=b^{-x}$ con $b > 1$.

i. La curva asociada a $f\left(x \right)=b^{-x}$ con $b > 1$ es ____________________________ puesto que se encuentra en los cuadrantes I y II del plano cartesiano.

ii. La curva asociada a $f\left(x \right)=b^{-x}$ con $b > 1$ es ____________________________ hacia arriba puesto que las rectas tangentes a sus puntos se encuentran por “debajo” de su curva.

iii. La curva asociada a $f\left(x \right)=b^{-x}$ con $b > 1$ interseca al eje de las ordenadas en el punto ____________________________.

iv. La única asíntota de $f\left(x \right)=b^{-x}$ con $b > 1$ es la recta de ecuación ____________________________.

SD 3. CARACTERÍSTICAS DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

APRENDIZAJES

Apr.4 Analizará la relación entre las gráficas de funciones exponenciales con diferentes bases incluyendo el número e.
Importancia de la función $f(x) = ae^x$ y sus aplicaciones.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

Importancia de la función $f(x) = ae^x$ y sus aplicaciones.

APERTURA

Revisión del documento:
Número e. (Sin fecha). En Wikipedia. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_e

Revisión de los vídeos:
Eduardo Sáenz de Cabezón (2015 noviembre 18). ¿Qué es el número e? (Vídeo) Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=Z5czpA-fyMU

Mathutoriales MB (2015 diciembre 17). ¿QUÉ ES EL NÚMERO E?
Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=Grm1DXPV9is

DESARROLLO

1. Proporcione dos o más definiciones del número e.

---

2. ¿Por qué es importante el número e?

---

3. Trazo de la curva asociada a $f(x) = e^x$.

a. Establezca la relación de orden ($<$ o $>$) entre los números 2, e y 3.

---

b. Dado que $2 < e < 3$, establezca la relación de orden entre las curvas asociadas a $f_1(x) = 2^x$, $f(x) = e^x$ y $f_2(x) = 3^x$ sobre el intervalo $[0, +\infty)$

---

c. Dado que $2 < e < 3$, establezca la relación de orden entre las curvas asociadas a $f_1(x) = 2^x$, $f(x) = e^x$ y $f_2(x) = 3^x$ sobre el intervalo $(-\infty, 0]$.

____

d. Considerando que ya conoce el comportamiento de las curvas asociadas a $f_1(x) = 2^x$ y $f_2(x) = 3^x$ trace la curva asociada a $f(x) = e^x$ sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

CIERRE

a. Características de $f(x) = e^x$.

i. La curva asociada a $f(x) = e^x$ ____________________________ puesto que se encuentra en los cuadrantes I y II del plano cartesiano.

ii. La curva asociada a $f(x) = e^x$ ____________________________ hacia arriba puesto que las rectas tangentes a sus puntos se encuentran por "debajo" de su curva.

iii. La curva asociada a $f(x) = e^x$ interseca al eje de las ordenadas en el punto ____________________________.

iv. La única asíntota de $f(x) = e^x$ es la recta que tiene ecuación ____________________________.

SD 4. MODELOS EXPONENCIALES

APRENDIZAJES
Apr.5 Resolverá problemas en diferentes contextos, que se modelen con funciones exponenciales.

CONTENIDOS TEMÁTICOS
Problemas de aplicación.

APERTURA
Revisión de la "fórmula" para calcular el área de un círculo.
Modelo de crecimiento exponencial.
Modelo de decaimiento exponencial.
Vida media.

DESARROLLO
1. Suponga que un articulo tiene un precio de "P" pesos, y qué este se incrementa 2% semanalmente.

a. ¿Su precio después de una semana es? ________________________ pesos.

b. ¿Su precio después de dos semanas es? ________________________ pesos.

c. ¿Su precio después de tres semanas es? ________________________ pesos.

d. Complete la tabla.

Semana	Precio (pesos)
1	
2	
3	
4	
$\vdots$	
n	

e. ¿Cuál es la función que describe el comportamiento del precio del artículo?

____

f. Calcule el precio del artículo a las ocho semanas. ____.

g. Calcule el precio del artículo a los setenta días. ____.

h. Calcule el precio del artículo a los trescientos días. ____.

2. Suponga que un artículo tiene un precio de "P" pesos, y qué este disminuye 0.1% cada día transcurrido.

a. ¿Su precio después de un día es? ________________________ pesos.

b. ¿Su precio después de dos días es? ________________________ pesos.

c. ¿Su precio después de tres días es? ________________________ pesos.

d. Complete la tabla.

Semana	Precio (pesos)
1	
2	
3	
4	
⋮	
n	

e. ¿Cuál es la función que describe el comportamiento del precio del artículo en términos del número de día?

____

f. Calcule el precio del artículo a las dos semanas. ____________________________________.

g. Calcule el precio del artículo a los cincuenta días. ____________________________________.

h. Calcule el precio del artículo a los trescientos días (utilice una calculadora) ______________________________.

i. ¿Qué ocurre con el precio del artículo conforme el número de días se incrementa indefinidamente? _______________ .

j. ¿Cuántos días habrán de transcurrir para que el artículo tenga un precio del noventa por ciento de su valor inicial?

____ .

3. Suponga que un chisme se propaga siguiendo un modelo exponencial. Suponga que cada persona que conoce el chisme lo cuenta a otras dos personas (distintas).
a. Complete la tabla.

Etapa de propagación	Personas que conocen el chisme	En términos de una potencia de dos
1		
2		
3		
4		
⋮		

b. ¿Cuál es el modelo que describe el número de personas que conocen el chisme en función del número de etapa?

____

c. ¿Cuántas personas conocen el chisme en la etapa diez?

____

4. Suponga que una población, de inicialmente N_0 bacterias, crece de forma proporcional a la cantidad de bacterias presentes y se triplica cada minuto.

a. Escriba el modelo (contínuo) que describe esta situación. ____.

b. ¿En qué minuto la población tendrá más de $2N_0$ bacterias.

____

c. ¿En qué minuto la población tendrá más de $4N_0$ bacterias.

____

5. Suponga que un tumor maligno duplica su volumen cada mes. Si inicialmente tiene un volumen V_0 y suponiendo que es un modelo de crecimiento exponencial:

a. ¿Cuál será su volumen después de n meses?

____ .

b. ¿Cuántos meses tardará en tener 64 veces su volumen inicial?

____ .

c. Si se sabe que su volumen se incrementó 128 veces. ¿Cuántos meses han trascurrido?

____ .

CIERRE

En plenaria, discuta las soluciones con sus compañeros, anote las observaciones que considere relevantes.

____ .

SD 5. GRÁFICA DE LA FUNCIÓN LOGARITMO CON BASE b ENTERA

APRENDIZAJES

Apr.6 Verificará mediante gráficas o tablas que la función logarítmica es la función inversa de la exponencial. Expresará verbalmente las relaciones: $b^y = x \Leftrightarrow y = log_b x$

Apr.7 Graficará funciones logarítmicas e identificará su dominio y rango.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

La función logaritmo como inversa de la función exponencial.

APERTURA

Revisión y discusión de los videos:
Matemáticas On LineFunción Inversa Definición y Ejemplos (2014 marzo 31) Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=j1Z746lff4E

Andrea Montonati (2017 marzo 26) Función logarítmica. Definición. Gráficos
Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=pGTswmcGUiM

El Profe Diego (2017 marzo 26) Función Logarítmica - Definición, Propiedades y Aplicaciones
Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=FyQxivCiHns

DESARROLLO

1. Sean las funciones exponenciales $f(x)=2^x$, $f(x)=4^x$ y $f(x)=5^x$.

a. Su dominio es el conjunto ____-

b. Su rango (conjunto imagen o recorrido) es el conjunto ____-

c. A cada número de su dominio le corresponde ____________________________de su rango (conjunto imagen o recorrido).

d. Si a la variable independiente (el exponente) le asocias números cada vez mayores, las imágenes son cada vez __________,

por tanto, las funciones $f(x)=2^x$, $f(x)=4^x$ y $f(x)=5^x$ son_____________________ .

e. Si desplaza el punto de contacto de una línea recta tangente a través de la curva asociada a $f(x)=2^x$ (o $f(x)=4^x$ y $f(x)=5^x$), entonces esta línea recta se encuentra "debajo" de la curva antes señalada, por tanto, las curvas asociadas a las funciones $f(x)=2^x$, $f(x)=4^x$ y $f(x)=5^x$ son cóncavas hacia _______________________________________ .

f. Complete las tablas

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=2^x$							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=4^x$							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=5^x$							

g. Utilice una escala adecuada y traza las curvas asociadas a $f(x)=2^x$, $f(x)=4^x$ y $f(x)=5^x$.

h. En las tablas del inciso **f.** intercambie las filas.
Una vez que intercambió las filas: sustituya la primera entrada de **la primera fila por la variable** x, la primera entrada de la segunda fila por $f(x)=log_b x$.

x							
	–3	–2	–1	0	1	2	3

x							
	–3	–2	–1	0	1	2	3

x							
	–3	–2	–1	0	1	2	3

i. Explique, ¿por qué las tablas antes construidas corresponden a funciones logarítmicas?

---

j. Utilice una escala adecuada en el plano cartesiano y trace las curvas asociadas a $f(x)=log_2 x$, $f(x)=log_4 x$ y $f(x)=log_5 x$.

k. Sus dominios es el conjunto ____-

l. Sus rangos (conjunto imagen o recorrido) es el conjunto ____-

m. A cada número de su dominio le corresponde ____________________________de su rango (conjunto imagen o recorrido).

n. Si a la variable independiente (el exponente) le asocia números cada vez mayores, las imágenes son cada vez __________,

por tanto, las funciones $f(x)=log_2 x$, $f(x)=log_4 x$ y $f(x)=log_5 x$ son _____________________ .

o. Si desplaza el punto de contacto de una línea recta tangente a través de la curva asociada a $f(x)=log_2 x$, $f(x)=log_4 x$ y $f(x)=log_5 x$, entonces esta línea recta se encuentra "debajo" de la curva antes señalada, por tanto, las curvas asociadas a las funciones $f(x)=log_2 x$, $f(x)=log_4 x$ y $f(x)=log_5 x$ son cóncavas hacia _______________________________________ .

CIERRE

Generalice las observaciones anteriores respecto a la función $f(x)=log_b x$ con base entera.

i. Dominio: ____ .

ii. Rango (recorrido o conjunto imagen):_______________________________ .

iii. Si $f(x)=log_b x$, entonces (selecciona y marca con una cruz) la curva asociada a $f(x)=log_b x$ es:

positiva		negativa.	
creciente		decreciente	
Cóncava hacia abajo		Cóncava hacia arriba	

iv. Si $f(x)=log_b x$, entonces su curva asociada interseca al eje de las abscisas en el punto __________________.

v. Si $f(x)=log_b x$, entonces su curva asociada tiene como asíntota ___________________________________.

SD 6. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

APRENDIZAJES
Apr.8 Operará con logaritmos de distintas bases y aplicará sus propiedades.

CONTENIDOS TEMÁTICOS
Propiedades de los logaritmos.

APERTURA
Revisión de las propiedades de los exponentes. Interpretación de los logaritmos como imágenes de la función logaritmo.

DESARROLLO
a. Logaritmo de un producto de números positivos.

i. Sean $f = b^x$ y $g = b^y$, si despejas x e y obtienes:

____ .

ii. El resultado del producto x e y es:

____ .

iii. Si utilizas una sola base (base b) en el miembro izquierdo obtienes:

____ .

iv. Si aplicas $f(x) = log_b x$ al resultado del inciso ii. obtienes____-

b. Logaritmo de una división de números positivos.

i. Sean $f = b^x$ y $g = b^y$, si despejas x e y obtienes:

____ .

ii. El resultado de la división de x e y es:

____ .

iii. Si utilizas una sola base (base b) en el miembro izquierdo obtienes:

____ .

iv. Si aplicas $f(x) = log_b x$ al resultado del inciso ii. obtienes____-

c. Logaritmo de una potencia.

i. Sea $f = b^x$, si "elevas" ambos miembros al exponente z y luego simplificas obtienes:

____ .

ii. Si aplicas $log_b x$ al resultado obtenido en el inciso **i.** y simplificas el miembro derecho obtienes:

____________________________ .

iii. Si en $f = b^x$ despejas x y lo sustituyes en la igualdad que obtuviste en el inciso anterior obtienes:

____ .

d. Logaritmo del número uno.

i. Supón que $b > 0$, y que entonces $b^0 = 1$. Si aplicas $f(x) = log_b x$ a la ecuación anterior obtienes _________________ .

ii. Si simplificas la ecuación que obtuviste en el inciso i. obtienes _______________________ .

CIERRE

Generaliza las observaciones y establece las propiedades (leyes) de los logaritmos.

SD 7. CAMBIO DE BASE

APRENDIZAJES

Apr.8 Operará con logaritmos de distintas bases y aplicará sus propiedades.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

Cambio de base exponencial, cambio de base logarítmico.

APERTURA

El docente induce al estudiante para que recuerde la relació entre la equivalencia entre las funciones exponenciales y logarítmicas y verifica que (el estudiante) utilice correstamente las propiedades de los exponentes y de los logaritmos.

DESARROLLO

a. Cambio de base exponencial.

Dos funciones exponenciales con distinta base están relacionadas, es decir, es posible expresar una de ellas en términos de la otra, así, la función $f(x)=a^x$ (en base a) puede escribirse en términos de la función exponencial $f(x)=b^{kx}$ (con base b).

i. Para escribir la función $f(x)=a^x$ en la forma $f(x)=b^{kx}$ (en base b) se requiere igualar ambas funciones, si igualas las reglas de correspondencia obtienes:

____

ii. La igualdad que obtuvo en la pregunta anterior se cumple cuando los exponentes de ambos miembros son iguales (entre sí) y las bases de ambos miembros son iguales (entre sí), utilice estos hechos y obtenga la ecuación que relaciona las bases k .

____

iii. En la ecuación anterior despeje la constante k .

____

iv. Sustituya el valor que obtuvo para la constante k en el inciso **i.**

____

b. Cambio de base logarítmico.

Dos funciones logarítmicas con distinta base están relacionadas, bajo ciertas condiciones, es posible expresar una de ellas en términos de la otra, es decir, en una base distinta, así, la función $f(x)=log_a x$ (con base a) puede escribirse en términos de la función logarítmica $g(x)=log_b x$ (con base b).

i. Escriba la función $y=log_a x$ en forma exponencial (para simplificar la notación hemos supuesto que $y=f(x)$).

____ .

ii. Aplique $log_b x$ a la “expresión” que obtuvo en la pregunta anterior.

____ .

iii. Aplique las propiedades de las funciones logarítmicas y despeje la variable y de la expresión que obtuvo en la pregunta anterior.

____ .

iv. Utilice el hecho de que $f(x) = log_b x$, emplee la expresión que obtuvo en la pregunta **iii.** y escriba $y = log_a x$ en términos de logaritmos en base b.

CIERRE

Formalización, complete las proposiciones:

PROPOSICIÓN (CAMBIO DE BASE EXPONENCIAL)

Sean: a, b números positivos, $f(x) = a^x$, $f(x) = b^{kx}$, entonces ______________________________.

PROPOSICIÓN (CAMBIO DE BASE LOGARÍTMICO)

Sean: a, b números positivos, x una variable positiva y $f(x) = log_a x$, $g(x) = log_b x$, entonces ____________________.

SD 8. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

APRENDIZAJES

Apr.9 Resolverá problemas en diferentes contextos que se modelen con funciones logarítmicas y exponenciales.
Apr.10 Resolverá problemas de aplicación empleando los conocimientos adquiridos anteriormente.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

Situaciones que involucren variación de tipo logarítmico
Ecuaciones logarítmicas y exponenciales.
Resolución de problemas

APERTURA

El docente guía al estudiante en la elaboración de un resumen de las propiedades de las funciones exponenciales, de las propiedades de las funciones logarítmicas y de la equivalencia entre ambos tipos de funciones.
El docente guía una discusión sobre: el signo del exponente y el comportamiento gráfico de la función correspondiente, sobre el concepto de condición inicial, etc.

DESARROLLO

En equipo, el alumno resuelve (algunos) los problemas enlistados (bajo la supervisión del docente).

1. Suponga que una substancia se va desintegrando al cabo del tiempo. Si la función $m(t)=(100)2^{-0.8t}$ permite determinar la cantidad en gramos, que queda de esta substancia al cabo de t años, ¿cuántos gramos quedan de esta substancia al cabo de 10 años ?

2. Suponga que la cantidad de bacterias en cierto cultivo, al cabo de t horas está dada por la función $p(t)=(15000)3^{0.3t}$, ¿cuántas bacterias están presentes al cabo de 5 horas?

3. En 1966 la Comisión Internacional Contra la Captura de Ballenas, protegió a la población mundial de ballena azul contra sus depredadores. En 1978 se determinó que la población de ballenas azules, en el hemisferio sur, era de 5000. Sin depredadores y con abastecimiento abundante de alimentos, se espera que la población de este tipo de ballenas crezca exponencialmente de acuerdo a la función $n(t)=5000e^{0.05t}$, en donde t está dado en años.
a. Calcule el número de ballenas en el año 2030.
b. Pronostica la población de ballenas en el año 2047.
c. Utilice el modelo anterior y asuma 0% de natalidad y 1978 como año cero, ¿cuándo se duplicará la cantidad de ballenas azules?

4. La técnica más común para determinar la edadde un objeto (un hueso, un mueble, una tabla), es medir la cantidad de Carbono 14 que contiene. Un ser vivo (un animal, una planta) tiene una cantidad constante de Carbono 14, pero cuando muere, con el transcurso del tiempo, disminuye por el efecto de la radioactividad. La cantidad de Carbono 14 se calcula con la función $R(t)=R_0e^{-kt}$, donde R_0 es la cantidad en un ser vivo y $R(t)$ la hallada en una muestra fósil al cabo de t años de su muerte y k es una constante. El periodo de semidesintegración del Carbono 14 es de 5730 años.
a. Si la evolución de 1 gramo de Carbono 14, transcurridos 5730 años se ha reducido a la mitad, compruebe que $k\approx 0.00012$.
b. Por tanto, la función que proporciona la cantidad de Carbono es.
c. Supongamos que un hueso hallado en un yacimiento arqueológico contiene el 20 % del Carbono 14 que contenía en vida del animal, estime su antigüedad.

5. Un medicamento se elimina del cuerpo a través de la orina. La dosis inicial del medicamento es 10 miligramos y la cantidad $m(t)$ que queda en el cuerpo a las t horas está dada por la función $m(t)=10^{-0.8t}$. Para que el fármaco haga efecto debe haber en el cuerpo por lo menos 2 miligramos.
a. Determine el tiempo trancurrido para que sólo queden 2 miligramos del fármaco.

b. ¿Cuál es la semivida (o vida media) del medicamento (tiempo trancurrido hasta que la cantidad del medicamento se reduce a al mitad).

6. Suponga que el riesgo R (dado en porcentaje) de tener un accidente cal conducir un auto se puede modelar por la función $R(x) = 3e^{kx}$, donde x representa la concentración de alcohol en la sangre y k es una constante.

a. Si una concentración de alcohol en la sangre de 0.06, conlleva un riesgo de 10% de tener un accidente, determine el valor de k.

b. Con el valor de k obtenido, ¿cuál es el riesgo de tener un accidente para una concentración de alcohol en la sangre de 0.17 ?

7. Una substancia se desintegra de acuerdo a la función $Q(t) = 100e^{-0.02t}$, donde Q (en gramos) es la cantidad presente al cabo de t años. ¿Cuál es la cantidad presente al cabo de 12 años?

8. Suponga que la función $p(t) = p_0 e^{-0.06t}$, donde p_0 representa la población incial y t representa el tiempo medido en años, se usa para predecir el crecimiento poblacional de cierta ciudad. Si la población actual de la ciudad es 50000 habitantes, ¿ cuánto tiempo le tomará a la ciudad duplicar esta población?

9. Suponga que una persona es portador del virus de la gripe y regresa a su comunidad donde hay 1000 personas. La gripe es muy contagiosa y se sabe, por experiencias anteriores, que si no se aplica ningún remedio, el número de infectados por el virus crece exponencialmente a razón de un 250%. Si la función exponencial que proporciona el número de afectados al cabo de t días es $N(t) = 2.5e^{-0.9163t}$.

a. Al cabo de cuatro días, ¿cuántos afectados existen?

b. Las autoridades sanitarias conocen bien el desarrollo de la enfermedad y desde los primeros síntomas se aplica el tratamiento y el crecimiento de afectados sigue una función logística de la que sabemos la población límite, 1000 personas, y el ritmo de crecimiento está dado por la función $N(t) = \dfrac{1000}{1 + ke^{-0.9163t}}$, determine k.

c. Calcule el número de personas afectados al cabo de 5 días.

10. Suponga que las estrellas se clasifican de acuerdo a su brillo. Las estrellas más débiles (con flujo luminoso L_0) se les asigna magnitud 6. A las estrellas de mayor brillo se les asigna magnitud conforme a la función $m(L) = 6 - 2.5log\left(\dfrac{L}{L_0}\right)$, donde L representa el flujo luminoso de la estrella

a. Determine la magnitud m si el flujo luminoso de la estrella es $L = 10^{0.4} L_0$.

b. Escribe la función que nos da el flujo luminoso L dependiendo de la magnitud m y del flujo luminoso L_0.

c. ¿Qué luminosidad tendrá una estrella de primera magnitud?

CIERRE

Proporcione una lista de resultados y en caso de discrepar con los otros equipos, revise y discuta las resoluciones correspondientes.

UNIDAD IV

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

PROPÓSITOS:

Al finalizar la unidad el alumno comprenderá la extensión del concepto de razón trigonométrica a función trigonométrica. Estudiará las funciones seno y coseno en su forma característica de variación y el análisis de sus parámetros. Modelará situaciones de comportamiento periódico para resolver problemas.

INTRODUCCIÓN

Los primeros vestigios de la trigonometría se remontan a 4000 años, en Babilonia (en esa epoca territorio que actualmente corresponde a Egipto e Irak). Los egipcios fijaron las unidades de medida de los ángulos en grados, minutos y segundos, también, la astronomía precolombina poseía calendarios muy puntuales y las pirámides de Egipto fueron construidas sobre patrones astronómicos bastante exactos y puntuales. El estudio de la trigonometría continúa en la antigua Grecia, lugar en donde el matemático y astrónomo Hiparco de Nicea, construyó una tabla de cuerdas como apoyo a la resolución de triángulos. Durante varios siglos, la trigonometría de Tolomeo fue fundamental para los astrónomos. El libro de astronomía Almagesto, escrito por él, poseía una tabla de cuerdas junto con la explicación de su método de compilación, incluyendo también el catálogo estelar de mayor perfección y más completo de la antigüedad. El teorema de Menelao, utilizado para resolver triángulos esféricos fue también obra de Tolomeo.

En la India y en el mundo árabe la trigonometría también se utilizó en la Astronomía. Por otra parte, el primer uso de la función seno aparece en el Shulba o Sulba Sutras escrito en India del siglo VIII al VI a. C. Su desarrollo incluye un sistema trigonométrico basado en la función seno en vez de cuerdas como los griegos. Esta función, era la longitud del lado opuesto a un ángulo en un triángulo rectángulo. A finales del siglo X ya se habían completado los valores de la función seno y de las otras cinco funciones trigonométricas.

En el siglo XII, las culturas europeas realizan traducciones de libros de matemáticas y astronomía árabes, hecho que lleva a la expansión de la trigonometría. El primer trabajo significativo en esta materia en el continente Europeo fue escrito por el matemático y astrónomo alemán Johann Müller, por lo que es considerado fundador y un importante innovador en estos conocimientos, él desarrolla y crea importantes tratados como son De triangulis y Epitome in Almagestum en el que explica, analiza y muestra la obra de Tolomeo.

Durante el siglo XII, el astrónomo alemán Georges Joachim, introdujo el concepto moderno de las funciones trigonométricas como proporcionales en vez de longitudes de algunas determinadas líneas. En el siglo XVI el matemático francés François Vieté, incorpora en su tratado “Canon matemáticas” el triángulo polar en la trigonometría esférica. Posteriormente, a inicios del siglo XVII, el matemático escocés John Napier desarrolla los logaritmos, a los que denominó “números artificiales”. Este hecho fue trascendental en el desarrollo de la trigonometría. A mediados del siglo XVII el físico, inventor, alquimista y matemático inglés, Isaac Newton desarrolla el cálculo diferencial e integral. En el siglo XVIII, el físico y matemático suizo Leonhard Euler, propuso que las propiedades de la trigonometría eran consecuencia de la aritmética de los números complejos, también propuso la notación que actualmente se utiliza en las funciones trigonométricas, y también se le atribuyen: la propuesta de la letra e como base de los logaritmos naturales y de la unidad imaginaria, que generalmente se denota con la letra i. Euler también popularizó el número pi (π). Durante el siglo XX, la trigonometría ha sido utilizada en el estudio de los fenómenos de onda y oscilatorios, en el estudio de movimientos periódicos y en la determnación de distancias a estrellas próximas, en el cálculo de distancias entre puntos geográficos, en sistemas de navegación satelital.

La trigonometría siguió, y sigue siendo, una herramienta fundamental en el análisis moderno. Los matemáticos de los últimos tiempos están familiarizados con las funciones trigonométricas, que son utilizados en muy diversos contextos, por ejemplo, como coeficientes de los desarrollos en serie de funciones continuas, o bien como soluciones de ecuaciones diferenciales o en derivadas parciales, también se encuentran presentes en el análisis de una multitud de problemas relacionados con el estudio de los fenómenos físicos, también se encuentran com entradas de matrices relacionadas con los giros de curvas o sólidos en el plano y el espacio.

PRESENTACIÓN

La unidad IV, "Funciones trigonométricas", incluye dos secciones: la sección IV.1 que lleva el nombre "Funciones periódicas y el círculo unitario" y la sección IV.2 "Funciones senoidales y cosenoidales".

La sección IV.1 "Funciones periódicas y el círculo unitario" inicia con la clasificación de los movimientos periódicos en: movimientos circulares uniformes y movimientos vibratorios (u oscilatorios), y se proporcionan ejemplos relativos a ellos. En cada ejemplo destaca el carácter de periodicidad. A continuación rescata las observaciones que son comunes en los movimientos periódicos y los generaliza para así proporcionar la definición formal de función periódica. En la definición de función periódica incluye sus elementos como, su amplitud y periodo. Continúa el desarrollo de la sección con la presentación de gráficos y curvas asociadas a situaciones de naturaleza periódica. Posteriormente, trata lo referente a las unidades de medición de ángulos destacando el carácter dual de los radianes (como unidad de medida de ángulos y como unidad de medida de arcos de circunferencia) y proporciona su equivalencia con los grados, todo esto en relación a la circunferencia unitaria.

La sección IV.2 "Funciones senoidales y cosenoidales", inicia con el estudio de las razones trigonométricas (base de las funciones trigonométricas), considera el ángulo de referencia, del triángulo rectángulo, como variable independiente, y como variables dependientes, los segmentos dirigidos, que constituyen los catetos del triángulo rectángulo a partir del que se definen las funciones trigonométricas. Para dar forma a las curvas asociadas a las funciones trigonométricas, toma como punto de partida la elaboración de un registro tabular que incluye las asignaciones e imáginas básicas. Posteriormente, haciendo uso de consideraciones trigonométricas obtenemos otras imágenes específicas de las funciones trigonométricas, esto con la intneción de complementar el registro tabular que facilite el trazo de las curvas senoidales o cosenoidales. El siguiente paso, en el trazo de las curvas asociadas a las funciones trigonométricas, basándonos en el círculo unitario, mostramos el comportamiento periódico de este tipo de funciones. Enseguida, analizamos el efecto gráfico al variar los parámetros (amplitud, fase, frecuencia, etc.) de una senoidal. La parte final, presenta diversas situaciones que han sido modeladas por medio de las funciones senoidales y cosenoidales, es decir, de comportamiento de índole periódica.

PUNTOS PROBLEMÁTICOS

POSIBLES DIFICULTADES (PROGRAMA)	SUGERENCIAS DE APOYO
Con base en nuestra experiencia, con respecto en relaciónal desarrollo de los aprendizajes y temática incluidos en el programa de la asignatura de Matemáticas IV en la unidad correspondiente a Funciones trigonométricas, nos hemos percatado de: En relación a la congruencia entre aprendizajes y temática.	
Fila 1. Falta especificar el tipo de fenómenos periódicos.	**1.** Considere situaciones relacionadas con fenómenos vibratorios, oscilatorios y de rotación.
Fila 2. Falta señalar la igualdad de unidades empleadas al medir la longitud de un arco y la amplitud de un ángulo y las desventajas del uso de los grados como medida de amplitudes de ángulos.	**2.** Aborde este aspecto.
Fila 3. No menciona la círcunferencia unitaria, circunferencia que resulta imprescindible, en la construcción de las funciones trigonométricas.	**3.** Tome como base de la construcción de las funciones seno y coseno, a la circunferencia unitaria.
Fila 4. El concepto de razón trigonométrica ya fue estudiado en otros cursos, parece que el término adecuado es relación trigonométrica. No distingue entre razón, relación y función trigonométrica, no señala la continuidad de éstas funciones y las trata como funciones discretas.	**4.** Aclare las diferencias entre razón, relación y función. Señale algún método o forma de obtener otras imágenes bajo las funciones trigonométricas. Señale que estas funciones son contínuas.
Fila 5. No aplican.	**5.** No aplican.
Fila 6. La construcción de modelos puede ser un tanto complicada.	**6.** Puede retomar modelos y situaciones propuestas en la literatura y concretarse a obtener valores específicos y procurar interpretarlos.

POSIBLES DIFICULTADES (ALUMNOS)	SUGERENCIAS DE APOYO
Con base en nuestra experiencia, con respecto al desarrollo de los aprendizajes y temática incluidos en el programa de la asignatura de Matemáticas IV en la unidad correspondiente a Funciones trigonométricas, nos hemos percatado de:	
Fila 1. Confusión entre la variable independiente y la función (variable dependiente).	**1.** Debe señalar las diferencias entre ambas variables en el contexto del problema.
Fila 2. No aplican.	**2.** No aplican.
Fila 3. No aplican.	**3.** No aplican.
Fila 4. Problablemente el estudiante no recuerde las características de los triángulos que son adecuados para el cálculo de las imágenes de las funciones trigonométricas.	**4.** Aclare las diferencias entre razón, relación y función. Señale algún método o forma de obtener otras imágenes bajo las funciones trigonométricas. Señale que estas funciones son contínuas.
Fila 5. No aplican.	**5.** No aplican.
Fila 6. No aplican.	**6.** No aplican.

TIEMPO REQUERIDO

16 Horas

RECURSOS GENERALES

BIBLIOGRAFÍA GENERAL

Barnett, R., (2007) *Precálculo Funciones y gráficas. México*: MCGRAW HILL (4ª Edición).
Demana, F., (2007) *Precálculo Gráfico Numérico Algebraico.* México: PEARSON (7ª Edición).
Stewart, J., (2007) *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo*. México: CENGAGE LEARNING (7ª Edición).
Larson, R., (2008) *Precálculo. México.* REVERTÉ (7ª Edición)
Sobel, M., (1998) *Precálcu*lo. México: PRENTICE HALL HISPANOAMERICANA (4ª Edición).
Swokowski, E., (2015) *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: CENGAGE Learning. (13ª edición.)
Zill, D., (2008) *Precálculo con avances de cálculo*: México. MC GRAW HILL (4° Edición)

SITIOS WEB

www.matesfacil.com (Recuperado agosto de 2018)
https://www.google.com.mx/search?q=portal+academico+cch&oq=PORTAL+ACA&aqs=chrome.0.0j69i57j69i60j0l3.6191j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8 (Recuperado agosto de 2018)

DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS

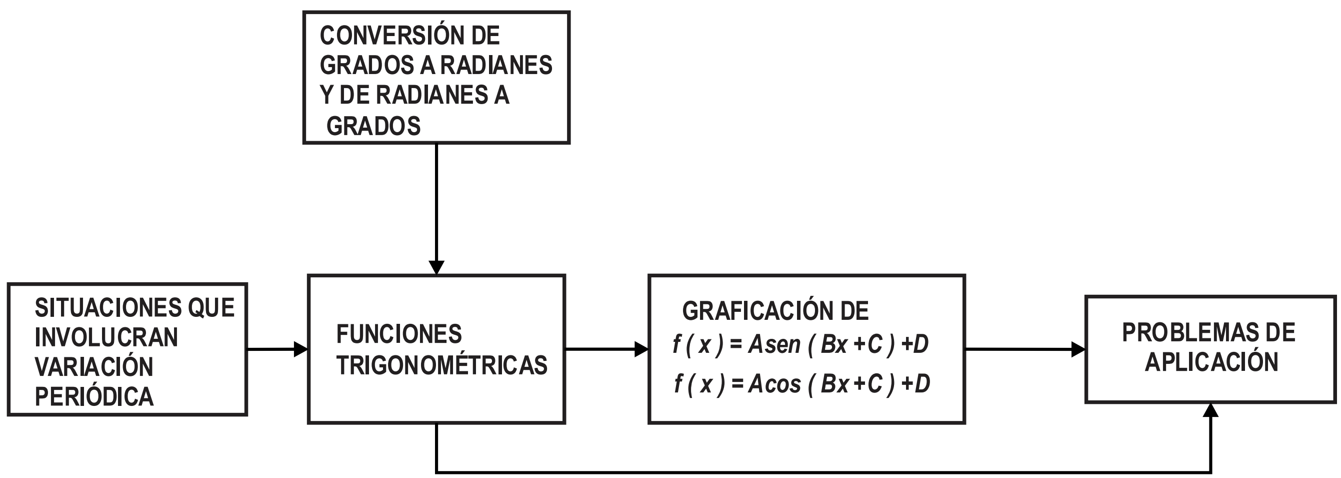
Ordenador
Proyector de vídeos.

SOFTWARE

Geogebra
Symbolab

2

ESTRUCTURA TEMÁTICA: UNIDAD IV FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



SECCIÓN IV.1 | FUNCIONES PERIÓDICAS Y EL CÍRCULO UNITARIO

APRENDIZAJES Y CONTENIDOS TEMÁTICOS

SECCIÓN	APRENDIZAJES	CONTENIDOS TEMÁTICOS
IV.1	**Apr.1** Explorará situaciones o fenómenos de variación periódica. **Apr.2** Convertirá medidas angulares de grados a radianes y viceversa.	Situaciones o fenómenos de variación periódica. Medidas angulares en grados y radianes. Conversiones.

CONCEPTOS CLAVE

Los siguientes conceptos son fundamentales para un buen desarrollo del curso:

i. Función periódica.

ii. Amplitud, periodo y frecuencia.

TIEMPO ESTIMADO

En situaciones regulares se invierten 3 horas en el desarrollo de los aprendizajes antes señalados.

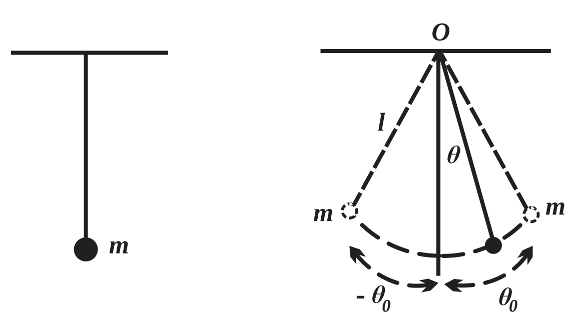
PROCESOS Y ALGORITMOS BÁSICOS

El alumno debe utilizar y manejar los procesos de:

i. Trazo de la curva asociada a una función periódica a partir de un periodo.

DESARROLLO

Estrategias didácticas, actividades de enseñanza aprendizaje, materiales de apoyo, identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
i. Proponga al estudiante diversos movimientos periódicos, movimientos oscilatorios y vibratorios como los propuestos en la actividad IV.1.	¿Qué es un movimiento periódico? Un movimiento periódico asociado a un objeto tiene la característica de que la trayectoria (del objeto) se repite en intervalos iguales de tiempo, son ejemplos de movimientos periódicos: **ACTIVIDAD IV.1** MOVIMIENTOS PERIÓDICOS **a.** MOVIMIENTOS CIRCULARES UNIFORMES Un movimiento circular uniforme, se caracteriza porque el objeto que lo describe, se desplaza sobre el perímetro de un círculo con una rapidez constante, ejemplos de estos movimientos son: **i.** El desplazamiento de la punta de la aguja de un reloj analógico. **ii.** El desplazamiento de los puntos terminales de las aspas de un ventilador. **iii.** El dezplazamiento de los puntos de una hélice. **iv.** El movimiento de rotación de la válvula de aire de una llanta. **v.** El desplazamiento de un péndulo alrededor de su posición de equilibrio. **b.** MOVIMIENTOS VIBRATORIOS Son aquellos movimientos en los que el objeto se desplaza de un lugar a otro respecto a una posición de equilibrio estable. **i.** El movimiento de vibración de la membrana de un tambor. **ii.** El movimiento de vibración de la cuerda de un instrumento musical. **iii.** El movimiento que efectúa una masa colgante de un resorte en equilibrio. La masa se desplaza respecto a su posición de equilibrio y luego es soltada, entonces se produce un movimiento periódico, de amplitud definida en torno a la posición señalada. **iv.** El movimiento que efectúa un pistón dentro de un émbolo. △ **ACTIVIDAD IV.2** MOVIMIENTOS PERIÓDICOS ESPECÍFICOS **a.** Un péndulo simple consiste en un objeto suspendido de un hilo (de peso despreciable). Cuando un péndulo se desvía hacia un lado (por ejemplo hacia la izquierda) de su posición de equilibrio (digamos un ángulo θ_0) y luego se suelta, oscila (sobre un plano) alrededor de su posición de equilibrio O, desde $-\theta_0$ hasta θ_0 con un movimiento, que es a la vez, periódico y oscilatorio (suponiendo condiciones ideales), vea la *figura IV.1*. Si $\theta(t)$ describe el movimiento angular del péndulo, se cumple $\theta(t)=\theta(t+T)$ donde T es el periodo de oscilación,es decir, el tiempo que tarda el péndulo a su posición inicial.  **FIGURA IV.1**	**1.** El concepto de velocidad angular constante no se estudia en los cursos de matemáticas, trátelo intuitivamente. **2.** En los movimientos circulares, los desplazamientos se efectúan sobre arcos circulares.

<table>
<tr><th>Observaciones y sugerencias</th><th>Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo</th><th>Dificultades y soluciones</th></tr>
<tr><td></td><td>

b. Un oscilador armónico, es un “cuerpo” que al moverlo fuera de su posición de equilibrio oscila en torno a ella. En la *figura IV.2* (el “oscilador armónico”, compuesto por un sistema masa - resorte) el resorte ha sido estirado respecto a su posición de equilibrio O y luego se ha dejado en libertad, como consecuencia, la masa (bloque negro) oscila en torno a su posición de equilibrio O. El desplazamiento de la masa la describe la función $x(t)$ (y bajo condiciones ideales) y varía de $-x_0$ hasta x_0 en el tiempo $t=T$, esta variación es periódica y cumple la condición $x(t)=x(t+T)$, en donde t representa el tiempo, vea la *figura IV.2*.

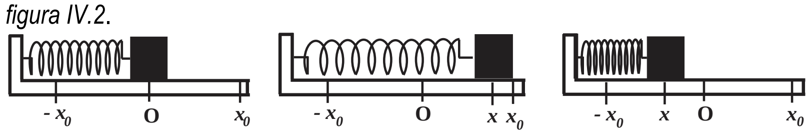


FIGURA IV.2

c. La *figura IV.3* muestra el mecanismo conocido como yugo. Si el eslabón 2 gira con velocidad angular constante, entonces efectúa un movimiento periódico, completa un giro alrededor de la articulación O en un mismo período de tiempo. Simultáneamente, los eslabones 3 y 4 de este mecanismo realizan movimientos periódicos.

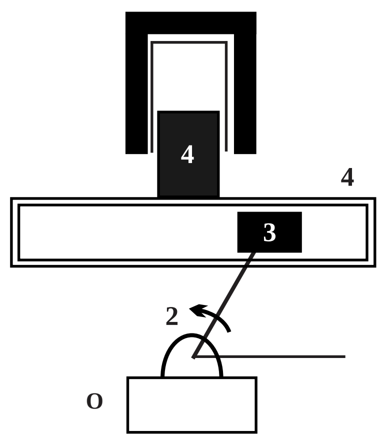


FIGURA IV.3

△

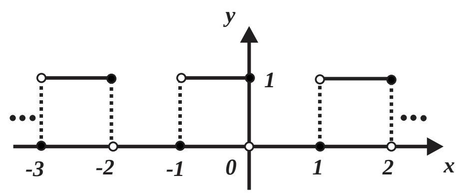
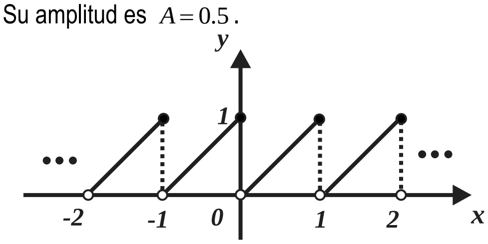
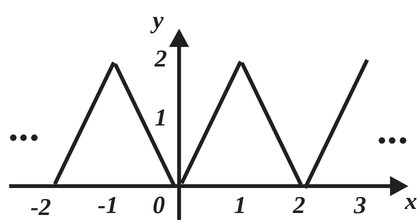
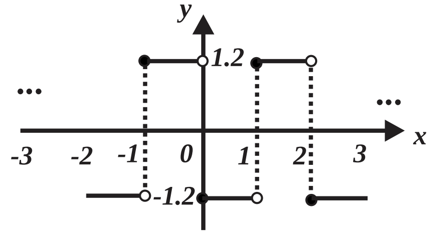
DEFINICIÓN IV.1 (FUNCIÓN PERIÓDICA)
a. La función con regla de correspondencia f, que satisface $f(x)=f(x+T)$ para cualquier número x en su dominio, y para algún número real positivo T, se denomina función periódica con periodo T.
b. El valor positivo de menor tamaño de T es el periodo de la función.
c. La amplitud de una función periódica es la semidiferencia entre el valor máximo y el valor mínimo del desplazamiento.

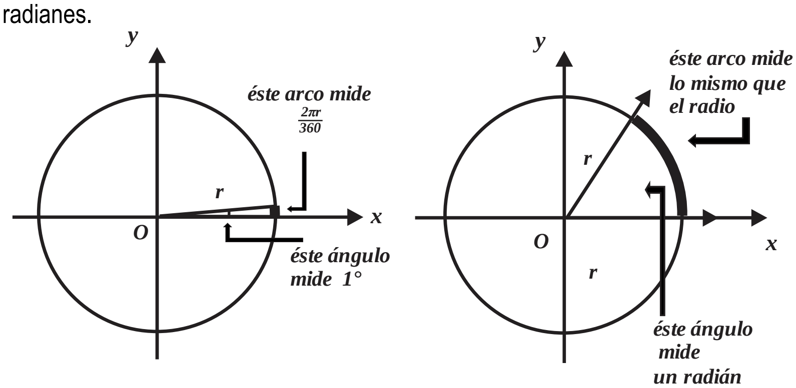
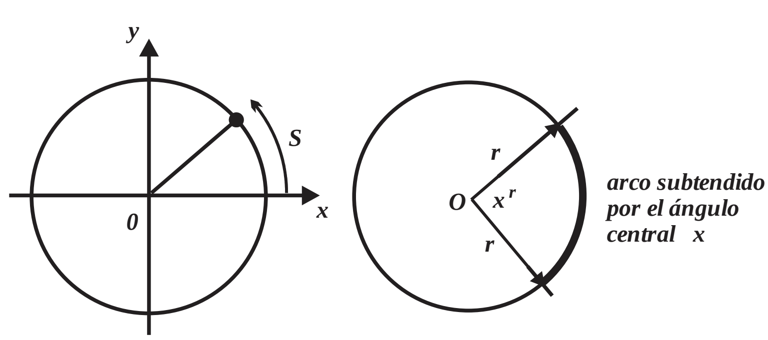
La condición de periodicidad de una función periódica, se manifiesta en el plano cartesiano por medio de una curva que se repite en cada intervalo de longitud T. La *actividad IV.3* muestra los gráficos de funciones periódicas, así como algunas de sus características (regla de correspondencia, gráfica, periodo y amplitud).

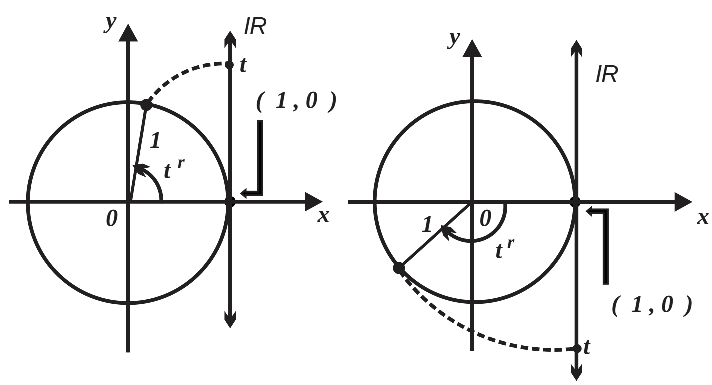
</td><td>

3. T tiene que ser el mínimo, de no serlo, la función f también sería periódica con período $2T$, $3T$, $4T$, etc. y tendríamos un número indefinido de definiciones de período.

</td></tr>
</table>

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
ii. Proponga gráficos que correspondan a funciones periódicas, solicite al estudiante que identifique los elementos del movimiento periódico que representan.	**ACTIVIDAD IV.3** (FUNCIONES PERIÓDICAS) **a.** La *figura IV.4* muestra la función periódica llamada "onda cuadrada", con amplitud $A=0.5$ y regla de correspondencia $f(x)=\begin{cases} 0 & 0<x\leq 1 \\ 1 & 1<x\leq 2 \end{cases}$ con periodo $T=2$.  **FIGURA IV.4** **b.** La función periódica "diente de sierra", que muestra la *figura IV.5,* inicia y termina en los puntos $(0,0)$, $(1,1)$, respectivamente. Tiene pendiente $m=1$ y la regla de correspondencia que la define es $f(x)=x$ siempre que $0<x\leq 1$ y periodo $T=1$. Su amplitud es $A=0.5$.  **FIGURA IV.5** **c.** La *figura IV.6* muestra otro tipo de función periódica "diente de sierra", tiene regla de correspondencia $f(x)=\begin{cases} 2x & si \quad 0\leq x\leq 1 \\ -2x & si \quad 1<x<2 \end{cases}$ de periodo $T=2$ y amplitud $A=1$.  **FIGURA IV.6** **d.** El gráfico mostrado en la *figura IV.7* tiene regla de correspondencia $f(x)=\begin{cases} -1.2 & -1<x\leq 0 \\ 1.2 & 0<x\leq 1 \end{cases}$ con periodo $T=2$, su amplitud es $A=1.2$.  **FIGURA IV.7**	**4.** El programa de la asignatura de Matemáticas IV no incluye el estudio de funciones definidas por secciones, maneje este concepto intuitivamente.

Observaciones y sugerencias	**Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo**	**Dificultades y soluciones**
ii. Señale las razones por las que los grados no son unidades adecuadas en la medición de ángulos. **iii.** Establezca la dualidad "arco ángulo central".	**Medida de ángulos** A la amplitud (o medida) de un ángulo se le pueden asignar dos tipos de unidades, éstas unidades son: los grados y los radianes. La amplitud de un ángulo puede definirse en términos de una circunferencia centrada en el eje de coordenadas del plano cartesiano, si éste es el caso, el vértice del ángulo (que se desea medir) se sitúa en el centro de la circunferencia de manera que su lado inicial coincida con la parte positiva del eje de las abscisas; los ángulos se consideran positivos si se miden en sentido inverso al movimiento de las manecillas de un reloj, y negativos en el mismo sentido de dicho movimiento. Un grado es una medida sexagesimal, así, un ángulo de vuelta entera mide $360°$, un ángulo recto tiene una amplitud de $90°$ y un ángulo llano tiene una amplitud de $180°$. El radian es una unidad longitudinal, y un ángulo de longitud de amplitud igual a un radian abarca un arco de circunferencia de longitud igual al radio con el que ha sido trazada la circunferencia. En una circunferencia de radio de longitud 1 una vuelta completa mide 2π radianes, un ángulo de amplitud de un cuarto de vuelta mide $\frac{\pi}{2}$ radianes; y un ángulo de amplitud de media vuelta mide π radianes.  **FIGURA IV.8** Ordinariamente, en geometría, se utilizan números con unidades en grados para asignar amplitudes a los ángulos, sin embargo, en funciones el asignar medidas de angulos en grados resulta inoperante, ¡los grados presentan la desventaja de estar definidos en base sexagesimal! Para dar solución a esta problemática es necesario transformar los grados en números reales, esto se consigue estableciendo una equivalencia entre la amplitud de un ángulo y la longitud del arco que subtiende, vea la *figura IV.9*.  **FIGURA IV.9**	**iii.** La dualidad en cuanto a la longitud de un arco y la amplitud del ángulo central que lo subtiende es confusa, utilice figuras adecuadas.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
iii. Guíe al estudiante para que “descubra” la relación entre radianes y grados.	Para establecer la equivalencia entre ángulos y arcos, se toma como referencia una circunferencia de radio de longitud uno anclada en el origen, la longitud de la circuferencia coincide con el arco subtendido por un ángulo de vuelta entera, es decir, $360° = 2\pi^r$ o simplemente $180° = \pi^r$ (el superíndice ^{r} corresponde a las unidades en que se mide el arco). **DEFINICIÓN IV.2** (GRADO Y RADIÁN) Sea una circunferencia de radio con longitud 1, entonces: **a.** Un ángulo de medida (amplitud) de un grado interseca a un arco cuya longitud es $\frac{2\pi r}{360}$. **b.** Un ángulo mide un radián, si sus lados determinan un arco de longitud igual a un radio en una circunferencia. **c.** La amplitud de un ángulo en términos del arco que subtiende es $180° = \pi^r$ Los radianes son medidas numéricas, es decir, son números reales, por tanto, no es necesario representarlos como ángulos. Suelen representarse y medirse sobre la recta real. Su ilustración corresponde al punto que se obtiene al rodar la circunferencia de radio 1 sobre la recta real. La *figura IV.10* describe la relación entre la longitud de un arco del círculo unitario y la recta numérica, note que la recta real IR es tangente al círculo unitario en el punto $(1, 0)$ y a partir de éste punto se miden los ángulos positivos. Así, cada punto t en la recta numérica tiene asociado un punto de la círcunferencia unitaria (en consecuencia, un ángulo medido en radianes) y viceversa, cada punto $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria tiene asociado un punto t en la recta numérica.  **FIGURA IV.10** **ACTIVIDAD IV.4** (TRANSFORMACIÓN DE UNIDADES ANGULARES) **En una circunferencia de radio de longitud** 1: **a.** El ángulo de amplitud $45°$, tiene asociado un arco de longitud $(45)\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$ radianes. **b.** El ángulo de amplitud $\theta = -18°$, tiene asociado un arco de longitud $(-18)\frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{10} \approx -0.31416$ radianes. **c.** El arco de longitud $\theta = 1.64^r$, tiene asociado un ángulo de amplitud	

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
	$(1.64)\frac{180°}{\pi} \approx 93.965°$. **d.** El arco de longitud $\theta = -5.072^r$ tiene asociado un ángulo de amplitud $(-5.072)\frac{180°}{\pi} \approx -290.604°$. △	

Ejercicios y actividades adicionales

Con el propósito de reforzar los aprendizajes alcanzados por los estudiantes, UD. puede implementar en el desarrollo de sus clases algunos de los siguientes ejercicios o actividades.

1. Un reloj (digital) tiene en su carátula los números enteros del 1 al 12. Suponga que en este instante indica que son las 9 horas.
a. ¿Dentro de 3 horas, ¿qué hora indicará?
b. ¿Dentro de 9 horas, ¿qué hora indicará?
c. ¿Dentro de 12 horas, ¿qué hora indicará?
d. Trace la gráfica que describe la hora señalada por el reloj en un periodo de 12 horas a partir de la hora inicial.
e. Trace varios periodos.

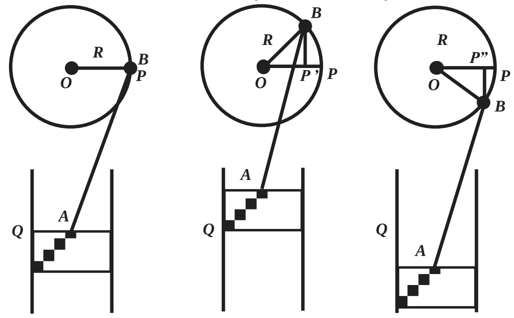
2. Una hormiga se desplaza, a velocidad constante, sobre una línea (de longitud igual a 20 centímetros, misma que recorre en 2 segundos), para luego retornar a la misma velocidad al punto inicial. Suponga que realiza este recorrido "muchas veces".
a. Trace la "curva" que describe el desplazamiento de la hormiga.
b. Determine la regla de correspondencia de la función que describe el desplazamiento de la hormiga.

3. Suponga que cada dos segundos se emite una señal sonora cuya intensidad es constante y dura 3 segundos.
a. Trace la "curva" que describe la intensidad de la señal.
b. Determine la regla de correspondencia de la función que describe esta situación.

4.
a. ¿Qué distancia recorre un triciclo, si sus llantas tienen un radio exterior de 40 centímetros y éstas giran 40 veces?
b. ¿Qué distancia a recorrido el punto extremo de la manecilla de un reloj desde las cero horas hasta las $10:45$ horas?, suponga que la manecilla tiene una longitud de 12 centímetros.
c. ¿Qué distancia recorre un ciclista, si los radios exteriores de sus llantas son 29 centímetros y éstas dan 253 revoluciones?
d. De una pizza en forma circular, de radio de longitud de 20 centímetros, se ha cortado un rebanada que forma un ángulo central de 30 grados, suponga que la altura de la pizza mide 2 centímetros y es uniforme, ¿cuál es el volumen de la rebanada?
e. ¿Cuál es el volumen de una rebanada de pastel que forma un ángulo de 18 grados, si su radio mide 18 centímetros y su altura es 10 centímetros).

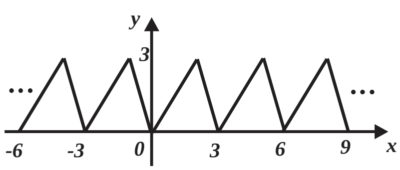
5. En un reloj analógico, el movimiento de las manecillas y el ángulo que forman respecto al segmento de recta $6h \to 12h$. Determine la regla de correspondencia que describe el punto extremo de la manecilla en función del tiempo y trace la curva de la función.
a. Suponga que la longitud del minutero es 8 centímetros.
b. Suponga que la longitud del horario es 5 centímetros.

6. La siguiente figura representa un pistón, el punto B se desplaza sobre la circunferencia de radio OP, mismo que forma un ángulo de amplitud x respecto al segmento de recta OP que es paralelo a la parte superior del pistón. Q es el punto de equilibrio, para un periodo.
a. ¿En qué instantes el pistón tiene un menor desplazamiento?
b. ¿En qué instantes el pistón tiene un mayor desplazamiento?
c. Trace una curva aproximada, que describa el movimiento del punto A del pistón.

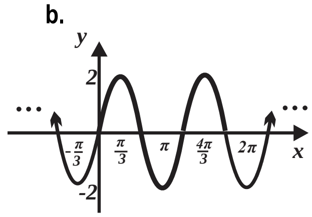


7. Determine el periodo y la amplitud, suponga curvas asociadas a situaciones periódicas.

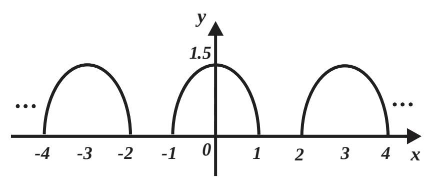
a.



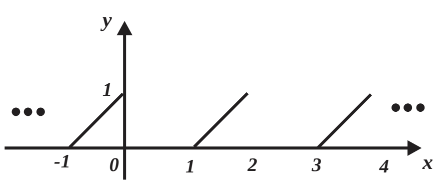
b.



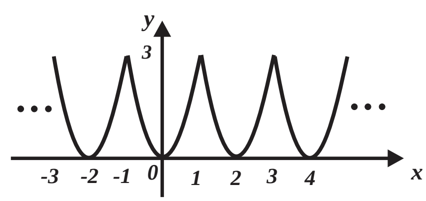
c.



d.



e.



8. Suponga que los siguientes ángulos centrales pertenecen a un círculo de radio de longitud uno, determine la longitud del arco.
a. $\theta = 5°$. **b.** $\theta = 583°$. **c.** $\theta = 23°$. **d.** $\theta = 883°$. **e.** $\theta = 98°$. **f.** $\theta = -19°$.
g. $\theta = 162°$. **h.** $\theta = -87°$. **i.** $\theta = 191°$. **j.** $\theta = -503°$.

9. Suponga que los siguientes arcos subtienden ángulos centrales en una circunferencia de longitud uno y determine la amplitud del ángulo.
a. $\theta = 0.3^r$. **b.** $\theta = 8.3^r$. **c.** $\theta = 1.64^r$. **d.** $\theta = -2.3^r$. **e.** $\theta = 5.38^r$. **f.** $\theta = -1.6^r$.
g. $\theta = 0.072^r$.

10. La longitud de un arco de circunferencia de radio r se calcula por medio de la función $l\left(\theta^r\right) = r \cdot \theta^r$. Determine la longitud de arco de las circunferencias:
a. $\theta = 30^0$ y $r = 4$. **b.** $\theta = 120^0$ y $r = 2$. **c.** $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $r = 6$. **d.** $\theta = \frac{14\pi}{9}$ y $r = 5$.

11. Un auto en una pista circular recorre un ángulo de $135°$ y barre un arco de longitud 54π.
a. Determine el radio de la pista circular.
b. Determine el área del sector circular recorrida.

12. Un caballo está amarrado a un poste con una cuerda de longitud "L", el caballo solo se puede movilizar en el área en que la cuerda se lo permite. Si incrementamos 10 metros la longitud de la cuerda, el área por el cual se moviliza el caballo se cuadruplica. ¿Cuál es la longitud de la cuerda original?

13. a. El péndulo de un reloj al balancearse describe un ángulo de $20°$ y un arco de longitud 3π. ¿Cuál es la longitud del péndulo?
b. La llanta de una bicicleta de radio 0.4 metros recorre 5 vueltas por minuto ($5rpm$) ¿calcular la distancia que recorrió la llanta en 30 minutos?

14. El área de un sector circular de radio r, se calcula por medio de la función $s(\theta)=\frac{1}{2}r^2\theta^r$. Determine el área de un sector circular:

a. $\theta=15^0$ y $r=4$. **b.** $\theta=\frac{\pi}{9}$ y $r=6$. **c.** $\theta=110^0$ y $r=2$. **d.** $\theta=\frac{20\pi}{9}$ y $r=5$.

15. El área de un huso esférico (parte de la superficie de una esfera comprendida entre dos planos que se cortan en el diámetro) de radio r se calcula por medio de la función $A(\theta^r)=4\pi r^2\left(\frac{\theta^r}{2\pi}\right)$. Determine el área de un huso esférico si:

a. $\theta=30^0$ y $r=4$. **b.** $\theta=\frac{\pi}{12}$ y $r=6$. **c.** $\theta=120^0$ y $r=2$. **d.** $\theta=\frac{5\pi}{6}$ y $r=5$.

16. El volumen V de una cuña esférica (de radio de longitud r) se calcula utilizando la función $V(\theta^r)=\frac{4}{3}\pi r^3\left(\frac{\theta^r}{2\pi}\right)$.

Determine el volumen de una cuña esférica si:

a. $\theta=45^0$ y $r=2$. **b.** $\theta=\frac{\pi}{12}$ y $r=3$. **c.** $\theta=120^0$ y $r=2$. **d.** $\theta=\frac{4\pi}{3}$ y $r=2$.

SECCIÓN IV.2	FUNCIONES SENOIDALES Y COSENOIDALES

APRENDIZAJES Y CONTENIDOS TEMÁTICOS

SECCIÓN	APRENDIZAJES	CONTENIDOS TEMÁTICOS
IV.2	**Apr.3** Comprenderá la forma en que se extienden o generalizan las razones trigonométricas para ángulos arbitrarios. **Apr.4** Extenderá el concepto de razón trigonométrica a función, mediante la elaboración de una tabla o gráfica de: $f(x)=sen\,x$, $g(x)=cos\,x$. **Apr.5** Analizará e identificará los parámetros que aparecen en las funciones: $f(x)=Asen(Bx-C)+D$ y $g(x)=Acos(Bx-C)+D$, A como amplitud, B frecuencia, D desplazamiento vertical y desfasamiento. **Apr.6** Utilizará las funciones trigonométricas para representar fenómenos de variación periódica.	Razones trigonométricas seno, coseno y tangente para cualquier ángulo. Funciones trigonométricas: $f(x)=sen(x)$ $g(x)=cos(x)$ Gráfica, dominio, rango, ceros amplitud, período. Gráfica de las funciones: $f(x)=Asen(Bx-C)+D$ $g(x)=Acos(Bx-C)+D$. Análisis del comportamiento de la gráfica respecto de los parámetros A, B, C y D Problemas de aplicación.

CONCEPTOS CLAVE

Los siguientes conceptos son fundamentales para un buen desarrollo del curso:
i. Función seno, función coseno.
ii. Amplitud, periodo, frecuencia, fase.

TIEMPO ESTIMADO

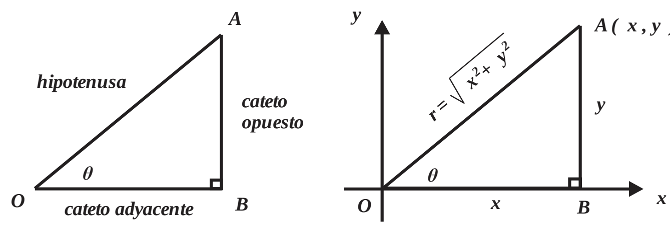
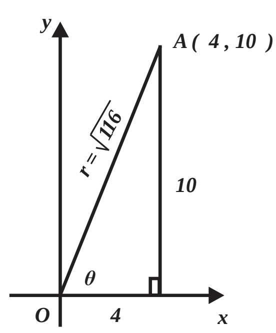
En situaciones regulares se invierten 15 horas en el desarrollo de los aprendizajes antes señalados.

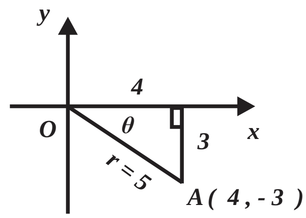
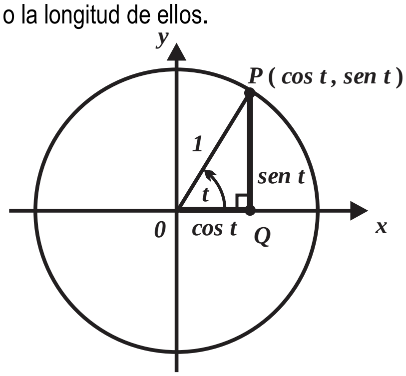
PROCESOS Y ALGORITMOS BÁSICOS

i. Trazo de la curva asociada a funciones senoidales y/o cosenoidales.

DESARROLLO

Estrategias didácticas, actividades de enseñanza aprendizaje, materiales de apoyo, identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución.

Observaciones y sugerencias	**Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo**	**Dificultades y soluciones**
i. Establezca la diferencia entre una razón, una relación y una función, establezca las diferencias entre ellos.	La construcción de las funciones trigonométricas se fundamentan en, un triángulo rectángulo, las razones trigonométricas y el plano cartesiano. El triángulo rectángulo se coloca en el plano cartesiano de manera que su base coincida con el eje de las abscisas y uno de sus vértices con el origen. La *figura IV.11* muestra el triángulo rectángulo OBA en el plano cartesiano, el ángulo $\angle BOA$ esté en posición normal, su vértice O coincide con el origen, tiene una amplitud (o medida de θ radianes y la longitud de su hipotenusa es $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Así, las razones trigonométricas, respecto al ángulo $\angle\theta=\angle BOA$, se definen en términos de la abscisa, la ordenada y la longitud de la hipotenusa.  **FIGURA IV.11**	**1.** Suelen considerarse los conceptos de razón y relación como equivalentes, contextualice el significado de cada uno de ellos.
ii. Defina las razones trigonométricas de manera formal.	**DEFINICIÓN IV.3** (RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO) Sean: el triángulo rectángulo AOB en el plano cartesiano de forma que el ángulo $m\angle BOA=\theta$, $A(\,x\,,\,y\,)$ un punto del lado terminal de la hipotenusa y $r=\sqrt{x^2+y^2}\neq 0$ la longitud de la hipotenusa, entonces: **a.** $seno\,\theta=sen\,\theta=\dfrac{ordenada}{longitud\ de\ OA}=\dfrac{y}{r}$. **b.** $coseno\,\theta=cos\,\theta=\dfrac{abscisa}{longitud\ de\ OA}=\dfrac{x}{r}$. **c.** $tangente\ \theta=tg\ \theta=\dfrac{ordenada}{abscisa}=\dfrac{y}{x}$. **ACTIVIDAD IV.5** (CÁLCULO DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS) **a.** En la *figura IV.12*, el lado terminal del ángulo $\angle BOA$ contiene al punto $A(\,4\,,10\,)$, entonces $x=4$ y $y=10$; de donde, la hipotenusa tiene longitud $r=\sqrt{4^2+(\,10\,)^2}=\sqrt{116}$. Así, $sen\ \theta=\dfrac{10}{\sqrt{116}}$, $cos\ \theta=\dfrac{4}{\sqrt{116}}$ y $tg\ \theta=\dfrac{10}{116}$.  **FIGURA IV.12**	

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
iii. No olvide que en el plano cartesiano, los segmentos de recta que forman a un triángulo están dirigidos.	**b.** En la *figura IV.13.*, el lado terminal de un ángulo $\angle BOA$ contiene al punto $A(4,-3)$, entonces $x=4$ y $y=-3$. La longitud de la hipotenusa es $r=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$, por tanto, $sen\,\theta=-\frac{3}{5}=-0.6$, $cos\,\theta=-\frac{4}{5}=-0.8$ y $tg\,\theta=-\frac{3}{4}=-0.75$.  **FIGURA IV.13** △	**2.** El signo asociado a un segmento de recta en el plano cartesiano se refiere a su posición en el plano cartesiano y de ninguna manera está relacionado con su longitud.
iv. Insista en la definición de función.	Si en la *definición IV.3* consideramos que: el ángulo $\angle\theta$ es variable, tiene amplitud variable θ y que es posible asignarle los valores, entonces $f\ (\theta)=sen\,\theta$ y $g\ (\theta)=sen\,\theta$, son relaciones entre dos variables, por tanto, tiene asociados un dominio y un rango (recorrido o conjunto imagen) y ¡también satisfacen la definición de función!, es decir, $f\ (\theta)=sen\,\theta$ y $g\ (\theta)=sen\,\theta$ son funciones. En la *figura IV.14*, O es el origen del plano cartesiano y a la vez el centro de una circunferencia de radio de longitud 1, el punto P pertenece a la circunferencia y Q es la proyección (perpendicular) del punto P en el eje x, entonces estos tres puntos definen el triángulo OPQ. Así, $\overline{PQ}=sen\,t$ y $\overline{OQ}=cos\,t$ (no olvide que los segmentos de recta involucrados están orientados, por lo que es posible asignarles signo negativo). Las longitudes de los segmentos (dirigidos por lo que admiten signo negativo) $\overline{PQ}$ y $\overline{OQ}$ dependen (son función) de la amplitud del ángulo t, es decir, $\overline{PQ}(t)=sen\,t$ y $\overline{OQ}(t)=cos\,t$ (en lo sucesivo daremos un significado dual a $\overline{PQ}$ y $\overline{OQ}$, según nos convenga, pueden representar segmentos de recta o la longitud de ellos.  **FIGURA IV.14** En la *figura IV.13*, la longitud del segmento dirigido $\overline{PQ}$ (altura del triángulo OPQ) es la imagen del ángulo específico t, bajo la función $f\ (t)=sen\,t$, y la	

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

v. Con base en la "circunferencia unitaria" defina las funciones trigonométricas seno y coseno de manera completa (regla de correspondencia, dominio y contradominio).

iv. Guíe al estudiante par que obtenga las imágenes (inmediatas) de asignaciones específicas al ángulo que define el dominio de las funciones trigonométricas.

longitud del segmento de recta dirigido $\overline{OQ}$ (base del triángulo OPQ) es la imagen del ángulo t bajo la función $g_0(t) = \cos t$. El lector debe tener en cueta que los valores de $f(t) = \operatorname{sen} t$ y $g(t) = \cos t$ oscilan entre -1 y 1, por lo que $img(\operatorname{sen} t) = [-1, 1]$ y $img(\cos t) = [-1, 1]$. Por otra parte, el punto P puede rotarse tantas veces como se desee (en ambos sentidos), esto significa que el dominio de las funciones $f(t) = \operatorname{sen} t$ y $g(t) = \cos t$ es el conjunto de los números reales.

La *definición IV.4* formaliza las observaciones hechas anteriormente.

DEFINICIÓN IV.4 (FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SENO Y COSENO)
Sea t un número real y $P(x, y)$ el punto terminal del radio correspondiente al ángulo $\angle t$ en la circunferencia unitaria, entonces:
a. La función seno tiene regla de correspondencia $f_0(t) = \operatorname{sen} t$, $dom(\operatorname{sen} t) = IR$, e $img(\operatorname{sen} t) = [-1, 1]$.
b. La función coseno tiene regla de correspondencia $g_0(t) = \cos t$, $dom(\cos t) = IR$ e $img(\cos t) = [-1, 1]$.

El siguiente paso en el estudio de las funciones trigonométricas consiste en el trazo de la curva que tienen asociada. La *figura IV.15*, justifica los valores asumidos por funciones trigonométricas $f_0(t) = \operatorname{sen} t$ y $g_0(t) = \cos t$ de la *tabla IV.1*.

Ángulo	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\operatorname{sen} t$	0	1	0	–1	0
$\cos t$	1	0	–1	0	1

TABLA IV.1

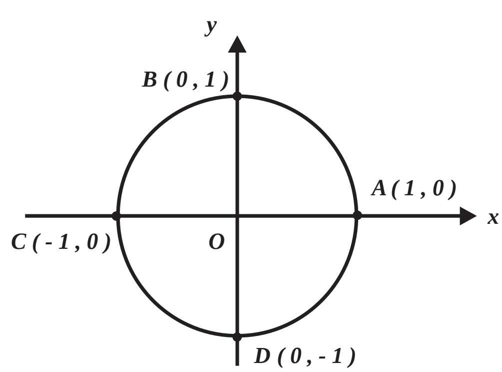


FIGURA IV.15

Con base en la *figura IV.15* determinemos las imágenes de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$, bajo las funciones $f_0(t) = \operatorname{sen} t$ y $g_0(t) = \cos t$.

2. La notación se refiere a longitudes de segmentos dirigidos, por tanto, puede ser negativa.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

v. Guíe al estudiante en la obtención de las imágenes de las asignaciones ($\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$) a la variable independiente de las funciones trigonométricas. Integre los resultados en una tabla.

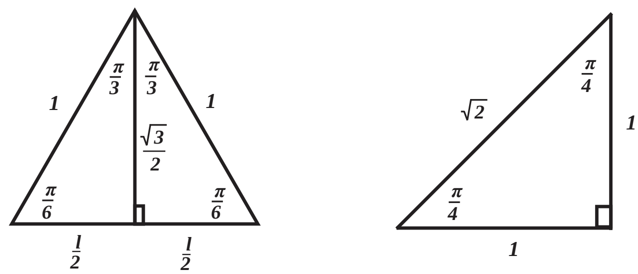


FIGURA IV.16

Por ejemplo, $f_0\left(\frac{\pi}{6}\right)=sen\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f_0\left(\frac{\pi}{3}\right)=sen\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ y $f_0\left(\frac{\pi}{4}\right)=sen\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

La *tabla IV.2* se construye utilizando razonamientos similares al anterior.

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$sen\, t$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$cos\, t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

TABLA IV.2

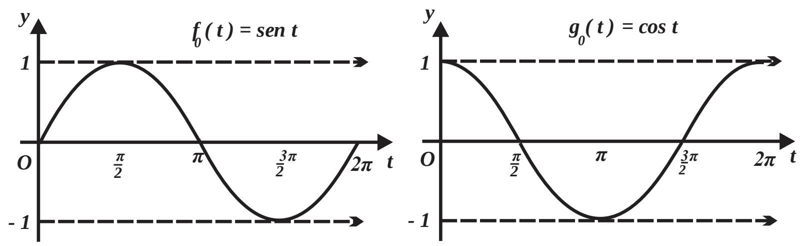
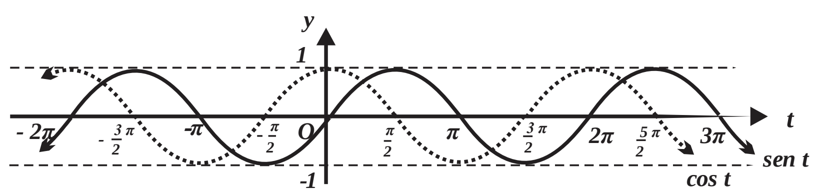
vi. Guíe al estudiante para que, tomando como base la "circunferencia unitaria" identifique el carácter de monotonía de las funciones trigonométricas y plasme sus observaciones en una tabla.

Si en la *figura IV.14*, el radio de la circunferencia unitaria rota, y el ángulo t toma valores en el intervalo $[0, 2\pi]$, entonces el comportamiento de las funciones $f_0(t)=sen\, t$ y $g_0(t)=cos\, t$, se resume en la *tabla IV.3*.

Intervalo para t	$f(t)=sen\, t$	$f(t)=cos\, t$
$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	crece desde 0 hasta 1.	decrece desde 1 hasta 0
$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	decrece desde 1 hasta 0.	decrece desde 0 hasta -1.
$\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$	decrece desde 0 hasta -1.	crece desde -1 hasta 0.
$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$	crece desde -1 hasta 0.	crece desde 0 hasta 1.

TABLA IV.3

Las observaciones anteriores sugieren que las curvas asociadas a las funciones $f_0(t)=sen\, t$ y $g_0(t)=cos\, t$ son las mostradas en la *figura IV.17*.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
vii. Integre todas las observaciones en un registro gráfico. **viii.** Refljeje la característica de periodicidad de las funciones en el plano cartesiano.	 **FIGURA IV.17** Si el punto P de *figura IV.14* se desplaza sobre la circunferencia con rapidez constante, entonces las funciones $f_0(t) = sen\,t$ y $g_0(t) = cos\,t$ son periódicas y tienen periodo $T = 2\pi$; por tanto, $sen\,t = sen(t + 2\pi)$ y $cos\,t = cos(t + 2\pi)$ o $sen\,t = sen(t - 2\pi)$ y $cos\,t = cos(t - 2\pi)$. Si el punto P da n giros con rapidez constante, entonces se cumplen $f_0(t) = sen\,t = sen(t \pm 2n\pi)$ y $g_0(t) = cos\,t = cos(t \pm 2n\pi)$.  **FIGURA IV.18** Revisemos el efecto de agregar los parámetros A, B y C a las funciones $f_0(t) = sen\,t$ y $g_0(t) = cos\,t$; es decir, analizaremos las diferencias entre las curvas asociadas a las funciones $f(t) = A sen(Bt + C)$ y $g(t) = A cos(Bt + C)$ (llamadas funciones senoidales o cosenoidales) con las curvas asociadas a $f_0(t) = sen\,t$ y $g_0(t) = cos\,t$, respectivamente, basándonos en las curvas asociadas a $f_0(t) = sen\,t$ y $g_0(t) = cos\,t$. El rango (conjunto imagen o recorrido) de las funciones $f_0(t) = sen\ t$ y $g_0(t) = cos\ t$ es el intervalo $[-1, 1]$, entonces el rango de las funciones $f(t) = A sen\,t$ y $g(t) = A cos\,t$ es el intervalo $[-A, A]$; por tanto, el parámetro A tiene los siguientes efectos en las curvas asociadas a $f_0(t) = sen\ t$ y $g_0(t) = cos\ t$: **i.** Si $A > 1$, la curva asociada a $f(t) = A sen\,t$ (o en su caso, de $g(t) = A cos\,t$) representa un “alargamiento” vertical de A unidades de la curva asociada a $f_0(t) = sen\ t$ (o en su caso, de $g(t) = cos\ t$). **ii.** Si $0 < A < 1$, la curva asociada a $f(t) = A sen\,t$ (o en su caso, de $g(t) = A cos\,t$) se contrae (verticalmente) en una proporción de A unidades respecto a la curva asociada a $f_0(t) = sen\ t$ (o de la curva asociada a $g_0(t) = cos\ t$), además incluye una rotación de π radianes respecto al eje de las abscisas, vea la *figura IV.19*.	

<table>
<tr><th>Observaciones y sugerencias</th><th>Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo</th><th>Dificultades y soluciones</th></tr>
<tr><td>

ix. Induzca al estudiante a que descubra la transformación que introduce la variación del parámetro A en las funciones senoidales (cosenoidales)

ix. Proponga al estudiante el trazo de un periodo de senoidales con distinta amplitud.

</td><td>

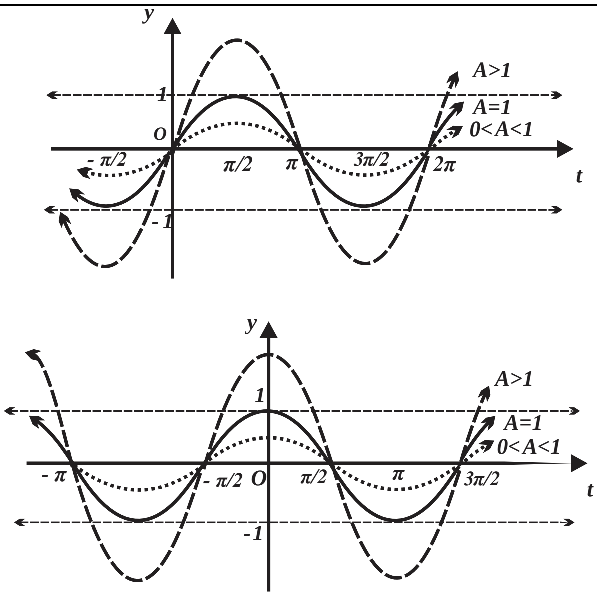


FIGURA IV.19

ACTIVIDAD IV.6 (AMPLITUD DE SENOIDALES)

a. $g(t)=-2\cos t$ oscila entre -2 y 2, tiene amplitud $A=|-2|=2$.

b. $f(t)=-\frac{2}{3}sen\, t$ oscila entre $-\frac{2}{3}$ y $\frac{2}{3}$, su amplitud es $A=\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}$.

c. $f(t)=\frac{1}{2}sen\, t$ oscila entre $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$, su amplitud es $A=\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

△

ACTIVIDAD IV.7 (EFECTO GRÁFICO DE LA AMPLITUD)

a. La *figura IV.20* muestra un periodo de las curvas asociadas a $f_1(t)=3sen\, t$, $f_2(t)=sen\, t$, $f_3(t)=\frac{1}{2}sen\, t$ y $f_4(t)=-\frac{1}{2}sen\, t$.

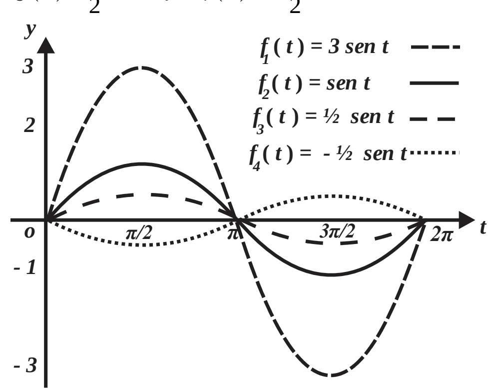


FIGURA IV.20

b. La *figura IV.21* muestra un periodo de las curvas asociadas a $g_1(t)=2\cos t$, $g_2(t)=\cos t$, $g_3(t)=\frac{1}{2}\cos t$, y $g_4(t)=-3\cos t$.

</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Observaciones y sugerencias</th><th>Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo</th><th>Dificultades y soluciones</th></tr>
<tr><td>
ix. Muestre la importancia de los ceros de las funciones $f(t)=A\,sen\,t$ y $g(t)=A\cos t$ en la determinación del periodo de las funciones $f_1(t)=A\,sen\,Bt$ y $g_1(t)=A\cos Bt$.

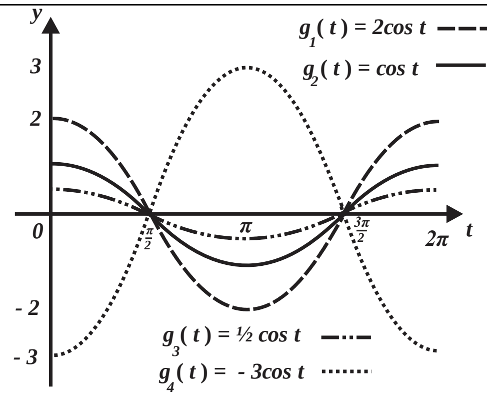
x. Guíe al estudiante para que descubra el efecto de introducir el parámetro B en $f(t)=A\,sen\,t$ y $g(t)=A\cos t$.
</td><td>


FIGURA IV.21
△

La función senoidal $f(t)=A\,sen\,t$ (o $g(t)=A\cos t$) tienen periodo $T=2\pi$, periodo que ocurre en el intervalo $[0, 2\pi]$, como consecuencia, para determinar las asignaciones a la función $f_1(t)=A\,sen\,Bt$ (o $g_1(t)=A\cos Bt$), que limitan uno de sus periodos, es necesario resolver las ecuaciones $Bt=0$ y $Bt=2\pi$. Así, los valores de la variable t que limitan un periodo de esta función son $t=0$ y $t=\frac{2\pi}{B}$, en consecuencia, uno de sus periodos ocurre sobre el intervalo $\left[0, \frac{2\pi}{B}\right]$. Por otra parte, el número de periodos (o parte fraccionaria) de la función senoidal $f_1(t)=A\,sen\,Bt$ (o $g_1(t)=A\cos Bt$) contenidos en el intervalo $[0, 2\pi]$ recibe el nombre de frecuencia.

Si relacionamos el periodo de una curva senoidal (o cosenoidal) se encuentra la frecuencia, el parámetro B de la función trigonométrica indica el número de veces (o en su caso la proporción) en que se puede trazar un periodo sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ por lo que su “valor absoluto” recibe el nombre de frecuencia.

DEFINICIÓN IV.5 (PERIODO DE LAS FUNCIONES SENOIDALES)
Si $f_1(t)=A\,sen\,Bt$ (o $g_1(t)=A\cos Bt$), entonces
a. El periodo es el número $T=\frac{2\pi}{B}$.
b. Un periodo ocurre en el intervalo $\left[0, \frac{2\pi}{B}\right]$.
c. El número $|B|$, se denomina frecuencia.

La introducción del parámetro $B>0$ en $f(t)=A\,sen\,t$ o en $g(t)=A\cos t$ (que genera las funciones $f_1(t)=A\,sen\,Bt$ y $g_1(t)=A\cos Bt$) tiene los siguientes efectos:
i. Si $B>1$, entonces $T=\frac{2\pi}{B}$ es menor que 2π y la curva asociada a $f_1(t)=A\,sen\,Bt$ (o $g_1(t)=A\cos Bt$) oscila con mayor rapidez que la curva
</td><td></td></tr>
</table>

asociada a $f(t) = A\,sen\,t$ (o a $g(t) = A\cos t$).

ii. Si $0 < B < 1$, entonces $T = \dfrac{2\pi}{B}$ es mayor que 2π, esto significa que la curva asociada a $f_1(t) = A\,sen\,Bt$ (o a $g_1(t) = A\cos Bt$) oscila con menor frecuencia que la curva asociada a $f(t) = A\,sen\,t$ (o a $g(t) = A\cos t$).

ACTIVIDAD IV.8 (EFECTO DEL PARÁMETRO B)

a. Si $f(t) = 2\cos\frac{1}{3}t$, entonces $B = \frac{1}{3}$ y $T = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$. El intervalo $[0\,,\,2\pi]$ contiene $\frac{1}{3}$ de periodo, por lo que un periodo completo ocurre en el intervalo $[0\,,\,6\pi]$.

b. En $g(t) = -3\,sen\,4t$, entonces $B = 4$ y $T = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{1}{2}\pi$, es decir, el intervalo $[0\,,\,2\pi]$ contiene $B = 4$ periodos.

△

ACTIVIDAD IV.9 (EFECTO GRÁFICO DEL PARÁMETRO B)

a. La *figura IV.22* muestra un periodo de las curvas asociadas a $f(t) = A\,sen\,2t$, $f(t) = A\,sen\,t$, $f(t) = A\,sen\frac{1}{3}t$, $f(t) = A\,sen\frac{1}{2}t$ y $f(t) = A\,sen\frac{2}{5}t$ (con $A > 0$).

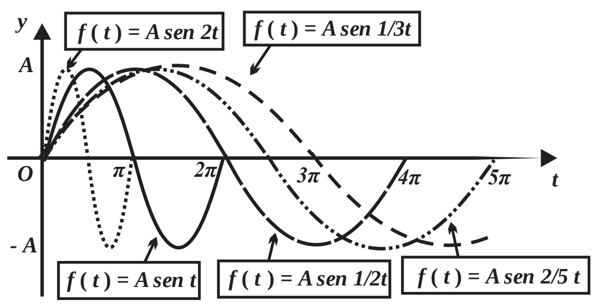


FIGURA IV.22

△

Revisemos el efecto gráfico que se produce en la curva asociada a $f_2(t) = A\,sen\,Bt$ (o a $g_2(t) = A\cos Bt$) al agregar el parámetro C a la variable independiente, es decir, determinemos las diferencias entre las curvas asociadas a $f_2(t) = A\,sen\,t$ y $f_3(t) = A\,sen(Bt - C)$ (o $g_2(t) = A\cos Bt$ y y $g_3(t) = A\cos(Bt - C)$).

Puesto que $f_2(t) = A\,sen\,t$ completa un periodo en el intervalo $\left[0\,,\,\dfrac{2\pi}{B}\right]$, entonces $f_3(t) = A\,sen(Bt - C)$ lo completará sí $Bt - C = 0$ y $Bt - C = 2\pi$, es decir, lo completará sobre el intervalo $\left[\dfrac{C}{B}\,,\,\dfrac{C}{B} + \dfrac{2\pi}{B}\right]$, ¡note que éste último intervalo es un desplazamiento de $\dfrac{C}{B}$ unidades del intervalo $\left[0\,,\,\dfrac{2\pi}{B}\right]$!

La inclusión del parámetro C en una función senoidal se manifiesta como un desplazamiento horizontal de $\dfrac{C}{B}$ unidades de la curva que tiene asociada, tal desplazamiento recibe el nombre de fase.

<table>
<tr><th>Observaciones y sugerencias</th><th>Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo</th><th>Dificultades y soluciones</th></tr>
<tr><td>xi. Guíe al estudiante para que descubra el efecto de introducir el parámetro C en $f_2(t) = A sen\, Bt$ y $g_2(t) = A cos\, Bt$. Resalte la importancia de los ceros.</td><td>

DEFINICIÓN IV.6 (FASE)

En $f_3(t) = A sen(Bt - C)$ y $g_3(t) = A cos\,(Bt - C)$, entonces el número $\frac{C}{B}$ se denomina fase (o corrimiento de fase).

La *figura IV.23* ilustra la fase (o corrimiento de fase) de las curvas de las funciones senoidales $f_2(t) = A sen(Bt - C)$ y $g_2(t) = A cos\,(Bt - C)$.

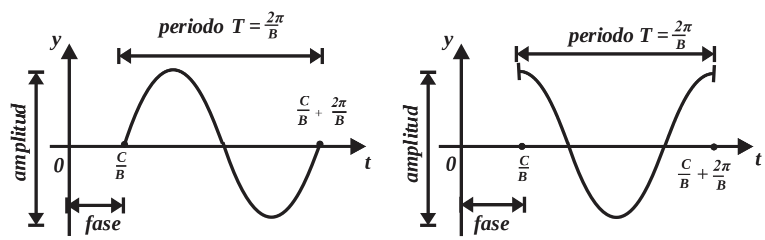


FIGURA IV.23

ACTIVIDAD IV.10 (TRAZO DE LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES SENOIDALES)

a. Para trazar un periodo de la curva asociada a $g(t) = cos\left(t - \frac{\pi}{5}\right)$, notemos que la amplitud es $A = 1$, que tiene periodo $T = \frac{2\pi}{B} = 2\pi$ y que su fase es $\frac{C}{B} = \frac{\pi}{5}$; de $t - \frac{\pi}{5} = 0$ y de $t - \frac{\pi}{5} = 2\pi$ obtenemos $t = \frac{\pi}{5}$ y $t = \frac{11\pi}{5}$, por tanto, en el intervalo $\left[\frac{\pi}{5}, \frac{11\pi}{5}\right]$ ocurre un periodo, vea la *figura IV.24*.

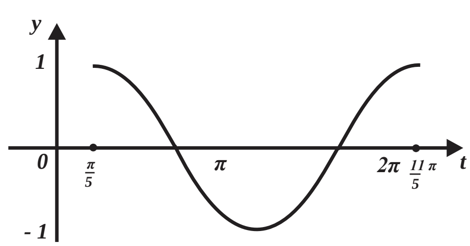


FIGURA IV.24

b. Para trazar un periodo de la curva asociada a $f(t) = -\frac{2}{3} sen\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$, notemos que la amplitud es $A = \frac{2}{3}$, el periodo es $T = \frac{2\pi}{B} = 2\pi$ y la fase es $\frac{C}{B} = -\frac{\pi}{4}$, de $t + \frac{\pi}{4} = 0$ y de $t + \frac{\pi}{4} = 2\pi$ obtenemos $t = -\frac{\pi}{4}$ y $t = \frac{7\pi}{4}$, por tanto, en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ ocurre un periodo, vea la *figura IV.25*.

</td><td></td></tr>
</table>

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

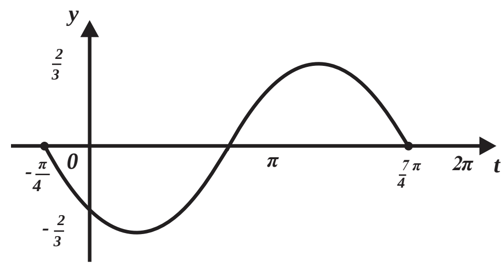


FIGURA IV.25

c. La función $f(t)=\frac{3}{2}sen\,2\left(t-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}sen\left(2t-\frac{2\pi}{3}\right)$ tiene amplitud $A=\frac{3}{2}$, periodo $T=\frac{2\pi}{B}=\frac{2\pi}{2}=\pi$ y fase $\frac{C}{B}=\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$. De $2t-\frac{2\pi}{3}=0$ y de $2t-\frac{2\pi}{3}=2\pi$ obtenemos $t=\frac{\pi}{3}$ y $t=\frac{4\pi}{3}$, por tanto, en el intervalo $\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$ ocurre un periodo, vea la *figura IV.26*.

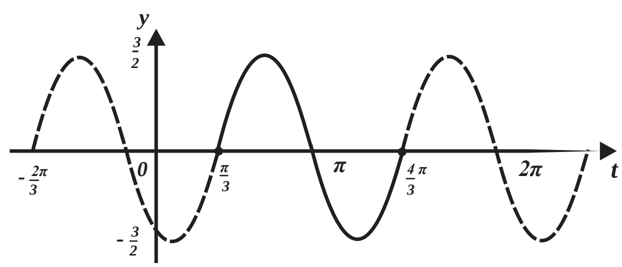


FIGURA IV.26

△

El "parámetro D" en la curva asociada a $f_4(t)=A\,sen(Bt-C)+D$ (o a $g_4(t)=A\cos(Bt-C)+D$) se manifiesta como un desplazamiento vertical de la curva asociada a $f_3(t)=A\,sen(Bt-C)$ (o en su caso de la curva asociada a $g_3(t)=A\cos(Bt-C)$).

ACTIVIDAD IV.11 (DESPLAZAMIENTO VERTICAL)

a. Para trazar la curva asociada a $f(t)=\frac{3}{2}sen\,2\left(t-\frac{\pi}{3}\right)+1$, la reescribimos como $f(t)=\frac{3}{2}sen\left(2t-\frac{2\pi}{3}\right)+1$. Así, oscila entre $-\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{2}$, su periodo es $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$ y tiene fase $\frac{C}{B}=\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$. De $2t-\frac{2\pi}{3}=0$ y $2t-\frac{2\pi}{3}=2\pi$ obtenemos $t=\frac{\pi}{3}$ y $t=\frac{4\pi}{3}$, por tanto, en el intervalo $\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$ ocurre un periodo, vea *figura IV.27*.

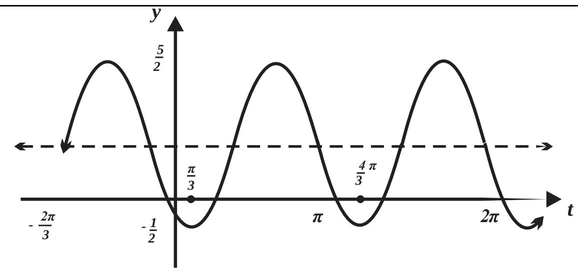


FIGURA IV.27

b. La curva asociada a $g(t)=\frac{1}{2}cos\left(2t+\frac{2\pi}{3}\right)-2$ oscila entre $-\frac{5}{2}$ y $-\frac{3}{2}$, tiene periodo $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$ y su fase es $\frac{C}{B}=\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$. De $2t+\frac{2\pi}{3}=0$ y $2t+\frac{2\pi}{3}=2\pi$ obtenemos $t=-\frac{\pi}{3}$ y $t=\frac{2\pi}{3}$, luego sobre el intervalo $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ ocurre uno de sus periodos, vea la *figura IV.28*.

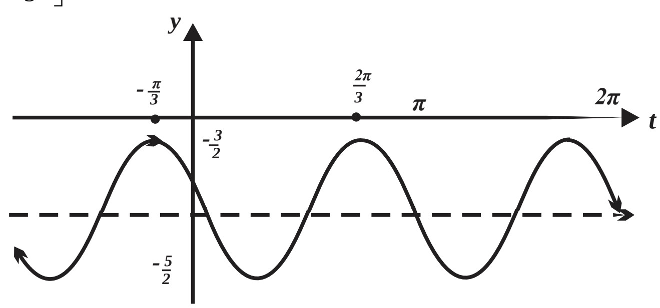


FIGURA IV.28

△

FENÓMENOS DE VARIACIÓN PERIÓDICA

La oscilación del péndulo, las vibraciones de un puente, el flujo de corriente eléctrica, las vibraciones de las cuerdas de un instrumento musical, el movimiento de un punto perteneciente a un disco que gira, etc. representan movimientos periódicos. Los movimientos periódicos (bajo ciertas suposiciones) se modelan, por medio de una función trigonométrica.

Una partícula que se mueve verticalmente tiene un movimiento armónico simple cuando su desplazamiento está dado en función de t por alguna de las funciones $y(t)=A sen\,\omega(t-e)$ y $x(t)=A cos\,\omega(t-e)$, $|A|$ es la amplitud del desplazamiento del movimiento de la partícula (que varía entre $-A$ y A). Una imagen de la función seno se repite cada vez que el ángulo se incrementa en 2π radianes, entonces la posición de la partícula se repite después de un periodo $\frac{2\pi}{\omega}$, por tanto, el periodo es de un movimiento armónico simple, esto es $T=\frac{2\pi}{\omega}$. La frecuencia f de un movimiento armónico simple se define como el número de oscilaciones (o ciclos completos) por unidad de tiempo; así $f=\frac{1}{T}$. La cantidad ω, llamada “frecuencia angular”, está relacionada con las cantidades antes definidas por $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones

ACTIVIDAD IV.12 (SISTEMA MASA - RESORTE)
Una masa está suspendida de un resorte, el resorte se comprime 5 centímetros y luego se libera. Si la masa regresa al punto inicial después de 3 segundos, para establecer la función que describe el movimiento (suponiendo movimiento armónico simple), notemos que inicialmente la amplitud del resorte es 5 centímetros, es decir, $a=5$ en el tiempo $t=0$, entonces la función que describe la posición de la masa es $y(t)=5\,sen\,\omega t$. Dado que la masa regresa a los 3 segundos, el periodo es $T=3$, en consecuencia, $T=\frac{2\pi}{\omega}=3$, de donde $\omega=\frac{2\pi}{3}$. Finalmente, $y(t)=5\,sen\,\frac{2\pi}{3}t$, $t\geq 0$ y $y(t)$ representa el desplazamiento a partir de la posición inicial.

$\triangle$

ACTIVIDAD IV.13 (MANIVELA)
a. La manivela de una máquina tiene una longitud de 50 centímetros y gira con un movimiento armónico simple a razón de 0.5 revoluciones por segundo, por tanto:
i. La manivela tiene una longitud de 50 centímetros, en consecuencia, $amplitud=|\,50\,|=50$.
ii. La manivela da media revolución por segundo, es decir una revolución cada dos segundos, entonces el periodo es $T=2$, y la frecuencia $f=\frac{1}{2}$. Dado que $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\,f$, entonces $\omega=\frac{2\pi}{2}=\pi$.
iii. Dado que $f(0)=50$, la función que relaciona el desplazamiento horizontal con el tiempo es de la forma $f(t)=a\,cos\,\omega\cdot t$, por consiguiente $f(t)=50cos\,\pi t$, con $t\geq 0$. Vea la *figura IV.29*.

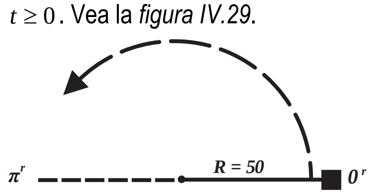
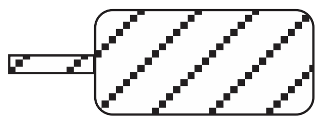
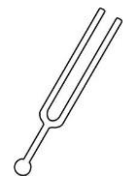


FIGURA IV.29

b. Una manivela con radio de 28 centímetros gira a razón de 16 revoluciones por segundo. Supóngase que el movimiento empieza cuando la manija está en $\alpha=\frac{\pi}{6}$. Para obtener la función que representa la proyección de la manija sobre el eje vertical en el tiempo *t*. Notemos que, proyección es sobre el eje vertical, entonces el movimiento armónico es de la forma: $f(t)=a\cdot cos(\omega t-c)$, pero $a=28$, $\omega t=16\cdot 2\pi t$ o $\omega t=32\pi t$, entonces $f(t)=28cos\left(32\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$.

$\triangle$

ACTIVIDAD IV.14 (LIMA GIRATORIA)
El extremo de una lima recta, de amplitud 5 milímetros, como se muestra en la *figura 4.30*, se sujeta a un tornillo de banco. El extremo libre se pone a rotar a razón de 8 ciclos por segundo. Para establecer la función que describe su movimiento supongamos que ésta es de la forma $f(t)=A sen\;Bt$.

Observaciones y sugerencias	Actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo	Dificultades y soluciones
	Inicialmente, $f(0)=A sen\ 0=0$ con $A=5$ milímetros y $B=\frac{8(2\pi)}{1}=16\pi$, por consiguiente, $f(t)=5 sen\, 16\pi t$, siempre que $t\geq 0$.  FIGURA IV.30  FIGURA IV.31 **ACTIVIDAD IV.15** (DIAPASÓN) Las ondas del sonido, generadas por un diapasón, se pueden describir por medio de la función $f(t)=A sen Bt$. Cuando el diapasón vibra a 440 ciclos por segundo y tiene una amplitud de $0.005\ cms.$, la función que describe las ondas emitidas es $f(t)=0.005 sen\, 440(2\pi)t$ o $f(t)=0.005 sen\, 880\pi t$. Vea la *figura IV.31*.	

Ejercicios y actividades adicionales

Con el propósito de reforzar los aprendizajes alcanzados por los estudiantes, UD. puede implementar en el desarrollo de sus clases algunos de los siguientes ejercicios o actividades.

1. Determine: el dominio, la imagen, la amplitud, el periodo, la frecuencia y trace la curva de las siguientes funciones.

a. $f(t)=3 sen 2t$. **b.** $f(t)=cos\frac{1}{4}t$. **c.** $f(t)=-2 cos\, 3t$. **d.** $f(t)=-6 sen\frac{2}{5}t$.

e. $f(t)=-4 sen 3t$. **f.** $f(t)=cos\frac{1}{2}t$. **g.** $f(t)=-2 sen\frac{1}{2}t$. **h.** $f(t)=\pi cos\, 6t$.

2. Determine la amplitud, el periodo, la frecuencia, la fase y también explique las transformaciones requeridas para obtener la curva correspondiente a partir de $f(x)=sen\ x$ o $f(x)=cos\ x$.

a. $f(x)=-\frac{1}{3}sen(x+\pi)$. **b.** $f(x)=sen\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{4}\right)$. **c.** $f(x)=2 cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$. **d.** $f(x)=2 sen\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{9}\right)$.

e. $f(x)=-3 cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$. **f.** $f(x)=\frac{1}{4}sen\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. **g.** $f(x)=-\frac{1}{4}sen\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$. **h.** $f(x)=2 cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$.

i. $f(x)=\frac{1}{2}sen\left(\frac{1}{4}x+\frac{\pi}{6}\right)$. **j.** $f(x)=-\frac{2}{5}cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$. **k.** $f(x)=7 sen\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{3}\right)$. **l.** $f(x)=-\frac{1}{5}sen\left(\frac{1}{8}x-\frac{\pi}{6}\right)$.

3. Verifique (gráficamente) que las funciones $f(x)=sen\ x$ y $f(x)=cos\ x$ están desfasadas $\frac{\pi}{2}$ radianes.

4. Utilice el círculo trigonométrico y explique por qué, $f(x)=sen(x)=-sen(-x)$ y **b.** $f(x)=cos(x)=cos(-x)$.

5. Determine la amplitud, el periodo, la frecuencia, la fase y dibuje la gráfica.

a. $f(x)=\frac{1}{4}cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+3$. **b.** $f(x)=-2\,sen\left(\frac{1}{5}x+\frac{\pi}{3}\right)-1$. **c.** $f(x)=-2cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+5$.

d. $f(x)=\frac{1}{3}sen\left(x-\frac{\pi}{5}\right)-3$. **e.** $f(x)=-2cos\left(3x+\frac{\pi}{8}\right)+5$. **f.** $f(x)=-4\,sen\left(\frac{1}{4}x-\frac{\pi}{10}\right)-6$.

6. Si $f(t)=A\,sen\,w(t-c)+D$ y $g(t)=A cos\,w(t-c)+D$. Determine: la regla de correspondencia, el dominio, el rango y trace la curva asociada.

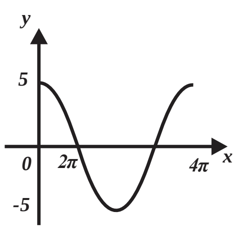
a. $A=3$, $w=\frac{1}{3}$ y $c=\frac{\pi}{7}$. **b.** $A=-2$, $w=3$ y $c=\frac{\pi}{8}$. **c.** $A=-\frac{1}{10}$, $w=\frac{1}{5}$ y $c=\frac{\pi}{10}$. **d.** $A=-\frac{4}{5}$, $w=\frac{2}{3}$ y $c=-\frac{\pi}{8}$.

e. $A=-\frac{6}{5}$, $w=\frac{1}{10}$, $c=-\frac{\pi}{20}$ y $D=-2$. **f.** $A=20$, $w=3$, $c=\frac{\pi}{7}$ y $D=6$. **g.** $A=-12$, $w=4$, $c=\frac{\pi}{3}$ y $D=-4$.

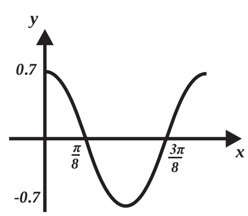
h. $A=9$, $w=6$, $c=-\frac{\pi}{5}$ y $D=4$.

7. Las siguientes curvas corresponden a periodos completos de funciones senoidales o cosenoidales. Determine la amplitud, la frecuencia, el periodo, la fase y la posible función de las forma $f(x)=A sen(Bx-C)$ y $g(x)=A cos(Bx-C)$ que éstas pueden ser.

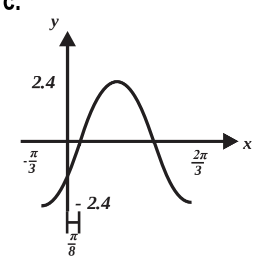
a.



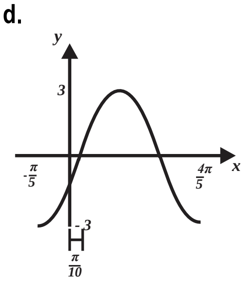
b.



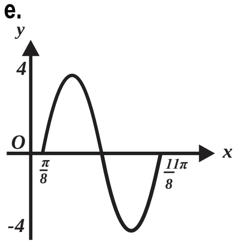
c.



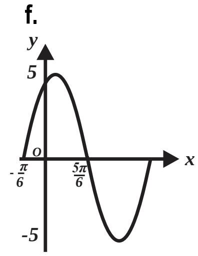
d.



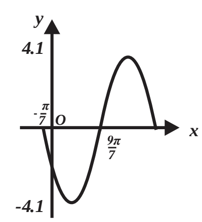
e.



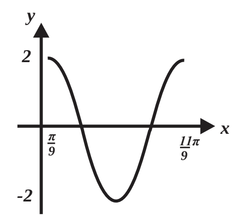
f.



g.



h.



8. Reescriba la función $f(t)=-sen\ t$ en términos de la función $f(t)=sen\ t$ y un corrimiento de fase.

9. Reescriba la función $f(t)=-cos\ t$ en términos de la función seno y un corrimiento de fase.

10. a. Determine una función senoidal que tenga curva asociada idéntica a la curva de $f(t)=cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$.

b. Determine una función cosenoidal que tenga curva asociada idéntica a la curva de $f(t)=sen\left(3t-\frac{\pi}{3}\right)$.

c. Determine una función cosenoidal que tenga curva asociada idéntica a la curva de $f(t)=-sen\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)$.

d. Determine una función senoidal que tenga curva asociada idéntica a la curva asociada a $f(t)=cos\left(4t-\frac{\pi}{3}\right)$.

11. Construya una función senoidal (cosenoidal) con las siguientes características.

a. Amplitud $A=2$, periodo $\frac{3}{2}\pi$ y fase $\frac{\pi}{4}$. **b.** Amplitud $A=3$, periodo 3π y fase $\frac{\pi}{6}$. **c.** Amplitud $A=\frac{4}{3}$, periodo 4π y fase $\frac{\pi}{3}$

12. Determine la fase φ de tal forma que las funciones dadas sean iguales.
a. $f(t)=sen\,t$ y $g(t)=-sen(t+\varphi)$.
b. $f(t)=sen\,t$ y $g(t)=sen(-t+\varphi)$.
c. $f(t)=sen\,t$ y $g(t)=cos(t-\varphi)$.
d. $f(t)=sen\,t$ y $g(t)=cos(t+\varphi)$.
e. $f(t)=sen\,t$ y $g(t)=-cos(t+\varphi)$.
f. $f(t)=sen\,t$ y $g(t)=-cos(-t+\varphi)$.

13. La aceleración "A" de un objeto sujeto a un resorte está dada por la función de regla de correspondencia $A(t)=-220\,sen\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$.
a. Determine, la amplitud, el periodo y la frecuencia.
b. Grafique la aceleración como función del tiempo.
c. Reescriba la expresión anterior en términos de la función $coseno$.

14. Una onda puede ser modelada por la relación $S=0.04\,sen\left[2\pi(x-80)\right]$.
a. Determine, la amplitud, el periodo y la frecuencia.
b. Grafique el desplazamiento S como una función del tiempo t.

15. Escriba la ecuación del movimiento de un péndulo que oscila con una amplitud de 96 centímetros y un período de 2.5 segundos. Haga un esbozo de su gráfica.

16. Si B es pequeña, la relación $y(t)=B\,sen\,wt$ aproxima la forma de las olas del océano.
a. Dibuje 4 ciclos para una ola descrita por la relación $y(t)=sen\frac{\pi}{20}t$.
b. Dibuje 3 ciclos para una ola descrita por la relación $y(t)=0.2\,sen\frac{\pi}{20}t$.

17. La variación normal de la temperatura media se aproxima mediante la función $T(t)=55+38\,sen\left[\frac{2\pi}{365}(t-100)\right]$.
Suponga que T está en grados $°F$ y que t es el número de días a partir del primero de enero.
a. Determine, la amplitud, el periodo y la frecuencia.
b. ¿Cuál es la temperatura media anual para un período de 2 años?
c. Dibuje la gráfica de la relación.

18. El desplazamiento S de cierto resorte se puede describir como una función del tiempo t, de acuerdo con la función $S(t)=7\,sen\,12t$.
a. Determine la amplitud, el periodo y la frecuencia.
b. Dibuje la gráfica de la función.
c. Reescriba la expresión anterior en términos de la función $coseno$.

19. La temperatura T de un gas es una función del tiempo t y está dada por $T(t)=100-50\,sen\,2\pi t$.
a. Grafique la relación de la temperatura T con el tiempo t.
b. Determine la amplitud, el periodo y la frecuencia.

20. Un faro se encuentra en un arrecife a 100 metros de la costa.
a. Escriba la distancia d a un punto P de la costa como función del ángulo x (formado por la perpendicular del faro a la costa y la transversal del faro al punto P.
b. Si el ángulo mide 1.4 radianes, ¿cuánto mide la distancia del punto a la costa?
c. Si el ángulo mide 0.8 radianes, ¿cuánto mide la distancia del punto a la costa?

21. Determine la función trigonométrica correspondiente.
a. La longitud de la altura de un triángulo equilátero en función del ángulo formado por la base y uno de los lados.
b. La altura de un triángulo isósceles, de lados iguales de 4 unidades, en función del ángulo formado por la base y uno de los lados.

22. La fuerza electromotriz E, en voltios, para cierto circuito de corriente alterna satisface la ecuación $E(t)=110\,sen\,(80\pi t),\ t\geq 0$ donde t representa el tiempo.
a. ¿Cuál es el valor máximo de E?
b. ¿Cuál es el periodo de E?
c. Dibuje dos periodos de E.

23. a. Verifique que el área A de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden r unidades y el ángulo entre ellos es θ está dada por $A(\theta)=\frac{1}{2}r^2 sen\,\theta$.
b. ¿Para qué valores de θ tiene sentido la expresión anterior?
c. Si $r=1$ dibuje dos periodos de A, ¿en términos prácticos tiene sentido ésta curva?

24. Suponga que la distancia d (en metros) que un objeto recorre en un tiempo t (en segundos) se rige por la función $d(t)=8sen(5t),\ t\geq 0$.
a. Describa el movimiento del objeto.
b. ¿Cuál es el máximo desplazamiento desde la posición de equilibrio?
c. ¿Cuál es el tiempo necesario para cada oscilación?
d. ¿Cuál es la frecuencia?

25. Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio de longitud 1.
a. Muestre que el área contenida por el rectángulo es $A=2sen\theta cos\theta$, donde el ángulo θ tiene su vértice en el centro de la semicircunferencia, y sus lados tienen extremos en el vértice y en las esquinas del rectángulo.
b. ¿Para qué valores de θ tiene sentido la expresión anterior?
c. Determine el ángulo con el que obtiene la mayor área.
d. Determine las dimensiones del rectángulo más grande.

26. Un canal para desaguar la precipitación pluvial se construirá con una hoja de latón de 12 centímetros de ancho. Luego de marcar una longitud de 4 centímetros a lo largo de la hoja, se doblarán hacia arriba formando ángulos de θ grados respecto a la horizontal.
a. Verifique que el área de la abertura como función de θ es $A(\theta)=16sen\theta(cos\theta+1)$ si $0°\leq\theta\leq 90°$.
b. Si el ángulo θ que maximiza el área A está dado por la ecuación $cos2\theta+cos\theta=0°$ para $0°\leq\theta\leq 90°$, resuelva la ecuación.
c. ¿Cuál es el área máxima de la abertura?

27. El número de clientes de una tienda varían senoidalmente. Existen 800 el primero de abril y 900 el primero de octubre.
a. Determine una función que describa el comportamiento de los clientes.
b. Determine una función que describa el comportamiento de los clientes desde el inicio del año.

28. El desplazamiento x, en metros, que un objeto recorre en un tiempo t satisface la relación $x=12sen\ 7t$.
a. Describa el movimiento del cuerpo.
b. ¿Cuál es el tiempo necesario para cada oscilación?
c. ¿Cuál es la frecuencia?

29. Un objeto se encuentra sujeto a un resorte, el resorte es jalado hacia abajo hasta que se incrementa su longitud 10 centímetros desde su posición de equilibrio y después es liberado. Si el tiempo que requiere para efectuar una oscilación es de 4 segundos, establezca la función que describe el movimiento del cuerpo, desde su posición de equilibrio, en función del tiempo t.

SD 1. VARIACIÓN PERIÓDICA

APRENDIZAJES
Apr.1 Explorará situaciones o fenómenos de variación periódica.

CONTENIDOS TEMÁTICOS
Situaciones o fenómenos de variación periódica.

APERTURA
Revisión previa del documento
Tenenbaum, S. (2009) Objetivo: matemática Montevideo – Uruguay. Recuperado de http://www.x.edu.uy/index.html

DESARROLLO

1. Tomando como base las lecturas previas responda las preguntas:

a. Menciona la importancia de las funciones periódicas.

___

b. En un contexto gráfico, ¿qué es una función periódica?

___

c. Formalmente, ¿qué es una función periódica?

___

d. ¿Por qué en una función periódica el periodo T tiene que ser positivo y mínimo?

___

e. Proporcione, al menos dos, ejemplos de gráficos que correspondan a funciones periódicas.

___

f. Proporcione, al menos dos, ejemplos de funciones periódicas.

___

2. La función ”cuál es la hora”, se representa por $h(t)$ (formato 0 a 24 horas).
a. Suponga que en este instante son exactamente las 17 horas, entonces $h(0)=$_________________.
b. ¿Qué horas será dentro de 24, 48, 72, etc.?, es decir:

$h(24)=$ $h(48)=$ $h(72)=$.

c. Complete la tabla.

Tiempo transcurrido (horas)	$h(t)$
0	
4	
8	
12	
16	
20	
24	

Tiempo transcurrido (horas)	$h(t)$
28	
32	
36	
40	
44	
48	

Tiempo transcurrido (horas)	$h(t)$
52	
56	
60	
64	
68	
72	

d. ¿Por qué la función "cuál es la hora" es periódica?

____.

e. ¿Cuál es el periodo de la función "cuál es la hora".

____.

f. Trace la gráfica que corresponde a la función "cuál es la hora". ¿Por qué los segmentos de recta que incluye son contínuos?

g. Determine y escriba la regla de correspondencia de la función "cuál es la hora".

CIERRE

1. Proporcione la definición formal de una función periódica.

____.

2. ¿Cuál es la característica básica de la representación gráfica de de una función periódica?

____.

SD 2. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, UNIDADES

APRENDIZAJES
Apr.2 Convertirá medidas angulares de grados a radianes y viceversa.

CONTENIDOS TEMÁTICOS
Medidas angulares en grados y radianes.
Razones trigonométricas seno, coseno y tangente para cualquier ángulo.

APERTURA
Revisión del cálculo del perímetro de un círculo. Regla de tres.
Revisión de las razones trigonoméricas: seno y coseno.

DESARROLLO
I. Conversión de medidas de amplitud.

1. ¿Qué significa que un arco subtienda a un ángulo central (es decir, que un ángulo central sea subtendido por un arco). Trace una figura.

---

2. Suponga que un ángulo central se puede medir en términos de la longitud del arco que lo subtiende.
Cuándo la amplitud (o medida) de un ángulo central se lleva a cabo en términos de la longitud del arco que lo subtiende se le asignan como unidades los radianes.

a. ¿Cuál es la amplitud de un ángulo de vuelta entera (suponga radio unitario), en términos de la longitud de la circunferencia?

---

b. ¿Cuál es la amplitud de un ángulo de vuelta entera (suponga radio unitario), en unidades sexagesimales (grados, minutos y segundos)?

---

c. Establezca la ecuación, en su forma más simple, que relaciona las unidades de amplitud de un angulo central (radianes y grados).

---

d. Aplique “la regla de tres” y obtenga las funciones (regla de correspondencia, dominio y reango o recorrido) que son útiles en la conversión de radianes a grados y viceversa, de grados a radianes, trace sus gráficas.

e. Trace las gráficas de las funciones que obtuvo en el inciso anterior.

f. Complete la tabla (en términos de π).

GRADOS	0	30	45	60	90
RADIANES					

g. Complete la tabla (en términos de π).

RADIANES	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
GRADOS					

CIERRE

1. ¿De qué tipo es la función que obtuvo para convertir grados en radianes?

____.

2. ¿De qué tipo es la función que obtuvo para convertir radianes a grados?

____.

SD 3. TRAZO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

APRENDIZAJES

Apr.3 El alumno comprenderá la forma en que se extienden o generalizan las razones trigonométricas para ángulos arbitrarios.

Apr.4 Extenderá el concepto de razón trigonométrica a función, mediante la elaboración de una tabla o gráfica de: $f(t) = sen\,t$ y $f(t) = cos\,t$.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

Razones trigonométricas seno y coseno para cualquier ángulo.

Funciones trigonométricas $f(t) = sen\,t$ y $f(t) = cos\,t$; dominio y rango.

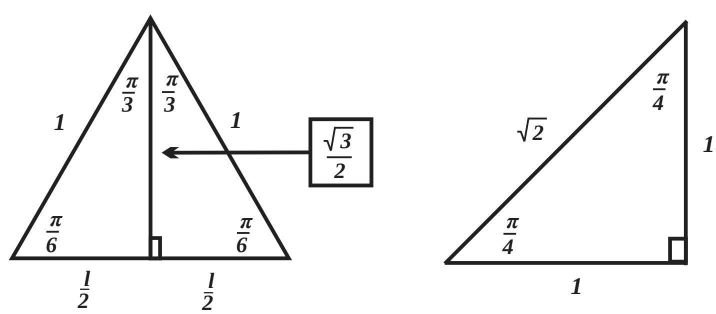
APERTURA

1. Revisión de: El círculo unitario, las razones trigonométricas de un triángulo.

DESARROLLO

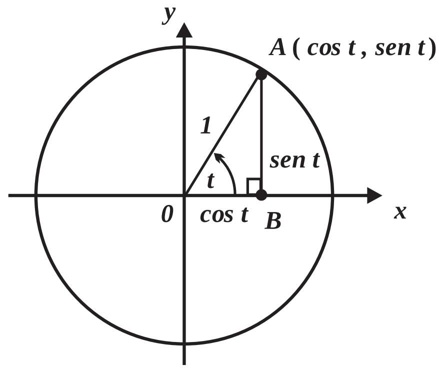
a. Trace un círculo unitario (de radio de longitud uno) cuyo centro coincida con el eje de coordenadas, el radio esté en el primer cuadrante y tenga extremos en los puntos $\overline{OA}$. Proyecte (perpendicularmente) el punto A en el eje de las abscisas y nombre el punto de proyección como B. En la figura anterior marque el triángulo rectángulo OAB, nombre al ángulo con vértice en el punto O como t.

b. Recuerde que, en un triángulo rectángulo, $sen\,t = \dfrac{longitud\ \ del\ \ cateto\ \ opuesto}{longitud\ \ de\ \ la\ \ hipotenusa}$, $cos\,t = \dfrac{longitud\ \ del\ \ cateto\ \ adyacente}{longitud\ \ de\ \ la\ \ hipotenusa}$, el teorema de Pitágoras y utilice las figuras que se muestran a continuación para completar la tabla.



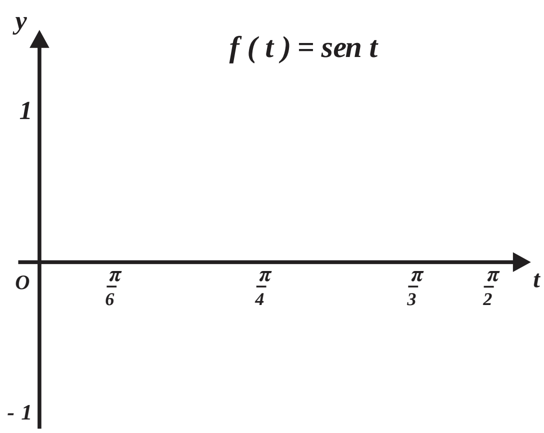
t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$sen\ t$			
$cos\ t$			

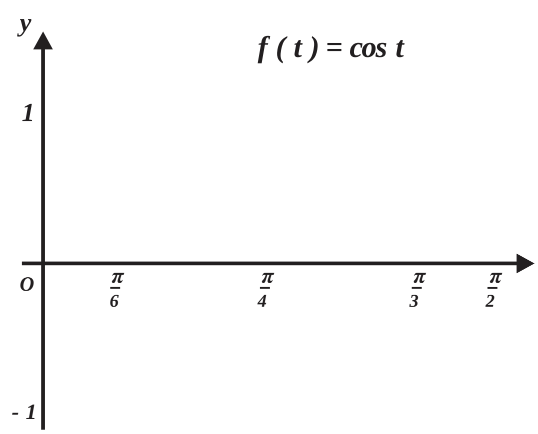
c. Tome como base la figura y complete la siguiente tabla.



t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(t) = sen\, t$					
$f(t) = cos\, t$					

d. Utilice la tabla del inciso anterior y trace la curva correspondiente.

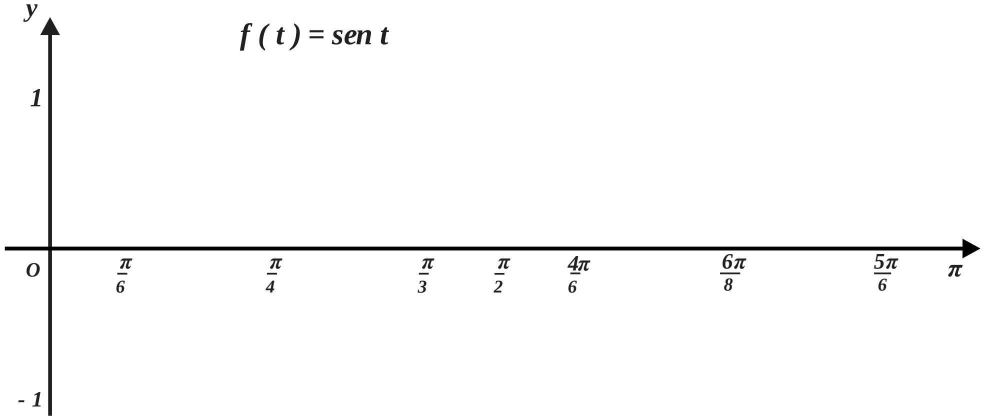


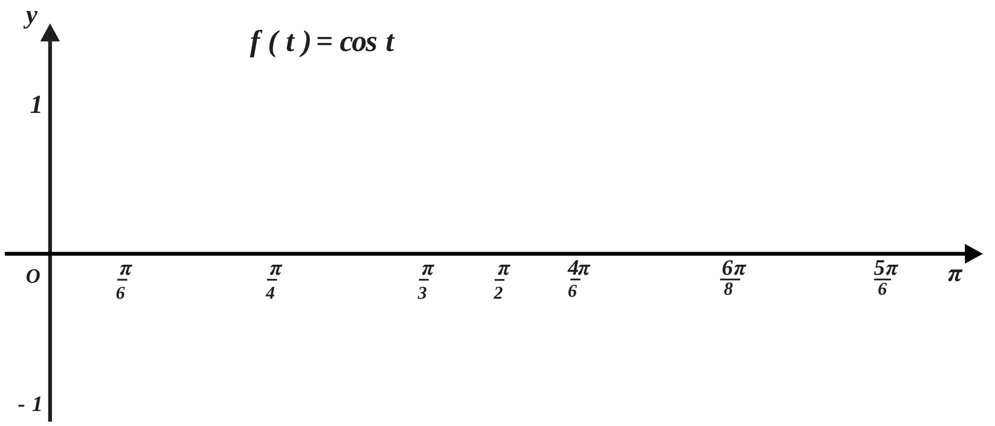


e. Considere que en el segundo cuadrante la función $f(t) = cos\, t$ (longitud de la base del triángulo rectángulo en el círculo unitario) se le asigna signo negativo (por la forma en que se encuentra orientada) y complete la siguiente tabla.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{6\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(t) = sen\, t$									
$f(t) = cos\, t$									

f. Utilice la tabla del inciso anterior y trace la curva correspondiente.

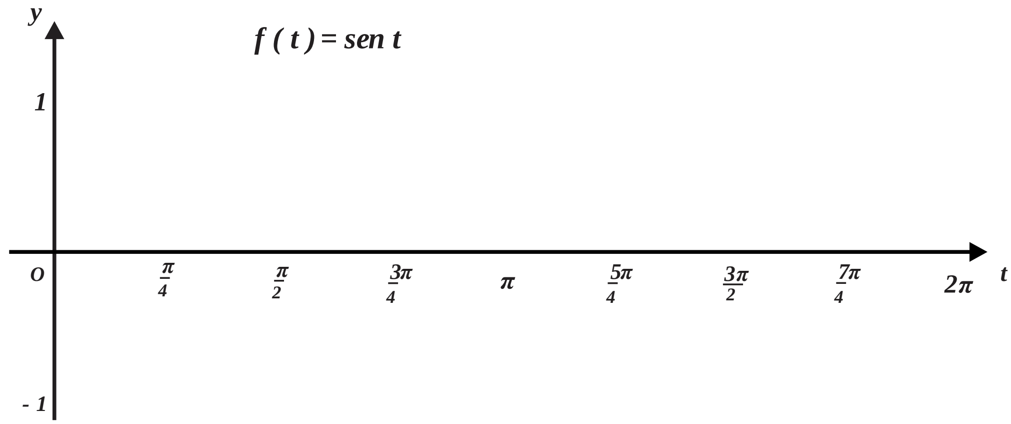


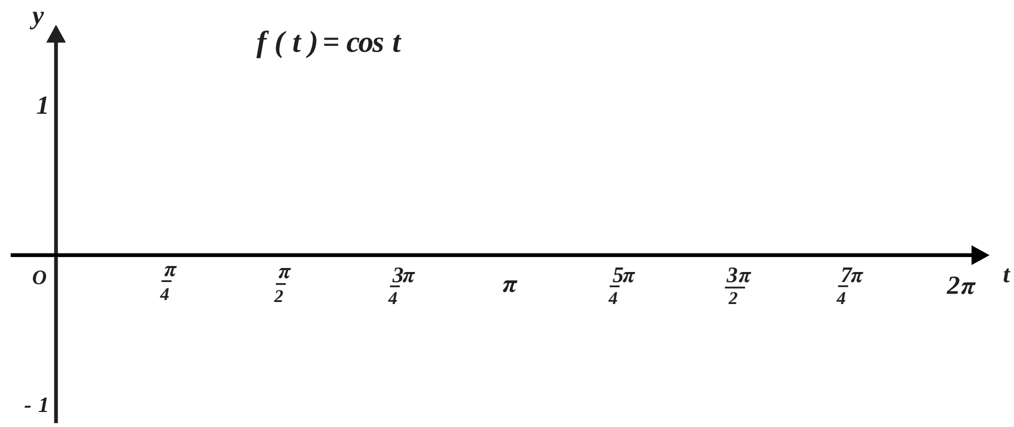


g. En el tercer cuadrante ambas funciones ($f(t) = sen\,t$ y $f(t) = cos\,t$) son negativas. En el cuarto cuadrante $f(t) = cos\,t$ es positiva y la función $f(t) = sen\,t$ es negativa, utilice estos hechos y complete la tabla.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{6\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{10\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$f(t) = sen\,t$																
$f(t) = cos\,t$																

h. Utilice la tabla del inciso anterior y trace la curva correspondiente.



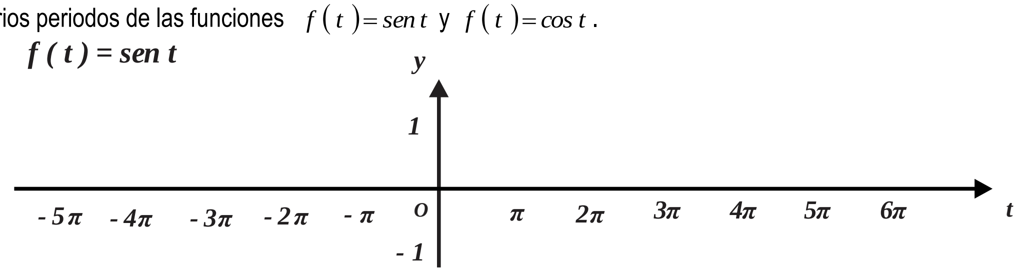


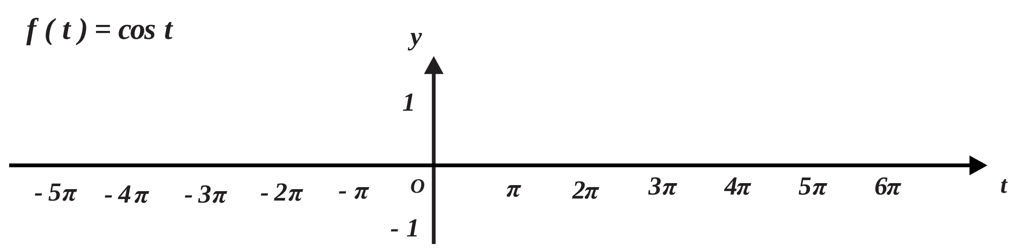
CIERRE

1. ¿Cuál es el periodo de las funciones $f(t) = sen\, t$ y $f(t) = cos\, t$?

____.

2. Trace varios periodos de las funciones $f(t) = sen\, t$ y $f(t) = cos\, t$.





3. Establezca el dominio y rango (recorrido o conjunto imagen de las funciones $f(t) = sen\,t$ y $f(t) = cos\,t$.

SD 4. PARÁMETROS DE LAS FUNCIONES SENOIDALES (COSENOIDALES)

APRENDIZAJES

Apr.4 Extenderá el concepto de razón trigonométrica a función, mediante la elaboración de una tabla o gráfica de: $f(t)=sen\,t$ y $f(t)=cos\,t$.

Apr.5 Analizará e identificará los parámetros que aparecen en las funciones: $f(t)=D+Asen(Bt+C)$ y $f(t)=D+Acos\,(Bt+C)$. D desplazamiento vertical, A amplitud, B frecuencia, y desfasamiento.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

Gráficas de las funciones $f(t)=D+Asen(Bt+C)$ y $f(t)=D+Acos\,(Bt+C)$.

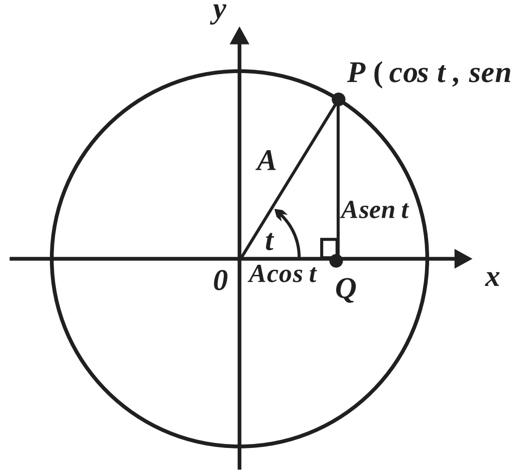
Análisis del comportamiento de la gráfica respecto de los parámetros A, B, C y D.

DESARROLLO

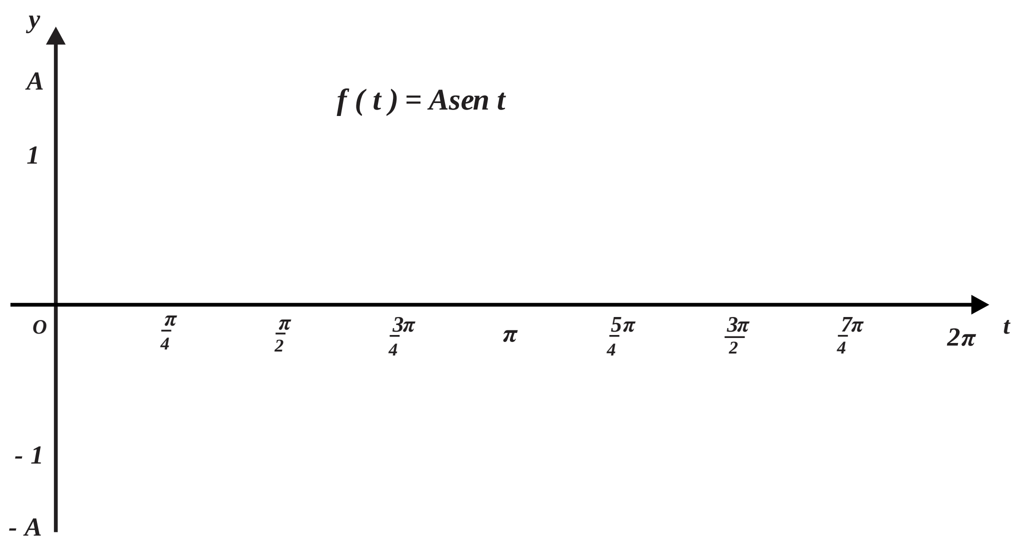
a. Amplitud.

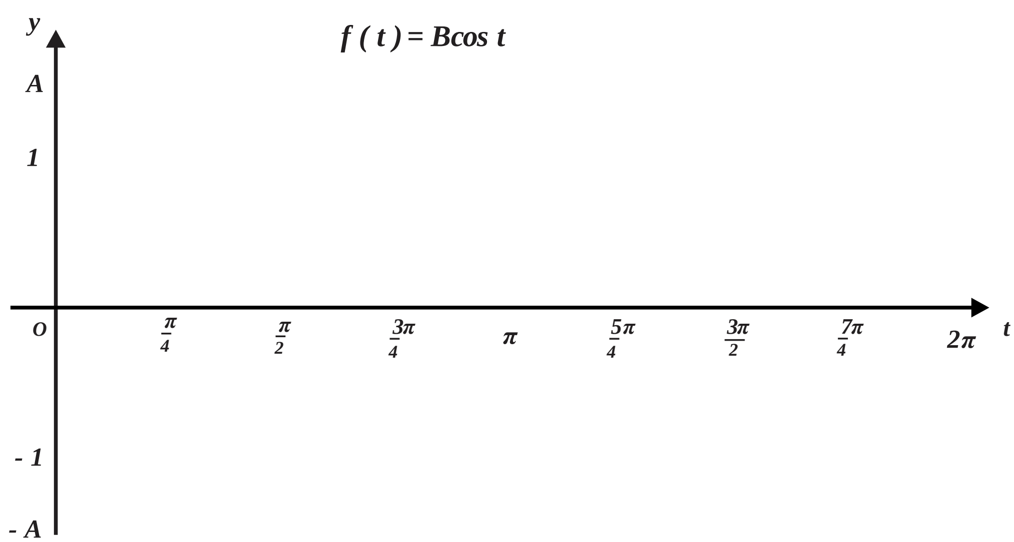
i. Trace un círculo de radio de longitud A cuyo centro coincida con el eje de coordenadas, el radio se encuentre en el primer cuadrante y tenga extremos en los puntos $\overline{OP}$. Proyecte (perpendicularmente) el punto P sobre el eje de las abscisas y nombre el punto de proyección como Q. En la figura anterior marque el triángulo rectángulo OPQ, nombre al ángulo con vértice en el punto O como t.

ii. Tome como base la figura, revise la forma en que varía las funciones $f(t)=Asen\,t$ y $f(t)=Acos\,t$ y complete la siguiente tabla.



t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{6\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{10\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$f(t) = A sen\, t$																
$f(t) = A cos\, t$																





iii. Sobre los sistemas cartesianos anteriores trace las curvas asociadas a $f(t) = sen\, t$ y $f(t) = cos\, t$ (utilice un color distinto) y describa los efectos geométricos de incluir el parámetro A en las funciones senoidales $f(t) = sen\, t$ y $f(t) = cos\, t$.

____.

b. Frecuencia

i. La función $f(t) = A sen\, t$ es periódica, de periodo $t = 2\pi$ mismo que ocurre sobre el intervalo $[\ 0\ ,\ 2\pi\ ]$. ¿En qué intervalo ocurre un periodo de la función $f(t) = A sen\, Bt$? Suponga que B es un número positivo mayor que uno.

____.

____.

ii. La función $f(t) = A sen\, t$, definida sobre el intervalo $[\ 0\ ,\ 2\pi\ ]$, tiene ceros en cuando $t = 0$, $t = \pi$ y $t = 2\pi$. Suponga que B es un número positivo mayor que uno.¿Cuáles son los ceros de la función $f(t) = A sen\, Bt$ definida sobre el intervalo $[\ 0\ ,\ 2\pi\ ]$?

____.

iii. La función $f(t) = A sen\, t$, definida sobre el intervalo $[\ 0\ ,\ 2\pi\ ]$, tiene como máximo el punto $M\left(\frac{\pi}{2}\ ,\ A \right)$. ¿Cuáles son los máximos de la función $f(t) = A senB\, t$ sobre el intervalo $[\ 0\ ,\ 2\pi\ ]$?

____.

iv. La función $f(t) = A sen\, t$, definida sobre el intervalo $[\ 0\ ,\ 2\pi\ ]$, tiene como mínimo el punto $M\left(\frac{3\pi}{2}\ ,\ -A \right)$. ¿Cuáles son los mínimos de la función $f(t) = A senB\, t$ sobre el intervalo $[\ 0\ ,\ 2\pi\ ]$?

____.

v. En un mismo sistema cartesiano traza las curvas asociadas a $f(t) = A sen 2\, t$, $f(t) = A sen 3\, t$ y $f(t) = A sen 4\, t$ sobre el intervalo $[\ 0\ ,\ 2\pi\ ]$.

vi. Responde las preguntas **i.**, **ii.**, **iii.**, y **iv.**, para la función $f(t) = A\cos Bt$ considerando que $f(t) = A\cos t$, definida sobre el intervalo $[\,0\,,\,2\pi\,]$ tiene ceros cuando $t = \frac{\pi}{2}$ y $t = \frac{3}{2}\pi$, como mínimo el punto $m\left(\frac{\pi}{2}\,,\,-A\right)$ y máximos los puntos $M_1(\,0\,,\,A\,)$ y $M_2(\,\pi\,,\,A\,)$ (suponga que el parámetro es un número positivo mayor que uno).

____.

vii. En un mismo sistema cartesiano traza las curvas asociadas a $f(t) = A\cos 2t$, $f(t) = A\cos 3t$ y $f(t) = A\cos 4t$ sobre el intervalo $[\,0\,,\,2\pi\,]$.

CIERRE

1. ¿Cuál es el efecto del parrámetro B en las curvas asociadas a $f(t) = A\,sen\,Bt$ y $f(t) = A\cos Bt$ respecto a las curvas asociadas a $f(t) = A\,sen\,t$ y $f(t) = A\cos t$ respectivamente? (suponga que el parámetro es un número positivo mayor que uno).

____.

2. El número B en $f(t) = A\,sen\,Bt$ y $f(t) = A\cos Bt$ se llama frecuencia, ¿qué efecto tiene en el intervalo $[\,0\,,\,2\pi\,]$? (suponga que el parámetro es un número positivo mayor que uno). Explique.

____.

3. ¿Puede establecer observaciones equivalentes, para las preguntas 1. Y 2. Si al parámetro B le son asignados números mayorea que cero pero menores que uno?

____.

SD 5. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

APRENDIZAJES

Apr.6 Utilizará las funciones trigonométricas para representar fenómenos de variación periódica.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

Problemas de aplicación.

APERTURA

Identificación de las características de las funciones $f(t) = Asen\,Bt$ y $f(t) = Acos\,Bt$ (en particular, parte positiva, parte negativa, dominio y periodo).

DESARROLLO

1. DESPLAZAMIENTO DE UNA ESCALERA

a. Una escalera tiene longitud 10 metros, su extremo superior está apoyado en una pared. Si la escalera resbala:
Construya una función que describa el comportamiento de la distancia entre el pie de la escalera y el pie de la pared en función del ángulo formado por la escalera y la pared.

i. Trace una figura que muestre la pared y la escalera.

ii. En la figura que trazó, señale las variables que intervienes (ángulo de la escalera con el piso y distancia ente el pie de la escalera y el pie de la pared.

iii. Identifique la función trigonométrica que relaciona la variación del angulo que forma la escalera con el piso y la distancia entre el pie de la escalera y el pie la pared (regla de correspondencia y dominio).

____.

b. Calcule la distancia entre el pie de la escalera y el pie de la pared cuando, la pared y la escalera forman un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ radianes.

____.

c. Calcule la distancia entre el pie de la escalera y el pie de la pared cuando, la pared y la escalera forman un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.

____.

2. DISCO
Un disco (de radio de longitud de 16) gira con rapidez constante. En el extremo de uno de sus radios se ha puesto una marca.
a. Trazo de figuras.
i. Trace una figura que muestre esta situación de manera que el centro del disco coincida con el origen del plano cartesiano.

ii. Proyecte perpendicularmente el extremo del radio sobre el eje de las abscisas y trace el triángulo rect6ánguo con vértices en el origen, en el extremo del radio y en la proyección del punto en el eje de las abscisas.

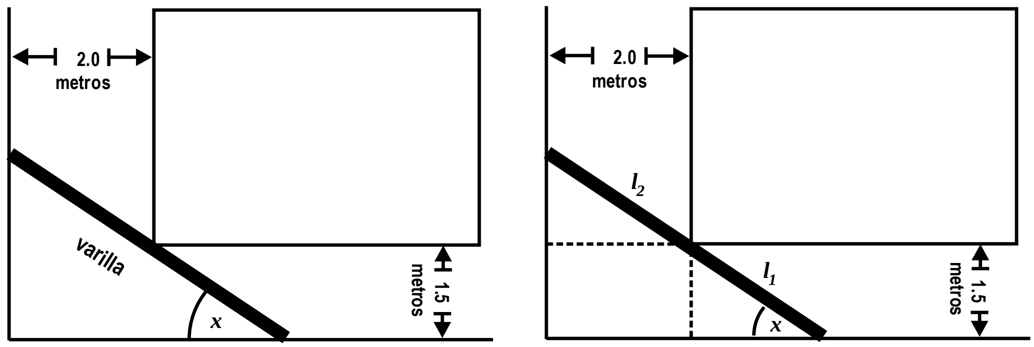
b. Construya una función que describa el comportamiento de la longitud entre un diámetro horizontal del disco y el ángulo formado por el diámetro horizontal y el radio con el extremo que ha sido marcado.

____.

c. Calcule la distancia entre el extremo del radio marcado y el diámetro horizontal si forman un ángulo de $\frac{\pi}{12}$ radianes.

____.

3. EL TRANSLADO DE UNA VARILLA
Se desean analizar las longitudes de las varillas que puede transportarse por el pasillo que determinan las esquinas de dos muros cuyas paredes son paralelas entre sí (vea a la figura).



a. Construya una función que describe el comportamiento de longitud de la varilla en términos del ángulo que forma con la pared horizontal de la esquina externa.

____.

b. Calcule la longitud de la varilla que puede ser transladada si forma un ángulo de $\frac{\pi}{12}$ radianes con la pared horizontal de la esquina exterior.

____.

4. CERCADO DE UN TERRENO
Se utilizarán 4000 metros de almbre con puas para cercar un terreno triangular.
a. Trace una figura que muestre el terreno y la cerca.

ii. En la figura que trazó, agregue una altura y seleccione uno de ángulos agudos como referencia.

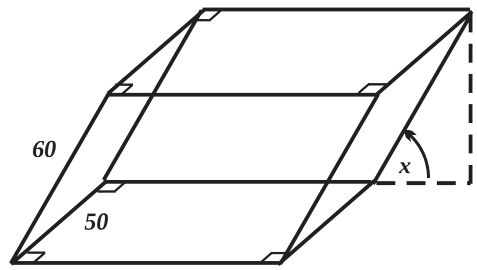
____.

iii. Construya una función que describa el área de los terrenos que es posible cercar.

____.

b. ¿Cuál es el área del tereno que ha sido cercado si $t = \frac{\pi}{6}$ radianes?

5. VOLUMEN DE UNA CAJA
La siguiente figura muestra una caja en forma de prisma.



a. Construya una función (regla de correspondencia y dominio) que describa el volumen de la caja, mostrada en la figura, en términos del ángulo x .

____.

b. ¿Cuál es el volumen de la caja si $t=\frac{\pi}{3}$ radianes?

____.

6. FLUJO A TRAVÉS DE UN CANAL

Con una lámina de forma rectangular se desea construir un canal (descubierto en la parte superior). La lámina mide 2 metros de ancho y sus orillas deben doblarse 40 centímetros hacia arriba, de manera que formen ángulos iguales con la vertical.

a. Trace una figura que muestre el canal.

b. Construya una función que describa el área de la sección transversal del canal en términos del ángulo t .

____.

c. ¿Cuál es el área de la sección transversal del canal si $t=\frac{\pi}{4}$ radianes?

____.

CIERRE

1. En los problemas que ha resuelto, ¿por qué solo tienen sentidos las partes no negativas de las funciones?

____.

2. En los problems que ha resuelto, ¿por qué solo tienen sentido ángulos no negativos menores a $\frac{\pi}{2}$?

____.