



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO  
ESCUELA NACIONAL COLEGIO DE CIENCIAS  
Y HUMANIDADES  
PLANTEL ORIENTE



## PAQUETE DIDÁCTICO PARA LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICAS II



Elaborado por los profesores:

**COORDINADOR: Roberto Pedro Robledo Arana.**

**INTEGRANTES:**

**Alberto Benítez Pérez.  
Claudia Verónica Morales  
Montaño.  
Gabriel de Anda López.**

**María del Carmen Martínez  
Tapia.**

**Martín Mejía Espinosa.  
Roberto Pedro Robledo Arana.**

**SEPTIEMBRE DE 2020**

# Índice

<b>I. INTRODUCCIÓN.</b>	<b>6</b>
<b>II. PRESENTACIÓN.</b>	<b>7</b>
<b>III. USO DE ESTRATEGIAS Y/O SECUENCIAS DIDÁCTICAS</b>	<b>9</b>

<b>Unidad 1. Ecuaciones Cuadráticas.</b>	<b>11</b>
--	-----------

Propósito de la Unidad.	11
1. Presentación de la Unidad I.	11
2. Bosquejo histórico de las ecuaciones cuadráticas.	12
3. Actividades de aprendizaje.	13
4. Puesta en Escena de la unidad I. Ecuaciones cuadráticas.	13
Secuencia 1. Construyendo el modelo.	14
Secuencia 2. Resolviendo el problema.	22
Secuencia 3. Resolviendo el acertijo.	30
Secuencia 4. Tierra a la vista.	40
Secuencia 5. Aplicando el modelo.	48
5. Materiales de Apoyo.	53
6. Bibliografía.	56

<b>Unidad 2. Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.</b>	<b>57</b>
--	-----------

Propósito de la Unidad.	57
1. Presentación de la Unidad II.	57
2. Bosquejo histórico y evolución de las Funciones Cuadráticas.	57
3. Actividades de aprendizaje.	57
4. Puesta en Escena de la unidad II.	57
Secuencia Didáctica 1. Situaciones que involucran cambio y que dan origen a funciones cuadráticas.	58

Secuencia Didáctica 2. Estudio gráfico, analítico y contextual de la función $y = ax^2 + bx + c$ , con $a \neq 0$ y $b$ y $c$ constantes en particular: (a) $y = ax^2$ ; (b) $y = ax^2 + c$ ; (c) $y = a(x - h)^2 + k$ .	65
Secuencia Didáctica 3. Ceros de la función.	73
Secuencia didáctica 4. La función $y = ax^2 + bx + c$ , $a \neq 0$ , $b$ y $c$ constantes, y sus propiedades gráficas. Simetría, concavidad, máximo o mínimo.	79
Secuencia Didáctica 5. Problemas de aplicación.	91
5. Materiales de Apoyo.	97
6. Bibliografía Básica.	108
<b>Unidad 3. Elementos Básicos de Geometría Plana.</b>	<b>110</b>
Propósitos de la unidad	110
1. Presentación de la Unidad III.	110
2. Bosquejo Histórico y evolución de la Geometría.	110
3. Actividades de Aprendizaje.	112
4. Puesta en Escena de la unidad III. Elementos Básicos de Geometría Plana.	112
Secuencia Didáctica 1. Elementos básicos de geometría.	112
Secuencia Didáctica 2. Construcciones con regla y compás.	115
Secuencia Didáctica 3. Ángulos.	122
Secuencia Didáctica 4. Ángulos determinados por dos rectas paralelas y una secante.	125
Secuencia Didáctica 5. Geometría del triángulo.	130
Secuencia Didáctica 6. Propiedades de los triángulos.	134
Secuencia Didáctica 7. Polígonos regulares e irregulares.	140
Secuencia Didáctica 8. Perímetro y área de un polígono regular.	146
5. Materiales de Apoyo.	152

6. Bibliografía Básica.	175
<b>Unidad 4. Congruencia, Semejanza y Teorema de Pitágoras.</b>	<b>177</b>
Propósitos de la unidad.	177
1. Presentación de la Unidad IV.	177
2. Bosquejo Histórico.	177
3. Actividades de aprendizaje.	178
4. Puesta en Escena de la unidad IV. Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.	178
Secuencia Didáctica 1. Concepto de congruencia y su notación.	178
Secuencias Didácticas 2. Figuras congruentes.	181
Secuencias Didácticas 3. Congruencia de triángulos.	184
Secuencia Didáctica 4. Criterios de congruencia de triángulos.	186
Secuencias Didácticas 5. Validez de algunas construcciones geométricas y de algunas afirmaciones.	188
Secuencia Didáctica 6. Problemas de aplicación.	194
Secuencias Didácticas 7. Concepto de semejanza y su notación.	199
Secuencias Didácticas 8. Semejanza de triángulos.	200
Secuencia Didáctica 9. Teorema de Thales y su recíproco.	204
Secuencia Didáctica 10. Criterios de semejanza de triángulos.	209
Secuencias Didácticas 11. Problemas de aplicación.	217
Secuencias Didácticas 12. Razón entre perímetros y áreas de triángulos semejantes.	220
Secuencia Didáctica 13. Teorema de Pitágoras y su recíproco.	223
Secuencia Didáctica 14. Problemas de longitudes y áreas que involucran semejanza, congruencia y teorema de Pitágoras. Teorema de la altura de un triángulo rectángulo.	228
5. Materiales de Apoyo.	230
9. Bibliografía Básica.	243

# **Anexos.**

**Anexo 1. Fases de una Secuencia Didáctica. 245**

**Anexo 2. Interfaz álgebra-geométrica GeoGebra. 248**



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO  
ESCUELA NACIONAL COLEGIO DE CIENCIAS  
Y HUMANIDADES  
PLANTEL ORIENTE**



## **I. INTRODUCCIÓN.**

El presente Paquete Didáctico para la asignatura de Matemáticas II de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, se elaboró considerando los Programas de Estudio del Área de Matemáticas I-IV, 2016. De acuerdo con los contenidos y enfoque de la asignatura, con el propósito de apoyar al profesor en el desarrollo de la asignatura. Las unidades que se trabajan en este curso corresponden a los ejes de álgebra, funciones y Geometría Euclidiana. En la unidad de ecuaciones cuadráticas se revisan conceptos y procedimientos que serán el fundamento de la mayoría de los cursos de matemáticas del Colegio, además de establecer una liga con el tema de funciones cuadráticas al vincularse estrechamente en sus características particulares. El resto del curso está dedicado a temas de geometría euclidiana que mediante el manejo del método deductivo se favorece la argumentación y el razonamiento lógico necesario, tanto en el campo de las matemáticas como en otras disciplinas.

De manera más amplia este paquete didáctico está formado por secuencias didácticas<sup>1</sup>, correspondientes al estudio de la ecuación y la función cuadrática mismas que permiten, por un lado, avanzar en el concepto de función al introducir un nuevo tipo de variación que conlleva conceptos como concavidad y simetría, y, por otro, la relación entre estas unidades enriquece ambas temáticas y contribuye a la formación de significados sobre la resolución de ecuaciones.

En el caso de la Geometría Euclidiana, esta ayudará al alumno a describir los objetos y sus partes de acuerdo con sus formas, dimensiones y propiedades. Así, las unidades correspondientes al eje de Geometría Euclidiana contemplan las

---

<sup>1</sup> Cf. Anexo 1

etapas de exploración, deducción y aplicación, mismas que permiten establecer un equilibrio entre dos tendencias de la enseñanza de la geometría a nivel bachillerato. Los distintos aprendizajes están señalados en cada una de las unidades del programa de estudio, de manera que el profesor puede aplicar las que considere pertinentes de acuerdo a las necesidades del grupo, ya que las secuencias deben ser trabajadas en equipo por parte de los alumnos, lo que permite que el profesor revise el trabajo colectivo y les vaya indicando los errores que se van cometiendo para su corrección por parte de los alumnos, y está apoyada por el software GeoGebra<sup>2</sup>, que ofrece al estudiante ambientes de trabajo que estimulan la reflexión y lo convierten en un ser activo y responsable de su propio aprendizaje, además provee un espacio problemático común al maestro y al estudiante para construir significados, elimina la carga de los algoritmos rutinarios para concentrarse en la conceptualización y la resolución de problemas, da un soporte basado en la retroalimentación y reduce el miedo del estudiante a expresar algo erróneo y, por lo tanto, se aventura más a explorar sus ideas.

Como todo producto de trabajo colegiado, sabemos que este paquete didáctico está sujeta a la discusión y replica de los docentes del Área de Matemáticas, pues no hay otra forma de medir su contribución. Los autores asumimos como benéficas la retroalimentación, críticas y comentarios con fundamentos académicos que puedan desprenderse de este recurso didáctico.

## **II. PRESENTACIÓN.**

La enseñanza de las matemáticas es una actividad sumamente compleja. A través de la historia el hombre ha experimentado diversos métodos y procedimientos con el propósito de lograr en forma efectiva tanto su enseñanza como su aprendizaje, sin obtener hasta el momento los resultados buscados. Por esta razón, introducir o investigar la historia de las matemáticas en la clase de Matemáticas II, pareciera ser una opción más para que profesores y alumnos valoren y asimilen la *evolución* e

---

<sup>2</sup> Cf. Anexo 2.

*importancia* que las matemáticas han tenido a lo largo de la historia. Me parece pues que la historia de las matemáticas resulta un instrumento *utilísimo* en el ejercicio docente pues amplía la concepción que de estas usualmente tiene el alumno. Más aún, de acuerdo con la anterior puedo decir que el profesor puede integrar diferentes pasajes históricos de matemáticos no sólo en cuanto a los aportes logrados sino, también, mostrar el lado humano de ellos para hacer notar a los estudiantes que al igual que ellos los grandes matemáticos también encontraron dificultades para poder establecer algún aporte más a esta ciencia.

Este material resulta un instrumento de aprendizaje invaluable, pues en él se organizan los tres tipos de contenidos por aprender, destacándose el desarrollo de habilidades matemáticas, destrezas procedimentales, así como la motivación del estudiante. Cabe señalar que las actividades de trabajo muestran un orden lógico en las acciones de inicio (apertura), desarrollo y cierre, de una secuencia didáctica; más aún, promueven el desarrollo de competencias, favorecen el logro del propósito planteado (para la secuencia y, en general, para la unidad didáctica) y, por último, su evaluación ofrece elementos para determinar el nivel de desarrollo de las competencias.

A lo largo del desarrollo de las diferentes actividades de trabajo de cada unidad didáctica, se deberá ir determinando la adecuación y pertinencia de las construcciones conceptuales de los alumnos a través de diferentes “evaluadores<sup>3</sup>” para que se vaya confrontando a cada estudiante con sus nuevas adquisiciones y ello le permitirá ir diferenciando aquellas interpretaciones no matemáticas de las que sí lo son para que, en última instancia, reconcilie las interpretaciones matemáticas con las restantes de manera que los nuevos conocimientos queden integrados en su acervo lingüístico de manera permanente y estable. Estos “evaluadores” deben tener siempre presente el trabajo cotidiano que desarrollan los alumnos a través de las secuencias didácticas.

En particular, la evaluación que llevaremos a cabo en esta propuesta la trataremos de sustentar más en el esfuerzo, trabajo, participación y actitud (disposición para

---

<sup>3</sup> Usando los materiales de apoyo y autoevaluación.



aprender) de cada estudiante, que en las “respuestas rápidas y/o correctas” de “los estudiantes brillantes”. El aprendizaje es todo un proceso del que no se puede soslayar lo anterior, antes, al contrario, habría que estimular a los estudiantes en la cultura del esfuerzo.

### III. USO DE ESTRATEGIAS Y/O SECUENCIAS DIDÁCTICAS.

En general, *las estrategias y/o secuencias didácticas* que se diseñarán para este Paquete Didáctico Matemáticas II, tienen como fin en menor o mayor medida que los alumnos alcancen los *aprendizajes propuestos* para cada curso, por las siguientes *consideraciones*:

- *Inciden* en la estructura cognitiva<sup>4</sup> del aprendiz ya que a partir de los conceptos base con los que cuenta el alumno, las ideas nuevas puedan ser relacionadas o ligadas. Por esto, Ausubel argumenta que *el factor individual más importante que influye en el aprendizaje es lo que el estudiante ya sabe*. De ahí que, cada secuencia didáctica debe tener en cuenta *los conocimientos previos, concepciones y motivaciones de los alumnos*.
- Se crean con estas un entorno adecuado para el aprendizaje y la enseñanza.
- Cada secuencia y/o estrategia deberá plantear situaciones en las que los alumnos identifiquen y reconozcan sus ideas, a partir de una reflexión individual y del contraste o diferenciación con las del profesor, de otros compañeros o de la información documental.
- Favorecen aquellos procesos que ayudan a los alumnos a ser responsables de su propio aprendizaje. (Esto tiene lugar cuando los estudiantes construyen sus propios conocimientos).
- Utilizan hechos, fenómenos y situaciones próximas al contexto de los estudiantes, ya que para aprender algo, los alumnos necesitan ver su utilidad.

---

<sup>4</sup> Hablar de la estructura cognitiva es referirse a la posibilidad de recibir, asimilar, asociar, almacenar y abstraer información, además de darle significado. Pero estas habilidades pudieran no ser sólo producto de la biología humana, sino el resultado de la constante interacción de un individuo con su entorno próximo.

- Para cada secuencia y/o estrategia didáctica se deberá disponer de un amplio abanico de actividades y recursos para ser utilizados según los diferentes estilos de aprendizaje de los estudiantes, así como la diversidad de situaciones en las que se desarrolla, evitando con ello la improvisación.
- Todas las *situaciones de aprendizaje*, es decir, los trabajos prácticos, la resolución de problemas, la utilización del conocimiento en la vida cotidiana, etcétera., deben ser contempladas en el diseño y realización de una secuencia didáctica como actividades coadyuvantes para que el aprendizaje sea significativo.
- Dan lugar a una enseñanza intencionada y dirigida de los conocimientos implicados, es decir, el sentido de los conocimientos por enseñar debe ser pertinente al estudiante y a los contenidos, tratando de que esto de lugar a que los descubra o aprenda de manera significativa.
- Favorecen el desarrollo personal, el debate, la cooperación, el rigor, la honestidad, la creatividad, la crítica razonada, los planteamientos no dogmáticos y la satisfacción por aprender.

El uso de estas estrategias y/o secuencias didácticas, deberán tener siempre presente el trabajo cotidiano que los estudiantes realizan en el salón de clase.

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

### **Propósitos de la Unidad.**

Al finalizar, el alumno:

Resolverá ecuaciones cuadráticas mediante diversos métodos de solución.  
Modelará problemas que conduzcan a este tipo de ecuaciones. Establecerá la relación que existe entre el grado de la ecuación y el número de soluciones.

### **1. Presentación de la unidad I.**

Iniciaremos la unidad con una semblanza histórica sobre las ecuaciones cuadráticas mencionando algunos hechos que consideramos interesantes que muestran el desarrollo de la matemática.

Las secuencias didácticas que componen esta unidad se desarrollaron considerando en primer lugar los aprendizajes de la unidad para que en base a estos se presentaran los contenidos de manera que los estudiantes logren los propósitos de la misma, la participación de los alumnos es de vital importancia ya que de esta manera en base a sus conocimientos previos el alumno logrará integrar los materiales presentados al trabajar de manera individual, en equipo y finalmente contrastando sus resultados con el resto del grupo bajo la dirección del profesor, trabajando inicialmente los materiales de manera individual, luego contrastar sus resultados con sus compañeros de equipo, aprendiendo a escuchar y respetar las opiniones de sus compañeros bajo los principios del colegio.

Además, es importante que los alumnos integren a su forma de trabajo la computadora como una herramienta que le permitirá verificar los resultados obtenidos y detectar posibles errores en sus procedimientos, además que le permite poder pasar de un registro a otro de los diversos conceptos que se presentan, lo que hace que sus aprendizajes sean más significativos.

La unidad consta de un examen de diagnóstico, 5 secuencias didácticas que abordan los aprendizajes y conceptos propuestos en la unidad, al final se presentan una serie de problemas de apoyo con su respectiva respuesta y por último la bibliografía en la que el alumno se puede apoyar durante el desarrollo de esta.

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

## 2. Bosquejo histórico de las ecuaciones cuadráticas.

El problema de la resolución de ecuaciones cuadráticas se remonta a Babilonia al segundo milenio antes de Cristo (A. C.).

La comprensión de las ecuaciones cuadráticas por parte de los babilonios fue principalmente geométrica, resolviendo problemas de áreas del mundo real. El problema más antiguo que se conoce está en una tableta de arcilla y su escritura mediante una ecuación de la forma  $x^2 + bx = c$ , donde los valores de  $b$  y  $c$  siempre fueron positivos. Los métodos para la resolución fueron de naturaleza geométrica que se auxiliaban frecuentemente en el método de “completar el trinomio cuadrado perfecto” y conforme se resolvían problemas más complejos se utilizaba cada vez más el método de completación del trinomio cuadrado perfecto.

Los antiguos matemáticos egipcios también abordaron problemas relacionados con la ecuación cuadrática que aparecen en el papiro de Berlín del reino medio (de 2500 a 1800 A.C.). Estos tratamientos continúan en la India en el siglo VIII A.C., en China en el siglo II A.C.

El método geométrico para la resolución de problemas que llevaban a ecuaciones cuadráticas prevaleció en la matemática griega con Euclides y Pitágoras, pero la resolución de problemas empezó a dejar el método geométrico y empezaron a surgir nuevos métodos con Diofanto que fue el primero en dar una solución aritmética para la ecuación cuadrática en el siglo III D.C.

El método de Diofanto no proporciona todas las raíces, solamente la raíz positiva, lo cual se debió al consenso de la época ya que las raíces negativas no solo eran conceptualmente inútiles, sino además irracionales.

Así que Diofanto descartó la solución de las ecuaciones cuadráticas.

En el siglo VII D.C. el matemático Brahmagupta usó los métodos de Diofanto para las ecuaciones cuadráticas para llegar a una de las primeras aproximaciones a la fórmula actual, solo hasta el siglo noveno el matemático árabe Al-Khwarizmi empezó a usar la fórmula que da la doble solución.

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

### **3. Actividades de aprendizaje.**

Se desarrollaron tomando en cuenta los aprendizajes de la unidad, para lo cual se tomaron en cuenta los contenidos propuestos, cada secuencia está estructurada considerando las tres fases que son inicio, desarrollo y cierre, siendo el principal actor el alumno que debe realizar todas las actividades indicadas.

### **4. Puesta en escena de la unidad I. Ecuaciones Cuadráticas.**

Las unidades didácticas que se presentan a continuación se diseñaron para que los estudiantes logren a través de los aprendizajes de cada secuencia los propósitos de la unidad I, del curso de matemáticas II. con vistas a lograr los aprendizajes de esta. Esta unidad didáctica se ha estructurado conforme a las siguientes secuencias didácticas.

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

### Secuencia Didáctica 1. Construyendo el modelo.

**Aprendizaje:** Analiza las condiciones que se establecen en el enunciado de un problema, y expresa las relaciones entre lo conocido y lo desconocido a través de una ecuación de segundo grado.

Tiempo para realizar la práctica 120 minutos

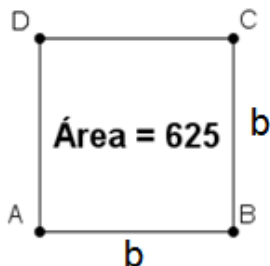
Equipos de 3 o 4 alumnos.

#### Inicio.

#### Instrucciones:

Lee con cuidado y analiza cada uno de los siguientes ejemplos donde para cada problema verbal se obtiene su modelo matemático que corresponde a una ecuación de segundo grado.

**Ejemplo 1. Un terreno cuadrado tiene un área de 625 m<sup>2</sup>, si los cuatro lados del terreno son iguales. ¿Qué longitud tiene cada lado del terreno?**



Como el terreno es un cuadrado, sus lados tienen la misma longitud, y la que la figura de la izquierda lo representa.

En este problema tenemos que la incógnita es la longitud de cada lado y la hemos llamado b.

Como el área de un cuadrado está dada por la siguiente fórmula.

$$\text{Área} = b^2$$

Sustituyendo el valor del área en la fórmula anterior.

$$625 = b^2$$

La ecuación de segundo grado que se obtiene es el modelo algebraico del problema, la ecuación también se puede llamar ecuación cuadrática.

**Ejemplo 2. La diferencia de dos números enteros positivos es de 6 unidades, si la suma de sus cuadrados es 218. ¿Cuáles son los números?**

En este problema tenemos dos incógnitas, que son los números buscados que llamaremos m y n.

De los datos del problema, la diferencia de dos números positivos es 6. Con  $m > 0$ ,  $n > 0$ , y  $m > n$ , de manera que.

$$m - n = 6$$

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

Como la suma de sus cuadrados es 218, podemos escribir la siguiente ecuación.

$$m^2 + n^2 = 218$$

Si despejamos de la ecuación  $m - n = 6$ , a la incógnita  $m$ , tenemos.

$$m = 6 + n$$

Sustituyendo el despeje, en la ecuación de la suma de los cuadrados tenemos.

$$(6 + n)^2 + n^2 = 218$$

Desarrollando la expresión  $(6 + n)^2$ , tenemos.

$$(6 + n)^2 = 36 + 12n + n^2$$

Sustituyendo el resultado en la expresión,  $(6 + n)^2 + n^2 = 218$ , nos queda la expresión.

$$36 + 12n + n^2 + n^2 = 218$$

Simplificando los términos semejantes.

$$36 + 12n + 2n^2 = 218$$

Restando 218 en ambos miembros de la ecuación tenemos.

$$36 - 218 + 12n + 2n^2 = 0$$

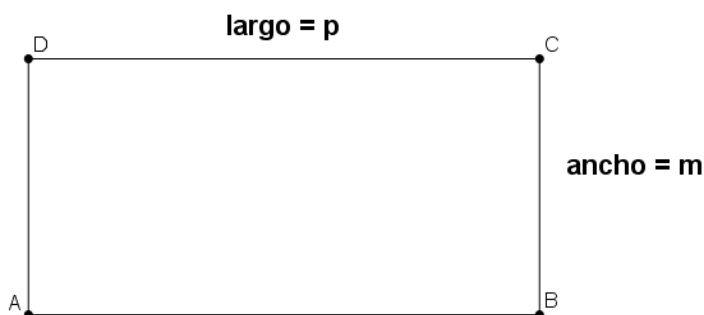
Simplificando y ordenando la ecuación.

$$2n^2 + 12n - 182 = 0$$

La ecuación de segundo grado que resulta es el modelo del problema planteado.

**Ejemplo 3. El largo de un jardín es un metro menor que el triple del ancho. Si el área del jardín es de 24 m<sup>2</sup>. Determinar el largo y el ancho del jardín.**

La siguiente figura representa el jardín del problema.



En este problema aparecen dos incógnitas que son:

El largo que está representado por la letra  $p$ .

Y el ancho que está representado por la letra  $m$ .

De la expresión “El largo de un jardín es un metro menor que el triple del ancho de este” se obtiene la siguiente expresión.

$$p = 3m - 1$$

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

Otra relación de las incógnitas está dada por el área del jardín, cuya fórmula es.

$$\text{Área} = (p)(m)$$

Como el área del jardín es de  $24 \text{ m}^2$ , sustituyendo este valor en la fórmula del área se tiene.

$$24 = (p)(m)$$

Y sustituyendo la expresión  $p = 3m - 1$  en la última expresión del área del jardín, se tiene.

$$24 = (3m - 1)m$$

Haciendo la multiplicación indicada en la parte izquierda de la ecuación se tiene.

$$24 = 3m^2 - m$$

Restando 24 en ambos miembros de la ecuación, nos queda.

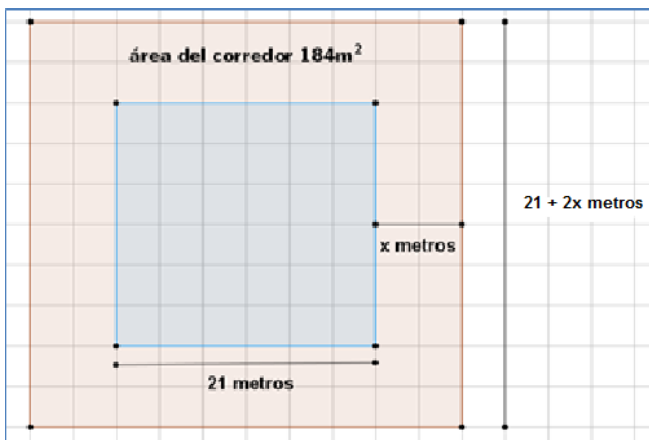
$$0 = 3m^2 - m - 24$$

Esta ecuación de segundo grado modela el problema planteado.

**Ejemplo 4. Una alberca cuadrada de 21 metros x 21 metros está rodeada por un camino de ancho uniforme. Si el área del camino es de 184 metros cuadrados, determinar el ancho del camino.**

En este problema se tiene una incógnita, que simbolizaremos por la letra  $x$ , que corresponde al ancho del camino.

$x$  metros = ancho del camino



La siguiente figura nos muestra un esquema de la alberca con el camino que la rodea.

El área de la alberca es:  $\text{Área} = 21 \times 21 = 441 \text{ m}^2$ .

Ahora se calcula el área de la alberca más el área del pasillo de dos formas.

Área de la alberca más el área del pasillo =  $441 \text{ m}^2 + 184 \text{ m}^2 = 625 \text{ m}^2$ .

Área de la alberca más el área del pasillo =  $(21 + 2x)(21 + 2x) = (21 + 2x)^2$ .



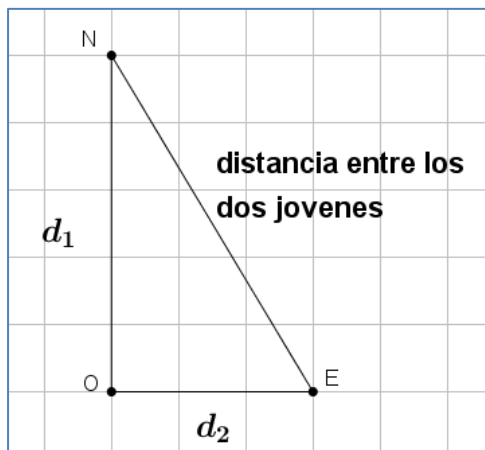
Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

Como ambos resultados deben ser iguales, se tiene.

$$(21 + 2x)^2 = 625$$

Nuevamente el modelo del problema es una ecuación de segundo grado.

**Ejemplo 5.** Al medio día Tomas salió del punto A caminando hacia el norte; una hora más tarde, Diego salió del punto A caminando hacia el este. Ambos muchachos caminaron a 4 kilómetros por hora y llevaban un radio de comunicación con un alcance de 8 kilómetros. ¿A qué hora perdieron contacto?



El siguiente diagrama nos muestra la trayectoria de ambos muchachos, y la distancia que hay entre ellos.

En este problema la incógnita por determinar es el tiempo “**x**” que transcurre a partir de que Diego empieza a caminar.

Como la velocidad de ambos es constante e igual a 4 km/hora.

La distancia  $d_1$  recorrida por Tomas considerando que salió una hora antes que diego y en una hora camino 4 kilómetros.

$$d_1 = 4 + 4x$$

La distancia recorrida por Diego es igual a.

$$d_2 = 4x$$

Y la distancia entre ambos cuando se pierde la comunicación está dada por.

$$8 = \sqrt{(4 + 4x)^2 + (4x)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación tenemos.

$$64 = (4+4x)^2 + 16x^2$$

Factorizando el 4 en el binomio al cuadrado.

$$64 = (4[1+x])^2 + 16x^2$$

De donde se tiene.

$$64 = 16[1+x]^2 + 16x^2$$

Dividiendo toda la ecuación por 16, se tiene.

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

$$4 = (1+x)^2 + x^2$$

Desarrollando el cuadrado, simplificando los términos semejantes e igualando a cero la ecuación tenemos.

$$0 = 2x^2 + 2x - 3$$

La ecuación algebraica que representa al problema es una ecuación cuadrática o de segundo grado.

### Desarrollo.

#### Instrucciones.

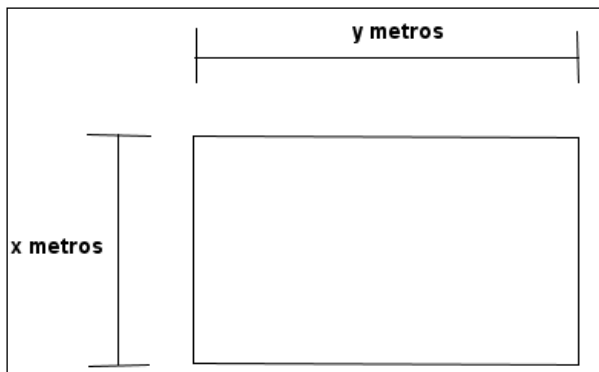
Como observaste en los problemas anteriores se deben de realizar los siguientes pasos, para determinar el modelo algebraico del problema planteado, trata de seguir el procedimiento en los siguientes problemas que se plantean.

1. Identificar las incógnitas y los datos.
2. Se buscan las relaciones que existen entre incógnitas y datos y se representan por medio de ecuaciones.
3. De ser posible hacer un diagrama que represente las condiciones del problema.
4. Buscar el proceso algebraico que nos lleve a determinar el valor de las incógnitas del problema.

Lee con cuidado los siguientes problemas y contesta cada una de las preguntas que se van presentando para llegar al modelo matemático del problema.

**Ejercicio 1. Un jardín con forma rectangular tiene un perímetro de 42 metros y un área de 108 metros cuadrados, ¿cuáles son sus dimensiones?**

Se debe empezar por dibujar un rectángulo que represente el jardín en cuestión.



Después de observar la figura indica cuáles son las incógnitas.

\_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_.

Así que para resolver este problema necesitamos las fórmulas para encontrar el perímetro y el área del rectángulo.

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

La fórmula para calcular el perímetro de un rectángulo es:

$$\text{Perímetro} = \underline{\hspace{2cm}}$$

La fórmula para calcular el área de un rectángulo es:

$$\text{Área} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Sustituyendo que el perímetro es de 42 metros, en la fórmula del perímetro del rectángulo se obtiene la siguiente ecuación.

$$42 = 2x + 2y$$

Escribe la ecuación que resulta de dividir toda la ecuación entre 2.

$$\underline{\hspace{2cm}}$$

Sustituyendo el valor del área igual a  $108 \text{ m}^2$ , en la fórmula del área, se obtiene la ecuación.

$$\underline{\hspace{2cm}}$$

Como puede observar después de interpretar los datos del problema hemos obtenido las siguientes dos ecuaciones.

$$21 = x + y \quad (1)$$

$$108 = x \cdot y \quad (2)$$

Para encontrar las dimensiones del jardín, de la ecuación (1) despeja la incógnita y, Luego escribe la ecuación que resulta a continuación.

$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$

Ahora sustituye el despeje en la ecuación (2)

$$108 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Ahora escribe el resultado de la multiplicación indicada en el miembro derecho de la ecuación anterior.  $108 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

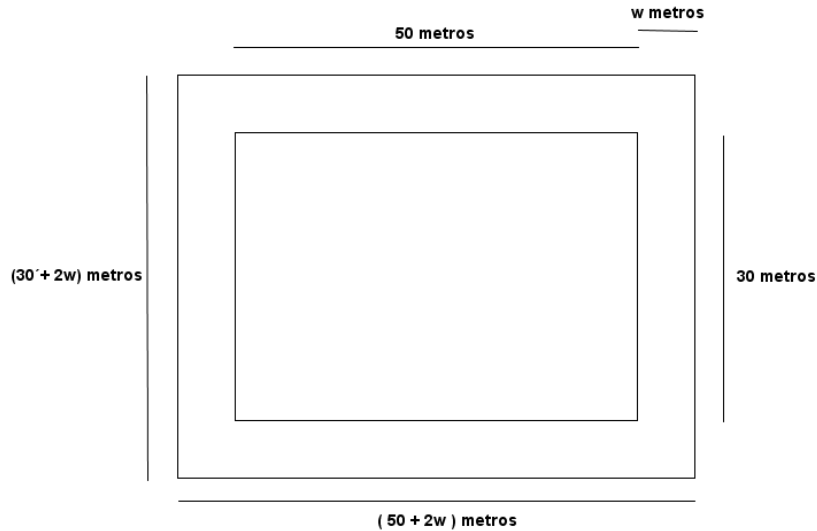
Escribe la ecuación que resulta de igualar a cero la ecuación anterior.

$$\underline{\hspace{2cm}}$$

De qué grado es la ecuación que resulta,  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

**Ejercicio 2.** Un parque contiene un jardín de flores de 50 metros de largo por 30 metros de ancho, rodeado por un sendero o andador de ancho constante. Si el área del marco es  $600 \text{ m}^2$ , ¿Cuál es el ancho del sendero?

El dibujo que representa al jardín con el andador que lo rodea es el siguiente.



El área total del parque es:

$$(50 + 2w)(30 + 2w)$$

El área del jardín de flores es:

$$50 \times 30 = 1500 \text{ m}^2$$

El área del parque

menos el área del jardín es igual al área del andador, así que se puede escribir la siguiente ecuación.

$$(50 + 2w)(30 + 2w) - 1500 = 600 \dots (1)$$

El producto de los dos binomios corresponde a la expresión:

- a)  $4w^2 + 160w + 1500$       b)  $4w^2 + 60w + 1500$       c)  $w^2 + 160w + 1500$   
d)  $4w^2 + 160w + 150$       e)  $2w^2 + 160w + 1500$

Sustituyendo el producto de los dos binomios en la expresión (1) e igualar a cero la expresión que se obtiene es:

- a)  $4w^2 + 160w - 600 = 0$       b)  $4w^2 + 60w - 1500 = 0$       c)  $w^2 + 160w - 600 = 0$   
d)  $w^2 + 160w - 1500 = 0$       e)  $2w^2 + 160w - 600 = 0$

Al simplificar la ecuación de segundo grado en w, se obtiene la siguiente expresión que modela el problema planteado:

- a)  $w^2 + 15w - 150 = 0$       b)  $w^2 + 40w - 150 = 0$       c)  $w^2 + 80w - 300 = 0$   
d)  $w^2 + 160w - 1500 = 0$       e)  $w^2 + 160w - 600 = 0$

**Ejercicio 3. El producto de dos enteros impares consecutivos es 143. Encuentre los enteros impares.**

Si n es el primer número impar, escribe la expresión que simboliza el segundo número impar, \_\_\_\_\_.

El producto de dichos números es:

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

$$n(n + 2) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

La expresión que resulta de multiplicar los números y después de simplificarla es.

a)  $n^2 + 2n$                       b)  $n^2 - 8n$                       c)  $n^2 + 8n$

Como la expresión debe ser igual 143, la ecuación que resulta es.

a)  $n^2 + 2n = 143$                       b)  $n^2 - 8n = 143$                       c)  $n^2 + 8n = 143$

Finalmente, la ecuación que resulta al igualar a cero la ecuación es.

a)  $n^2 + 2n - 143 = 0$                       b)  $n^2 - 8n - 143 = 0$                       c)  $n^2 + 8n - 143 = 0$

### **Cierre.**

En plenaria, con ayuda del profesor se revisan los resultados obtenidos por los alumnos.

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

## Secuencia Didáctica 2. Resolviendo el problema.

### Aprendizajes:

Relaciona un problema nuevo con otro que ya sabe resolver. Interpreta en el contexto del problema, lo que significan las soluciones y elige, si es el caso, aquella que tiene sentido en ese contexto.

Tiempo para realizar la práctica 120 minutos

Equipos de 3 o 4 alumnos.

### Inicio.

Como ya vimos hay problemas cuyo modelo matemático es una ecuación de segundo grado en una variable, por lo que vamos a ver cómo resolver distintos tipos de ecuaciones de segundo grado en la variable  $x$ .

### Instrucciones:

Para cada una de las siguientes ecuaciones, primero mostraremos la forma de resolver cada tipo, luego aplicarás el procedimiento a otras ecuaciones del mismo tipo.

Cuando se obtenga la raíz cuadrada de un número solo se deben tomar los dos primeros decimales sin redondeo.

En la siguiente tabla mostramos los distintos tipos que trataremos.

$x^2=b$	$ax^2=b$	$ax^2+b=0$	$ax^2+b=c$
$a(x+b)^2+c=d$		$(x+b)(x+c)=0$	

**Caso  $x^2=b$ ,** para que esta ecuación tenga solución  $b$  debe cumplir con la siguiente condición,  $b \geq 0$ .

$x^2=b$	Ecuación original
$x = \pm\sqrt{b}$	Se saca la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación
$x_1 = +\sqrt{b}, x_2 = -\sqrt{b}$	Son las soluciones de la ecuación.

**Ejemplo 1.** Encuentra las soluciones de la siguiente ecuación,  $x^2 = 121$ .

Sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación,  $x = \pm\sqrt{121}$ .

Se obtiene la raíz indicada en el miembro derecho de la ecuación.

$$\pm\sqrt{121} = \pm 11.$$

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

Y las soluciones de la ecuación son,  $x_1 = 11$ ,  $x_2 = -11$

**Ejemplo 2.** Encuentra las soluciones de la ecuación,  $x^2 = 57$ .

Sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación,  $x = \pm\sqrt{57}$ .

Utiliza tu calculadora para obtener la raíz cuadrada de 57.

$$x = \pm 7.54.$$

Las soluciones de la ecuación son,  $x_1 = 7.54$ ,  $x_2 = -7.54$

**Ejemplo 3.** Encuentra las soluciones de la ecuación,  $x^2 = -23$ .

Sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación,  $x = \pm\sqrt{-23}$ .

Como el radicando es negativo, la ecuación no tiene solución porque no hay un número real cuyo cuadrado sea negativo.

**Caso  $ax^2=b$ ,** para que esta ecuación tenga solución **a** y **b** deben cumplir con la siguiente condición, **a** y **b** deben tener el mismo signo.

$ax^2=b$	Ecuación original
$x^2 = \frac{b}{a}$	Se dividen ambos miembros de la ecuación por a
$x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$	Se obtiene la raíz cuadrada de ambos miembros de la ecuación.
$x_1 = +\sqrt{\frac{b}{a}}, x_2 = -\sqrt{\frac{b}{a}}$	Las soluciones de la ecuación son

**Ejemplo 4.** Encuentra las soluciones de la ecuación,  $12x^2 = 23$ .

Se divide por 12 ambos miembros de la ecuación,  $x = \frac{23}{12} = 1.91$

Se obtiene la raíz de 1.91,  $x = \pm\sqrt{\frac{23}{12}} = \pm\sqrt{1.91} \cong \pm 1.38$

Las soluciones de la ecuación son,  $x_1 \cong 1.38$ ,  $x_2 \cong -1.38$

**Ejemplo 5.** Encuentra las soluciones de la ecuación,  $-18x^2 = -64$ .

Se divide por -18 ambos miembros de la ecuación,  $x = \frac{-64}{-18} = \frac{64}{18} = 3.55$

Se obtiene la raíz de 3.55,  $x = \pm\sqrt{\frac{64}{18}} = \pm\sqrt{3.55} \cong \pm 1.88$

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

Las soluciones de la ecuación son,  $x_1 \cong 1.88$ ,  $x_2 \cong -1.88$

**Ejemplo 6.** Encuentra las soluciones de la ecuación,  $-13x^2 = 148$ .

Se divide por -13 ambos miembros de la ecuación,  $x = \frac{148}{-13} = -\frac{148}{13} = -8.22$

Se obtiene la raíz de -8.22,  $x = \pm\sqrt{-8.22}$ , no tiene raíz.

La ecuación no tiene solución en los números reales.

**Caso  $ax^2 + b = 0$ ,** para que esta ecuación tenga solución **a** y **b** deben cumplir con la siguiente condición, a y b deben tener signos distintos.

$ax^2 + b = 0$	Ecuación original
$ax^2 = -b$	Se resta b en ambos miembros de la ecuación
A partir de este punto, la ecuación se resuelve usando el procedimiento del caso $ax^2 = b$	

**Ejemplo 7.** Encontrar las raíces de la ecuación,  $6x^2 - 294 = 0$ .

Sumamos 294 a ambos miembros de la ecuación,  $6x^2 = 294$ .

Dividiendo ambos miembros de la ecuación por 6,  $x^2 = 49$ .

Sacando raíz cuadrado a ambos miembros de la ecuación,  $x = \pm\sqrt{49}$ .

$$x = \pm 7$$

Las raíces de la ecuación son,  $x_1 = 7$ ,  $x_2 = -7$ .

**Ejemplo 8.** Encontrar las raíces de la ecuación,  $5x^2 + 325 = 0$ .

Restamos 325 a ambos miembros de la ecuación,  $5x^2 = -325$ .

Dividiendo ambos miembros de la ecuación por 5,  $x^2 = -65$ .

Sacando raíz cuadrado a ambos miembros de la ecuación,  $x = \pm\sqrt{-65}$ .

La raíz no se puede hacer en los números reales, la ecuación no tiene solución real.

**Caso  $ax^2 + b = c$ ,** Restando b en ambos miembros de la ecuación, la ecuación se resuelve usando el procedimiento de la ecuación  **$ax^2 + b = 0$** .



Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

$ax^2 + b = c$	Ecuación original
$ax^2 = c - b$	Se resta b en ambos miembros de la ecuación
Con $d = c - b$ , queda $ax^2 = d$	Se obtiene la ecuación de la forma $ax^2 = d$
A partir de este punto, la ecuación se resuelve usando el procedimiento del caso $ax^2 = b$	

**Ejemplo 9.** Encuentra las raíces de la ecuación  $3x^2 - 12 = 36$ .

Sumando 12 a ambos miembros de la ecuación,  $3x^2 = 48$

Se dividen ambos miembros de la ecuación por 3,  $x^2 = 16$

Sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación,  $x = \pm\sqrt{16}$

Las raíces de la ecuación son,  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = -4$ .

**Ejemplo 10.** Encuentra las raíces de la ecuación  $5x^2 + 32 = 123$ .

Se resta 32 a ambos miembros de la ecuación,  $5x^2 = 91$

Se dividen ambos miembros de la ecuación por 5,  $x^2 = 18.2$

Se saca raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación,  $x = \pm\sqrt{18.2}$

Las raíces de la ecuación son,  $x_1 \cong 4.26$ ,  $x_2 \cong -4.26$

**Caso a**  $(x + b)^2 + c = d$ . Para resolver esta ecuación, hacemos el siguiente cambio de variable  $y = x + b$ , y obtenemos la siguiente ecuación  $ay^2 + b = c$ , que se resuelve con el procedimiento de la ecuación  $ax^2 + b = c$ .

$a(x + b)^2 + c = d$	Ecuación original
$ay^2 + c = d$	Se hace el cambio de variable $y = x + b$
A partir de este punto, la ecuación se resuelve usando el procedimiento del caso $ax^2 + b = c$	

**Ejemplo 11.** Encuentra las raíces de la ecuación  $5(x + 5)^2 + 32 = 123$ .

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

Hacemos  $y = x + 5$  para obtener la ecuación,  $5y^2 + 32 = 123$

Restamos 32 en ambos miembros de la ecuación,  $5y^2 = 91$

Dividimos ambos miembros de la ecuación por 5,  $y^2 = 18.2$

Sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación,  $y = \pm\sqrt{18.2}$

Las raíces de la ecuación son,  $y_1 \cong 4.26$ ,  $y_2 \cong -4.26$

Ahora considerando el cambio de variable,  $x_1 + 5 = 4.26$ , de donde la primera raíz es,  $x_1 \cong -0.74$

La segunda raíz es,  $x_2 + 5 = -4.26$ , así que,  $x_2 \cong -9.26$

**Ejemplo 12.** Encuentra las raíces de la ecuación  $3(x - 6)^2 - 120 = -25$ .

Hacemos  $y = x - 6$  para obtener la ecuación,  $3y^2 - 120 = -25$

Sumamos 120 en ambos miembros de la ecuación,  $3y^2 = 95$

Dividimos ambos miembros de la ecuación por 3,  $y^2 \cong 31.66$

Sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación,  $y \cong \pm\sqrt{31.66}$

Las raíces de la ecuación son,  $y_1 \cong 5.62$ ,  $y_2 \cong -5.62$

Ahora considerando el cambio de variable,  $x_1 - 6 \cong 5.62$ , de donde la primera raíz es,  $x_1 \cong 11.62$

La segunda raíz es,  $x_2 - 6 \cong -5.62$ , así que,  $x_2 \cong 0.38$

**Caso  $(x + b)(x + c) = 0$ .** Para resolver esta ecuación, se considera la propiedad de los números reales que dice, **si  $ab = 0$ , entonces  $a = 0$  ó  $b = 0$ .**

**Ejemplo 13.** Encuentra las raíces de la ecuación,  $(x - 3)(x + 12) = 0$ .

Por la propiedad de los números reales de que, si  $ab = 0$ ,  $a = 0$  ó  $b = 0$ .

Se tiene que  $(x - 3)(x + 12) = 0$

Igualando  $x - 3 = 0$ , despejando  $x$  tenemos,  $x = 3$ .

Al igualar  $x + 12 = 0$ , si despejamos  $x$  se tiene,  $x = -12$ .

Las raíces de la ecuación son,  $x_1 = 3$  y  $x_2 = -12$ .

**Ejemplo 14.** Encuentra las raíces de la ecuación,  $(x - 9)(x - 6) = 0$ .

Por la propiedad de los números reales de que, si  $ab = 0$ ,  $a = 0$  ó  $b = 0$ .

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

Igualando  $x - 9 = 0$ , despejando  $x$  tenemos,  $x = 9$ .

Al igualar  $x - 6 = 0$ , si despejamos  $x$  se tiene,  $x = 6$ .

Las raíces de la ecuación son,  $x_1 = 9$  y  $x_2 = 6$ .

### Problemas de Aplicación.

Primero se explican algunos problemas cuyo modelo matemático es una ecuación de segundo grado, luego se proponen algunos problemas para que los resuelvas.

**Ejemplo 15.** Determina el radio de un círculo cuya área es de  $35 \text{ cm}^2$ .

Solución.

La fórmula para el área de un círculo es.

$$\text{Área} = \pi r^2$$

Como el área = 35, igualando nos queda la ecuación.

$$35 = \pi r^2$$

El valor de  $\pi$  es una constante, que tomaremos como  $\pi = 3.14$ , así que sustituyendo en la ecuación se tiene.

$$35 = (3.14)r^2$$

Dividiendo la ecuación por 3.14, tenemos.

$$11.14 \cong r^2$$

Sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.

$$r = \pm 3.33$$

Las raíces de la ecuación son,  $r_1 = 3.33$  y  $r_2 = -3.33$ .

De acuerdo con las condiciones del problema la respuesta es  $r = 3.33 \text{ cm}$ , la raíz negativa se descarta considerando que las distancias son positivas.

**Ejemplo 16.** El área de cuatro cuadrados congruentes es igual a  $220 \text{ cm}^2$ , ¿cuál es la longitud de cada uno de los lados de los cuadrados?

Solución.

El área de un cuadrado está dada por la fórmula,  $A = l^2$ , donde  $A$  es el área del cuadrado y  $l$  es la longitud de uno de los lados de un cuadrado.

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

El área de los cuatro cuadrados es igual a  $4P$ , e igualando este resultado a 220 se tiene la siguiente ecuación.

$$4P = 220$$

Dividiendo la ecuación por 4, tenemos  $P = 55$

Sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.

$$I = \sqrt{55} = \pm 7.41$$

Las raíces de la ecuación son,  $x_1 = 7.41$  y  $x_2 = -7.41$ .

Nada más consideramos la raíz positiva, ya que la longitud de los lados de un cuadrado es una cantidad positiva,  $x_1 = 7.41$  centímetros.

### Desarrollo.

Cada alumno debe resolver dos problemas de cada uno de los tipos mostrados anteriormente.

#### Caso $x^2=b$ .

**Ejercicios.** En cada ecuación encuentra las soluciones de la ecuación indicada.

a. $x^2 = 69$	b. $x^2 = -34$	c. $x^2 = 111$	d. $x^2 = 83$
e. $x^2 = -15$	f. $x^2 = 625$	g. $x^2 = 90$	h. $x^2 = 63$

#### Caso $ax^2=b$ .

**Ejercicios.** En cada ecuación encuentra las soluciones de la ecuación indicada.

a. $3x^2 = 19$	b. $7x^2 = -14$	c. $12x^2 = 80$	d. $5x^2 = 80$
e. $2x^2 = -30$	f. $6x^2 = 625$	g. $3x^2 = 90$	h. $7x^2 = 63$

#### Caso $ax^2 + b = 0$ .

**Ejercicios.** En cada ecuación encuentra las soluciones de la ecuación indicada.

a. $3x^2 - 12 = 0$	b. $7x^2 + 14 = 0$	c. $2x^2 - 49 = 0$	d. $3x^2 + 80 = 0$
e. $2x^2 - 130 = 0$	f. $6x^2 + 25 = 0$	g. $3x^2 - 90 = 0$	h. $7x^2 - 63 = 0$

#### Caso $ax^2 + b = c$ .

**Ejercicios.** En cada ecuación encuentra las soluciones de la ecuación indicada.

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

a. $3x^2 - 12 = 50$	b. $7x^2 - 14 = 99$	c. $2x^2 - 49 = 25$	d. $3x^2 + 80 = 12$
e. $2x^2 + 13 = 10$	f. $6x^2 + 25 = 89$	g. $3x^2 - 90 = -8$	h. $7x^2 - 63 = 20$

**Caso a  $(x + b)^2 + c = d$ .**

**Ejercicios.** En cada ecuación encuentra las soluciones de la ecuación indicada.

a. $3(x - 3)^2 - 12 = 60$	b. $3(x + 4)^2 - 4 = 98$	c. $2(x - 3)^2 + 49 = 65$
d. $5(x - 3)^2 - 13 = 100$	e. $6(x - 4)^2 - 25 = 65$	f. $3(x + 1)^2 + 90 = 180$

**Caso  $(x + b)(x + c) = 0$ .**

**Ejercicios.** En cada ecuación encuentra las soluciones de la ecuación indicada.

a. $(x - 3)(x - 5) = 0$	b. $(x - 7)(x - 11) = 0$	c. $(x + 4)(x + 4) = 0$
d. $(x - 12)(x - 15) = 0$	e. $(x + 21)(x - 8) = 0$	f. $(x - 13)(x - 15) = 0$

**Problemas de Aplicación.**

**Ejercicio 1.** Encuentra el radio de un círculo cuya área es de  $70 \text{ cm}^2$ .

**Ejercicio 2.** El área de cinco cuadrados congruentes es igual a  $605 \text{ cm}^2$ , ¿cuál es la longitud de cada uno de los lados de los cuadrados?

**Ejercicio 1.** Un jardín tiene forma cuadrada con media circunferencia en uno de sus lados, si el área del jardín mide  $22.28 \text{ m}^2$ , encuentra la longitud del radio y la longitud de los lados del cuadrado.

**Cierre:**

En plenaria los alumnos y el profesor revisan los procedimientos y los resultados obtenidos.

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

### Secuencia Didáctica 3. Resolviendo el acertijo.

#### Aprendizajes:

Resuelve ecuaciones cuadráticas mediante los diferentes métodos de solución. Transformando la ecuación cuadrática a la forma adecuada para su resolución por un método específico.

Tiempo para realizar la práctica 120 minutos

Equipos de 3 o 4 alumnos.

#### Inicio.

a) Factorización.

En primer lugar, veremos cómo resolver una ecuación de la forma.

$$x^2 + bx + c = 0$$

Ilustraremos el primer método explicando varios ejemplos.

**Ejemplo 1.** Resuelve la ecuación,  $x^2 - 5x - 66 = 0$ .

i. El trinomio  $x^2 - 5x - 66$ , será factorizado de la siguiente manera.

$$(x + n)(x + m).$$

ii. Primero se descompone el 66 en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

iii. Ahora multiplicamos entre sí los números primos 2, 3, 11, para obtener dos números n y m, cuya suma sea -5, en este caso los números son,  $2 \times 3 = 6$ , y -11. Así que  $n = 6$  y  $m = -11$ .

iv. Los factores que buscamos son,  $(x + 6)(x - 11)$ .

v. La primera raíz de la ecuación se obtiene de resolver la ecuación,  $x + 6 = 0$ , o sea  $x_1 = -6$ .

vi. La segunda raíz se obtiene al resolver la ecuación,  $x - 11 = 0$ , de donde  $x_2 = 11$ .

vii. Comprobación, sustituyendo  $x = -6$  en la ecuación original tenemos,  $(-6)^2 - 5(-6) - 66 = 36 + 30 - 66 = 66 - 66 = 0$ .

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

- viii. Comprobación, sustituyendo  $x = 11$  en la ecuación original tenemos,  
 $(11)^2 - 5(11) - 66 = 121 - 55 - 66 = 121 - 121 = 0.$

**Ejemplo 2.** Resuelve la ecuación,  $x^2 + 7x + 18 = 0.$

- i. El trinomio  $x^2 + 7x + 18$ , será factorizado de la siguiente manera.

$$(x + n)(x + m).$$

- ii. Descomponemos el 18 en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

- iii. Ahora multiplicamos entre sí los números primos 2, 3, 3, para obtener dos números  $n$  y  $m$ , cuya suma sea 7, en este caso los números no se pueden encontrar.
- iv. Si el polinomio no se puede factorizar se denomina Primo.

**Ejemplo 3.** Resuelve la ecuación,  $x^2 + 2x - 15 = 0.$

- i. El trinomio  $x^2 + 2x - 15$ , será factorizado de la siguiente manera.

$$(x + n)(x + m).$$

- ii. Primero se descompone el 15 en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

- iii. En este caso  $n = 5$  y  $m = -3$ .
- iv. Los factores que buscamos son,  $(x + 5)(x - 3)$ .
- v. La primera raíz de la ecuación se obtiene de resolver la ecuación,  $x + 5 = 0$ , o sea  $x_1 = -5$ .
- vi. La segunda raíz se obtiene al resolver la ecuación,  $x - 3 = 0$ , de donde  $x_2 = 3$ .
- vii. Comprobación, sustituyendo  $x = -5$  en la ecuación original tenemos,  $(-5)^2 + 2(-5) - 15 = 25 - 10 - 15 = 25 - 25 = 0.$

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

- viii. Comprobación, sustituyendo  $x = 3$  en la ecuación original tenemos,  $(3)^2 + 2(3) - 15 = 9 + 6 - 15 = 15 - 15 = 0$ .

**Ejemplo 4.** Resuelve la ecuación,  $x^2 - 4x + 3 = 0$ .

- i. El trinomio  $x^2 - 4x + 3$ , será factorizado de la siguiente manera.

$$(x + n)(x + m).$$

- ii. Primero se descompone el 3 en factores primos.

$$\begin{array}{c|c} 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

- iii. En este caso consideramos  $n = 3$  y  $m = 1$ .  
iv. Como la suma es negativa,  $n$  y  $m$  son negativos,  $n = -3$  y  $m = -1$ .  
v. Y el producto  $n \cdot m = (-3)(-1) = 3$ .  
vi. La factorización es.

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1) = 0$$

- vii. De  $x - 3 = 0$ , la primera raíz es  $x_1 = 3$ .  
viii. De  $x - 1 = 0$ , la segunda raíz es  $x_2 = 1$ .  
ix. Comprobación de la raíz,  $x_1 = 3$ .

$$x^2 - 4x + 3 = 3^2 - 4(3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 12 - 12 = 0$$

También podemos encontrar las raíces con el siguiente método.

**Ejemplo 5.** Resuelve la ecuación,  $x^2 - 4x + 3 = 0$ .

- i. El trinomio  $x^2 - 4x + 3$ , será factorizado de la siguiente manera.

$$(x + n)(x + m).$$

- ii. Si hacemos el producto de los binomios se tiene.

$$(x + n)(x + m) = x^2 + mx + nx + nm = x^2 + (m + n)x + nm$$

- iii. De lo que observamos, tenemos que encontrar dos números  $n$  y  $m$  de manera de que cumplan las siguientes condiciones.

1.  $n + m =$  al factor lineal.
2.  $nm =$  al termino independiente.

Volviendo al ejemplo, buscamos que.

- iv. la suma sea  $n + m = -4$  y cuyo producto sea  $nm = 3$ .



Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

- v. Como 3 es positivo tenemos que n y m deben tener el mismo signo.
- vi. Como - 4 es negativo, los dos números son negativos.
- vii. Los números buscados son,  $n = - 1$  y  $m = - 3$ .
- viii. La factorización es  $(x - 3)(x - 1) = 0$ .
- ix. La primera raíz es  $x - 3 = 0$ , de donde  $x_1 = 3$ .
- x. La segunda raíz es  $x - 1 = 0$ , de donde  $x_2 = 1$ .
- xi. Comprobación,  $x_1 = 3$ , sustituyendo en la ecuación
$$x^2 - 4x + 3 = (3)^2 - 4(3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 12 - 12 = 0.$$
- xii. Comprobación,  $x_2 = 1$ , sustituyendo en la ecuación
$$x^2 - 4x + 3 = (1)^2 - 4(1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 4 - 4 = 0.$$

**Ejemplo 6.** Resuelve la ecuación,  $x^2 + x - 30 = 0$ .

- i. El trinomio  $x^2 + x - 30$ , será factorizado como en el ejemplo anterior.
$$(x + n)(x + m).$$
- ii. Si hacemos el producto de los binomios se tiene.
$$(x + n)(x + m) = x^2 + mx + nx + nm = x^2 + (m + n)x + nm$$
- iii. De lo que observamos, tenemos que encontrar dos números n y m tal que la suma sea  $n + m = 1$  y cuyo producto sea  $nm = - 30$ .
- iv. Como - 30 es negativo tenemos que n y m deben tener signos diferentes.
- v. Como 1 es positivo, el mayor es positivo.
- vi. Los números buscados son,  $n = 6$  y  $m = - 5$ .
- vii. La factorización es  $(x + 6)(x - 5) = 0$ .
- viii. La primera raíz es  $x + 6 = 0$ , de donde  $x_1 = -6$ .
- ix. La segunda raíz es  $x - 5 = 0$ , de donde  $x_2 = 5$ .
- x. Comprobación,  $x_1 = - 6$ , sustituyendo en la ecuación
$$x^2 + x - 30 = (- 6)^2 + (- 6) - 30 = 36 - 6 - 30 = 36 - 36 = 0.$$
- xi. Comprobación,  $x_2 = 5$ , sustituyendo en la ecuación
$$x^2 + x - 30 = (5)^2 + (5) - 30 = 25 + 5 - 30 = 30 - 30 = 0.$$

Ahora veremos otra forma de resolver una ecuación de la forma.

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

$$ax^2 + bx + c = 0$$

**Ejemplo 7.** Resuelve la ecuación,  $12x^2 - x - 20 = 0$ .

De acuerdo con la ecuación tenemos,  $a = 12$ ,  $b = -1$ ,  $c = -20$

Ahora busquemos dos números  $n$  y  $m$  que cumplan las siguientes dos condiciones.

1. El producto  $n \times m = a \times c = (12) (-20) = -240$ .

2. La suma  $n + m = b = -1$ .

Debemos realizar el siguiente procedimiento.

i. Se descomponen  $a = 12$  y  $c = -20$  en sus factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

ii. Ahora se multiplican entre sí los números primos, tomando cada uno de ellos una sola vez, para encontrar  $n$  y  $m$  de manera que cumplan la condición 2,  $n + m = -1$ .

$$n = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \text{ y } m = 3 \times 5 = 15$$

Como  $b = -1$ ,  $m = 15$  es positivo y  $n = -16$  debe ser negativo.

iii. Escribimos.

$$\begin{aligned} 12x^2 - x - 20 &= 12x^2 - 16x + 15x - 20 = 4x(3x - 4) + 5(3x - 4) \\ &= (4x + 5)(3x - 4). \end{aligned}$$

iv. De  $4x + 5 = 0$ , se tiene,  $x_1 = -\frac{5}{4}$ .

v. De  $3x - 4$ . Tenemos,  $x_2 = \frac{4}{3}$ .

Las raíces de la ecuación son.

$$x_1 = -\frac{5}{4} \text{ y } x_2 = \frac{4}{3}$$

Comprobación, sustituyendo  $x_2 = \frac{4}{3}$  en la ecuación.

$$12\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right) - 20$$

Se efectúa la operación  $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ , sustituyendo en la ecuación.

$$= 12\left(\frac{16}{9}\right) - \frac{4}{3} - 20.$$

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

Haciendo la multiplicación de fracciones y simplificando.

$$12\left(\frac{16}{9}\right) = \frac{12}{1}\left(\frac{16}{9}\right) = \frac{192}{9} = \frac{64}{3}, \text{ sustituyendo el valor en la ecuación.}$$

$$= \frac{64}{3} - \frac{4}{3} - 20$$

Haciendo la resta de fracciones.

$$\frac{64}{3} - \frac{4}{3} = \frac{64-4}{3} = \frac{60}{3} = 20, \text{ sustituyendo este valor en la ecuación.}$$

$$= 20 - 20 = 0.$$

**Ejemplo 8.** Resuelve la ecuación,  $6x^2 - 5x - 6 = 0$ .

Como  $a = 6$ ,  $b = -5$ ,  $c = -6$

Buscamos dos números  $n$  y  $m$  que cumplan las siguientes condiciones.

1. El producto,  $n \times m = a \times c = (6) (-6) = -36$ .

2. La suma,  $n + m = b = -5$ .

vi. Se descomponen  $a = 6$  y  $c = -6$  en sus factores primos.

$$\begin{array}{c|c} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

vii. Ahora se multiplican entre si los números primos, tomando cada uno de ellos una sola vez, para encontrar  $n$  y  $m$  de manera que cumplan la condición 2,  $n + m = -5$ .

$$n = 3 \times 3 = 9 \text{ y } m = 2 \times 2 = 4$$

Como  $b = -5$ ,  $m = -9$  es negativo y  $n = 4$  debe ser positivo.

viii. Escribimos.

$$\begin{aligned} 6x^2 - 5x - 6 &= 6x^2 - 9x + 4x - 6 = 3x(2x - 3) + 2(2x - 3) \\ &= (2x - 3)(3x + 2). \end{aligned}$$

ix. De  $3x + 2 = 0$ , se tiene,  $x_1 = -\frac{2}{3}$ .

x. De  $2x - 3 = 0$ . Tenemos,  $x_2 = \frac{3}{2}$ .

Las raíces de la ecuación son.

$$x_1 = -\frac{2}{3} \text{ y } x_2 = \frac{3}{2}$$

Comprobación, sustituyendo  $x_2 = \frac{3}{2}$  en la ecuación.

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

$$6\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{3}{2}\right) - 6$$

$$\text{Haciendo la operación } 6\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{6}{1}\right)\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{54}{4} = \frac{27}{2}$$

Sustituyendo el resultado en la ecuación.

$$= \frac{27}{2} - \frac{15}{2} - 6$$

$$\text{El resultado de la resta de fracciones es, } \frac{27}{2} - \frac{15}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$= 6 - 6 = 0$$

**Ejemplo 9.** Resuelve la ecuación,  $12x^2 - 45x + 42 = 0$ .

En este caso los tres términos son divisibles por 3, por lo que al simplificar se tiene la ecuación,  $3(4x^2 - 15x + 14) = 0$ .

Una vez simplificada la ecuación trabajaremos con la ecuación.

$$4x^2 - 15x + 14 = 0.$$

Con  $a = 4$ ,  $b = -15$ ,  $c = 14$

Buscamos dos números  $n$  y  $m$  que cumplan las siguientes condiciones.

1. El producto,  $n \times m = a \times c = (4)(14) = 56$ .
2. La suma,  $n + m = b = -15$ .
- i. Se descomponen  $a = 4$  y  $c = 14$  en sus factores primos.

$$\begin{array}{c|c} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

- ii. Ahora se multiplican entre si los números primos, tomando cada uno de ellos una sola vez, para encontrar  $n$  y  $m$  de manera que cumplan la condición 2,  $n + m = -15$ .

$$n = 2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ y } m = 7$$

Como  $b = -15$ ,  $m = -8$  es negativo y  $n = -7$  debe ser negativo.

$$\text{Para que } m + n = -8 - 7 = -15$$

- iii. Escribimos.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 15x + 14 &= 4x^2 - 8x - 7x + 14 = 4x(x - 2) - 7(x - 2) \\ &= (4x - 7)(x - 2). \end{aligned}$$

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

iv. De  $4x - 7 = 0$ , se tiene,  $x_1 = \frac{7}{4}$ .

v. De  $x - 2$ . Tenemos,  $x_2 = 2$ .

Las raíces de la ecuación son.

$$x_1 = \frac{7}{4} \text{ y } x_2 = 2$$

Comprobación, sustituyendo  $x_2 = 2$  en la ecuación.

$$4(2)^2 - 15(2) + 14 = 4(4) - 30 + 14 = 16 - 30 + 14 = 30 - 30$$

$$30 - 30 = 0.$$

### b) Método de completar un trinomio cuadrado perfecto.

Otro método para resolver una ecuación cuadrática es completar el trinomio cuadrado perfecto, para factorizar la ecuación como un binomio al cuadrado y encontrar las raíces de la ecuación. Dicho método lo ilustraremos con algunos ejemplos como se muestra a continuación.

#### Ejemplo 10. Resuelve la ecuación, $x^2 - 5x - 66 = 0$ .

Recuerda que el coeficiente de  $x^2$  se llama coeficiente cuadrático, el coeficiente de  $x$  se llama coeficiente lineal, y el número que aparece solo se llama término independiente.

i. En la ecuación,  $x^2 - 5x - 66 = 0$ , sumamos 66 en ambos términos de la ecuación para tener.

$$x^2 - 5x = 66$$

ii. El término lineal -5, se divide entre 2,  $\left(-\frac{5}{2}\right)$  el resultado se eleva al cuadrado,  $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{25}{4}\right)$ .

iii. El resultado se suma a ambos miembros de la ecuación.

$$\text{iv. } x^2 - 5x + \left(\frac{25}{4}\right) = 66 + \left(\frac{25}{4}\right)$$

v. La expresión de la izquierda es un trinomio cuadrado perfecto, que se puede escribir como el binomio  $\left(x - \frac{5}{2}\right)$  al cuadrado como se

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

muestra a continuación,  $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$ , y la ecuación queda como se muestra.

vi.  $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 66 + \left(\frac{25}{4}\right)$ , haciendo la operación de la izquierda, tenemos,

vii.  $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{289}{4}$ , sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación tenemos.

viii.  $x - \frac{5}{2} = \pm \frac{17}{2}$ , sumando  $\frac{5}{2}$  a ambos miembros de la ecuación.

ix.  $x = \frac{5}{2} \pm \frac{17}{2}$ , y las dos raíces de la ecuación son.

x.  $x_1 = \frac{22}{2} = 11$ , y  $x_2 = -\frac{12}{2} = -6$ .

**Ejemplo 11.** Resuelve la ecuación,  $x^2 + 2x - 15 = 0$ .

i. En la ecuación,  $x^2 + 2x - 15 = 0$ , sumamos 15 en ambos términos de la ecuación para tener.

$$x^2 + 2x = 15$$

ii. El término lineal 2, se divide entre 2, 1 que es el resultado se eleva al cuadrado,  $(1)^2 = 1$ .

iii. El resultado se suma a ambos miembros de la ecuación.

iv.  $x^2 + 2x + 1 = 15 + 1$

v. La expresión de la izquierda es un trinomio cuadrado perfecto, que se puede escribir como el binomio  $(x + 1)$  al cuadrado como se muestra a continuación,  $(x + 1)^2$ , y la ecuación queda como se muestra.

vi.  $(x + 1)^2 = 15 + 1$ , haciendo la operación de la izquierda, tenemos,

vii.  $(x + 1)^2 = 16$ , sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación tenemos.

viii.  $x + 1 = \pm 4$ , restando 1 a ambos miembros de la ecuación.

ix.  $x = -1 \pm 4$ , y las dos raíces de la ecuación son.

x.  $x_1 = 3$ , y  $x_2 = -5$ .

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

**Ejemplo 12.** Resuelve la ecuación,  $x^2 + 7x + 12 = 0$ .

- i. En la ecuación,  $x^2 + 7x + 12 = 0$ , restamos 12 en ambos términos de la ecuación para tener.

$$x^2 + 7x = -12$$

- ii. El término lineal 7, se divide entre 2,  $\frac{7}{2}$ , el resultado se eleva al cuadrado,  $\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$ .

- iii. El resultado se suma a ambos miembros de la ecuación.

iv.  $x^2 + 7x + \frac{49}{4} = -12 + \frac{49}{4}$

- v. La expresión de la izquierda es un trinomio cuadrado perfecto, que se puede escribir como el binomio  $\left(x + \frac{7}{2}\right)$  al cuadrado como se muestra a continuación,  $\left(x + \frac{7}{2}\right)^2$ , y la ecuación queda como se muestra.

vi.  $\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \frac{49}{4}$ , haciendo la operación de la izquierda, tenemos,

vii.  $\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ , sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación tenemos.

viii.  $x + \frac{7}{2} = \pm \frac{1}{2}$ , restando 1 a ambos miembros de la ecuación.

ix.  $x = -\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$ , y las dos raíces de la ecuación son.

$$x_1 = -3, \text{ y } x_2 = -4.$$

### Desarrollo.

El grupo se organiza en equipos de 3 o 4 alumnos para resolver las siguientes ecuaciones.

- a. Por el método de factorización.

$x^2 + 2x - 3 = 0$	$x^2 + 7x + 6 = 0$	$x^2 - 3x - 10 = 0$
$x^2 - x - 12 = 0$	$x^2 - 7x - 30 = 0$	$x^2 - 3x - 18 = 0$

- b. Por el método de completar el trinomio cuadrado perfecto.

$x^2 - 15x - 14 = 0$	$x^2 + 4x - 21 = 0$	$x^2 + 14x + 24 = 0$
----------------------	---------------------	----------------------

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

$x^2 - 7x - 72 = 0$	$x^2 + 4x + 4 = 0$	$x^2 - 6x + 9 = 0$
---------------------	--------------------	--------------------

**Cierre:** En plenaria con ayuda del profesor se revisan los procedimientos y los resultados de cada ecuación.

#### **Secuencia Didáctica 4. Tierra a la vista.**

##### **Aprendizajes:**

Generaliza el método el trinomio cuadrado perfecto y obtiene la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.

Identifica los parámetros a, b, c en una ecuación cuadrática y los sustituye correctamente en la fórmula general.

Identifica la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática, a partir de sus coeficientes.

Tiempo para realizar la práctica 120 minutos

Equipos de 3 o 4 alumnos.

##### **Inicio.**

Como recordaras en la secuencia anterior trabajamos el método de completar un trinomio cuadrado perfecto para resolver una ecuación cuadrática, método que repasaremos con los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 1.** Resuelve la ecuación,  $x^2 - 3x - 40 = 0$ .

- En la ecuación,  $x^2 - 3x - 40 = 0$ , sumamos 40 en ambos términos de la ecuación para obtener.

$$x^2 - 3x = 40$$

- El término lineal  $-3$ , se divide entre 2, para obtener  $-\frac{3}{2}$ , y el resultado se eleva al cuadrado,  $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ .

- El resultado se suma a ambos miembros de la ecuación.

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 40 + \frac{9}{4}$$

- La expresión de la izquierda es un trinomio cuadrado perfecto, que se puede escribir como el binomio  $\left(x - \frac{3}{2}\right)$  al cuadrado como se muestra a



Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

continuación,  $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ , y la ecuación queda como se muestra a continuación.

v.  $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 40 + \frac{9}{4}$ , haciendo la operación de la izquierda, tenemos,

vi.  $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{169}{4}$ , sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación tenemos.

vii.  $x - \frac{3}{2} = \pm \frac{13}{2}$ , sumando  $\frac{3}{2}$  en ambos miembros de la ecuación.

viii.  $x = \frac{3}{2} \pm \frac{13}{2}$ , y las dos raíces de la ecuación son.

ix.  $x_1 = 8$ , y  $x_2 = -5$ .

Ahora vamos a resolver varias ecuaciones cuadráticas, cuando el coeficiente cuadrático es diferente de 1, utilizando el método con una pequeña variación.

**Ejemplo 2.** Resuelve la ecuación,  $4x^2 + 3x - 10 = 0$ .

- i. Se suma 10 en ambos miembros de la ecuación.

$$4x^2 + 3x = 10$$

- ii. Se divide la ecuación por 4, para obtener.

$$x^2 + \frac{3}{4}x = \frac{5}{2}$$

- iii. Se saca la mitad de  $\frac{3}{4}$ , para obtener  $\frac{3}{8}$ .

- iv. Se eleva al cuadrado  $\frac{3}{8}$  para obtener  $\frac{9}{64}$

- v. Se suma  $\frac{9}{64}$  a ambos miembros de la ecuación.

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{9}{64} = \frac{5}{2} + \frac{9}{64}$$

- vi. El miembro de la izquierda es un trinomio cuadrado perfecto, que se puede escribir como el cuadrado del binomio  $\left(x + \frac{3}{8}\right)^2$ .

- vii. La ecuación que se obtiene es.

$$\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{64}$$

- viii. Se hace la suma de la derecha para obtener.

$$\frac{5}{2} + \frac{9}{64} = \frac{169}{64}$$

- ix. Al sustituir en la ecuación se obtiene.

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

$$\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{169}{64}$$

x. Sacando la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.

$$\text{xi. } x + \frac{3}{8} = \pm \frac{13}{8}$$

xii. Restando  $\frac{3}{8}$  en ambos miembros de la ecuación.

$$x = \pm \frac{13}{8} - \frac{3}{8}$$

xiii. Tomando el signo positivo la primera raíz es.

$$x_1 = +\frac{13}{8} - \frac{3}{8} = \frac{13-3}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}, x_1 = \frac{5}{4}$$

xiv. Tomando el signo negativo la segunda raíz es.

$$x_2 = -\frac{13}{8} - \frac{3}{8} = \frac{-13-3}{8} = -\frac{16}{8} = -2, x_1 = -2$$

xv. Comprobación de la segunda raíz.

$$4x^2 + 3x - 10 = 4(-2)^2 + 3(-2) - 10 = 4(4) - 6 - 10 = 16 - 16 = 0.$$

**Ejemplo 3.** Resuelve la ecuación,  $3x^2 - 2x - 8 = 0$ .

i. Se suma 8 en ambos miembros de la ecuación.

$$3x^2 - 2x = 8$$

ii. Se divide la ecuación por 3, para obtener.

$$x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{8}{3}$$

iii. Se saca la mitad de  $-\frac{2}{3}$ , para obtener  $-\frac{1}{3}$ .

iv. Se eleva al cuadrado  $\frac{1}{3}$  para obtener  $\frac{1}{9}$

v. Se suma  $\frac{1}{9}$  a ambos miembros de la ecuación.

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{8}{3} + \frac{1}{9}$$

vi. El miembro de la izquierda es un trinomio cuadrado perfecto, que se puede escribir como el cuadrado del binomio  $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$ .

vii. La ecuación que se obtiene es.

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{3} + \frac{1}{9}$$

viii. Se hace la suma de la derecha para obtener.

$$\frac{8}{3} + \frac{1}{9} = \frac{25}{9}$$

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

ix. Al sustituir en la ecuación se obtiene.

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

x. Sacando la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.

$$x - \frac{1}{3} = \pm \frac{5}{3}$$

xii. Sumando  $\frac{1}{3}$  en ambos miembros de la ecuación.

$$x = \frac{1}{3} \pm \frac{5}{3}$$

xiii. Tomando el signo positivo la primera raíz es.

$$x_1 = +\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5+1}{3} = \frac{6}{3} = 2, x_1 = 2$$

xiv. Tomando el signo negativo la segunda raíz es.

$$x_2 = -\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{-5+1}{3} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}, x_1 = -\frac{4}{3}$$

xv. Comprobación de la primera raíz.

$$3x^2 - 2x - 8 = 3(2)^2 - 2(2) - 8 = 3(4) - 4 - 8 = 12 - 12 = 0.$$

**Ejemplo 4.** Resuelve la ecuación,  $6x^2 + x - 15 = 0$ .

i. Se suma 15 en ambos miembros de la ecuación.

$$6x^2 + x = 15$$

ii. Se divide la ecuación por 6, para obtener.

$$x^2 + \frac{1}{6}x = \frac{15}{6}$$

iii. Se saca la mitad de  $\frac{1}{6}$ , para obtener  $\frac{1}{12}$ .

iv. Se eleva al cuadrado  $\frac{1}{12}$  para obtener  $\frac{1}{144}$

v. Se suma  $\frac{1}{144}$  a ambos miembros de la ecuación.

$$x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{144} = \frac{15}{6} + \frac{1}{144}$$

vi. El miembro de la izquierda es un trinomio cuadrado perfecto, que se puede escribir como el cuadrado del binomio  $\left(x + \frac{1}{12}\right)^2$ .

vii. La ecuación que se obtiene es.

$$\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 = \frac{15}{6} + \frac{1}{144}$$

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

viii. Se hace la suma de la derecha para obtener.

$$\frac{15}{6} + \frac{1}{144} = \frac{361}{144}$$

ix. Al sustituir en la ecuación se obtiene.

$$\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 = \frac{361}{144}$$

x. Sacando la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.

$$x + \frac{1}{12} = \pm \frac{19}{12}$$

xii. Restando  $\frac{1}{12}$  en ambos miembros de la ecuación.

$$x = -\frac{1}{12} \pm \frac{19}{12}$$

xiii. Tomando el signo positivo la primera raíz es.

$$x_1 = -\frac{1}{12} + \frac{19}{12} = \frac{-1+19}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}, x_1 = \frac{3}{2}$$

xiv. Tomando el signo negativo la segunda raíz es.

$$x_2 = -\frac{1}{12} - \frac{19}{12} = \frac{-1-19}{12} = \frac{-20}{12} = -\frac{5}{3}, x_1 = -\frac{5}{3}$$

xv. Comprobación de la primera raíz.

$$6x^2 + x - 15 = 6\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right) - 15 = 6\left(\frac{9}{4}\right) + \frac{3}{2} - 15 = \frac{54}{4} + \frac{3}{2} - 15 = \frac{60}{4} - 15 = 15 - 15 = 0$$

### Desarrollo.

**Lee con atención el proceso para obtener la fórmula para encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado con una incógnita, para que después puedas aplicarla en la resolución de una ecuación de este tipo.**

Empleando el método anterior a continuación vamos a resolver una ecuación de segundo grado con una incógnita,  $ax^2 + bx + c = 0$ , con  $a \neq 0$ , para obtener la fórmula general para resolver una ecuación de este tipo.

i. Se resta  $c$  en ambos miembros de la ecuación.

$$ax^2 + bx = -c$$

ii. Se divide toda la ecuación por  $a$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

iii. Se obtiene la mitad de,  $\frac{b}{a}$

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

$$\frac{b}{2a}$$

- iv. Se eleva al cuadrado  $\frac{b}{2a}$ , para obtener.

$$\frac{b^2}{4a^2}$$

- v. Se suma el cuadrado obtenido  $\frac{b^2}{4a^2}$  en ambos miembros de la ecuación.

$$vi. \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

- vii. En la parte izquierda tenemos un trinomio cuadrado perfecto, que se puede factorizar como el siguiente binomio  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)$  al cuadrado, de manera que la ecuación queda como.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

- viii. Haciendo la operación de la derecha.

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

- ix. Sustituyendo el resultado en la ecuación tenemos-

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

- x. Sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación se tiene.

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- xi. Restando  $\frac{b}{2a}$  en ambos miembros de la ecuación.

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- xii. La fórmula para obtener las raíces de la ecuación de segundo grado en  $x$ ,  $ax^2 + bx + c = 0$ , es la siguiente.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde  $d = b^2 - 4ac$  se llama el discriminante, y dependiendo de su valor tenemos.

$$\begin{array}{ll} d > 0 & \text{dos raíces} \\ d = 0 & \text{una raíz} \\ d < 0 & \text{la ecuación no tiene raíces reales} \end{array}$$

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

**Ejemplo 5.** Resuelve la ecuación,  $6x^2 + x - 15 = 0$ , utilizando la fórmula general identificando el coeficiente cuadrático, el coeficiente lineal y el término independiente.

En este caso el coeficiente cuadrático es  $a = 6$ , el coeficiente lineal es  $b = 1$ , y el término independiente es  $c = -15$ .

La fórmula es:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituyendo valores en la fórmula y haciendo las operaciones indicadas.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(6)(-15)}}{2(6)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+360}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{12} = \frac{-1 \pm 19}{12}.$$

Tomando el signo positivo.

$$\text{La raíz } x_1 = \frac{-1+19}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}, x_1 = \frac{3}{2}.$$

Tomando el signo negativo.

$$\text{La raíz } x_2 = \frac{-1-19}{12} = \frac{-20}{12} = -\frac{5}{3}, x_2 = -\frac{5}{3}.$$

**Ejemplo 6.** Resuelve la ecuación,  $15x^2 + 23x - 28 = 0$ , utilizando la fórmula general identificando el coeficiente cuadrático, el coeficiente lineal y el término independiente.

En este caso el coeficiente cuadrático es  $a = 15$ , el coeficiente lineal es  $b = 23$ , y el término independiente es  $c = -28$ .

La fórmula es:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituyendo valores en la fórmula y haciendo las operaciones indicadas.

$$x_{1,2} = \frac{-23 \pm \sqrt{23^2 - 4(15)(-28)}}{2(15)} = \frac{-23 \pm \sqrt{529+1680}}{30} = \frac{-23 \pm \sqrt{2209}}{30} = \frac{-23 \pm 47}{30}.$$

Tomando el signo positivo.

$$\text{La raíz } x_1 = \frac{-23+47}{30} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}, x_1 = \frac{4}{5}.$$

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

Tomando el signo negativo.

$$\text{La raíz } x_2 = \frac{-23-47}{30} = \frac{-70}{30} = -\frac{7}{3}, x_2 = -\frac{7}{3}$$

**Ejemplo 7.** Resuelve la ecuación,  $5x^2 - 11x - 12 = 0$ , utilizando la fórmula general identificando el coeficiente cuadrático, el coeficiente lineal y el término independiente.

En este caso el coeficiente cuadrático es  $a = 5$ , el coeficiente lineal es  $b = -11$ , y el término independiente es  $c = -12$ .

La fórmula es:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituyendo valores en la fórmula y haciendo las operaciones indicadas.

$$x_{1,2} = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(5)(-12)}}{2(5)} = \frac{11 \pm \sqrt{121+240}}{10} = \frac{11 \pm \sqrt{361}}{10} = \frac{11 \pm 19}{10}.$$

Tomando el signo positivo.

$$\text{La raíz } x_1 = \frac{11+19}{10} = \frac{30}{10} = 3, x_1 = 3.$$

Tomando el signo negativo.

$$\text{La raíz } x_2 = \frac{11-19}{10} = \frac{-8}{10} = -\frac{4}{5}, x_2 = -\frac{4}{5}.$$

### Cierre

En el pizarrón y con ayuda del profesor los alumnos resolverán las siguientes ecuaciones cuadráticas en la incógnita x, utilizando la fórmula general.

$9x^2 - 6x + 1 = 0$	$10x^2 - 19x - 15 = 0$	$6x^2 + 7x - 20 = 0$
$25x^2 - 20x + 4 = 0$	$3x^2 + 5x - 8 = 0$	$2x^2 - 3x - 7 = 0$

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

## Secuencia Didáctica 5. Aplicando el modelo.

### Aprendizajes:

Establece el modelo matemático del problema y aplica el método de resolución correspondiente.

Tiempo para realizar la práctica 120 minutos

Equipos de 3 o 4 alumnos.

### Inicio.

En esta secuencia analizaremos diversos problemas verbales y los resolveremos utilizando el método más adecuado al tipo de ecuación que lo represente, pero esto no es un indicativo, ya que cuando cada alumno resuelva los problemas de la sección de desarrollo debe usar el método que considere más adecuado siempre y cuando llegue a la respuesta correcta.

Nota: En todo resultado en el cual haya parte decimal, el número se debe tomar hasta centésimos sin redondear.

**Problema 1.** Un terreno circular tiene un área de  $5184 \text{ m}^2$ , ¿cuál es la longitud de su radio?

Solución.

La fórmula para encontrar el área de un círculo es la siguiente.

$$A = \pi r^2 \dots 1$$

Como el valor del área es de  $5184 \text{ m}^2$ , sustituyendo este valor en la fórmula 1 para encontrar el área tenemos.

$$5184 = \pi r^2 \dots 2$$

Como  $\pi$  es una constante, el valor que consideramos para todos los problemas donde se ocupe el valor de  $\pi = 3.14$ , de manera que sustituyendo este valor en la ecuación 2, se tiene.

$$5184 = (3.14)r^2 \dots 3$$

Dividiendo toda la ecuación por 3.14 se obtiene.

$$1650.95 = r^2$$

Finalmente sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.

$$\pm\sqrt{1650.95} = r$$

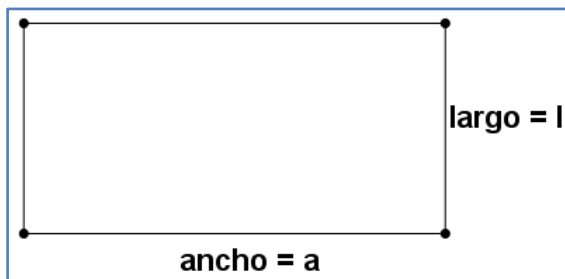


Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

$$r = \pm 40.63$$

La raíz negativa no se considera, ya que las longitudes son positivas, así que la respuesta es,  $r = 40.63$  metros.

**Problema 2.** El área de un rectángulo es de  $138 \text{ cm}^2$ . El largo es 5 cm más que 3 veces el ancho. Halle las dimensiones del rectángulo.



La siguiente figura representa el rectángulo del problema.

En este problema tenemos dos incógnitas el ancho =  $a$ , y el largo =  $l$ .

Del texto. El largo es 5 cm más que tres veces el ancho.

Tres veces el ancho =  $3a$

5 cm más que tres veces el ancho =  $3a + 5$ .

Así que  $l = 3a + 5$

La fórmula para encontrar el área de un rectángulo es.

$$A = (a)(l)$$

Como  $A = 138$ , sustituyendo en la ecuación se tiene.

$$138 = (a)(l)$$

Finalmente sustituyendo  $l = 3a + 5$ , en la ecuación anterior tenemos.

$$138 = a(3a + 5)$$

Haciendo la multiplicación indicada, tenemos.

$$138 = 3a^2 + 5a$$

Igualando la ecuación a cero, tenemos.

$$0 = 3a^2 + 5a - 138.$$

Para resolver esta ecuación usaremos la fórmula.

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Con los siguientes valores. Coeficiente cuadrático,  $a = 3$ , coeficiente lineal  $b = 5$ , y el término independiente  $c = -138$

Sustituyendo valores en la fórmula y haciendo las operaciones indicadas.

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

$$a_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(-138)}}{2(3)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 1656}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{1681}}{6} = \frac{-5 \pm 41}{6}.$$

La raíz  $x_1$ , tomando el signo positivo es,  $a_1 = \frac{36}{6} = 6$ ,  $a_1 = 6$

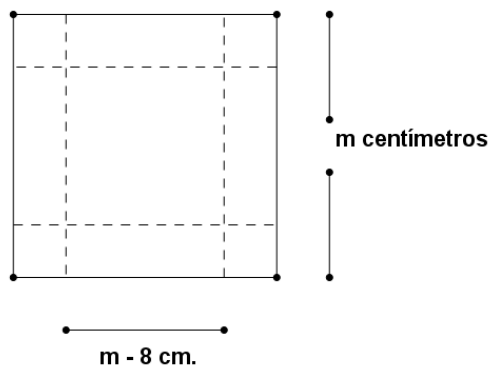
La raíz  $x_2$ , tomando el signo negativo es,  $a_2 = \frac{-46}{6} = -\frac{23}{3}$ ,  $a_2 = -\frac{23}{3}$ .

La raíz negativa se descarta, ya que no hay longitudes negativas,

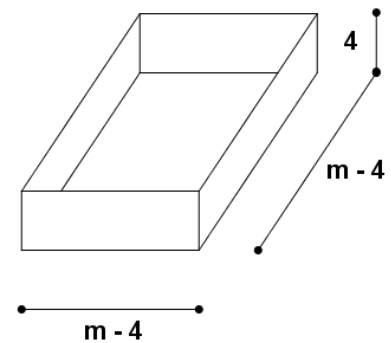
El ancho del rectángulo es de 6 cm, y el largo es,  $l = 3a + 5 = 3(6) + 5 = 23$ , el largo del rectángulo es  $l = 23$  cm, y el área es  $= 6 \times 23 = 138 \text{ cm}^2$ .

**Problema 3.** Se utilizó un pedazo cuadrado de cartón para construir una bandeja, cortando 4 centímetros cuadrados en cada esquina y doblando después las pestañas. Encuéntrese el tamaño del cuadrado original, si la bandeja tiene un volumen de 576 centímetros cúbicos.

La siguiente imagen nos muestra el cartón cuadrado, y las esquinas cortadas.



Ahora vamos a mostrar la bandeja armada para calcular el volumen y encontrar sus dimensiones.



El volumen de la caja es.

$$V = (m - 4)^2 \times 4$$

Como  $V = 576$ , igualando se tiene la ecuación.

$$576 = (m - 4)^2 \times 4$$

Dividiendo la ecuación por 4, nos queda,  $144 = (m - 4)^2$ .

Sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación,  $m - 4 = \pm 12$ .

De donde,  $m = 4 \pm 12$ , tomando la raíz positiva,  $m_1 = 16$  cm.

Tomando la raíz negativa,  $m_2 = -8$ , la raíz negativa se descarta, ya que no hay longitudes negativas.

Los lados del cuadrado miden 16 cm, cada uno.

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

**Problema 4.** La suma de los cuadrados de dos números pares consecutivos es 724, hallar los números.

Queremos encontrar dos números pares consecutivos, de maneja que si el primer número par se simboliza por  $x$ , para pasar al siguiente hay que sumar dos, así que, si el primer número par es  $x$ , el siguiente número par es  $x + 2$

El cuadrado del primer número par es  $x^2$ .

El cuadrado del siguiente número par es,  $(x + 2)^2$ , desarrollando el binomio al cuadrado tenemos.  $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ .

La suma de los cuadrados de los dos números pares consecutivos es.

$$x^2 + (x + 2)^2 = x^2 + x^2 + 4x + 4$$

Como la suma debe ser 724, tenemos.

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 724, \text{ reduciendo los términos semejantes.}$$

$$2x^2 + 4x + 4 = 724, \text{ igualando la ecuación a cero.}$$

$$2x^2 + 4x + 4 - 724 = 0, \text{ haciendo las operaciones indicadas.}$$

$2x^2 + 4x - 720 = 0$ , tenemos que  $a = 2$ ,  $b = 4$ ,  $c = -720$ , sustituyendo valores en la fórmula y haciendo las operaciones indicadas.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(2)(-720)}}{2(2)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 5760}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{5776}}{4} = \frac{-4 \pm 76}{4}.$$

Tomando la raíz positiva,  $x_1 = \frac{-4+76}{4} = \frac{72}{4} = 18$ . El siguiente número par es 20.

La suma de sus cuadrados es,  $18^2 + 20^2 = 324 + 400 = 724$

Tomando la raíz negativa,  $x_2 = \frac{-4-76}{4} = \frac{-80}{4} = -20$ . El siguiente número par es -18.

La suma de sus cuadrados es,  $(-18)^2 + (-20)^2 = 324 + 400 = 724$

### Desarrollo.

Cada alumno resolverá dos problemas de los siguientes problemas propuestos.

1. La suma de los cuadrados de dos números naturales es 313. ¿Cuáles son los números?
2. Un campo de fútbol mide 30 m más de largo que de ancho y su área es de 7000 m<sup>2</sup>, halla sus dimensiones.
3. Tenemos un alambre de 17 cm. ¿Cómo hemos de doblarlo para que forme un ángulo recto de modo que sus extremos queden a 13 cm?

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

4. La diagonal de un rectángulo tiene 10 cm. Calcula sus dimensiones si el lado pequeño mide  $\frac{3}{4}$  del lado grande.
5. Reparte el número 20 en dos partes de forma que la suma de sus cuadrados sea 202.
6. Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro.
7. Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de arena uniforme. Halla la anchura de dicho camino si se sabe que su área es  $540 \text{ m}^2$ .
8. Halla el lado de un cuadrado tal que la suma de su área más su perímetro es numéricamente igual a 252.

**Cierre:**

En plenaria con ayuda del profesor los alumnos revisan los procedimientos y las soluciones de cada una de las ecuaciones, corrigiendo los errores encontrados.

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

## 5. Materiales de Apoyo.

### Evaluación Diagnóstica

Nombre: \_\_\_\_\_ Calif: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

Resuelve cada uno de los siguientes problemas propuestos.

1.  $3x^2 - 35 = 0$

2.  $18x^2 - 36x = 0$

3.  $2x^2 - 4x - 30 = 0$

4.  $(2x - 10)(x + 7) = 0$

5. El largo de un rectángulo mide 6 metros más que la longitud del ancho, si el área del rectángulo es de  $91 \text{ m}^2$ , determina las dimensiones del rectángulo.

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

### 5.1. Ejercicios de la Unidad.

Analiza cada ejercicio para encontrar las incógnitas, los datos y las relaciones algebraicas entre ellos para poder resolver cada problema o ecuación.

1- Las raíces de la ecuación  $x^2 = 256$  son.

- a)  $\pm 12$       b)  $\pm 15$       c)  $\pm 14$       d)  $\pm 16$

2- Las raíces de la ecuación  $x^2 = 256$  son.

- a)  $\pm 21$       b)  $\pm 29$       c)  $\pm 14$       d)  $\pm 16$

3- Las raíces de la ecuación  $7x^2 = 1575$  son.

- a)  $\pm 15$       b)  $\pm 16$       c)  $\pm 14$       d)  $\pm 13$

4- Las raíces de la ecuación  $13x^2 = 1573$  son.

- a)  $\pm 10$       b)  $\pm 12$       c)  $\pm 14$       d)  $\pm 11$

5- Las raíces de la ecuación  $8x^2 - 648 = 0$  son.

- a)  $\pm 10$       b)  $\pm 9$       c)  $\pm 14$       d)  $\pm 16$

6- Las raíces de la ecuación  $-15x^2 + 735 = 0$  son.

- a)  $\pm 9$       b)  $\pm 7$       c)  $\pm 8$       d)  $\pm 10$

7- Las raíces de la ecuación  $9x^2 - 38 = 1258$  son.

- a)  $\pm 11$       b)  $\pm 12$       c)  $\pm 14$       d)  $\pm 13$

8- Las raíces de la ecuación  $-15x^2 + 4335 = 0$  son.

- a)  $\pm 18$       b)  $\pm 11$       c)  $\pm 19$       d)  $\pm 17$

9- Las raíces de la ecuación  $3(x-3)^2 + 65 = 92$  son.

- a)  $\pm 2$       b)  $\pm 9$       c)  $\pm 6$       d)  $\pm 1$

10- Las raíces de la ecuación  $(x - 7)(x + 3) = 0$  son.

- b) 7, 3      b) -7, 3      c) 7, -3      d) -7, -3

11- Las raíces de la ecuación  $x^2 + 3x - 18 = 0$  son.

- c) -6, 3      b) -6, -3      c) 6, 3      d) 6, -3

12- Las raíces de la ecuación  $2x^2 + 9x - 18 = 0$  son.

- d) 1.5, 6      b) 1.5, -6      c) -1.5, -6      d) 1-5, -6

13- Las raíces de la ecuación  $x^2 = 256$  son.

- e) -4, -5      b) 4, 5      c) 4, -5      d) -4, 5

14- Un terreno cuadrado tiene un área de  $625 \text{ m}^2$ , como los cuatro lados del terreno son iguales. ¿Qué longitud tiene cada lado del terreno?

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

a)  $l = 39 \text{ m}$       b)  $l = 38 \text{ m}$       c)  $l = 40 \text{ m}$       d)  $l = 41 \text{ m}$

15-La diferencia de dos números enteros positivos es de 4 unidades, si la suma de sus cuadrados es 250. ¿Cuáles son los números?  $m$  es el número mayor y  $n$  es el número menor.

a)  $m=14, n=10$       b)  $m=15, n=11$       c)  $m=13, n=9$       d)  $m=12, n=8$

16-El largo de un jardín es tres metros menores que el cuádruple del ancho. Si el área del jardín es de  $126 \text{ m}^2$ . Determinar el largo y el ancho del jardín. El largo es " $l$ " y el ancho es " $a$ ".

a)  $l=21, a=6$       b)  $l=17, a=5$       c)  $l=9, a=3$       d)  $l=33, a=9$

17-Una alberca cuadrada de 19 metros x 19 metros está rodeada por un camino de ancho uniforme. Si el área del camino es de 264 metros cuadrados, determinar el ancho del camino. " $x$ " es el ancho del camino.

a)  $x = 1 \text{ metro}$       b)  $x = 5 \text{ metros}$       c)  $x = 2 \text{ metros}$       d)  $x = 3 \text{ metros}$

18- Al medio día Sebastián salió del punto A caminando hacia el norte; una hora más tarde, Nancy salió del punto A caminando hacia el este. Ambos caminaron a 2 kilómetros por hora y llevaban un radio de comunicación con un alcance de 10 kilómetros. ¿a qué hora perdieron contacto?

a)  $x = 1 \text{ hora}$       b)  $x = 5 \text{ horas}$       c)  $x = 3 \text{ horas}$       d)  $x = 4 \text{ horas}$

19-Un jardín con forma rectangular tiene un perímetro de 40 metros y un área de 117 metros cuadrados, ¿cuáles son sus dimensiones?, largo= $y$ , ancho= $x$

a)  $x=9, y=13$       b)  $x=7, y=11$       c)  $x=7, y= 13$       d)  $x =9, y=11$

20-Un parque contiene un jardín de flores de 45 metros de largo por 30 metros de ancho, rodeado por un sendero o andador de ancho constante. Si el área del marco es  $600 \text{ m}^2$ . ¿Cuál es el ancho del sendero?

a)  $x = 3 \text{ m.}$       b)  $x = 1 \text{ m.}$       c)  $x = 2 \text{ m}$       d)  $x = 4 \text{ m}$

21-El producto de dos enteros impares consecutivos es 675. Encuentre los enteros impares.

a) 27 y 29      b) 25 y 27      c) 21 y 23      d) 23 y 25

Matemáticas II	Ecuaciones Cuadráticas.
Unidad I	

## 6. Bibliografía.

### Libros.

1. Ángel, A. R., (1997), *Álgebra Intermedia*, México: Prentice Hall.
2. Leithold, L., (1992), *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, México: Oxford.
3. Barnett, R. A., (1989), *Álgebra y Trigonometría*, México: McGraw Hill.

### Páginas Web.

1. Ecuaciones de segundo grado resueltas, recuperado el 6 de enero del 2020 de <https://www.problemasyecuaciones.com/Ecuaciones/segundo-grado/problemas-ecuaciones-segundo-grado-resueltas-solucion-formula-raices-factorizar.html>
2. Resolviendo Ecuaciones Cuadráticas Usando la Fórmula Cuadrática, recuperado el 6 de enero del 2020 de [http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE\\_TEXT\\_RESOURCE/U10\\_L1\\_T3\\_text\\_final\\_es.html](http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U10_L1_T3_text_final_es.html).
3. Problemas de ecuaciones cuadráticas, recuperado el 6 de enero de 2020 de <https://maticasmodernas.com/problemas-de-ecuaciones-cuadraticas/>.



Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

### **Propósitos de la unidad:**

Al finalizar, el alumno:

Analizará el comportamiento de las funciones cuadráticas en términos de sus parámetros mediante la contrastación de la representación gráfica y analítica. Resolverá problemas de optimización con métodos algebraicos, a fin de continuar con el estudio de las funciones a partir de situaciones que varían en forma cuadrática y contrastará este tipo de variación con la lineal.

### **1. Presentación de la unidad II.**

Esta unidad comienza con un bosquejo histórico acerca de Funciones y en específico función cuadrática y sus aplicaciones.

El contenido se desarrolla a través de secuencias didácticas que apoyaran la construcción de conocimiento, a partir de la comprensión, aplicación, análisis y evaluación de estos sobre esta temática Funciones Cuadráticas, mediante la resolución de problemas de la vida real para lograr que el aprendizaje sea significativo y con esto contribuir al perfil de egreso y que el alumno logre aprender a aprender, aprender a hacer y aprender a ser.

Es por lo antes mencionado que también utilizaremos software dinámico libre, como uno de los recursos que incentivarán al estudiante y lo ayudarán en la construcción de su conocimiento, pudiendo manipular a través de éste los parámetros que determinan la función, así como sus propiedades con el objetivo de predecir comportamientos, analizarlos y evaluarlos.

### **2. Bosquejo Histórico y evolución de las Funciones Cuadráticas.**

Se menciona que desde la antigüedad ya se tenía la noción de función, en civilizaciones como la egipcia, Romana y Babilónica, importantes matemáticos contribuyeron a ella como Descartes, Fermat y Euler.

Realiza una investigación sobre el desarrollo histórico de la noción de función, poniendo énfasis en la función cuadrática y construye una línea de tiempo, en equipos de tres alumnos y presenta en el grupo.

### **3. Actividades de aprendizaje.**

Estas se diseñaron tomando en cuenta los contenidos(temática) de la unidad 2, a través de secuencias didácticas que incluyen cada uno de los aprendizajes en tres etapas inicio, desarrollo y cierre.

### **4. Puesta en escena de la unidad II.**

La unidad fue diseñada para que los alumnos logren aprendizajes significativos de los contenidos actitudinales, conceptuales y procedimentales en el curso de Matemáticas II, unidad II, con vistas a que los mismos alumnos sean quien con su trabajo y socialización, logren construir los mismos a través de resolución de problemas.

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

**Secuencia didáctica 1. Situaciones que involucran cambio y que dan origen a funciones cuadráticas.**

**Aprendizajes:**

Obtiene el modelo de la función cuadrática de una situación dada.

Reconoce en una tabla si existe variación cuadrática por medio de diferencias finitas. Identifica las diferencias entre variación lineal y cuadrática.

**Inicio.**

Trabajo en parejas

**Actividad 1.** Se desea construir un arenero en el jardín de niños “el patito feo”, para esto se dispone de 80 metros de alambre, el arenero debe de ser rectangular. ¿Cuáles deben de ser las dimensiones del arenero para que la superficie resulte ser la máxima posible?

Primero comprendamos el problema ¿qué propones?

Para lo anterior podemos realizar el trazo del dibujo, también debes de distinguir ¿qué datos tienes?, ¿cuáles son incógnitas? solo hay una incógnita o son varias incógnitas, ¿que otro tipo de datos tienes?, y ¿cómo te pueden apoyar en la solución del problema?

Realiza el dibujo:

¿Qué es lo que pretende resolver el problema?

---

---

---

¿Qué datos tienes?

---

---

---

---

¿Cuál o cuáles son las incógnitas?

---

---

---

Después de haber contestado las preguntas anteriores podemos enfocarnos en un nuevo punto de la resolución de problemas que es la concepción del plan el cual nos llevará a obtener la solución del problema.

¿qué conocimientos previos puedes aplicar a la resolución del problema?

---

¿Cómo puedes relacionar los conocimientos previos con los datos que tienes?

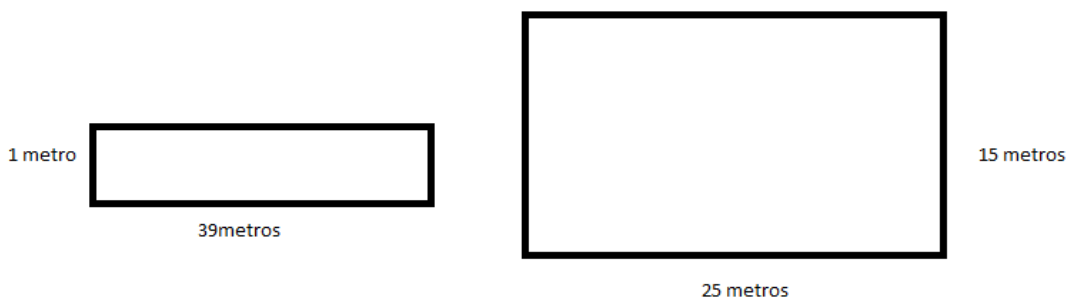
---

---

Si, ya tienes una estrategia de solución para lo anterior por favor síguela, sino es así por favor realiza lo siguiente

Por ejemplo, como queremos que el arenero tenga forma rectangular una pregunta sería cuantos rectángulos podemos formar de tal manera que su perímetro sea de 80 metros.

Por ejemplo



Pero ¿cuál tendría la mayor superficie?, ya que estás de acuerdo que no solo estos dos rectángulos se pueden formar, existen más opciones y debemos considerar algo más.

Estás de acuerdo también tendríamos que utilizar la fórmula para la Superficie (Área) del rectángulo que es  $S = x \cdot y$ . (ancho por largo) Ya que nos piden la mayor superficie.

Para relacionar todo lo anterior podríamos generar una tabla.

Ejecución del plan.

En esta etapa realizaremos la tabla

Recuerdas lo realizaste en Matemáticas I, ¿qué valores le darás a la tabla para el ancho y el largo?, ¿quién debe de permanecer constante? \_\_\_\_\_

Ancho (m)	Largo(m)	Perímetro (m)	Área (m <sup>2</sup> )

¿a qué conclusiones llegas? \_\_\_\_\_

¿qué paso mientras dabas diferentes valores al ancho y largo del rectángulo?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿Cuál fue la mayor Superficie que encontraste, argumenta tu respuesta?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

### Retrospección

En esta etapa lo que deberás verificar si, tu respuesta es correcta, si hay alguna estrategia más sencilla para llegar a la solución, si puedes plantear un problema en un diferente contexto en el que puedas utilizar la misma estrategia que utilizas-te para solucionar el problema.

---



---



---



---

Trabajo con todo el grupo.

Una de las parejas formadas expondrá el problema para todo el grupo en todas sus etapas, el grupo participará mencionando si es que hubo otras estrategias para la solución del problema, si llegaron a la misma solución, muy importante la etapa de retrospección en esta socialización.

Trabajo nuevamente en parejas

A partir del problema anterior escribe cual sería el modelo matemático que generaliza el problema toma en cuenta el siguiente rectángulo



Tendríamos como perímetro  $2x + 2y =$  \_\_\_\_\_

Si despejamos  $y = \frac{80-2x}{2} = 40 - x$

Ahora relacionemos con la superficie

Recuerda que es  $S = x \cdot y$

Sustituye a y

Tenemos

$$S = x(40 - x)$$

$$S =$$

$$S(x) = -x^2 + 40x$$

Que es la generalización, modelo matemático.

Qué puedes observar, de tus clases de matemáticas 1 recuerdas S y x son variables

¿Quién es la variable independiente? \_\_\_\_\_

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

¿Quién es la variable dependiente? \_\_\_\_\_

Sustituye los valores que manejaste en la tabla para  $x$ , que en este caso es el largo.

¿Qué conclusión tienes?

¿Cuál es el valor de  $x$  para que el arenero tenga la menor superficie?

¿Cuál es el valor de  $x$  para que el arenero tenga la mayor superficie?

¿Qué notas de diferente con lo estudiado en Matemáticas 1, unidad 2, Funciones lineales?

Se trata de una función ya que a cada uno de los valores que puede tener " $x$ " le corresponde uno y solamente uno a " $y$ ".

Para que puedas verificar esto construye la gráfica del problema

Me puedes mencionar más diferencias con la función lineal

Claro la gráfica ya no se trata de una recta ahora es una parábola, además la variable independiente su mayor exponente es 2 a diferencia de la función lineal cuyo mayor exponente de la variable independiente era 1.

### Desarrollo:

Trabajo en parejas

**Actividad 2.** Ahora recordaremos a la función lineal para esto tenemos el siguiente problema.

Para estacionar el auto en las calles del centro de la delegación de Tlalpan el parquímetro cuesta \$30.00 cada 15 minutos, si decidí estacionarlo y pienso tardarme

2 horas cuanto debó pagar?, ¿Si solo tuviera \$120, cuanto podría tardarme en regresar al auto?

Bueno antes que nada empecemos a preguntarnos:

¿Cuáles son los datos que tengo del problema? \_\_\_\_\_

¿Cuáles son incógnitas o incógnita? \_\_\_\_\_

¿Qué es lo que debó resolver? \_\_\_\_\_

Ya que tenemos todo lo anterior, cómo lo relacionarías y ¿con qué conocimientos previos? \_\_\_\_\_

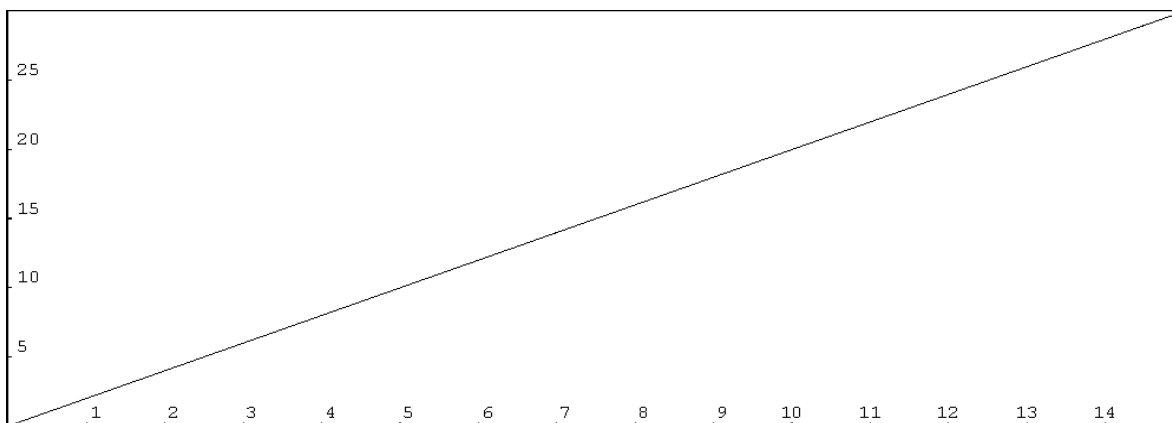
¿Cuál sería tu plan de acción? \_\_\_\_\_

¿En este caso te recomiendo realizar una tabla y de ahí obtener la gráfica y modelo matemático?

¿Quién es la variable dependiente? \_\_\_\_\_

¿Quién es la variable independiente? \_\_\_\_\_

Tiempo (minuto)	Pago (\$)
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14
8	16
9	18
10	20
11	22
12	24
13	26
14	28
15	30



Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

¿Qué concluyes? \_\_\_\_\_

Efectivamente esto nos afirma estamos trabajando con una función lineal, ya que la expresión gráfica del problema es una recta, además si realizamos las diferencias de la variable dependiente (dinero) al tener datos consecutivos de tiempo tenemos:

$$30-28=2$$

$$28-26=2$$

$$8-6=2$$

Esta diferencia es constante lo que nos afirma nuevamente que se trata de una función lineal, ahora obtén el modelo matemático: \_\_\_\_\_

$$C(t)=2t$$

C: cantidad a pagar

t: Tiempo

Efectivamente la variable independiente su exponente es 1, se trata de una función lineal.

Ahora contestemos las preguntas del problema.

En 2 horas sería 120 minutos, por lo tanto

$$C(120) = 2(120) = 240$$

Tendría que pagar \$240.00

Y si tengo \$120.00

$$120=2t$$

Despejando

$$t= 120/2$$

t=60 minutos puedo estar estacionado como máximo.

### Actividad 3. Otro problema.

Ahora si una persona está corriendo en un maratón a 7 Km/hr de manera constante cuánto tardará en terminar de correr 50 km si mantiene la misma velocidad, obtén la tabla que representa el problema, la gráfica y el modelo matemático (regla de correspondencia), además de mencionar quién es la variable dependiente, quién la variable independiente y determina si se trata de una función lineal.

### Actividad 4.

Realicemos la gráfica del problema del arenero. El modelo matemático es  $y = -x^2 + 40x$ .

Demos diferentes valores a la variable independiente x

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

x	$y = -x^2 + 40x$
0	0
1	39
2	76
3	111
4	144
5	175
10	300
15	375
20	400
25	375
30	300
35	175
40	0

Realiza la gráfica:

¿Qué puedes concluir? \_\_\_\_\_

Claro ya no es la gráfica de una recta, es una parábola que representa una función cuadrática pero además observemos las diferencias de la variable dependiente cuando la variable independiente es consecutiva.

$$175 - 144 = 31$$

$$144 - 111 = 33$$

$$111 - 76 = 35$$

$$76 - 39 = 37$$

$$39 - 0 = 39$$

Podemos concluir que las primeras diferencias no son constantes, claro no es una función lineal, ahora veamos con las segundas diferencias

$$33 - 31 = 2$$

$$35 - 33 = 2$$

$$37 - 35 = 2$$

$$39 - 37 = 2$$



Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

Estas segundas diferencias sí son constantes y esta constante es igual a 2, esto nos dice que la variación es cuadrática y tenemos una función cuadrática.

### Cierre.

**Actividad 5.** A partir de la función  $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$  construye la tabla, gráfica y mediante sus diferencias finitas. Concluye de qué tipo de función se trata.

**Secuencia didáctica 2. Estudio gráfico, analítico y contextual de la función  $y = ax^2 + bx + c$ , con  $a \neq 0$ ,  $b$  y  $c$  constantes, en particular:**

- a)  $y = ax^2$
- b)  $y = ax^2 + c$
- c)  $y = a(x-h)^2 + k$

**Aprendizaje:** Interpreta el comportamiento de la gráfica y los parámetros de la expresión algebraica, dentro del contexto de una situación dada.

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

### Inicio:

Trabajo en parejas.

**Actividad 1.** Empecemos con el estudio de la función  $y=ax^2 + b x +c$ , cuando  $a=1$ ,  $b=0$  y  $c=0$ , tenemos entonces la función:  $y=x^2$ .

Realicemos la tabla asignando valores negativos y positivos a la variable independiente.

x	y
-5	25
-4	
-3	9
-2	4
-1	
0	0
1	1
2	4
3	
4	16
5	2

Realiza la gráfica.

Podemos observar que el mínimo valor de la curva es (0,0) y a este punto se le llama vértice de la parábola.

Tenemos que  $f(x)=x^2$  y  $f(-x)=(-x)^2=x^2$

Por ejemplo  $f(2)=2^2=4$  y  $f(-2)=(-2)^2=4$ , como pudiste observar cuando construiste la tabla entonces podemos decir que

$f(x)=f(-x)$ , esto quiere decir que la gráfica es simétrica respecto al eje y, y se le denomina para esta función eje de simetría de la parábola al eje “y”.

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

Las curvas de la parábola que representa la función  $y=x^2$  se llaman ramas de la parábola. Por lo tanto, para valores negativos que tome  $x$  la función es decreciente y para valores positivos la función es creciente.

## Actividad 2.

Para la función  $f(x)=2x^2$  es una función que resulta de multiplicar la función  $f(x)=x^2$  por 2, la función se duplica.

Para la función  $y=4x^2$  es una función que resulta de multiplicar la función  $f(x)=x^2$  por 4, la función se cuadriplica.

Para la función  $y=\frac{1}{4}x^2$  es una función que resulta de multiplicar la función  $f(x)=x^2$  por  $\frac{1}{4}$ , la función se reduce una cuarta parte.

Comprobemos lo que decimos construye las siguientes tablas.

x	$y=x^2$	$y=2x^2$	$y=4x^2$	$y=\frac{1}{4}x^2$	$y=\frac{1}{8}x^2$
-3					
-2					
-1					
0					
1					
2					
3					

Realiza la gráfica las cinco funciones en el mismo sistema de coordenadas con diferentes colores.

¿Qué tienen en común las gráficas? \_\_\_\_\_

¿Cuál es la diferencia entra las gráficas? \_\_\_\_\_

¿Qué pasa cuando  $a>1$ ? \_\_\_\_\_

¿Qué pasa cuando  $0<a<1$ ? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

### Actividad 3.

Ahora trabajemos con valores donde  $a < 0$ .

x	$y = x^2$	$y = -x^2$	$y = -2x^2$	$y = -3x^2$	$y = -\frac{1}{2}x^2$
-3					
-2					
-1					
0					
1					
2					
3					

Realiza la gráfica las cinco funciones en el mismo sistema de coordenadas con diferentes colores.

¿Qué tienen en común las gráficas? \_\_\_\_\_

¿Cuál es la diferencia entre las gráficas? \_\_\_\_\_

¿El vértice dónde se localiza, sigue siendo el mínimo valor de la curva?

Observaciones:

Si  $a > 0$

- 1) Tienen ramas que abren hacia arriba
- 2) Tienen su mínimo valor en el vértice que es (0,0)
- 3) El eje de simetría es y
- 4) Entre mayor sea el parámetro "a" más cerrada es la parábola

Si  $a < 0$

- 1) Las ramas de la parábola abren hacia abajo
- 2) Alcanza su máximo valor en el vértice que es (0,0)
- 3) El eje de simetría es el eje y

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

- 4) Entre mayor sea el valor absoluto del parámetro “a” más cerrada es la parábola

### Desarrollo:

#### Actividad 4.

Ahora estudiamos la función  $y=ax^2 + b x +c$ ,  $a \neq 0$ , cuando  $b=0$  y  $c \neq 0$ , tenemos entonces la función  $y=ax^2 +c$

Realicemos la siguiente tabla, con  $a>0$

x	$Y=x^2-4$	$Y=x^2+4$	$Y=x^2-1$	$Y=x^2+1$

Realiza las gráficas de las funciones en el mismo sistema de coordenadas con diferentes colores.

¿Qué tienen en común las gráficas? \_\_\_\_\_

¿Cuál es la diferencia entre las gráficas? \_\_\_\_\_

¿Qué puedes concluir respecto al parámetro c?

Si  $c>0$

- 1) Se desplaza la gráfica hacia arriba, según sea el valor que toma el parámetro c
- 2) El vértice se encuentra en (0,c)
- 3) El eje de simetría sigue siendo el eje y
- 4) El vértice es el valor mínimo de la curva

Si  $c<0$

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

- 1) Se desplaza la gráfica hacia abajo, según sea el valor que toma el parámetro  $c$ .
- 2) El vértice se encuentra en  $(0, -c)$
- 3) El eje de simetría es el eje  $y$
- 4) El vértice es el valor mínimo de la curva

Realicemos la siguiente tabla, ahora con  $a < 0$

$x$	$Y = -x^2 - 4$	$Y = -x^2 + 4$	$Y = -x^2 - 1$	$Y = -x^2 + 1$

Realiza las gráficas de las funciones en el mismo sistema de coordenadas con diferentes colores.

¿qué tienen en común las gráficas? \_\_\_\_\_

¿Cuál es la diferencia entre las gráficas? \_\_\_\_\_

¿Qué puedes concluir respecto al parámetro  $c$ ? \_\_\_\_\_

Si  $c > 0$

- 5) Se desplaza la gráfica hacia arriba, según sea el valor que toma el parámetro  $c$
- 6) El vértice se encuentra en  $(0, c)$
- 7) El eje de simetría sigue siendo el eje  $y$
- 8) El vértice es el valor máximo de la curva

Si  $c < 0$

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

- 1) Se desplaza la gráfica hacia abajo, según sea el valor que toma el parámetro  $c$ .
- 2) El vértice se encuentra en  $(0, -c)$
- 3) El eje de simetría es el eje  $y$
- 4) El vértice es el valor máximo de la curva.

### Cierre:

### Actividad 6.

Estudiemos por último la función  $y = ax^2 + b x + c$ ,  $a \neq 0$ , cuando  $b \neq 0$  y  $c \neq 0$ , tenemos entonces la función

$$y = ax^2 + b x + c$$

para esto estudiemos la función  $y = 4x^2 + 8 x + 5$

De acuerdo con lo que estudiamos con anterioridad  $a > 0$  por lo tanto las ramas de la parábola abren hacia arriba.

También podemos obtener otro punto de la parábola que es la intersección con el eje  $y$ , para esto hacemos  $x = 0$  y tenemos  $y = 4(0)^2 + 8(0) + 5 = 5$  por lo tanto la gráfica de la función cuadrática corta el eje  $y$  en  $(0, 5)$ .

Ahora completemos el trinomio cuadrado perfecto que aprendiste en la unidad anterior, solo que ahora no podrás dividir todo entre 4 para que el coeficiente de  $x^2$  sea 1, ahora factorizaras.

$$f(x) = 4x^2 + 8 x + 5$$

Factoricemos

$$f(x) = 4(x^2 + 2x) + 5$$

Recuerda que para completar el trinomio cuadrado perfecto necesitamos el término cuadrático y el término lineal.

Revisa, si multiplicas 4 por  $x^2$  quedará  $4x^2$  y 4 por  $2x$  obtendremos  $8x$  que era lo que teníamos en la función con la que iniciamos, por lo tanto, nuestra factorización es correcta.

Trabajemos los términos dentro del paréntesis.

Recuerda al coeficiente del término lineal obtienes su mitad, lo sumas elevado al cuadrado, lo restas elevado al cuadrado, para no cambiar la función.

$$f(x) = 4(x^2 + 2x + (1)^2 - (1)^2) + 5$$

Elevamos al cuadrado

$$f(x) = 4(x^2 + 2x + 1 - 1) + 5$$

Como queremos completar el trinomio cuadrado perfecto, solo necesitamos los primeros tres términos, ¿estás de acuerdo?

El cuarto término dentro del paréntesis lo sacamos, pero recuerda que todo lo que está dentro del paréntesis se multiplica por 4, por tanto:

$$f(x)=4(x^2+2x+1)+5-4$$

Realizando la resta

$$f(x)=4(x^2+2x+1)+1$$

Ahora sí lo que está dentro del paréntesis es un trinomio cuadrado perfecto que podemos escribir como:

$$f(x)=4(x+1)^2+1$$

Nos quedó la función escrita de la forma

$$y=a(x-h)^2+k$$

¿Estás de acuerdo?

Donde  $a=4$ ,  $h=-1$  y  $k=1$

Como  $a=4$  las ramas de la parábola abren hacia arriba.

El vértice se conforma con los parámetros  $h$  y  $k$ ,  $v(h,k)$ .

Por tanto, tenemos que el vértice es  $v(-1,1)$  y será el punto mínimo de la curva, recuerda el estudio que realizamos con anterioridad.

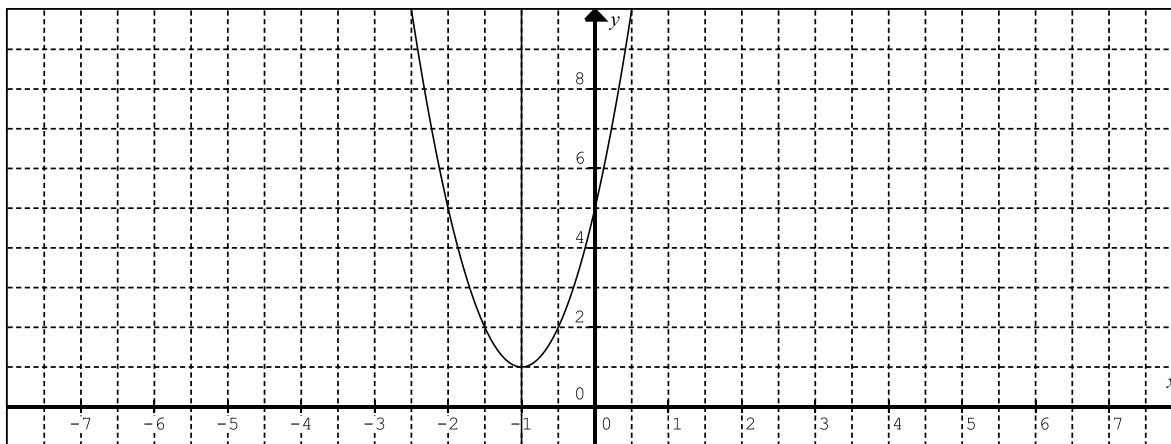
El eje de simetría ya no será el eje  $y$ , ahora observamos que los puntos de la curva son simétricos respecto a la recta  $x=-1$

Para obtener las intercepciones con el eje “ $y$ ” de  $f(x)=4x^2+8x+5$  hacemos  $x=0$ , tenemos

$$f(0)=5$$

El punto de intersección con el eje “ $y$ ” es  $(0,5)$

Como puedes observar en la gráfica no hay intersección con el eje  $x$ , puedes realizar la gráfica con software dinámico GeoGebra.



Generalizando el procedimiento.

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

Factorizamos



Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

Obtenemos la mitad del término  $\frac{b}{a}$  y lo elevamos al cuadrado  $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

Lo sumamos y lo restamos para no cambiar la función

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

Sólo necesitamos tres términos

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4a}{4a} \frac{c-b^2}{4a}$$

$$\text{Donde } h = -\frac{b}{2a} \text{ y } k = \frac{4a}{4a} \frac{c-b^2}{4a}$$

### Secuencia didáctica 3. Cero de la función.

**Aprendizajes:** Relaciona el número de intersecciones de la curva de una función cuadrática con el eje X, con la naturaleza de las raíces. En particular, identifica su ausencia con la existencia de raíces complejas.

Expresa la función  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ ,  $b$  y  $c$  constantes, en la forma estándar  $y = a(x-h)^2 + k$ , usando el método de completar un trinomio cuadrado perfecto. Además, interpreta el impacto de sus parámetros en el registro gráfico.

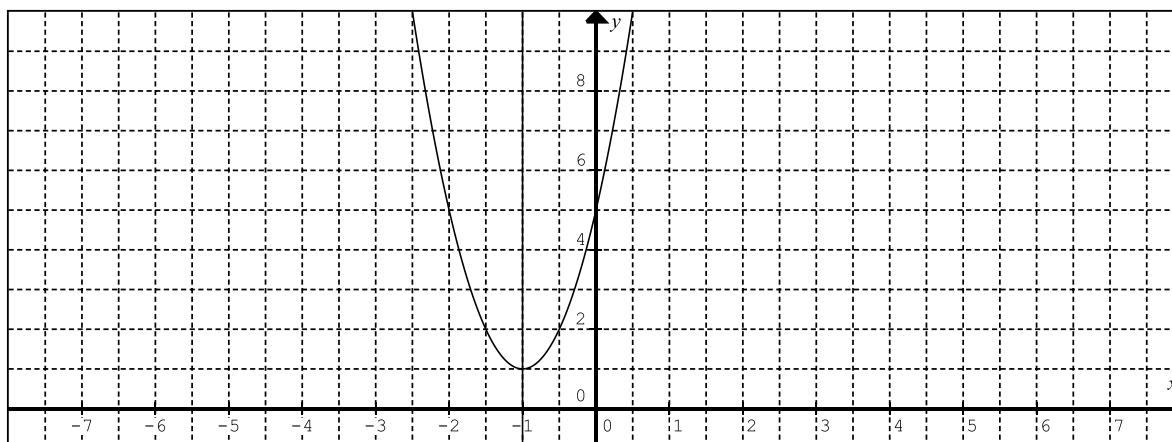
Trabajo en parejas

#### Inicio:

Retomemos el problema de la secuencia anterior

Tenemos  $f(x) = 4x^2 + 8x + 5$

Obtuvimos la gráfica



En donde mencionamos las coordenadas del vértice, que el parámetro “a” nos indicaba que abrían las ramas de la parábola hacia arriba, el eje de simetría  $x=-1$ , la intercepción con el eje y que fue en el punto (0,5), y por último que no había intercepción con el eje x.

Si, recuerdas de tus clases de Matemáticas 1, para obtener las intercepciones con el eje x debemos igualar “y” a cero

Por lo tanto, tenemos

$$0=4x^2+8x+5$$

Podemos resolver la ecuación que se formó, como caso especial de la función, por medio de la fórmula general, la recuerdas, la estudiaste en la anterior unidad.

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(4)(5)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 80}}{8}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{-16}}{8}$$

De tus clases de Matemáticas 1 unidad 1, tenemos la raíz cuadrada de un número negativo.

Eso ¿qué quería decir? \_\_\_\_\_

¡Claro! Tenemos raíces complejas, ya que las intersecciones de la curva con el eje x son las raíces o soluciones de la función. En este caso podemos observar la gráfica, no hay intersección con el eje x eso quiere decir que no hay raíces reales, pero como acabas de comprobar mediante la fórmula general obtuvimos números complejos, pero como son solución de la ecuación que es un caso especial de la función se les llama soluciones o raíces complejas. Que son:

$$x_1 = \frac{-8+4i}{8} = -1+1/2i$$

$$x_2 = \frac{-8-4i}{8} = -1-1/2i$$

Éstas no se pueden graficar en el sistema de coordenadas cartesiano que estamos utilizando, en este sistema solo se grafican pares ordenados pertenecientes al conjunto de los números reales.

### Desarrollo:

Ahora estudiemos otro caso

$$f(x)=-4x^2+3x+10$$

$$f(x)=-4\left(x^2 + \frac{3}{4}x\right)+10$$

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

$$f(x) = -4\left(x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2\right) + 10$$

$$f(x) = -4\left(x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2\right) + 10 + 4\left(\frac{3}{8}\right)^2$$

$$f(x) = -4\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 + 10 + 4\left(\frac{3}{8}\right)^2$$

$$f(x) = -4\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 + 10 + \frac{36}{64}$$

$$f(x) = -4\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{676}{64}$$

Por lo que el vértice es  $V\left(\frac{3}{8}, \frac{631}{64}\right)$ ,  $v(0.375, 10.56)$

Como  $a < 0$  las ramas de la parábola abren hacia abajo.

Intercepciones con eje y

$$x=0$$

$$f(x) = -4x^2 + 3x + 10$$

$$y=10$$

Por lo tanto, la intercepción (0,10)

Intercepciones con el eje x (recuerda las raíces de la función)

$$y=0$$

$$0 = -4x^2 + 3x + 10$$

Resolvamos por fórmula general

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-4)(10)}}{2(-4)}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 160}}{-8}$$

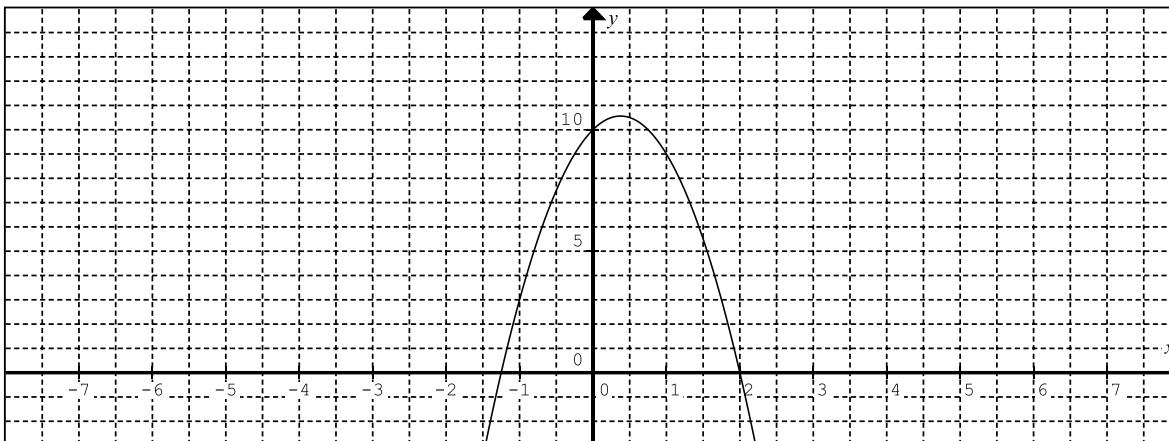
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{-8}$$

$$x = \frac{-3 \pm 13}{-8}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 13}{-8} = \frac{-10}{8} = \frac{-5}{4}$$

$$x_2 = \frac{-3 - 13}{-8} = \frac{-16}{-8} = 2$$

Comprobemos mediante la gráfica, la puedes comprobar mediante GeoGebra



Por último, cual es la ecuación de la recta del eje de simetría

$x = \underline{\hspace{2cm}}$

Siguiente ejemplo

$$f(x) = 4x^2 - 4x + 1$$

Empecemos

Factoriza la función

$$f(x) = \underline{\hspace{1cm}}(x^2 - x) + \underline{\hspace{1cm}}$$

Empieza a completar el trinomio cuadrado perfecto

$$f(x) = \underline{\hspace{1cm}}(x^2 - x + (\quad)^2 - (\quad)^2) + \underline{\hspace{1cm}}$$

$$f(x) = 4(x^2 - x + (1/2)^2) + 1 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$f(x) = 4\left(x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + 1 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - (4)\frac{1}{4}$$

$$f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - 1$$

$$f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

Como:

$$a > 0$$

las ramas de la parábola abren hacia arriba

El vértice está en  $v\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ,  $v(0.5, 0)$

Las intersecciones con el eje y

$$x = 0$$

$$f(x) = 4(0)^2 - 4(0) + 1$$

$$y = 1$$

$$(0, 1)$$

Intercepción con el eje x

$$0 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$0 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{0}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

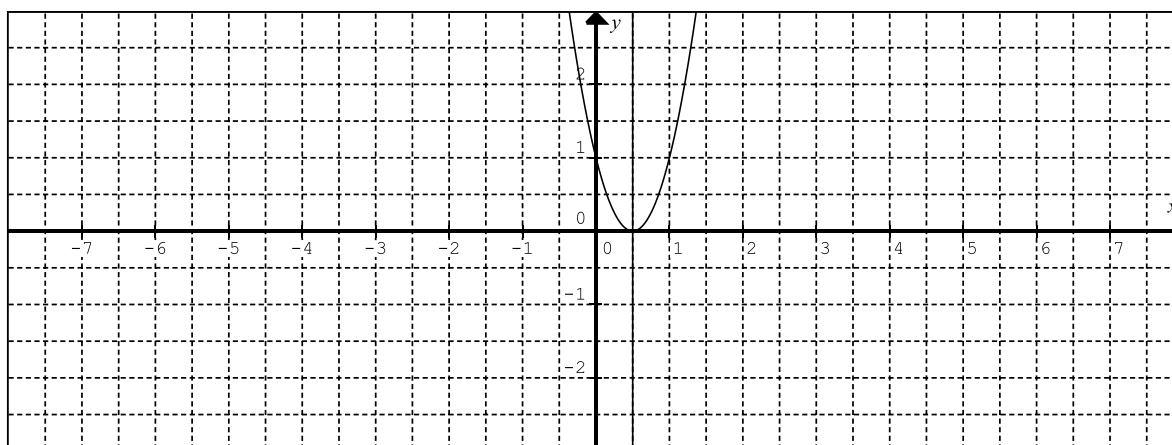
$$0 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{0} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$0 = x - \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Obtengamos la gráfica



El eje de simetría es  $x = \frac{1}{2}$

**Cierre:**

Como pudiste observar hay tres tipos de casos para encontrar las raíces de la función cuadrática

Primer caso. No hay intercepción con el eje de las x, las raíces en este caso son complejas.

Segundo caso. Tenemos dos raíces diferentes reales, dos intercepciones con el eje de las x.

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

Tercer caso solo hay una intercepción con el eje de las x, se dice que la raíz es de multiplicidad 2 y a que  $x_1$  y  $x_2$  son iguales.

Recuerda esto lo analizaste en la anterior unidad con el discriminante

Si

$b^2-4ac < 0$ , no intercepta al eje x, las raíces son imaginarias

$b^2-4ac > 0$ , intercepta al eje x en dos diferentes pares ordenados, tiene dos diferentes raíces reales

$b^2-4ac = 0$ , intercepta al eje x en un solo punto  $x_1 = x_2$ .

Realiza el siguiente ejercicio:  $f(x) = 5x^2 + 3x$

Obtén la función en su forma  $y = a(x-h)^2 + k$

Recuerda factorizar

$$f(x) = \underline{\hspace{1cm}} (\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}})$$

$$f(x) = \underline{\hspace{1cm}} \left( \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \left( \frac{3}{10} \right)^2 - \left( - \right)^2 \right)$$

$$f(x) = \underline{\hspace{1cm}} (\underline{\hspace{1cm}} + 3/10)^2 - (5) \left( \frac{9}{100} \right)$$

$$f(x) = \underline{\hspace{1cm}} (\underline{\hspace{1cm}} + 3/10)^2 - \left( \frac{45}{100} \right)$$

Escribe su vértice

$$V(\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}})$$

Hacia dónde abre las ramas de la parábola

$$a > 0 \underline{\hspace{2cm}}$$

Obtén las intercepciones con el eje y y el eje x

$$1) \ x = 0$$

$$f(0) = 5(0)^2 + 3(0)$$

Intercepta en (0,0)

$$2) \ y = 0$$

$$0 = 5x^2 + 3x$$

resolviendo por factorización

$$0 = x(5x + 3)$$

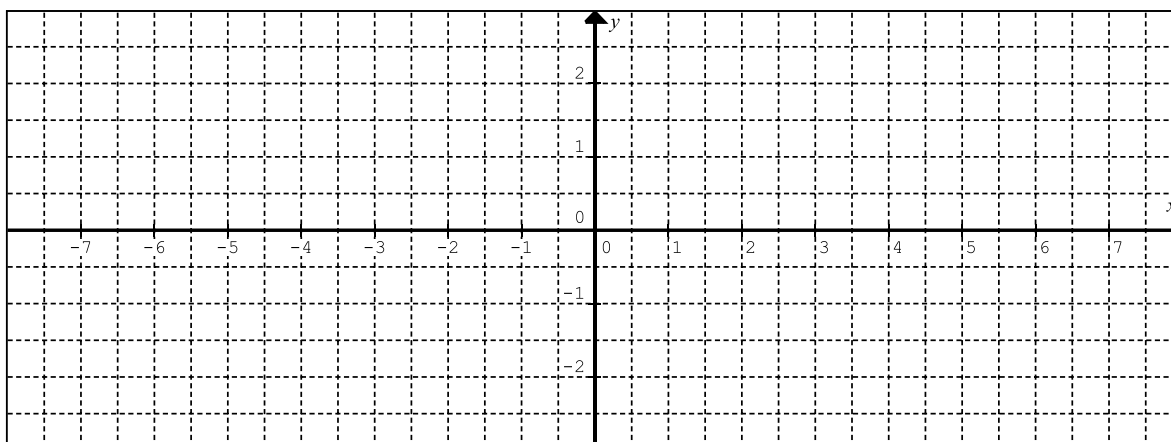
$$x_1 = 0$$

$$5x + 3 = 0$$

$$x_2 = \frac{-3}{5}$$

Por tanto, las raíces de la función son: \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_

Realiza la gráfica de la función.



Escribe la ecuación del eje de simetría de la parábola.

x=\_\_\_\_\_

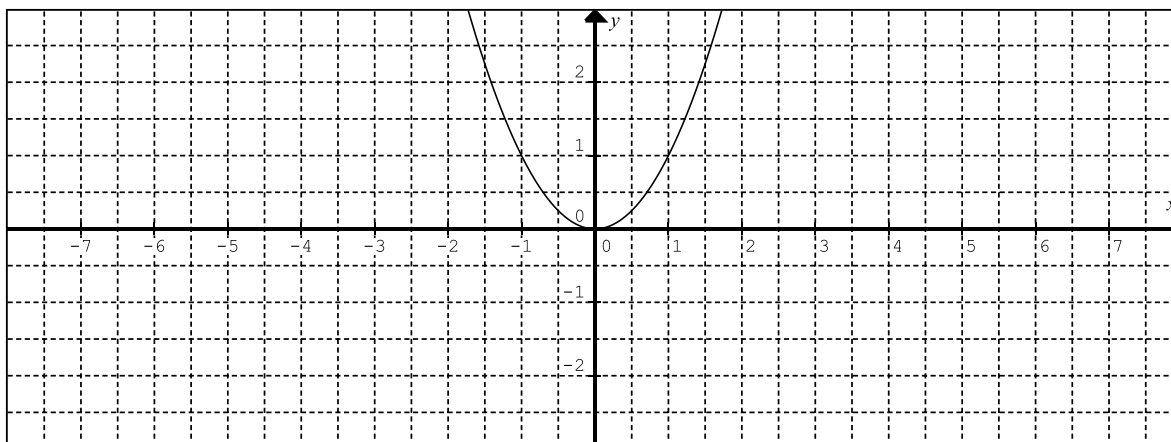
**Secuencia didáctica 4. La función  $y=ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ ,  $b$  y  $c$  constantes, y sus propiedades gráficas. Simetría, concavidad, máximo o mínimo.**

**Aprendizaje:** Comprende los términos de concavidad, vértice, máximo, mínimo y simetría.

**Inicio:**

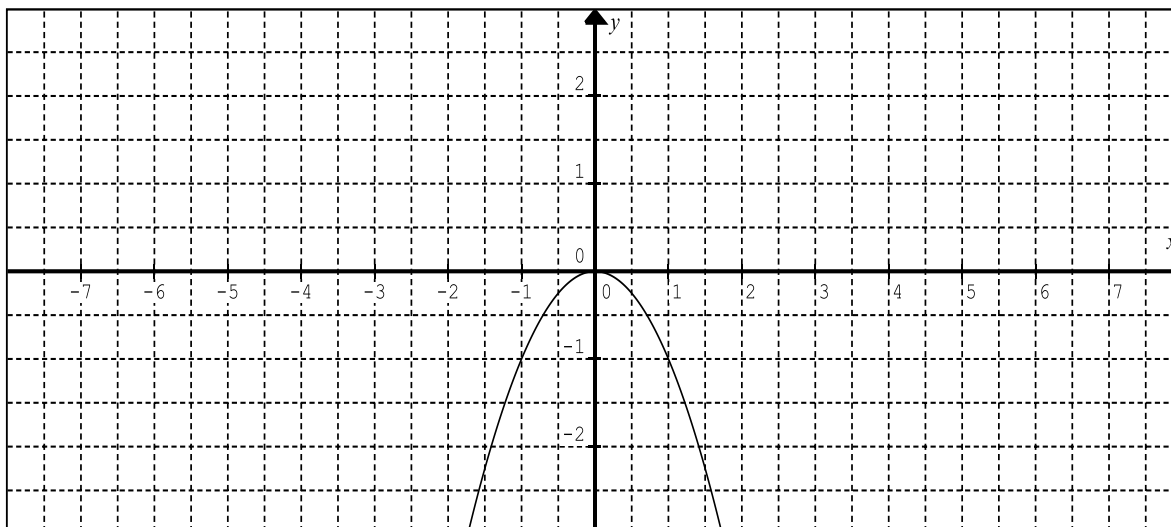
Como ya te abras dado cuenta ya trabajamos con tres términos del aprendizaje simetría, máximo y mínimo, el único que nos falta es concavidad.

Recordemos cuando el parámetro  $a > 0$  las ramas abren hacia arriba, por ejemplo:



Como puedes observar el vértice es el punto mínimo de la curva, siempre será así, por lo tanto, cuando  $a > 0$  tendremos un valor mínimo de la curva que será el vértice.

Cuando tenemos  $a < 0$  las ramas de la parábola abren hacia abajo, ejemplo:



Como puedes observar el vértice es el punto máximo de la curva, siempre será así, por lo tanto, cuando  $a < 0$  tendremos un valor máximo de la curva que será el vértice.

Respecto a simetría, tenemos una recta que pasa por la coordenada  $x$  del vértice, esta será la ecuación de la recta que es eje de simetría ya que todos los pares ordenados son simétricos respecto a esta recta, en los de las dos gráficas anteriores es el eje “ $y$ ”, cuya ecuación es  $x=0$ .

Ahora respecto a la concavidad se dice que es positiva si se traza una recta tangente en un punto de la curva, si esta recta queda arriba de la curva la concavidad es negativa, si por el contrario la recta queda por debajo de la curva la concavidad es positiva.

Investiga que es una recta tangente a una curva:

---



---



---



---

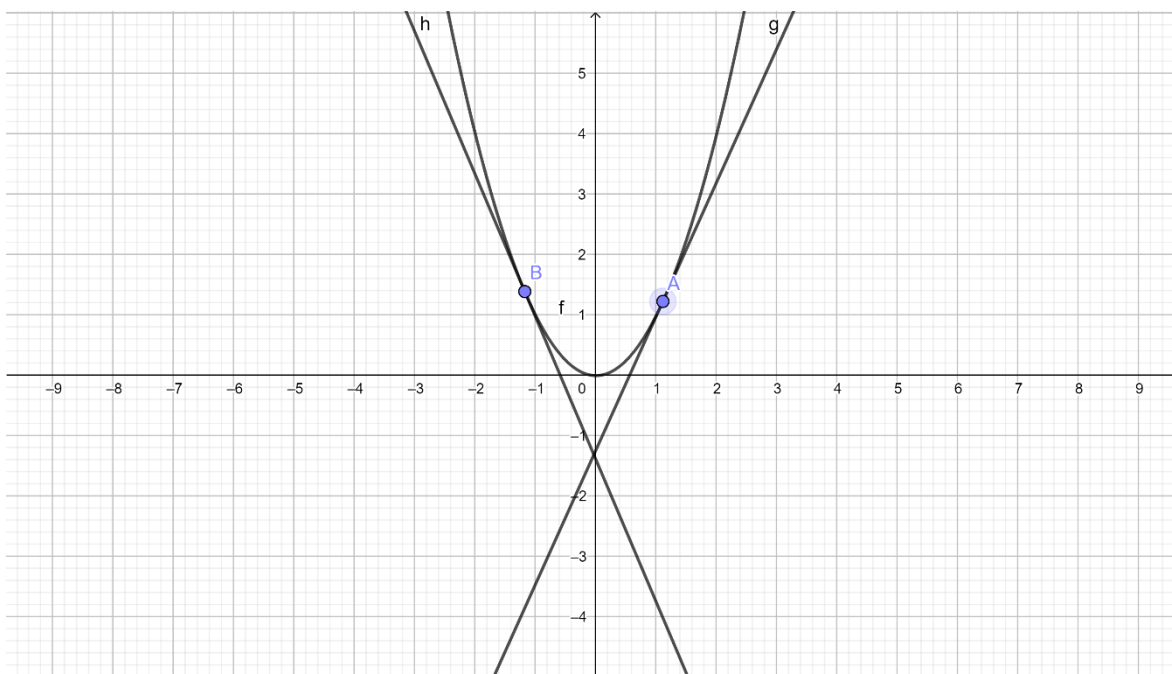


---



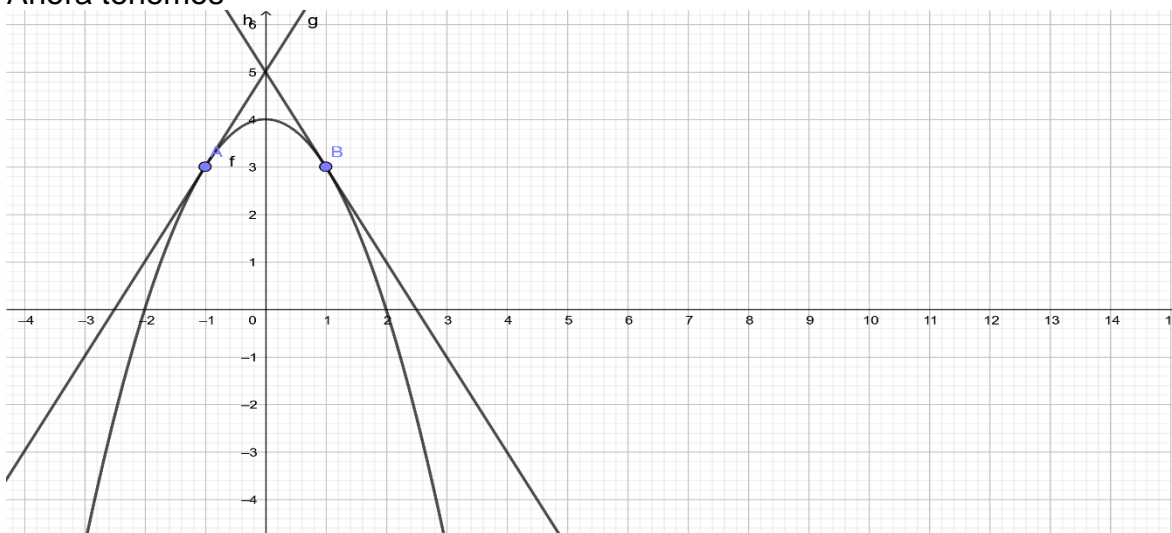
---





En este caso la concavidad es positiva

Ahora tenemos



La concavidad es negativa.

## Desarrollo:

Tenemos la función  $f(x) = -3(x-2)^2 + 3$

¿“a” es mayor o menor que cero?, determina cómo abrirán las ramas de la parábola:

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

El vértice de la parábola está en  $V(\_,\_)$

El eje de simetría es  $x=\_$

La intersección con el eje  $y$  es:  $(\_,\_)$

¿Tenemos raíces de multiplicidad 2, o dos raíces diferentes, o son complejas las raíces? \_\_\_\_\_

¿Cuáles son las raíces? \_\_\_\_\_

La parábola tiene concavidad: \_\_\_\_\_

Realiza el bosquejo de la gráfica, recuerda después de que realizas la gráfica verifícala con GeoGebra:

Ahora la función es  $y = 4x^2 - 2x - 5$

¿“a” es mayor o menor que cero?, determina cómo abrirán las ramas de la parábola:

\_\_\_\_\_

El vértice de la parábola está en  $V(\_,\_)$

El eje de simetría es  $x=\_$

La intersección con el eje  $y$  es:  $(\_,\_)$

¿Tenemos raíces de multiplicidad 2, o dos raíces diferentes, o son complejas las raíces? \_\_\_\_\_

¿Cuáles son las raíces? \_\_\_\_\_

La parábola tiene concavidad: \_\_\_\_\_

Realiza el bosquejo de la gráfica, recuerda después de realizar la gráfica puedes verificar con GeoGebra:

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

Siguiente ejercicio  $f(x) = (x+4)^2$   
 a es mayor o menor que cero, determina cómo abrirán las ramas de la parábola:

---

El vértice de la parábola está en  $V(\_,\_)$

El eje de simetría es  $x=\_$

La intersección con el eje y es:  $(\_,\_)$

¿Tenemos raíces de multiplicidad 2, o dos raíces diferentes, o son complejas las raíces? \_\_\_\_\_

¿Cuáles son las raíces? \_\_\_\_\_

La parábola tiene concavidad: \_\_\_\_\_

Realiza el bosquejo de la gráfica, recuerda puedes verificar tu gráfica con GeoGebra:

Siguiente ejercicio  $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$

¿"a" es mayor o menor que cero?, determina cómo abrirán las ramas de la parábola:

---

El vértice de la parábola está en  $V(\_,\_)$

El eje de simetría es  $x=\_$

La intersección con el eje y es:  $(\_,\_)$

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

¿Tenemos raíces de multiplicidad 2, o dos raíces diferentes, o son complejas las raíces? \_\_\_\_\_

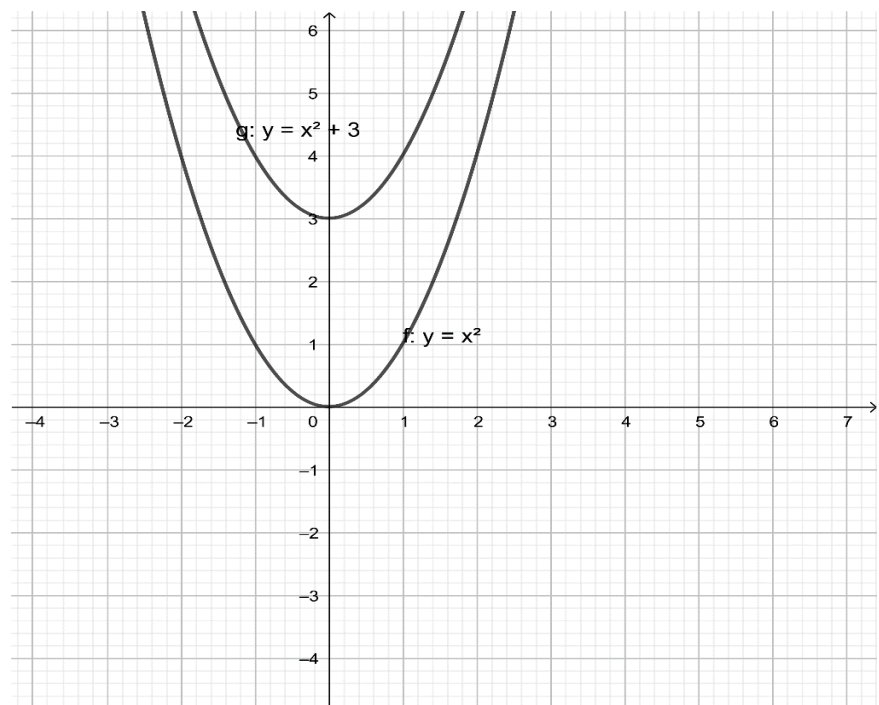
¿Cuáles son las raíces? \_\_\_\_\_

La parábola tiene concavidad: \_\_\_\_\_

Realiza el bosquejo de la gráfica, recuerda puedes verificar la gráfica con GeoGebra:

Vamos a ver qué pasa con los parámetros  $h$  y  $k$  respecto a la representación gráfica de la función.

En un mismo sistema de coordenadas cartesiano graficaremos, primero tomando como base la función  $f(x)=x^2$  y después veremos qué pasa con la gráfica cuando cambiamos el parámetro  $k$ , recuerdas es cuando tenemos la función escrita de la forma  $f(x)=a(x-h)^2+k$ . Cuando tenemos la función  $f(x)=x^2$ ,  $a=1$ , es mayor a cero por lo que las ramas de la parábola abren hacia arriba, la intersección con el eje  $y$   $(0,0)$ , su raíz es de multiplicidad 2 y está en  $(0,0)$ , como " $a$ " es mayor a cero, tenemos un mínimo que es el vértice de la curva  $V(0,0)$ , su concavidad es positiva como ya lo estudiamos, ya que la recta tangente a cualquier punto excepto el vértice queda por debajo de la curva y como ya se mencionó el vértice está en  $(0,0)$  por lo tanto la ecuación de la recta del eje de simetría es  $x=0$ , pero que pasa cuando tenemos  $f(x)=x^2+3$  veamos.



¿Qué es lo que puedes observar que pasa con la gráfica?

---

Puedes comprobar realizando las tablas de ambas funciones.

x	$f(x) = x^2$	$f(x) = x^2 + 3$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

Obtén eje de simetría, concavidad, vértice, raíces, si es un punto mínimo o máximo de las dos funciones:

---



---

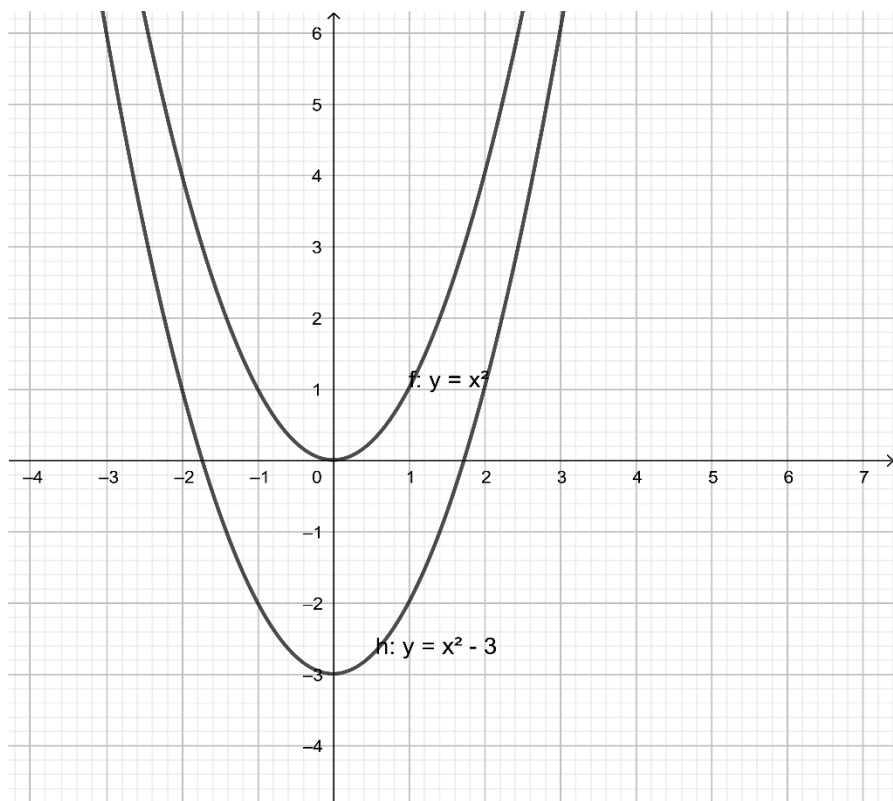


---



---

Ahora realicemos esa misma comparación de  $f(x) = x^2$  con  $f(x) = x^2 - 3$ .



¿Qué pasa con el parámetro  $k$ , ahora que es  $k=-3$ ? Puedes comprobar realizando las tablas de ambas funciones.

$x$	$f(x)=x^2$	$f(x)=x^2-3$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

Obtén eje de simetría, concavidad, vértice, raíces, si es un punto mínimo o máximo de las dos funciones:

---



---

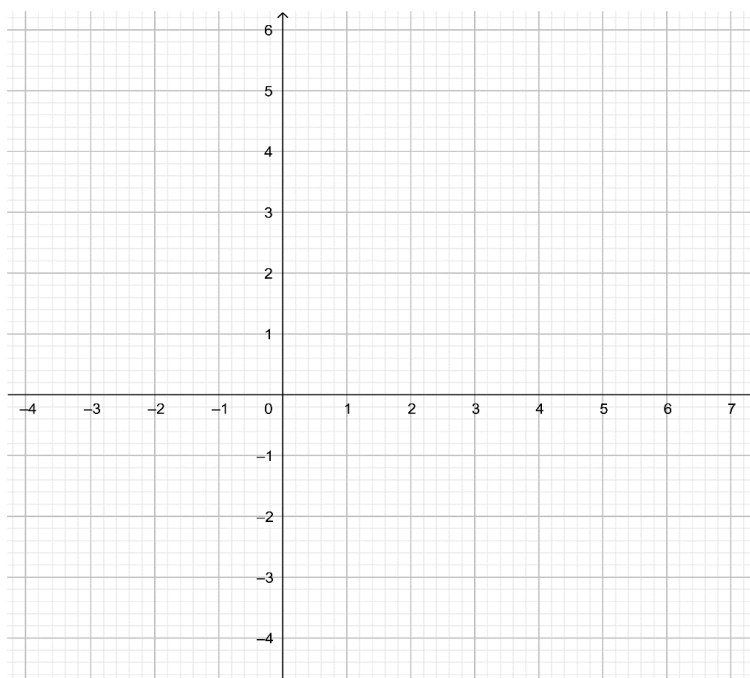


---



---

Sin tabular realiza la gráfica de la función  $f(x)=x^2+2$  y verifícala con GeoGebra



Obtén eje de simetría, concavidad, vértice, raíces, si es un punto mínimo o máximo de las dos funciones:

---



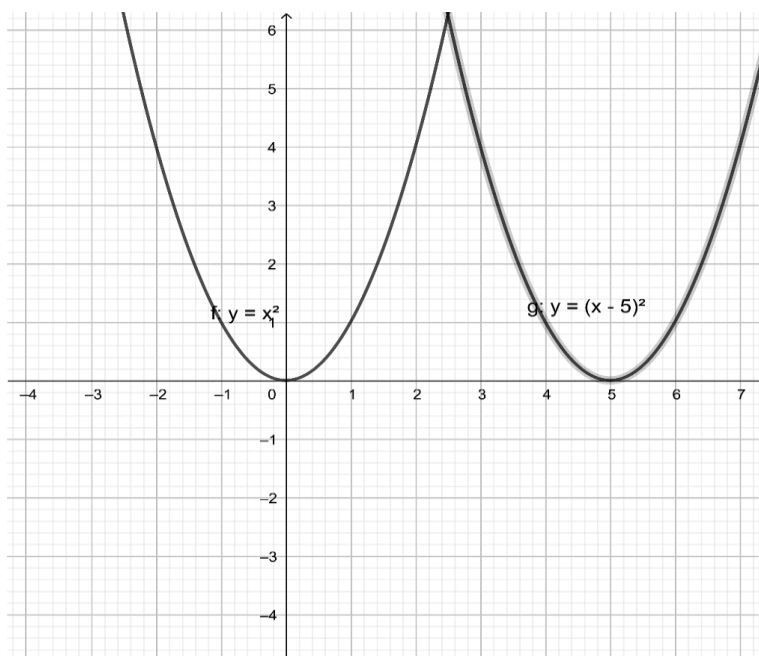
---



---

Ahora estudiamos el parámetro  $h$  de  $f(x) = a(x-h)^2 + k$ ,  $a \neq 0$ .

Otra vez comparemos con  $y = x^2$ , la función  $f(x) = (x-5)^2$ .



¿Qué conclusión obtienes de cambiar este parámetro h?

Puedes comprobar realizando las tablas de ambas funciones

x	$f(x) = x^2$	$f(x) = (x-5)^2$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

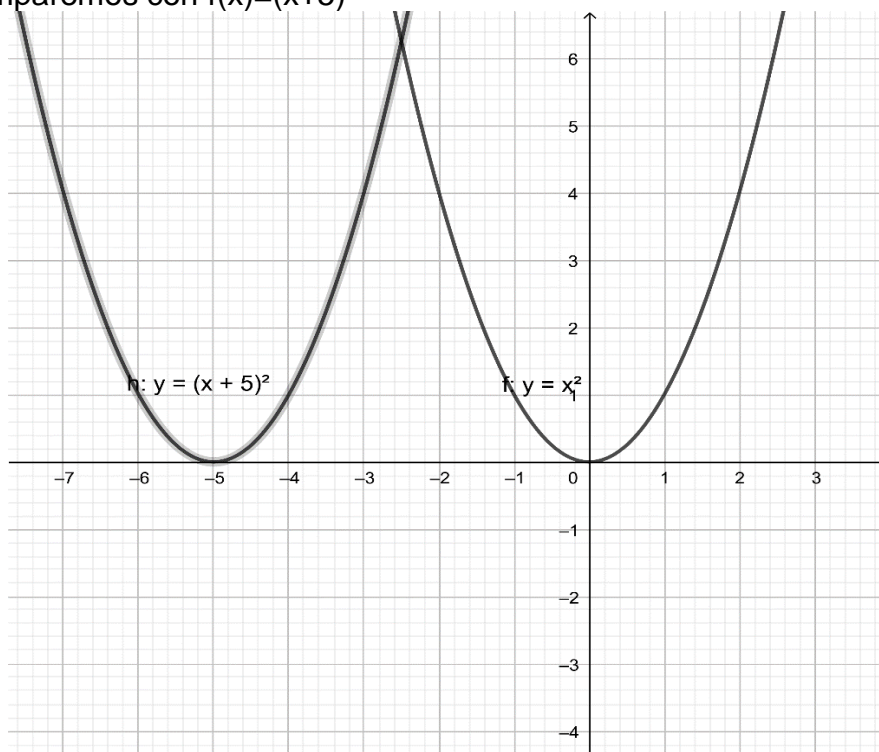
Obtén eje de simetría, concavidad, vértice, raíces, si es un punto mínimo o máximo de las dos funciones:

---



---

Ahora comparemos con  $f(x) = (x+5)^2$



¿Qué conclusión obtienes de cambiar este parámetro h? \_\_\_\_\_



Puedes comprobar realizando las tablas de ambas funciones

x	$f(x) = x^2$	$f(x) = (x-5)^2$
-8		
-7		
-6		
-5		
-4		
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		
4		
5		

Obtén eje de simetría, concavidad, vértice, raíces, si es un punto mínimo o máximo de las dos funciones:

---

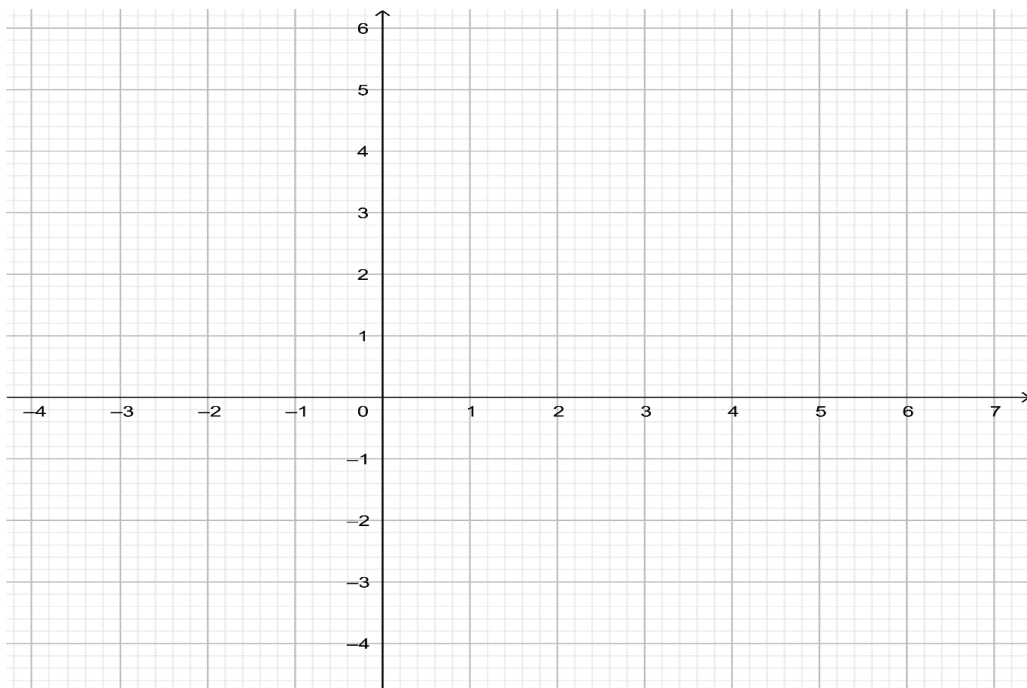


---



---

Sin tabular realiza la gráfica de  $f(x) = (x-2)^2$ , recuerda puedes verificar tu gráfica con GeoGebra.



Obtén eje de simetría, concavidad, vértice, raíces, si es un punto mínimo o máximo de las dos funciones:

---



---

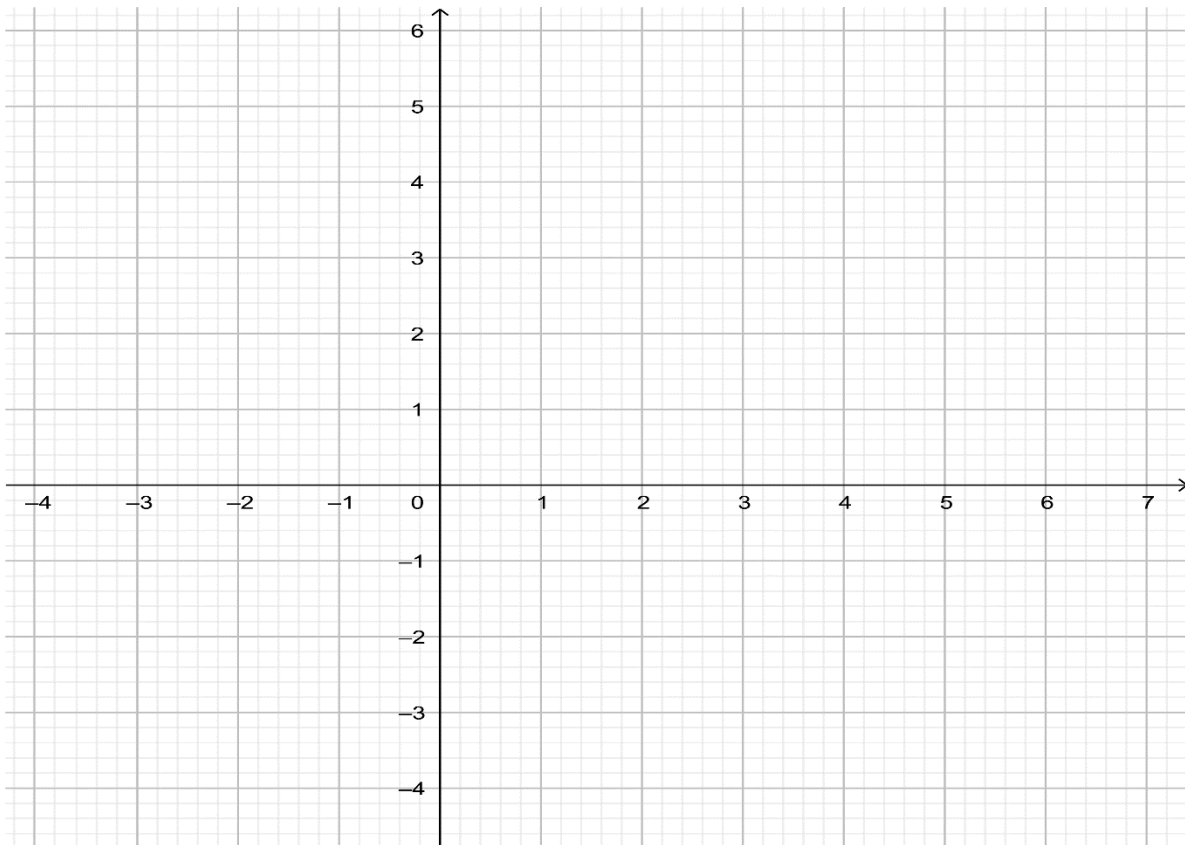


---



---

Ahora realicemos modificaciones en los dos parámetros h y k, sin tabular realiza la gráfica de  $f(x) = (x+1)^2 - 4$ , recuerda puedes verificar la gráfica con GeoGebra.



Obtén eje de simetría, concavidad, vértice, raíces, si es un punto mínimo o máximo de las dos funciones:

---



---



---



---

### Cierre:

Realiza la conclusión acerca de los desplazamientos de los parámetros h y k:

---



---

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

Ahora realiza un resumen del comportamiento de gráfica de la función cuadrática, a partir de sus parámetros  $a$ ,  $h$ ,  $k$ , obtención del vértice, respecto a si sus ramas abren hacia arriba o hacia abajo, su eje de simetría, concavidad, máximo o mínimo de la parábola.

---



---



---



---

Vamos ahora a obtener  $F(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$   $b$  y  $c$  constantes, a partir de  $F(x) = a(x-h)^2 + k$ ,  $a \neq 0$ .

Si tenemos la función  $f(x) = -5(x-1)^2 + 3$ , desarrolla el binomio cuadrado y obtén la función de la forma  $F(x) = ax^2 + bx + c$

$$F(x) = -5(\_\_ - 2x + \_\_) + 3$$

$$F(x) = -5x^2 + \_\_x - 2$$

Si tenemos la función  $f(x) = 4(x+2)^2 - 1$ , desarrolla el binomio cuadrado y obtén la función de la forma  $F(x) = ax^2 + bx + c$

$$F(x) = 4(\_\_ + 4x + \_\_) - 1$$

$$F(x) = 4x^2 + \_\_x + 15$$

Revisa las traslaciones siguientes, utilizando el código QR.



### ***Secuencia didáctica 5. Problemas de aplicación.***

**Aprendizaje:** Resuelve problemas sencillos de máximos y mínimos aprovechando las propiedades de la función cuadrática.

Inicio

1. Un ejemplo de un fenómeno que se puede representar mediante una función cuadrática es la trayectoria que sigue un balón cuando es pateado para anotar un gol de campo en un partido de fútbol americano. Si se quisiera conocer la altura alcanzada por el balón cada segundo a partir del momento en que fue pateado, depende de la inclinación con la cual fue pateado el balón y de la fuerza al momento de patearlo, en un caso específico se tienen la función  $f(x) = -2x^2 + 8x$ , donde en el instante inicial la pelota esta en el suelo, es decir en el tiempo cero la altura es cero.

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

$$f(0) = -2(0)^2 + 8(0) = 0$$

En el primer segundo después de ser pateado

$$f(1) = -2(1)^2 + 8(1) = 6$$

Por lo que el balón se elevó 6 metros.

De acuerdo con el parámetro “a” para donde abrirán las ramas de la parábola que representa la función cuadrática.

Ahora expresa la función de la forma  $f(x) = a(x-h)^2 + k$

Menciona como interpretas los parámetros h y k, en la gráfica de la función,:

\_\_\_\_\_

¿Cuál es el vértice de la parábola? \_\_\_\_\_

¿eje de simetría? \_\_\_\_\_

¿Concavidad de la curva? \_\_\_\_\_

¿El vértice de la curva es un máximo o un mínimo? \_\_\_\_\_

Realiza el bosquejo de la función, primero con los conocimientos que obtuviste durante este aprendizaje y la unidad, después comprueba con GeoGebra.

Contesta lo siguiente:

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

¿A los cuántos segundos regresa el balón al suelo?

---



---

¿A los cuántos segundos el balón alcanza su máxima altura?

---



---

¿Cuál es la altura máxima que alcanza el balón?

---

2. Los ingresos mensuales de un fabricante de zapatos están dados por la función  $I(z)=1000z-2z^2$ , donde  $z$  es la cantidad de pares de zapatos que fabrica en el mes. De acuerdo con el parámetro  $a$  para donde abrirán las ramas de la parábola que representa la función cuadrática. Ahora expresa la función de la forma  $f(x)=a(x-h)^2+k$ ,  $a \neq 0$ .

Menciona como interpretas los parámetros  $h$  y  $k$ , en la gráfica de la función,:

---

¿Cuál es el vértice de la parábola? \_\_\_\_\_

¿eje de simetría? \_\_\_\_\_

¿Concavidad de la curva? \_\_\_\_\_

¿El vértice de la curva es un máximo o un mínimo? \_\_\_\_\_

Realiza el bosquejo de la función, primero con los conocimientos que obtuviste durante este aprendizaje y la unidad, después comprueba con GeoGebra

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

.

Contesta lo siguiente:

.

¿Qué cantidad de pares debe fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso?

---

¿Cuáles son los ingresos si se fabrican 125 pares de zapatos?, ¿y 375 pares?

---

3. Para recaudar dinero para la fiesta de graduación los alumnos del grupo 671 realizaron una obra de teatro, en la cual cobrarían la entrada y para ello construyeron una función cuadrática que relaciona el precio de entrada (e), con las ganancias f(e), para poder organizar muy bien el evento de tal manera que consigan el dinero suficiente para la fiesta de graduación necesita como mínimo \$30,000.00, pero si pueden obtener más dinero mucho mejor.

$$f(e) = -5e^2 + 400e - 4$$

De acuerdo con el parámetro a para donde abrirán las ramas de la parábola que representa la función cuadrática.

Ahora expresa la función de la forma  $f(x) = a(x-h)^2 + k$

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

Menciona como interpretas los parámetros  $h$  y  $k$ , en la gráfica de la función, : \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

¿Cuál es el vértice de la parábola? \_\_\_\_\_

¿eje de simetría? \_\_\_\_\_

¿Concavidad de la curva? \_\_\_\_\_

¿El vértice de la curva es un máximo o un mínimo? \_\_\_\_\_

Realiza el bosquejo de la función, primero con los conocimientos que obtuviste durante este aprendizaje y la unidad, después comprueba con GeoGebra

¿Cuánto debe costar cada boleto para obtener la mayor ganancia?

\_\_\_\_\_

¿Si obtuvieron la ganancia necesaria para completar los \$30,000?

\_\_\_\_\_

4. El grupo de Rock se presentará en el teatro de la ciudad de México el boleto tienen un precio de \$50, esperan 500 de sus seguidores, pero si rebajan el precio \$5 asegurarán la asistencia de 100 personas más. ¿Cuánto se puede rebajar las entradas para obtener la mayor ganancia en el concierto?, al menos necesitan una ganancia de \$20,000.00

#### **Desarrollo:**

Compara los resultados obtenidos por las parejas de alumnos, con el grupo en plenaria, los equipos que pasen a exponer los problemas serán seleccionados al azar.

#### **Cierre:**

De acuerdo con lo estudiado diseña un problema que se pueda modelar con una función cuadrática y contesta lo siguiente de dicho problema.

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

De acuerdo con el parámetro “a” para donde abrirán las ramas de la parábola que representa la función cuadrática.

Ahora expresa la función de la forma  $f(x) = a(x-h)^2 + k$ ,  $a \neq 0$ .

Menciona como interpretas los parámetros h y k, en la gráfica de la función: \_\_\_\_\_

¿Cuál es el vértice de la parábola? \_\_\_\_\_

¿eje de simetría? \_\_\_\_\_

¿Concavidad de la curva? \_\_\_\_\_

¿El vértice de la curva es un máximo o un mínimo? \_\_\_\_\_

Realiza el bosquejo de la función, primero con los conocimientos que obtuviste durante este aprendizaje y la unidad, después comprueba con GeoGebra

Revisa el siguiente código QR, donde encontraras diferentes problemas de aplicación.





Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

## 5. Materiales de Apoyo.

### 5.1. EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA.

I. Resuelve las ecuaciones completando el trinomio cuadrado perfecto:

- 1)  $4x^2-2x=0$
- 2)  $x^2+4x=0$
- 3)  $x^2-3x-2=0$

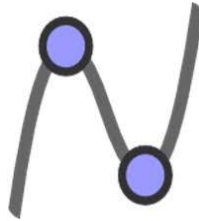
II. Desarrolla los siguientes binomios:

- a)  $(x-5)^2$
- b)  $(3x-2)^2$
- c)  $(5z+3b)^2$

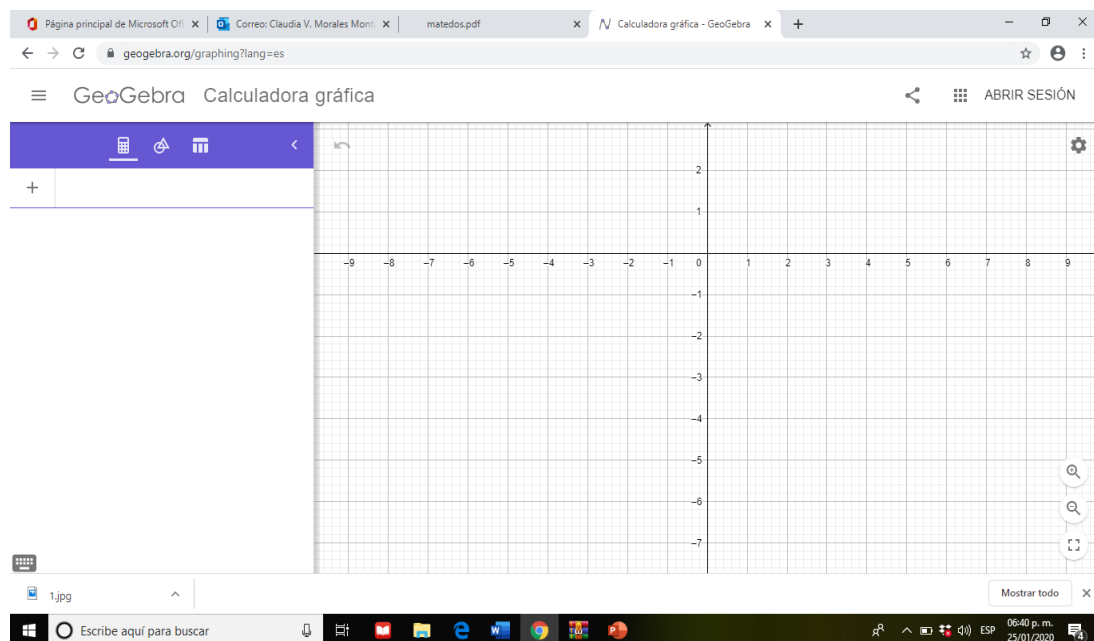
### 5.2 TRABAJO CON GEOGEBRA.

Desarrollo de gráficas mediante software dinámico GeoGebra.

1. Descarga en tu teléfono inteligente el software dinámico GeoGebra.

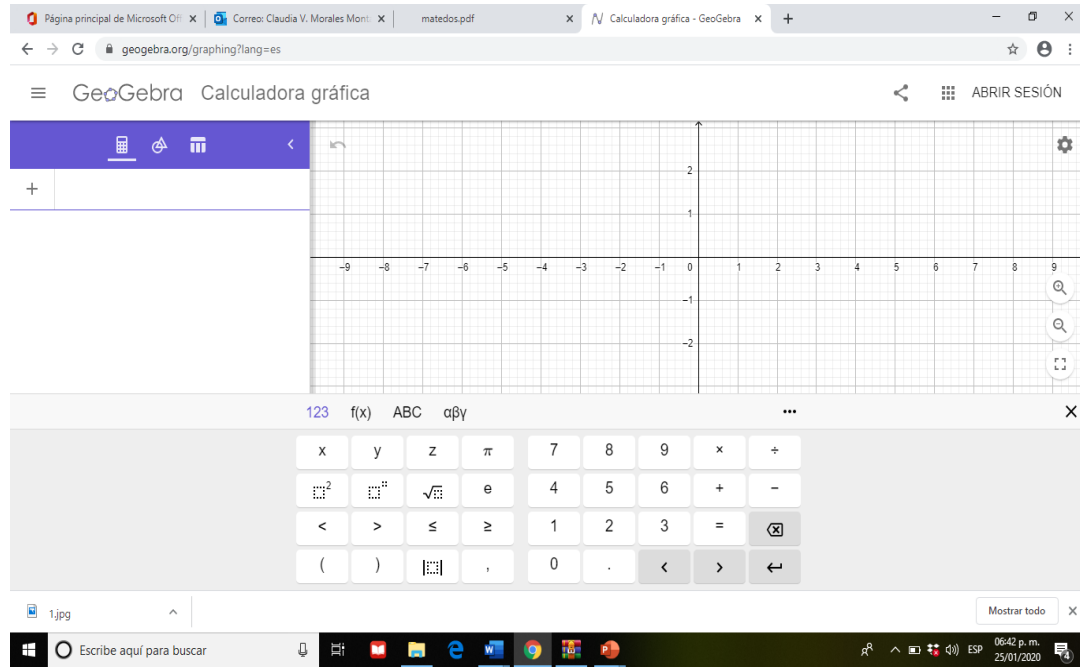


2. aparece la siguiente imagen



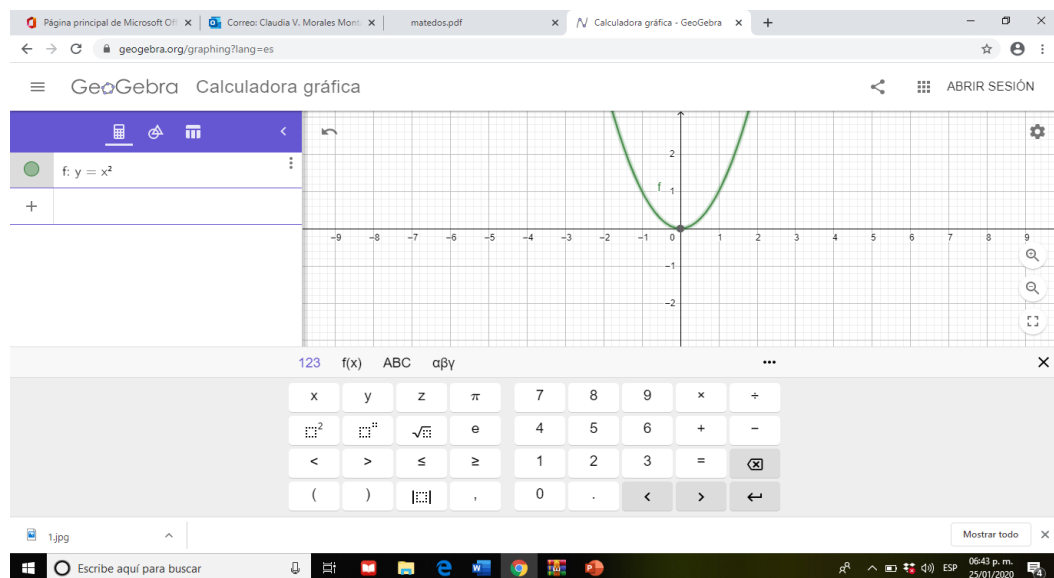
3. Da clic en la imagen de teclado que se ve en la parte inferior izquierda.

4. Aparece la siguiente pantalla.

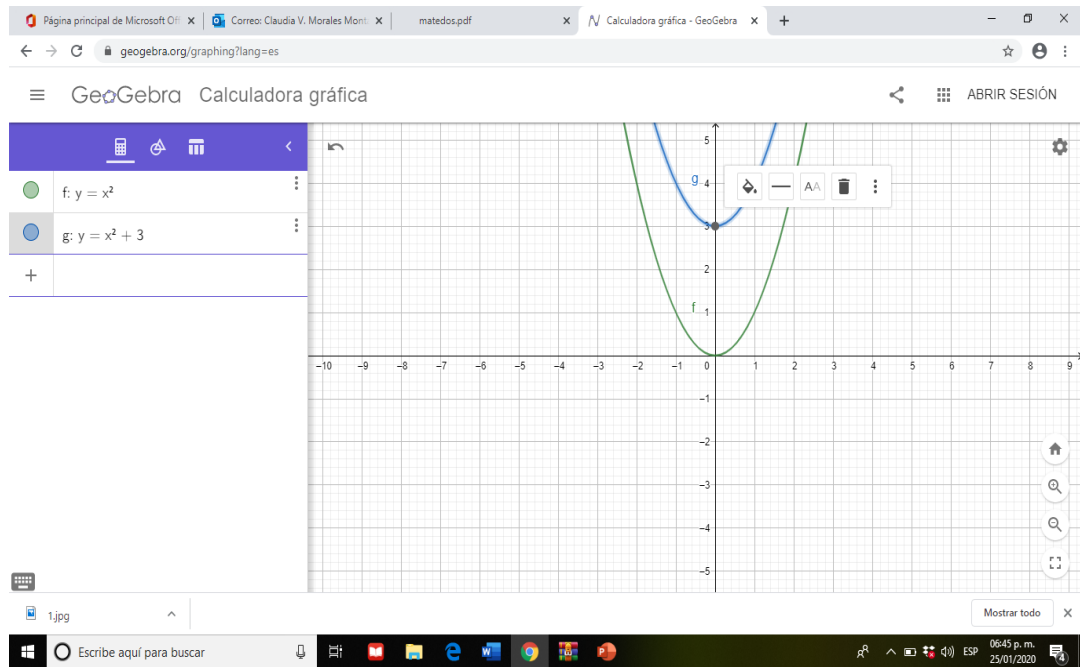


5. Escribe tu regla de correspondencia en la ventana junto al signo de suma con ayuda del teclado.

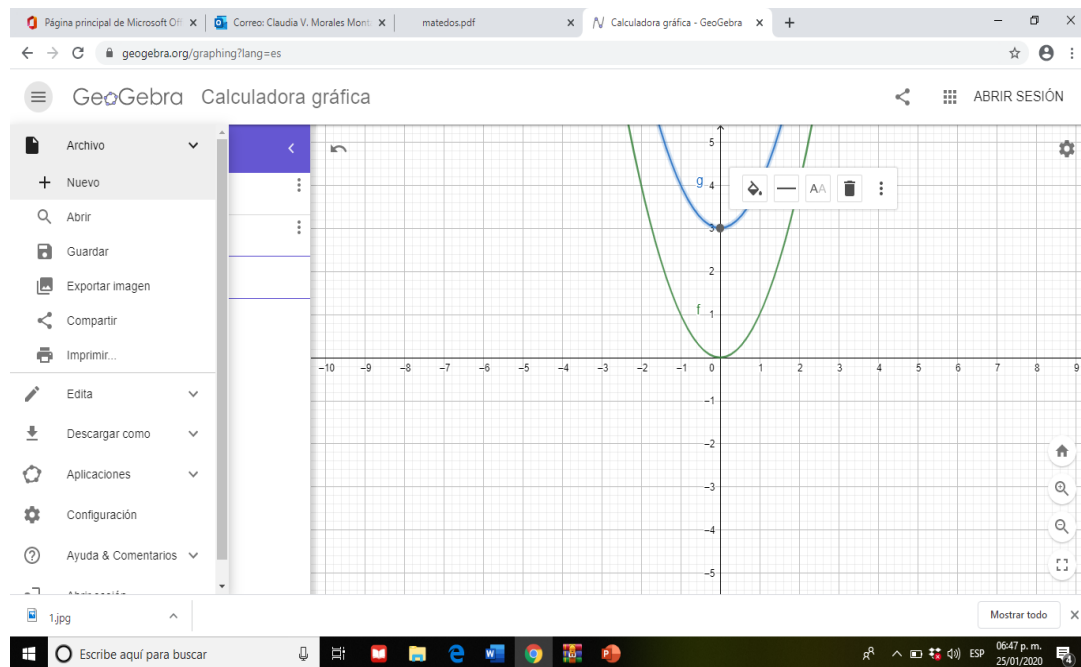
6. Da clic en la flecha que señala a la izquierda y tienen la gráfica de la función.



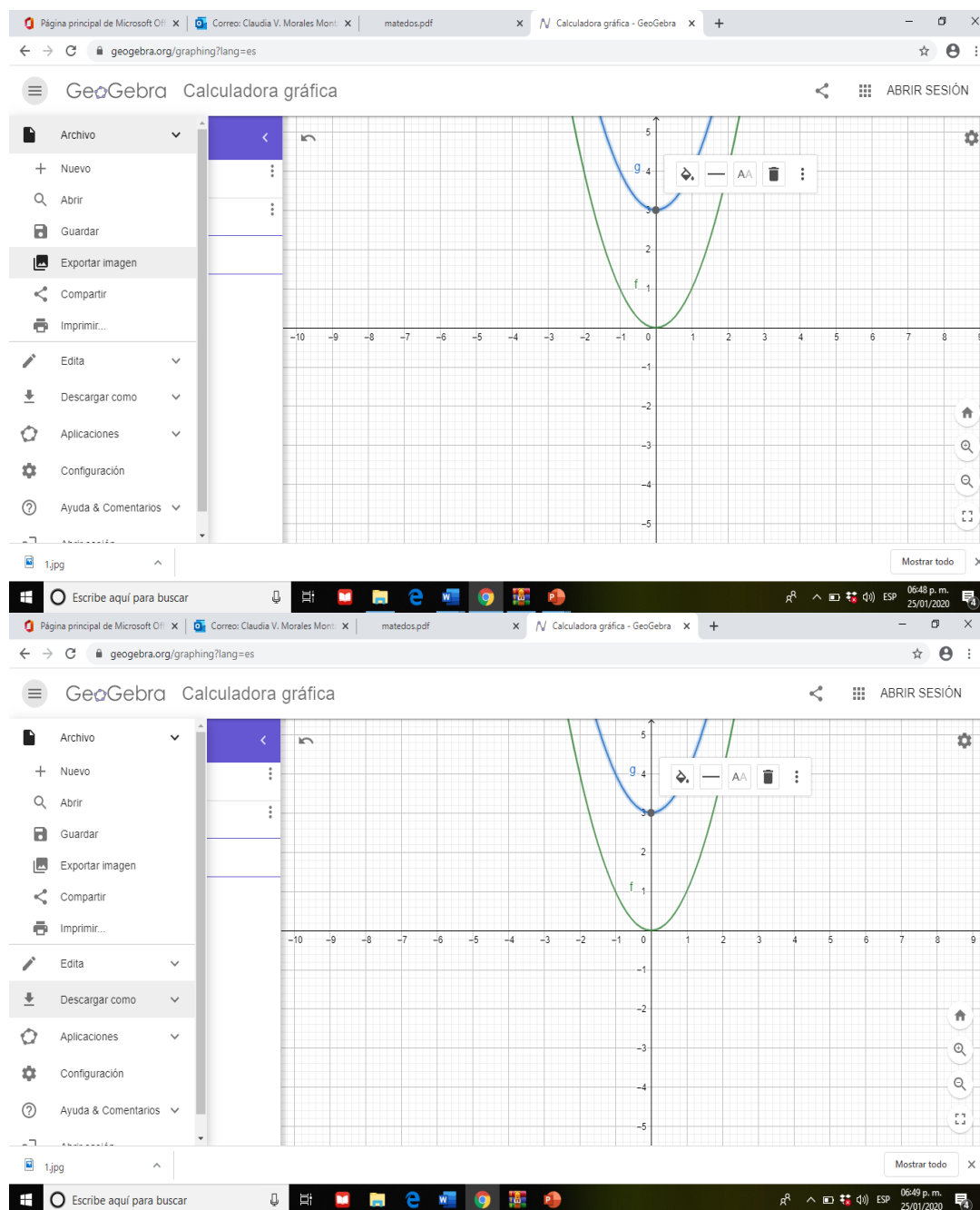
7. Puedes seguir graficando solo escribes la regla de correspondencia de la función junto al signo de suma, GeoGebra realiza la gráfica en otro color, pero tú puedes modificar también con el menú que aparece junto a las gráficas.



8. Puedes volver a empezar dando clic a nuevo, en el menú de la parte superior derecha.



9. Puedes guardar la imagen o exportar en el formato que de interés.

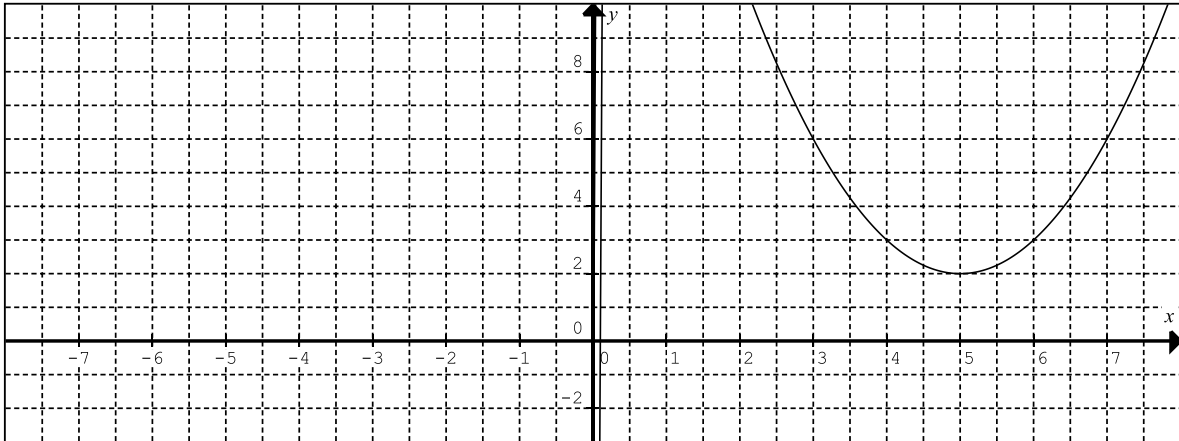


Esto es lo más básico de este software, es muy fácil utilizarlo, empieza por conocer el menú.

### 5.3. AUTOEVALUACIÓN.

**Actividades de aprendizaje.** Con esta autoevaluación, se pretende verificar los aprendizajes de los estudiantes al cabo de la unidad II, correspondiente a la asignatura de Matemáticas II.

1. Determina la regla de correspondencia de la función cuya representación gráfica es la siguiente:

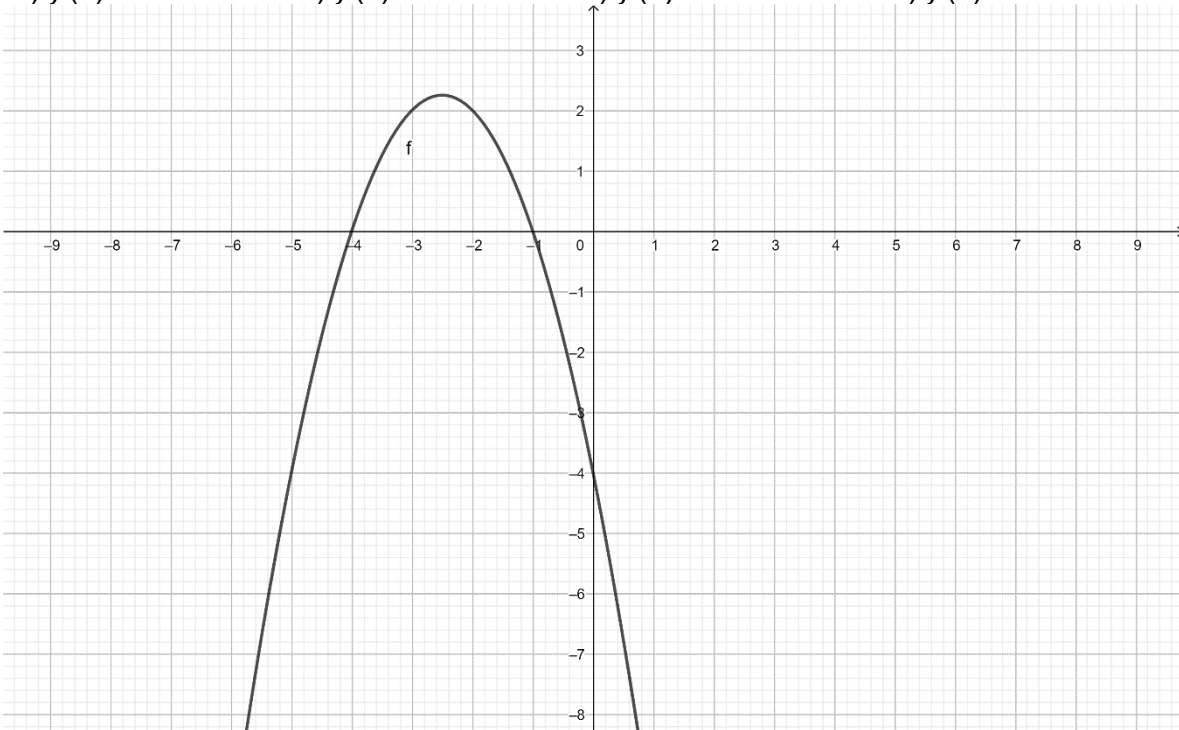


2. La gráfica de la función cuadrática  $y = -(x + 8)^2 + 5$  tiene su vértice en las coordenadas:

- a)  $(-8, 5)$                       b)  $(-8, -5)$                       c)  $(8, -5)$                       d)  $(8, -5)$

3. La función que se representa en la gráfica, está dada por:

- a)  $f(x) = x^2 - 5x - 4$     b)  $f(x) = -x^2 - 5x - 4$     c)  $f(x) = -x^2 + 5x - 4$     d)  $f(x) = x^2 - 5x + 4$



4. En Un granjero tiene 800 metros de malla de alambre, para construir un corral con forma de rectángulo. El corral tendrá como uno de sus lados a una pared, por lo que no requiere malla en esa parte. Si el granjero desea que el área que encie-

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

re el corral sea la máxima posible, Identifica la regla de correspondencia o modelo matemático del problema (el ancho está representado por  $x$  y el largo por  $y$  del rectángulo) la regla de correspondencia debe de estar en función de  $x$ .

a)  $A = x(800 - x)$    b)  $A = x(800 - 2x)$    c)  $A = 2x(800 - x)$    d)  $A = 2x(800 - 2x)$

5. Al transformar la función cuadrática, de su forma general  $y = 4x^2 + 3x + 8$  a su forma estándar, queda como:

a)  $y = 4(x - \frac{3}{8})^2 - \frac{119}{16}$    b)  $y = 4(x + \frac{3}{8})^2 + \frac{119}{16}$    c)  $y = 4(x - \frac{3}{8})^2 + \frac{119}{16}$   
d)  $y = -4(x + \frac{3}{8})^2 - \frac{119}{16}$

6. El vértice de la función cuadrática  $f(x) = -4x^2 + 2x + 4$  tiene coordenadas

$V(\frac{1}{4}, \frac{17}{4})$ , por lo tanto, en ese punto la función

- a) tiene un máximo.   b) tiene un mínimo.   c) tiene una raíz real.  
d) tiene una raíz imaginaria.

7. Las raíces de la función cuadrática  $f(x) = 6x^2 - 5x - 6$  son:

a)  $x = \frac{-3}{2}$  y  $x = \frac{2}{3}$    b)  $x = \frac{3}{2}$  y  $x = \frac{-2}{3}$    c)  $x = \frac{-3}{2}$  y  $x = \frac{-2}{3}$    d)  $x = \frac{3}{2}$  y  $x = \frac{2}{3}$

8. Considera la función cuadrática  $f(x) = 12x^2 - x - 20$ . El valor de  $f(-\frac{1}{2})$  es:

a)  $\frac{33}{4}$    b)  $\frac{-33}{4}$    c)  $\frac{33}{2}$    d)  $\frac{-33}{2}$ .

9. La concavidad de la gráfica de la función  $f(x) = -5x^2 + 10x - 5$  es hacia:

- a) abajo   b) arriba   c) derecha   d) izquierda

10. Determina las soluciones o raíces de la gráfica de la regla de correspondencia de la función  $y = 12x^2 - x - 20$ .

a)  $x_1 = \frac{3}{4}$ ,  $x_2 = \frac{-5}{4}$    b)  $x_1 = \frac{4}{3}$ ,  $x_2 = \frac{-5}{4}$    c)  $x_1 = \frac{-3}{4}$ ,  $x_2 = \frac{5}{4}$    d)  $x_1 = \frac{-4}{3}$ ,  $x_2 = \frac{-5}{4}$

#### 5.4. EJERCICIOS.

1. Realiza las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas (sin realizar tabla, puede realizarlo factorizando o completando el trinomio cuadrado perfecto) y marca los ceros de cada función (si es que existen) con color rojo, el vértice con color azul, la recta de simetría con color café, las intersecciones con los ejes color ver-

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

de, señala si existe un máximo o un mínimo de acuerdo con la gráfica y que concavidad tiene.

Nota: debes de realizar o escribir el desarrollo que seguiste ya sea factorizando o completando el trinomio cuadrado perfecto para que se te evalúe el mismo, solo puedes utilizar GeoGebra para verificar.

- a.  $f(x) = 2x^2 + 7x - 6$
- b.  $f(x) = 4x^2 + 10x + 2$
- c.  $f(x) = x^2 + 6$
- d.  $f(x) = 2x^2 - 9x$
- e.  $f(x) = -x^2 - 8x$
- f.  $f(x) = -5x^2 + 5$
- g.  $f(x) = 3x^2 + 4$
- h.  $f(x) = x^2 - x - 2$
- i.  $f(x) = 3x^2 + 8x + 4$
- j.  $f(x) = 12x^2 - 6x - 6$

2. Determina las raíces de la siguiente función  $f(x) = 2x^2 + 4x - 16$  y su vértice

- a)  $x_1 = 2$   $x_2 = 4$ ,  $V(-1, 18)$
- b)  $x_1 = -2$   $x_2 = 4$   $V(1, -18)$
- c)  $x_1 = -4$   $x_2 = 2$   $V(-1, -18)$
- d)  $x_1 = -2$   $x_2 = -4$   $V(1, 18)$

3. Resuelve los siguientes problemas.

I. Se arroja una pelota de tenis verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo, la regla de correspondencia que modela la situación es la siguiente  $S = 20t - 10t^2$  que nos da la altura en metros de la pelota después de  $t$  segundos.

- a) Obtén la Gráfica de la trayectoria de la pelota.
- b) Determina en cuántos segundos, la pelota alcanza su máxima altura.
- c) ¿Qué altura alcanza la pelota a los 2 segundos?

II. Se dispone de 12 m de tela de alambre para cercar un arenero en forma rectangular, pero uno de los lados corresponderá a la pared del Jardín de niños. ¿Qué dimensiones del arenero nos darán el área máxima?

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

**Respuestas a los ejercicios de los materiales de apoyo, que conforman la Unidad 2. Función Cuadrática y aplicaciones.**

### 5.1. EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA.

Respuestas de la sección 5.1. EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA.			
1. $x_1=1/2$ $x_2=0$	2. $x_1=0$ $x_2=-4$	3. $x_1=\frac{-\sqrt{17}}{2} + \frac{3}{2}$ $x_2=\frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{3}{2}$	a) $x^2-10x+25$ b) $9x^2-12x+4$ c) $25z^2+30zb+9b^2$

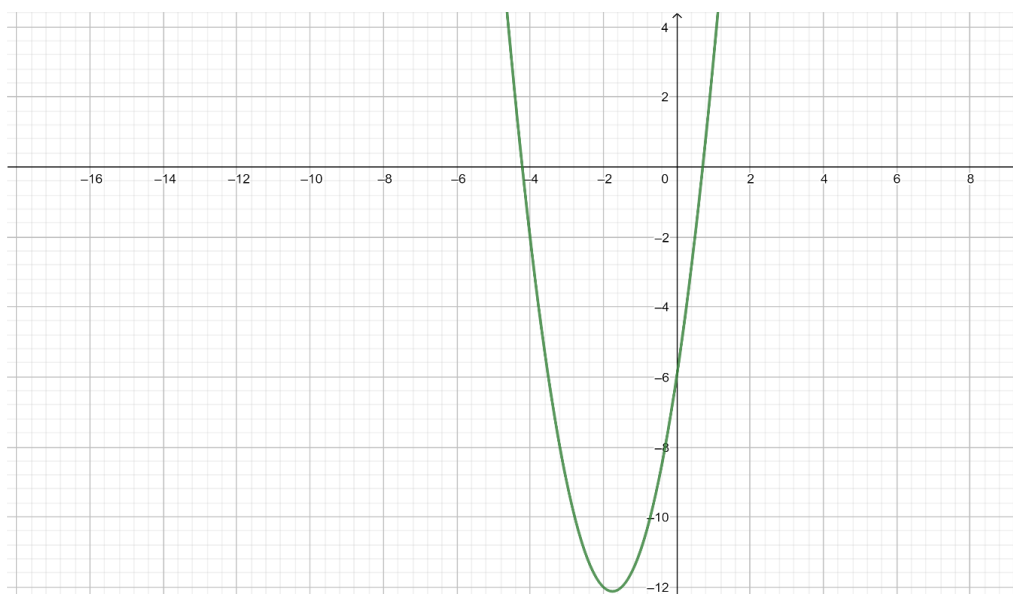
### 5.3. AUTOEVALUACIÓN.

Respuestas de la sección 5.3. AUTOEVALUACIÓN.						
1. $y=(x-5)^2+2$	2. a)	3. b)	4. b)	5. b)	6. a)	7. b)
8. d)	9. a)	10. b)				

### 5.4. Ejercicios.

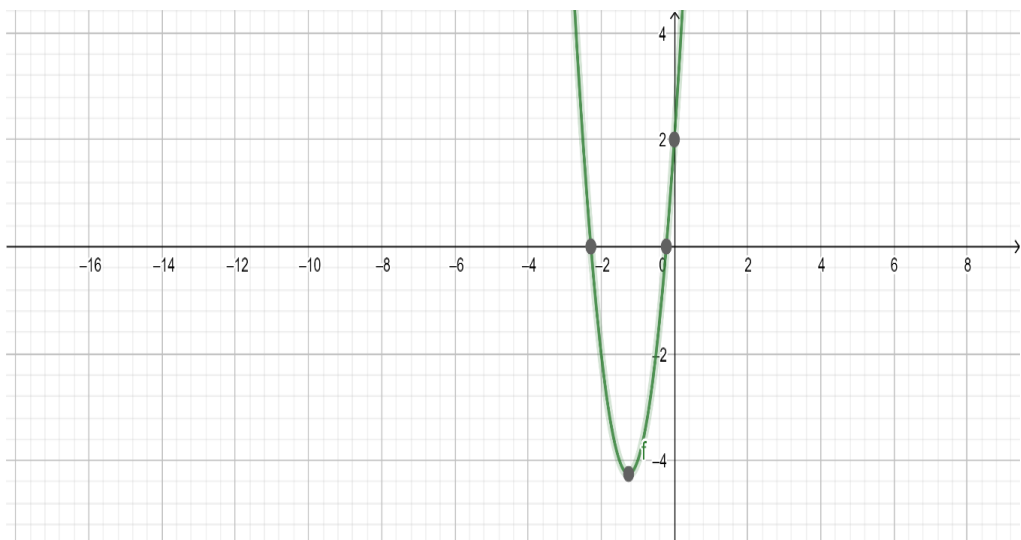
Respuestas de la sección 5.4. Ejercicios.
---

1. a)

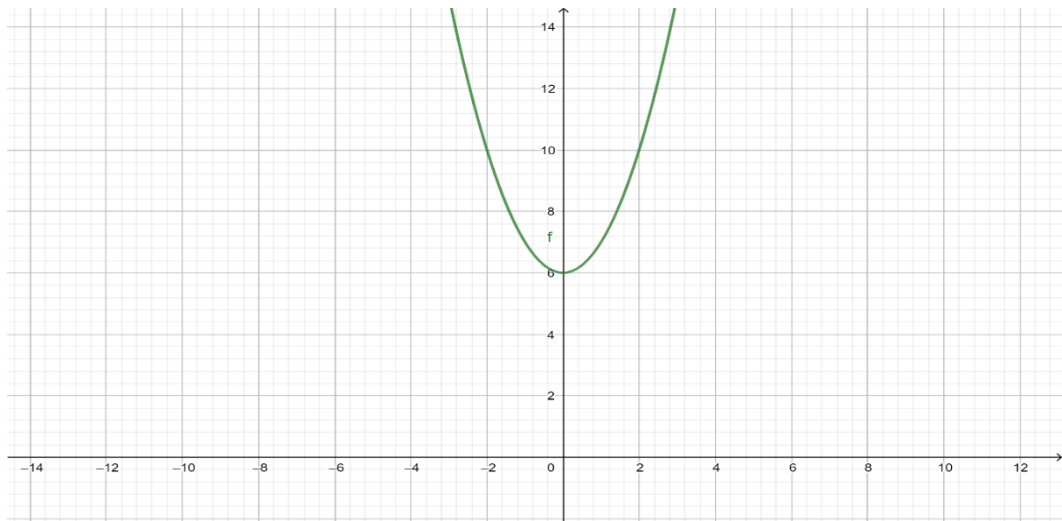




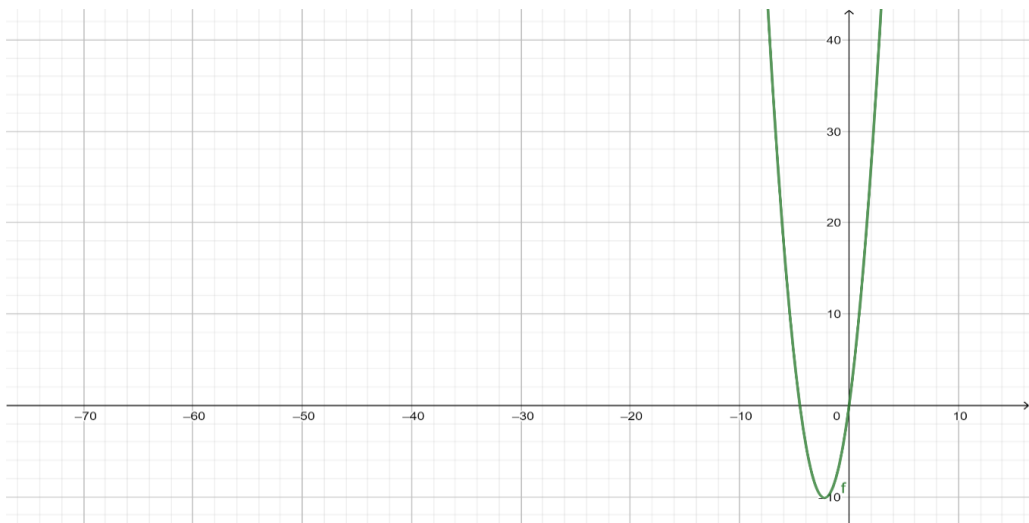
b)



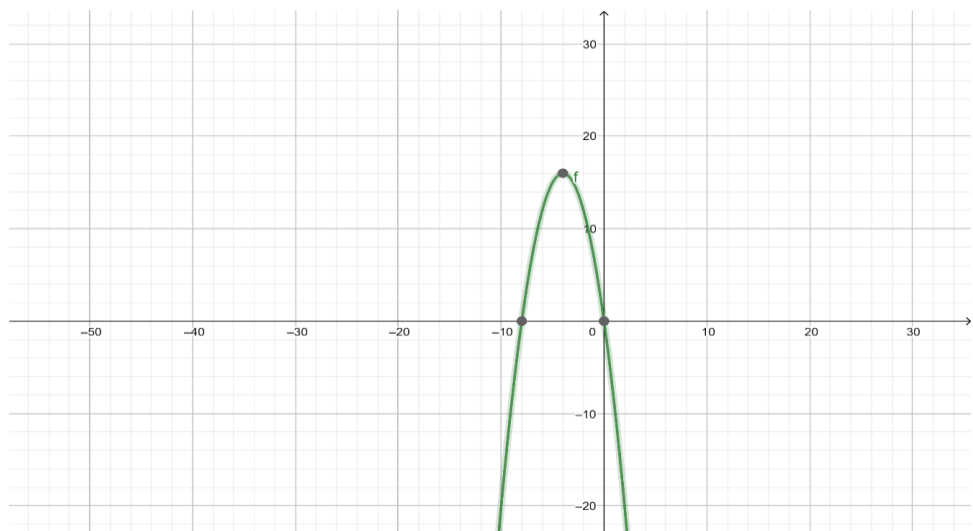
c)



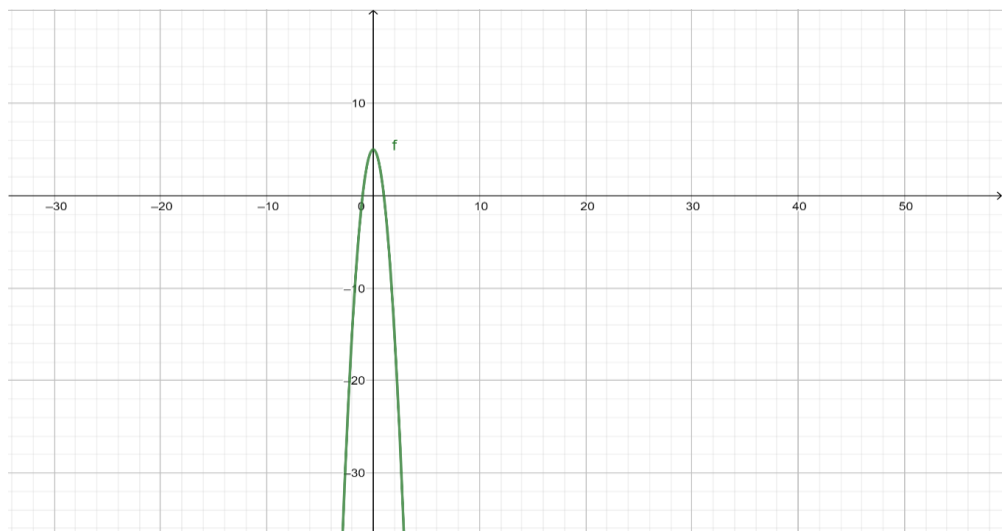
d)



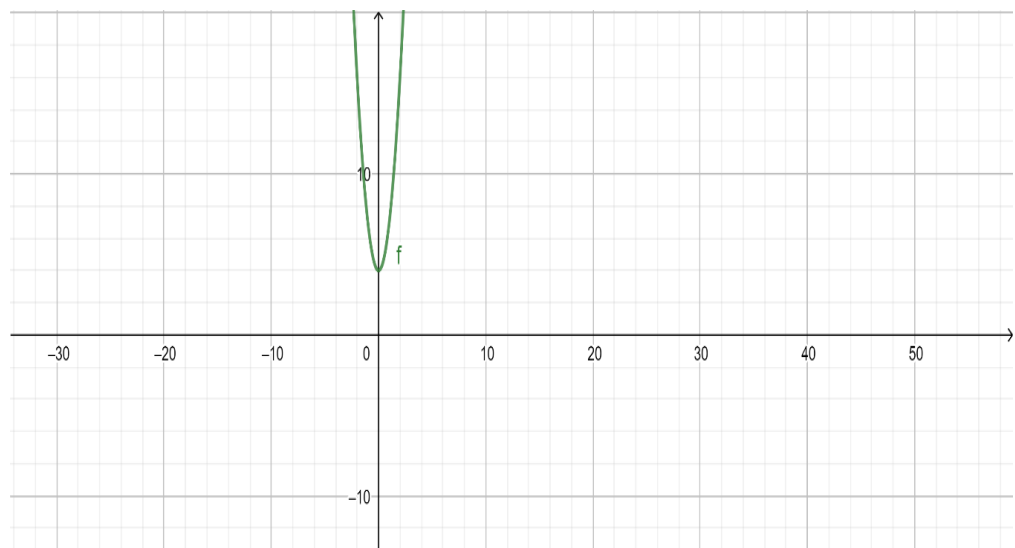
e)



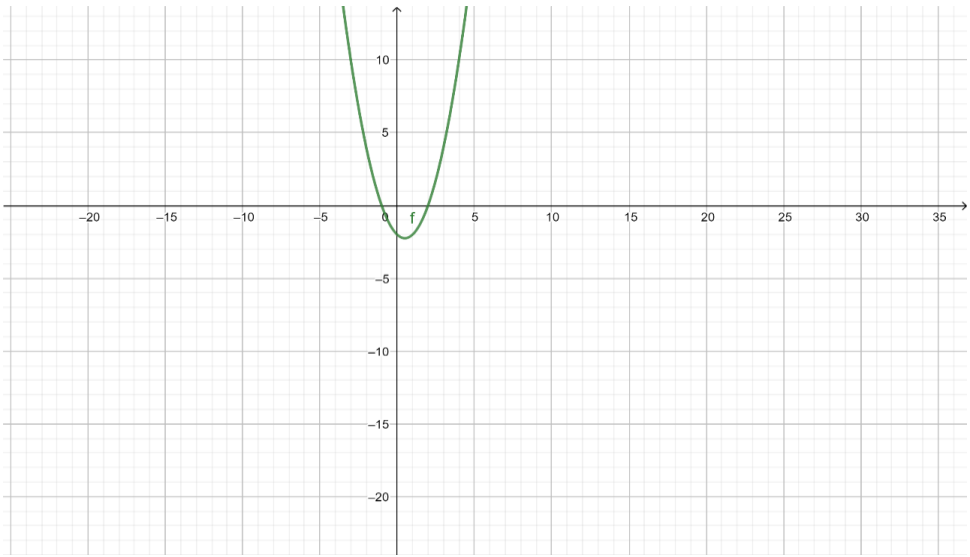
f)



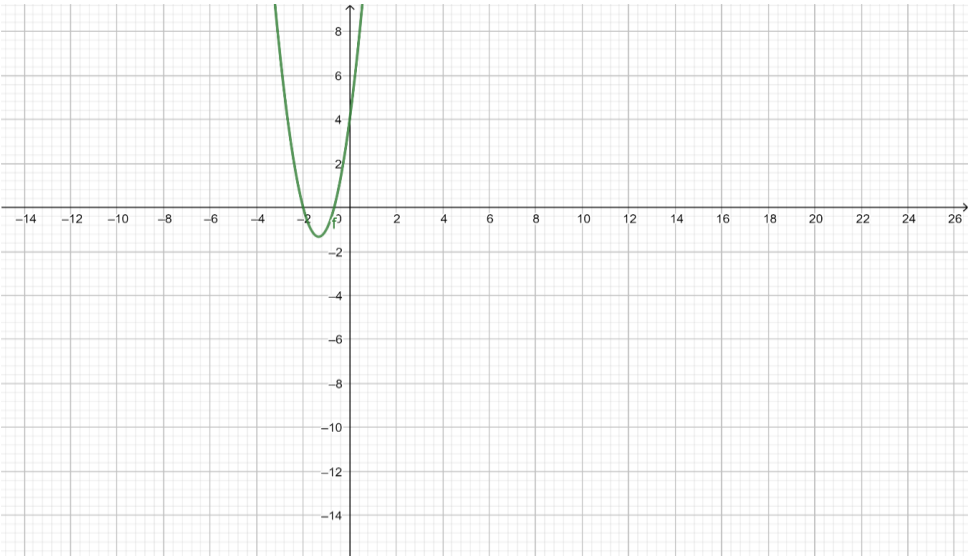
g)



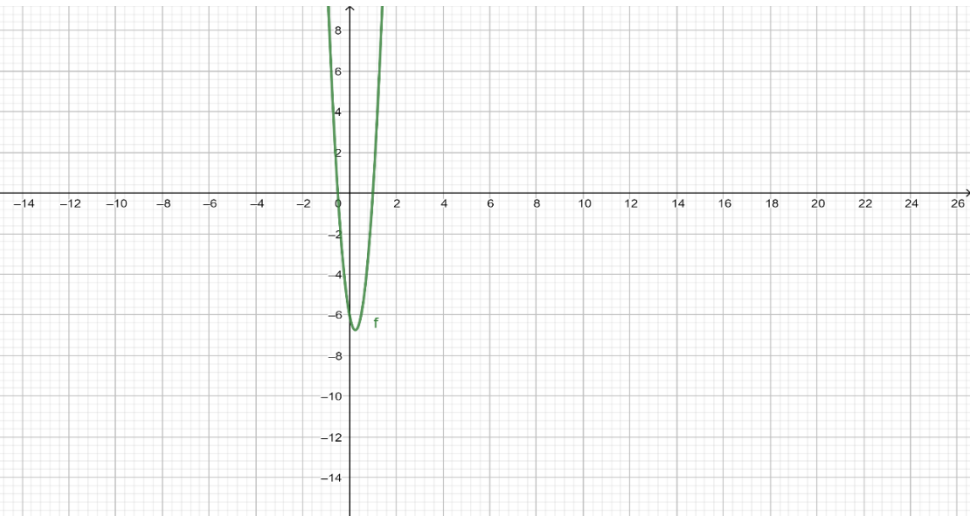
h)



i)



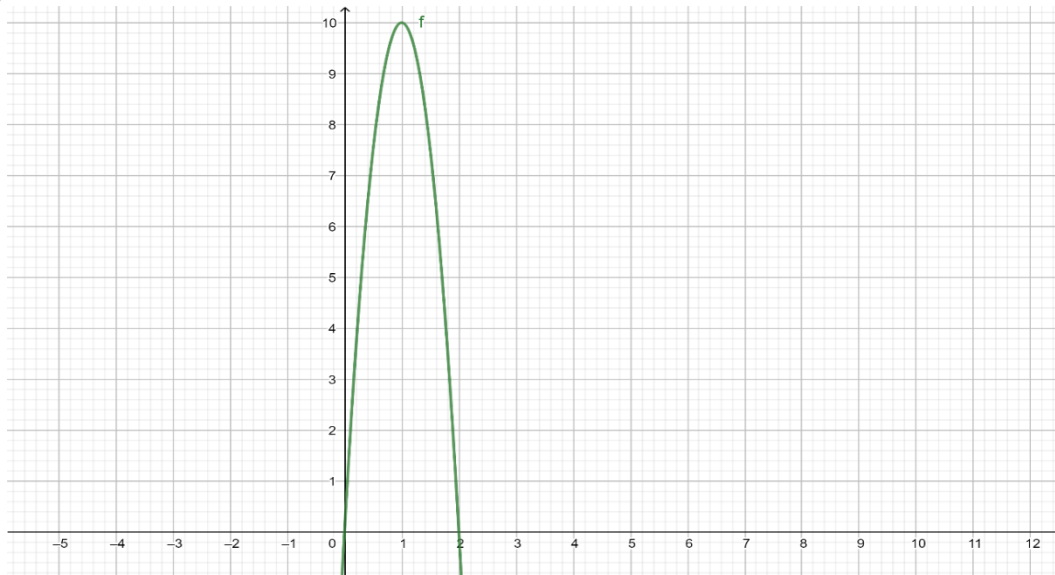
j)



2. c)

3. I.

a)



a) Después de un segundo

b) Altura cero (está en el suelo)

II. Ancho 3 metros, Largo 6 metros.

## 7. Bibliografía Básica.

Cuellar, J.A. (2012). *Matemáticas II*. México: Mc. Graw-Hill Education.

Larson, R. y Hostetler, R. (2006). *Álgebra*. México: Publicaciones Cultural.

Novack, J. (1988). *Constructivismo humano: un consenso emergente*. Enseñanza de las Ciencias.

Ortiz Campos, F. J. (1991). *Matemáticas-2, Geometría y Trigonometría*. México: Publicaciones Cultural.

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Cengage

Matemáticas II	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones.
Unidad II	

### **Bibliografía Virtual. Sitios consultados.**

UNAM (CCH). (2016). Programa de estudio. Área de Matemáticas I-IV. Recuperado de:

<https://www.cch.unam.mx/sites/default/files/programas2016/MATEMATICAS-I-IV.pdf>

Khan Academy (2020). Características de las funciones Cuadráticas. Obtenido de :

<https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:quadratic-functions-equations/x2f8bb11595b61c86:quadratic-forms-features/e/rewriting-expressions-to-reveal-information>. Recuperado el 10 de febrero de 2020.

Alonso, J. García, M. (2016). Funciones lineales y Funciones Cuadráticas. Proyecto Descartes. Obtenido de:

[https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales\\_didacticos/EDAD\\_3eso\\_funciones\\_lineales-JS-LOMCE/index.htm](https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_3eso_funciones_lineales-JS-LOMCE/index.htm). Recuperado el 10 de febrero de 2020.

### Propósitos de la unidad:

Al finalizar el alumno:

Comprenderá algunos conceptos y relaciones geométricas, obtenidos empíricamente a través de construcciones con regla y compás. Aplicará los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas geométricos.

### 1. Presentación de la unidad III.

Esta unidad se ha diseñado partiendo de un breve bosquejo histórico de la Geometría, así como la mención de algunas etapas que han contribuido en forma decisiva a su evolución.

El contenido se desarrolla a través de secuencias didácticas<sup>1</sup>, Su diseño es una de las principales tareas del profesor contemporáneo, independientemente de la interpretación que del aprendizaje tenga. Con el propósito de posibilitar un mejor aprendizaje, o sea, un aprendizaje que fuese adquiriendo un significado propio en los procesos prácticos cercanos a los estudiantes, con vistas a alcanzar los objetivos actitudinales, conceptuales y procedimentales del área de matemáticas del CCH y, específicamente, aquellos que atañen a esta unidad temática.

Más aún, nuestra propuesta agrega la computadora como uno de sus recursos esenciales, dado que con los medios de representación que ofrece, el estudiante tiene la posibilidad de construir y re-construir el conocimiento matemático "viendo" y "manipulando", literalmente, sus construcciones, las de sus compañeros, así como la de los matemáticos que lo han ido estableciendo en la historia de las matemáticas.

El desarrollo de la unidad se lleva a cabo con 8 secuencias didácticas e incluye: una evaluación diagnóstica, con la cual se pretende conocer que tanto recuerda el alumno de la Geometría, una autoevaluación, materiales de apoyo diversos con la respuesta de cada uno de ellos y la bibliografía utilizada en su elaboración.

### 2. Bosquejo Histórico y evolución de la Geometría.



A principios del siglo III A. C., en Egipto, el faraón helenista Ptolomeo I Soter (323-285 A. C.) deseando modernizar los tratados de Geometría existentes, encomendó a Euclides escribir una compilación completa. El resultado fueron los trece volúmenes de *Los Elementos*, a los que posteriormente se añadieron dos más atribuidos a Hipsicles de Alejandría. Se cuenta que Ptolomeo preguntó a Euclides si no había una manera más simple de aprender Geometría que estudiar los *Elementos*, y a lo que el autor respondió: "No existe un camino real hacia la Geometría".

<sup>1</sup> Cf. Anexo 1.

La obra de Euclides no es totalmente original, pues muchos de sus libros están basados en geómetras anteriores. Euclides destacó hacia el 300 A. C., en Alejandría y es junto a Arquímedes y Apolonio, posteriores a él, uno de los principales matemáticos de la antigüedad y también uno de los mayores de todos los tiempos. El nombre de Euclides está indisolublemente ligado a la Geometría, al escribir su famosa obra Los Elementos, prototipo de esta rama de las matemáticas. Sin embargo, pocos de los teoremas que aparecen en sus textos son propios.



Euclides (326-265 a.C.)



Lo que Euclides hizo en realidad fue reunir en una sola obra todos los conocimientos acumulados desde la época de Tales. Aunque la mayoría de los tratados versan sobre Geometría, también prestó atención a problemas de proporciones y a lo que hoy conocemos como teoría de números.

En los tiempos remotos la Geometría era una ciencia práctica y empírica, es decir, una ciencia basada en experiencias y observaciones del hombre. Las teorías generales, los postulados y las demostraciones son muy posteriores. No se conoce por completo la historia de la Geometría, sin embargo podemos mencionar las siguientes etapas que han contribuido en forma decisiva a su evolución:



Historia de la Geometría

1. Los procedimientos empíricos de los antiguos babilonios y egipcios.
2. El amor de los griegos al saber por el saber y su empleo en las construcciones clásicas.
3. La sistematización de la Geometría hecha por Euclides.
4. La continuación de la obra de Euclides durante la edad de oro de Grecia.
5. La contribución de los matemáticos hindúes, árabes y persas durante la edad media.
6. El despertar de Europa con su creciente número de universidades, el invento de la imprenta y el florecimiento de todas las ramas del conocimiento.
7. La introducción de sistemas de coordenadas en el siglo XVII.
8. La aplicación del Álgebra (y también del Cálculo) a la Geometría en el siglo XVIII.
9. El reconocimiento de los puntos y rectas como elementos no definidos (abstractos), lo cual da lugar, en el siglo XIX, a muchas Geometrías diferentes.
10. El énfasis dado, en pleno siglo XX, a la generalización, al concepto aritmético y al fundamento axiomático.

En cada etapa del desarrollo de la Geometría se encuentran usos y aplicaciones de ésta a las matemáticas de su tiempo. También se ve la influencia que ejercen sobre la Geometría otros conceptos matemáticos y culturales.

### 3. Actividades de aprendizaje.

Estas se llevarán a cabo tomando como base los contenidos (temática) de la unidad 3, a través de *secuencias didácticas*, mismas que incluyen los aprendizajes, así como el inicio, desarrollo y cierre de la misma.

### 4. Puesta en escena de la unidad III. Elementos Básicos de Geometría Plana.

La *unidad didáctica* que se presenta a continuación ha sido diseñada para que los estudiantes logren un aprendizaje significativo de los contenidos actitudinales, conceptuales y procedimentales de la *Unidad Temática 3*, del curso de Matemáticas II, con vistas a lograr los aprendizajes de la misma. Esta unidad didáctica se ha estructurado conforme a las siguientes secuencias didácticas.

#### ***Secuencia didáctica 1. Elementos básicos de Geometría Plana.***

**Aprendizajes:** A través de una pintura, los estudiantes reconocen algunos elementos básicos que determinan una figura Geometría.

#### **Inicio.**

Las matemáticas y el arte. Observa la pintura de estilo abstracta del pintor ruso Wassily Kandinsky, expuesta en la figura 1, y contesta el cuestionario 1.



Figura 1. Cuadro pintado en óleo, titulado: Amarillo, Rojo y Azul.

#### **Cuestionario 1.**

**En base a la figura 1, contesta las siguientes preguntas.**



1. ¿Qué elementos básicos de Geometría plana puedes identificar en esta pintura?

---

2. ¿Qué figuras Geométricas puedes identificar en esta pintura?

---

3. De acuerdo al número de lados se llaman: \_\_\_\_\_

---

4. ¿Qué elementos podemos encontrar en un polígono?

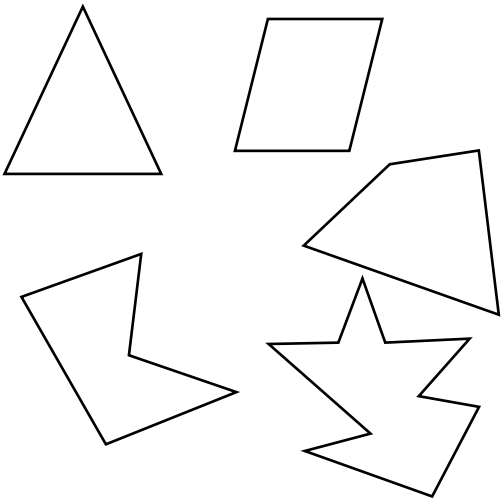
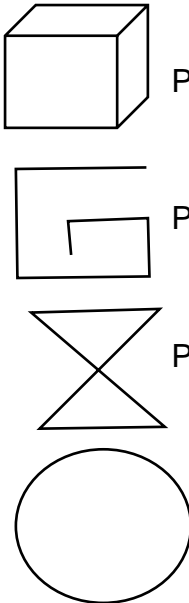
---

### Desarrollo.

El estudio de la Geometría para un estudiante de bachillerato, no es nuevo, desde la educación básica, ha estado presente; por ello seguramente puede identificar con facilidad muchas figuras geométricas por su nombre. Recordemos que algunas figuras geométricas se llaman polígonos.

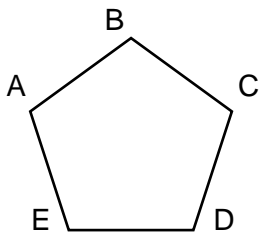
Un polígono es una figura plana cerrada y simple, que está formada completamente por segmentos.

### Por ejemplo:

Son polígonos	No son polígonos
	 <p>Porque no es plana.</p> <p>Porque no es cerrada.</p> <p>Porque no es simple.</p> <p>Porque no está formada Por segmentos.</p>

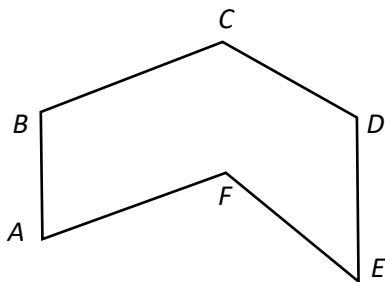
**Actividad 1.** Observa los siguientes polígonos y contesta lo que se te pide.

I. En base al siguiente polígono contesta lo que se te pide.



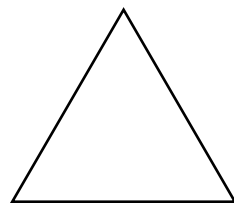
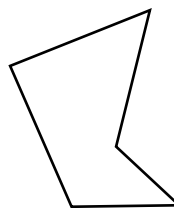
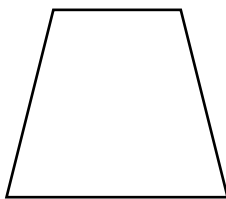
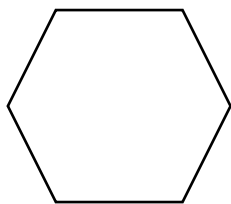
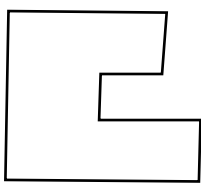
- ¿Cuáles son los lados? \_\_\_\_\_
- ¿Cuáles son los Vértices? \_\_\_\_\_
- ¿Cuáles son las diagonales? \_\_\_\_\_
- ¿Cuáles son los ángulos interiores? \_\_\_\_\_

II. Escribe dentro de cada paréntesis una **L** si el segmento es un lado y una **D**, si es una diagonal en el polígono **ABCDEF** (traza los segmentos que sean necesarios).



- |                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| a) $\overline{BC}$ ( ) | e) $\overline{EC}$ ( ) |
| b) $\overline{FD}$ ( ) | f) $\overline{AD}$ ( ) |
| c) $\overline{AF}$ ( ) | g) $\overline{AE}$ ( ) |
| d) $\overline{ED}$ ( ) | h) $\overline{CD}$ ( ) |

III. Escribe el nombre de cada polígono, de acuerdo con el número de lados que tiene.



\_\_\_\_\_

**Cierre.**

El profesor revisa conjuntamente con el grupo, los conceptos básicos de la geometría, tales como: punto, línea recta, segmento, semirrecta, ángulo, punto de intersección, etcétera.

## Secuencia didáctica 2. Construcciones con regla y compás.

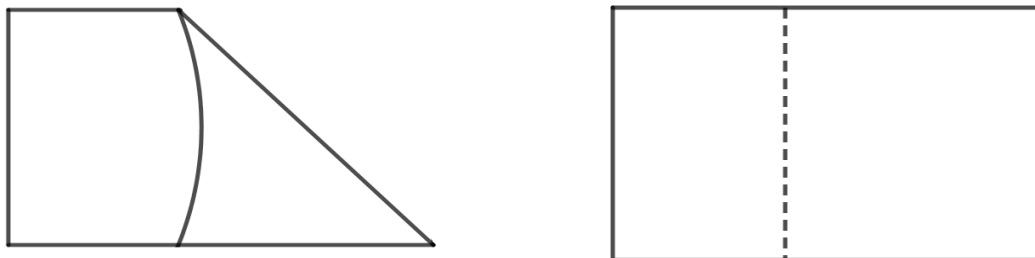
**Aprendizajes:** Mediante las construcciones con regla y compás los estudiantes comprenden los conceptos: segmento de recta, punto medio, líneas paralelas, líneas perpendiculares, mediatriz, ángulo y bisectriz, entre otras.

### Inicio.

En la antigüedad, hacia el año 2000 A. C., con la revolución urbana en Mesopotamia y Egipto, se hizo muy común el uso de una cuerda con 13 nudos, igualmente espaciados uno de otro. Se utilizó para hacer trazos, que en la actualidad realizamos con regla y compás. La misma cuerda era empleada para determinar el ángulo recto en las esquinas de las pirámides de base cuadrada. En la vida diaria hacemos muchas cosas que tienen que ver con la geometría y lo hacemos, a veces, sin saberlo. Toda la gente sabe y usa la geometría, pero se da poca cuenta de ello. Veamos algunos ejemplos:

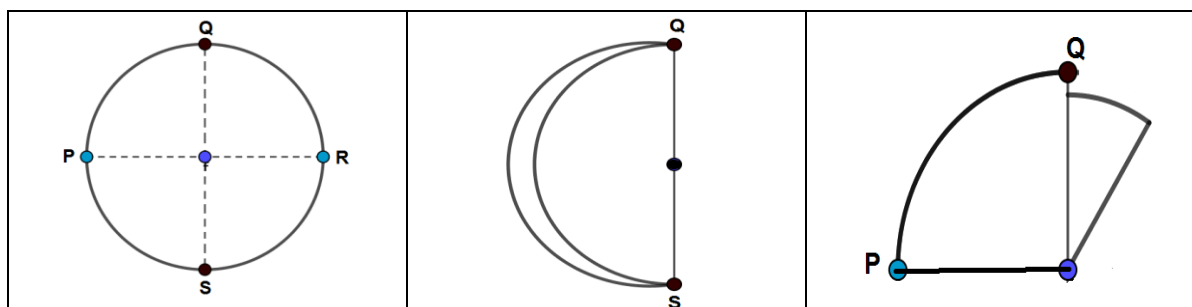
1. Una persona quiere partir un hilo en dos partes iguales ¿qué hace? No usa la regla, sino que hace coincidir los extremos del hilo, estira y luego corta.

2. Otro ejemplo es lo que hacemos para partir una hoja de papel a la mitad. A veces queremos tener un pedazo cuadrado de papel pero lo que tenemos es regularmente una hoja rectangular: lo que hacemos es doblar como se ve en el dibujo:



Cosas como las anteriores las hacemos frecuentemente y sin pensar mucho para hacerlo.

Imaginemos ahora que tienes un círculo de papel. Lo doblas a la mitad y lo vuelves a doblar a la mitad. Los dobleces han quedado marcados, nosotros pusimos líneas punteadas.



- a) ¿Qué sabes del punto donde se cruzan los dobleces? \_\_\_\_\_.
- b) Usa tú regla y traza los segmentos que unan P con Q, el que une Q con R, el que une R con S, y finalmente el que une S con P. Al hacer lo anterior has dibujado una figura geométrica llamada: \_\_\_\_\_.
- c) Fíjate en las líneas punteadas, ¿son perpendiculares? \_\_\_\_\_.
- d) ¿Son ejes de simetría del círculo? \_\_\_\_\_.

### Desarrollo.

Ya hemos visto que paralelas y perpendiculares se usan en casi todos los objetos que el hombre construye. Para diseñar estos objetos, construirlos, dibujar planos y croquis, los arquitectos, decoradores, ingenieros, entre otros, necesitan a menudo trazar rectas paralelas y perpendiculares; desde luego, esto lo hacen fácilmente usando las escuadras; pero imaginemos por un momento a un arquitecto dibujar los planos de esos grandes edificios, y supongamos que no cuenta con escuadras. ¿Podría el con exactitud trazar paralelas y perpendiculares? \_\_\_\_\_, y para ello utilizaría algunas propiedades geométricas interesantes que debes conocer.

Las construcciones se harán con regla y compás, dichos instrumentos se usarán según las siguientes indicaciones:

- Con la regla se trazarán líneas rectas utilizando uno sólo de sus bordes y en caso de que tenga escala se prescindirá de ella.
- El compás se utilizará para trazar circunferencias, arcos de circunferencia y transportar distancias.

Algunas construcciones se pueden efectuar por varios procedimientos igualmente válidos, además *todas las construcciones se pueden fundamentar con un razonamiento deductivo pero para efectos prácticos sólo se dará el procedimiento.*

### Actividad 1.

En la figura 2, hay dos circunferencias de igual tamaño, que se cortan en los puntos P y Q. Traza con una regla la recta que pasa por el punto P y el punto Q.

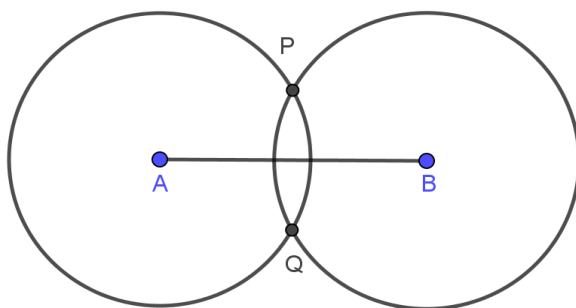


Figura 2. Circunferencias iguales.

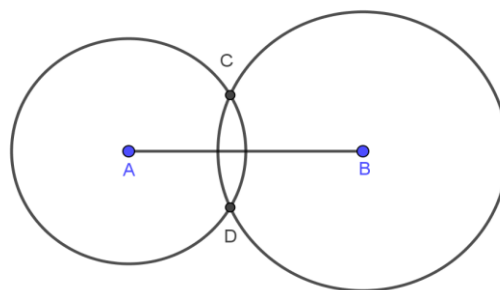


Figura 3. Circunferencias distintas.

En la figura 3, hay dos circunferencias de distinto tamaño, que se cortan en los puntos C y D. Traza la recta que pasa por el punto C y por el punto D.

Las rectas que trazaste cortan al punto AB en un punto, márcalo con la letra E en la figura 2, y con la letra F en la figura 3.

a) ¿Están los puntos E y F a la mitad del segmento AB? \_\_\_\_\_. Veamos, en la figura 2, con tu compás toma la distancia del punto A al punto E, coloca esta distancia sobre una regla graduada y toma su lectura: \_\_\_\_\_. Ahora mide la distancia también con el compás del punto E al punto B, coloca esta distancia sobre una regla graduada y toma su lectura: \_\_\_\_\_.

b) ¿Cómo son las distancias de A a E y de E a B? \_\_\_\_\_.

c) En la figura 3: distancia de A a F: \_\_\_\_\_; distancia de F a B: \_\_\_\_\_.  
¿Son iguales la distancia de A a F y la distancia de F a B? \_\_\_\_\_.

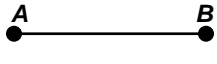

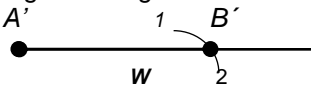
Te fijas que en la figura 2, E es el punto medio del segmento AB; y en la figura 3, F no es el punto medio del segmento.

d) ¿En la figura 2, la recta que pasa por los puntos P y Q es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y B? \_\_\_\_\_. ¿Y en la figura 3, la recta que pasa por los puntos C y D es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y B? \_\_\_\_\_.

e) En ambos casos hemos trazado la perpendicular a la recta AB. ¿Qué diferencias encuentras? \_\_\_\_\_.

### Cierre.

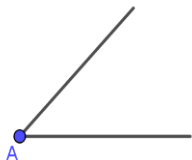
Con el apoyo de tu profesor realiza en tu cuaderno las siguientes construcciones con regla y compás, haciendo uso de las indicaciones (pasos) que para cada construcción se presentan.

I. Construcción de un segmento de recta igual a un segmento dado.		
1. Sea $AB$ un segmento.	2. Trazas una recta llamada ( $RT$ ) y localizas en ella un punto $A'$ .	3. Toma con el compás la distancia $AB$ . Con centro en $A'$ y radio $AB$ traza el arco 1-2. El arco 1-2 corta a la $RT$ en el punto $B'$ . Obteniendo así un segmento de recta igual al segmento $AB$ .
		

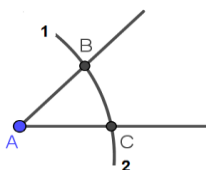
<sup>2</sup> La medición de los ángulos en ambas figuras realízalos con un transportador.

## II. Construcción de un ángulo igual a un ángulo dado.

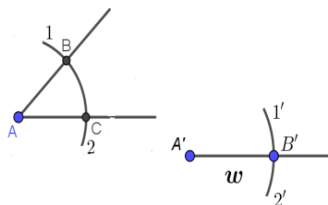
1. Sea  $A$ , el ángulo dado.



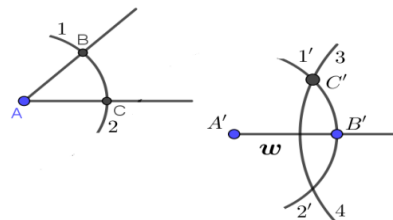
2. Con centro en  $A$  y un radio conveniente, trazar el arco 1-2, que corte a los lados del ángulo, en los puntos  $B$  y  $C$ .



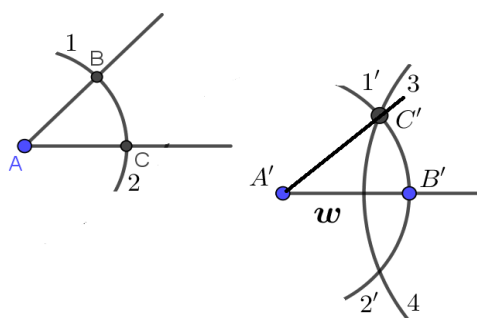
3. En la recta  $w$  localiza un punto  $A'$ , con centro en éste y radio  $AB$  traza el arco  $1'-2'$  que corte a  $w$  en el punto  $B'$ .



4. Con radio  $BC$  y centro en  $B'$ , traza el arco 3-4 que corta al arco  $1'-2'$  en el punto  $C'$ .

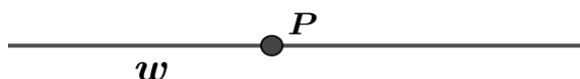


5. Traza la línea  $A'C'$ .  $B'A'C'$  es el ángulo deseado.

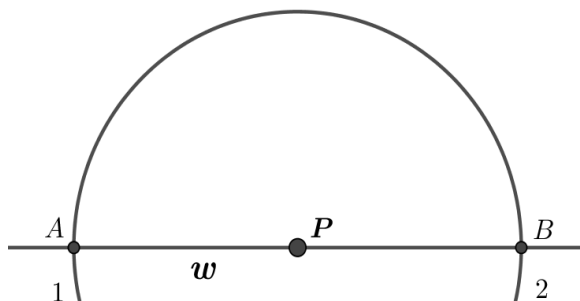


## III. Construcción de una perpendicular a una recta dada en un punto dado de ésta.

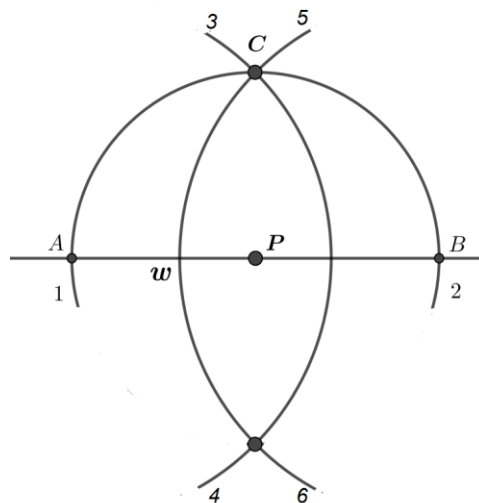
1. Sea  $w$  la recta y  $P$  un punto de ella.



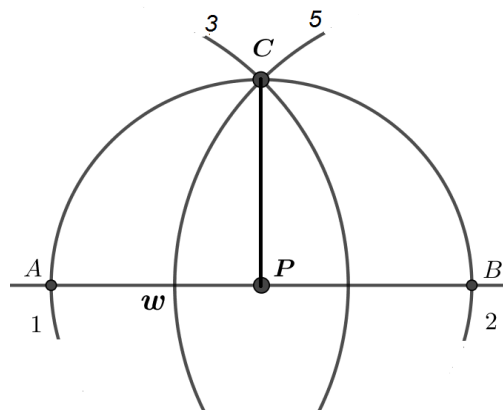
2. Con centro en  $P$  y un radio conveniente, traza el arco 1-2 que corte a  $w$  en los puntos  $A$  y  $B$ .



3. Con centro en  $A$  y un radio mayor que la mitad de  $AB$ , traza el arco 3-4, con centro en  $B$  y con el mismo radio traza el arco 5-6 que corte al arco 3-4 en el punto  $C$ .



4. Traza la línea que pasa por  $P$  y  $C$ . Siendo  $PC$  perpendicular a la recta  $w$  en el punto  $P$ .

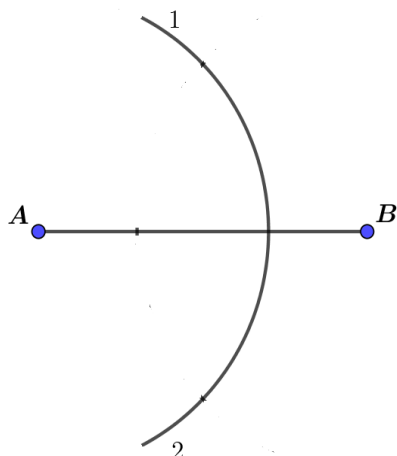


**IV. Construcción del punto medio de un segmento. (Construir la perpendicular – mediatriz- de un segmento).**

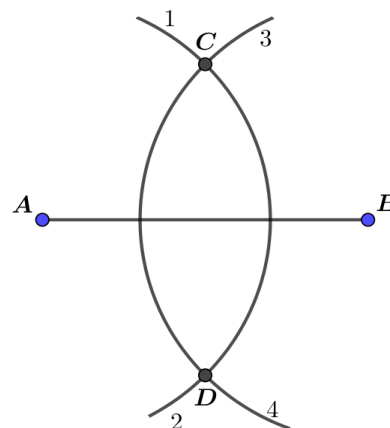
1. Sea  $AB$  el segmento de recta del que se quiere determinar su punto medio.



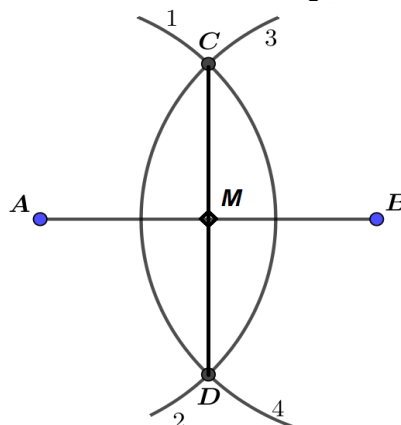
2. Con centro en  $A$  y radio mayor que la mitad de  $AB$ , trazar el arco 1-2.



3. Con centro en  $B$  y el mismo radio anterior, traza el arco 3-4, tomando en cuenta que éste arco corta al arco 1-2 en los puntos  $C$  y  $D$ .

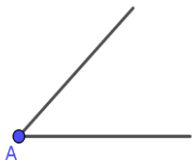


4. Traza la línea que pasa por  $C$  y  $D$ . La recta  $CD$  corta al segmento  $AB$  en el punto  $M$  que equidista de los extremos  $A$  y  $B$ , por lo tanto  $M$  es el punto medio del segmento  $AB$ . Obsérvese que  $CD$  es la mediatriz del segmento  $AB$ .

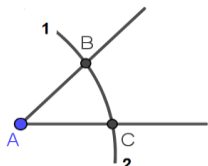


### V. Construcción de la bisectriz de un ángulo dado.

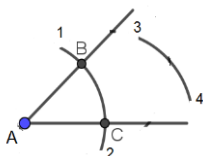
1. Sea A el ángulo dado.



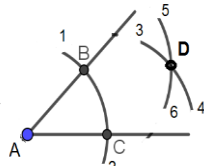
2. Con centro en A y un radio conveniente, trazar el arco 1-2, que corte a los lados del ángulo, en los puntos B y C.



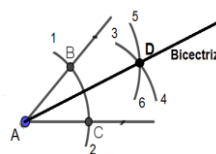
3. Con centro en B y radio mayor que la mitad de BC, trazar el arco 3-4.



4. Con centro en C y el mismo radio anterior, trazar el arco 5-6. El arco 5-6 y 3-4 se cortan en el punto D.



5. Unir los puntos A y D. Siendo AD la bisectriz del ángulo A.

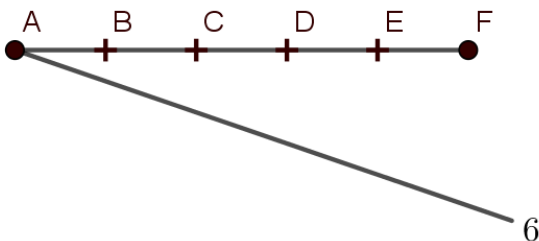


### VI. Construcción de la división de un segmento de recta en $n$ partes iguales.

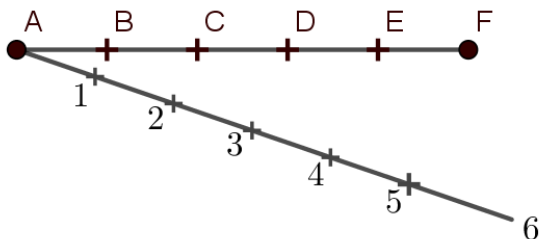
1. Sea el segmento de recta AF y  $n$  el número de partes en que debe dividirse. En el ejemplo  $n=5$ .



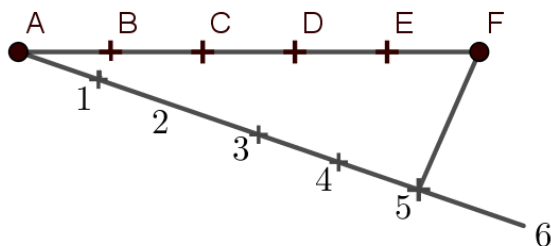
2. Traza una recta que toque uno de los extremos del segmento (en el ejemplo el extremo es A) que forme con AF un ángulo cualquiera de preferencia agudo.



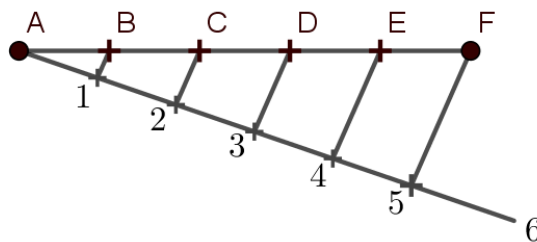
3. A partir del vértice A y sobre la recta A-6, construir  $n$  segmentos iguales, consecutivos y determinar los puntos 1, 2, 3, 4, 5, etcétera.



4. Unir el último punto encontrado (en el ejemplo es 5) con el otro extremo del segmento AF (en el ejemplo es F).



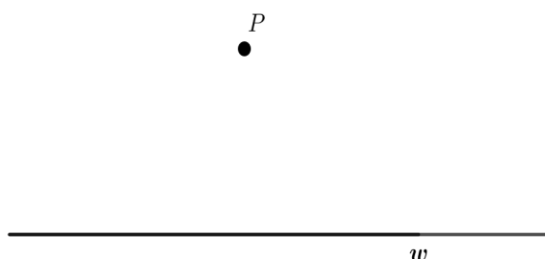
5. Trazar paralelas a la recta de los puntos extremos (en el ejemplo es 5-F), por los puntos 1, 2, 3, 4, ... de modo que corten al segmento AF y determinar así los puntos B, C, D, E que dividen al segmento AF en  $n$  partes iguales.



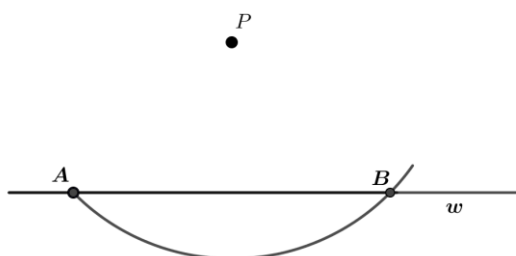


## VII. Construcción de la perpendicular a una recta que pase por un punto fuera de ella.

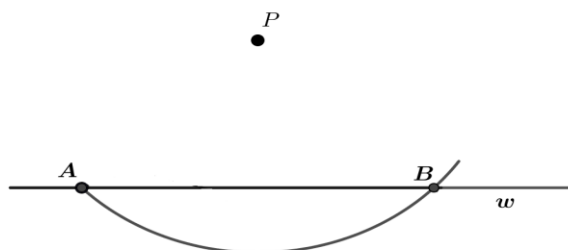
1. Sea  $w$  la recta y  $P$  (exterior) un punto fuera de ella.



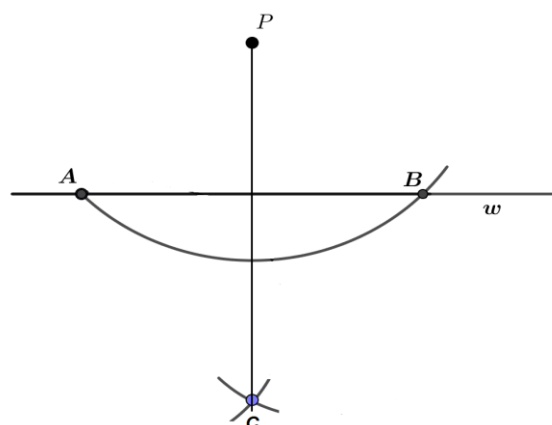
2. Con centro en  $P$  y un radio conveniente, traza un el arco que corte a  $w$  en los puntos  $A$  y  $B$ .



3. Con centro en  $A$  y un radio mayor que la mitad de  $AB$ , traza un arco, con centro en  $B$  y con el mismo radio traza otro arco que corte al anterior en el punto, por ejemplo  $C$ .



4. Traza la línea que pasa por  $P$  y  $C$ . Siendo  $PC$  perpendicular a la recta  $w$  en el punto  $P$ .



Perpendicular a una recta  
Por un punto exterior

Para esta última construcción, apóyate en el código QR de la izquierda. Esta construcción se utilizará más adelante.

### Secuencia didáctica 3. Ángulos.

**Aprendizajes:** El alumno clasifica los ángulos por su medida y su relación con otros.

#### Inicio.

**Actividad 1. (Extraclase):** Visita los siguientes códigos QR. Ángulos 1 y 2, para conocer la clasificación de los ángulos por su medida. Asimismo, por su relación que guardan con otros ángulos. Una vez que hayas entrado a la dirección Web, dale un click a la ventana clasificación de los ángulos (ver figura 4), y saca una copia con la información relativa al tema o cópiala en tu cuaderno ya que ésta la vas a usar en la siguiente actividad que realizaras en el salón de clase.

	<p>Instrucciones:</p> <p>En el menú inicio, elige la opción Octavo (vea la Figura 4). Enseguida selecciona la ventana clasificación de los ángulos, ahí encontraras la información pertinente del tema.</p> <div style="text-align: right;">   Ángulos 1 </div> <div style="text-align: right;">   Ángulos 2 </div>
--	---

**Figura 4. Escenario ángulos.**

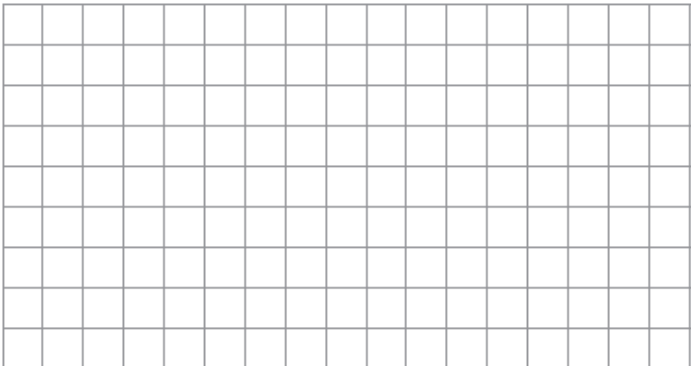
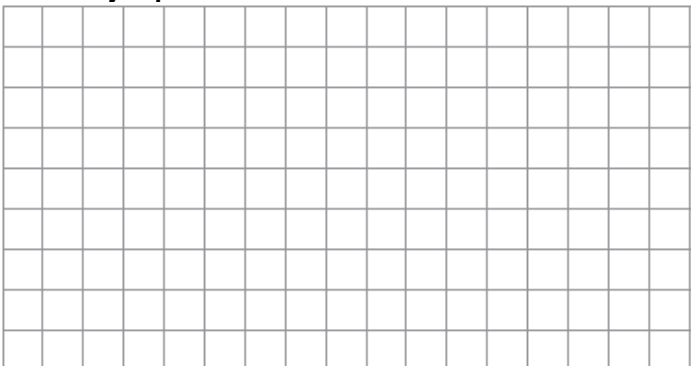
#### Desarrollo.

**Actividad 2.** A partir de lo leído y de la información extraída en los códigos QR, anteriores, realiza la actividad que se presenta a continuación. Escribe en forma concisa la definición que se te pide en cada uno de los incisos siguientes.

**I. CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS SEGÚN SU MEDIDA.**

- ¿Qué es un ángulo y su notación? \_\_\_\_\_.
- Ángulo agudo: \_\_\_\_\_.
- Ángulo recto: \_\_\_\_\_.
- Ángulo obtuso: \_\_\_\_\_.
- Ángulo llano: \_\_\_\_\_.
- Ángulo convexo: \_\_\_\_\_.
- Ángulo cóncavo: \_\_\_\_\_.

**II. CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS SEGÚN LA SUMA DE SUS MEDIDAS.**

<p><b>ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS:</b></p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>_____</p>	<p>Haz un ejemplo.</p> 
<p><b>ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS:</b></p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>_____</p>	<p>Haz un ejemplo.</p> 

**III. CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS SEGÚN SU POSICIÓN**

---

---

---

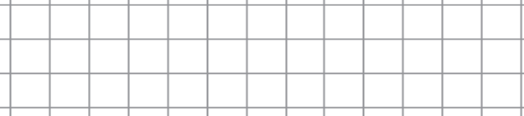
---

---

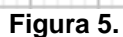
---

---

---



**Actividad 3.** Echa mano de lo aprendido en la actividad anterior, y toma como referencia la figura 2 para contestar las siguientes preguntas.



---

---

#### **Secuencia didáctica 4. Ángulos determinados por dos rectas paralelas y una secante.**

**Aprendizaje 1:** Conoce e identifica los tipos de ángulos que se forman entre dos rectas cortadas por una transversal.

**Aprendizaje 2:** Concluye que en el caso que dos rectas paralelas sean cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes e inversamente.

#### **Inicio.**

**Actividad 4. (Extraclase):** Visita los siguientes códigos QR, expuestos a la derecha de la figura 6, para conocer las relaciones que existen entre pares de ángulos que se forman cuando dos rectas paralelas son cortadas por una recta secante, y sus propiedades. Por otro lado, una vez que hayas entrado a los códigos entra al menú clasificación de los ángulos según su posición (ver Figura 6), y saca una copia con la información relativa al tema o cópiala en tu cuaderno ya que esta clasificación la vas a usar en la siguiente actividad que realizaras en el salón de clase.



**Figura 6.**

En el menú inicio, elige la opción Octavo (vea la imagen). Enseguida selecciona la ventana clasificación de los ángulos según su posición.



Ángulos SSP.



Ángulos.

### Desarrollo.

**Actividad 5.** Echa mano de lo aprendido en la actividad anterior y de la información que buscaste en los códigos QR, para que realices los siguientes incisos.

- a. Construcción del escenario: con tu regla dibuja una recta (de preferencia horizontal); enseguida tracen una recta, que sea paralela a la anterior y por último otra recta que corte a las dos anteriores (recta transversal o secante), como se muestra en la figura 7. Se puede hacer con GeoGebra.

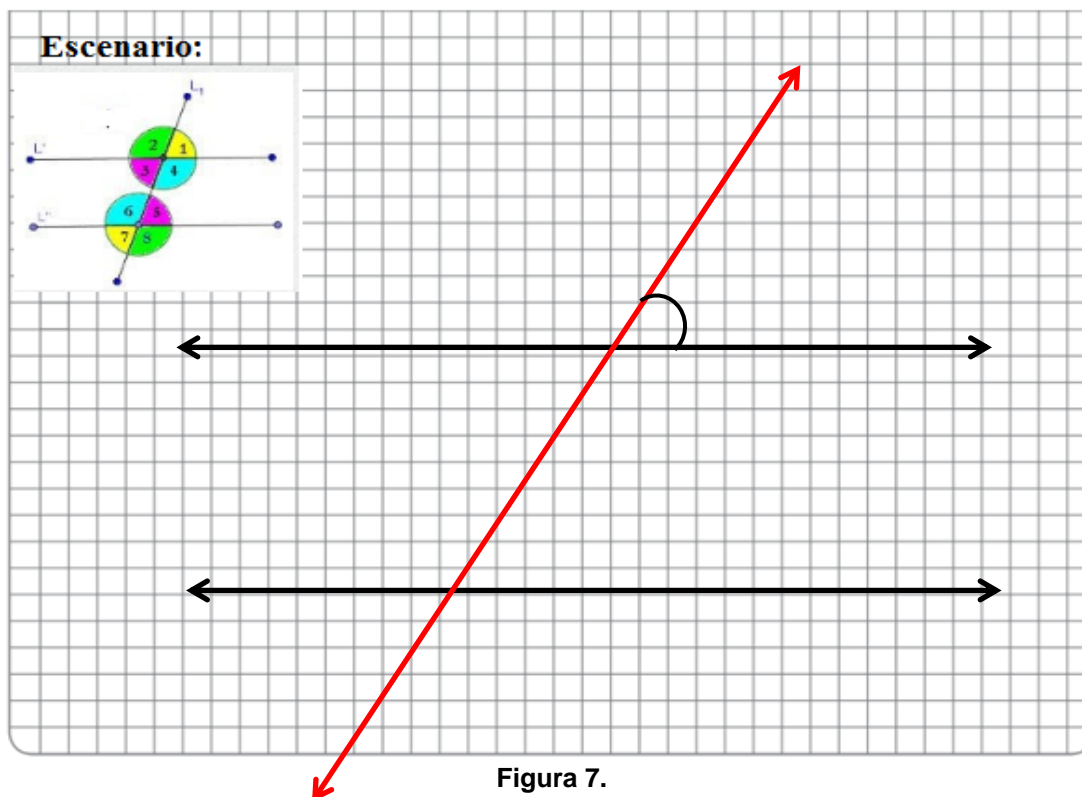


Figura 7.

- b. ¿Cuántos ángulos se forman \_\_\_\_\_? Identifícalos con una letra minúscula (usa la siguiente notación de ángulo ( $\angle$ )).
- c. Identifiquen en la figura anterior, los ángulos según su posición que se te piden a continuación:
- Ángulos internos: \_\_\_\_\_.
  - Ángulos Externos: \_\_\_\_\_.
  - Un par de ángulos alternos internos: \_\_\_\_\_.
  - Un par de ángulos alternos externos: \_\_\_\_\_.

- Dos pares de ángulos correspondientes: \_\_\_\_\_.
  - Dos pares de ángulos opuestos por el vértice: \_\_\_\_\_.
  - Dos pares de ángulos colaterales internos: \_\_\_\_\_.
  - Dos pares de ángulos colaterales externos: \_\_\_\_\_.
- d. Usa el transportador para determinar cómo son en magnitud iguales (congruentes) o distintos para los siguientes pares de ángulos:
- Ángulos alternos internos: \_\_\_\_\_
  - Ángulos alternos externos: \_\_\_\_\_
  - Ángulos correspondientes: \_\_\_\_\_
  - Ángulos opuestos por el vértice: \_\_\_\_\_
- e. Para los pares que son distintos, determina la relación que hay entre ellos. Escríbela a continuación.

**Escenario:**



**Cierre.**

Aplica los conceptos anteriores y realiza lo que se te pide en las actividades 6 y 7.

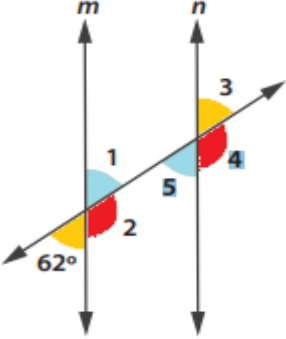
**Actividad 6.** Observa la figura 8 y siguiendo la numeración que aparece en la misma une con una flecha las columnas I Y II, según corresponda.

Figura 8	Columna I	Columna II
	Ángulos correspondientes	• $\angle 3$ y $\angle 5$
	Ángulos alternos internos	• $\angle 1$ y $\angle 2$
	Ángulos alternos externos	• $\angle 3$ y $\angle 4$
	Ángulos opuestos por el vértice	• $\angle 1$ y $\angle 5$
	Ángulos suplementarios	• $\angle 6$ y $\angle 5$

**Actividad 7.** Sabiendo que las rectas m y n son paralelas, encuentre en cada caso los valores de los ángulos desconocidos.

Geometría	Desarrollo algebraico.



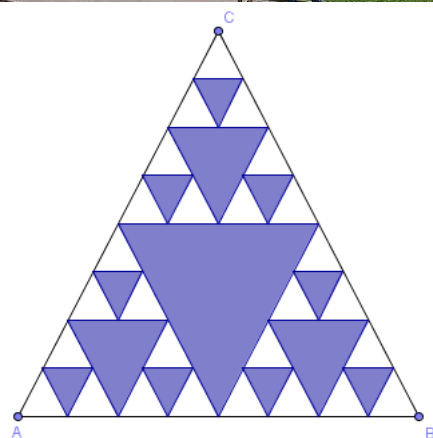
	<p style="text-align: center;"><b>Desarrollo algebraico.</b></p> <div style="border: 1px solid gray; height: 350px; width: 100%;"></div>
---	--

### ***Secuencia didáctica 5. Geometría del triángulo.***

**Aprendizajes:** Mediante la manipulación de diferentes triángulos, el estudiante clasificará los triángulos según sus lados y ángulos. Explicará en qué casos es posible construir un triángulo, a partir de tres segmentos dados.

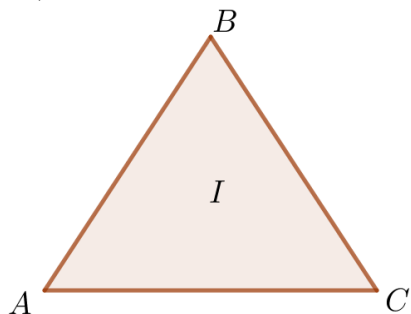
#### **Inicio.**

¿Sabes por qué es tan utilizado el triángulo en la vida cotidiana? Si miras a tu alrededor encontrarás que el triángulo está presente en la estructura de los techos de las casas, en los puentes, en los veleros, en los ganchos para colgar ropa, et-  
cétera. El triángulo es muy utilizado en las estructuras porque es la única figura que no se puede deformar. De acuerdo con lo anterior, las siguientes figuras ilustran algunos ejemplos antes mencionados. Todos ellos basados en formas triangulares.



Como sabes, el triángulo es un polígono de tres lados. Los puntos donde éstos se cortan se llaman *vértices*. En geometría, el triángulo se representa con el símbolo ( $\Delta$ ). Para nombrarlo, pueden utilizarse las tres letras de sus vértices sin que impor-

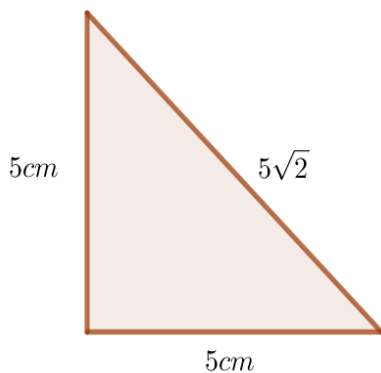
te el orden, o bien, emplear un número romano escrito dentro del triángulo. Por ejemplo, el triángulo de la figura siguiente se designa con  $\triangle ABC$  o, simplemente, con  $\triangle I$ .



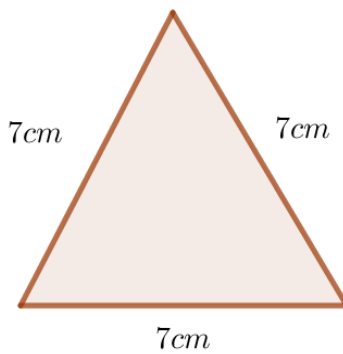
Matemática en lo cotidiano:  
Triángulo.

**Actividad 1.** Tomando en consideración el código QR (Matemáticas en lo cotidiano: Triángulo), realiza lo siguiente.

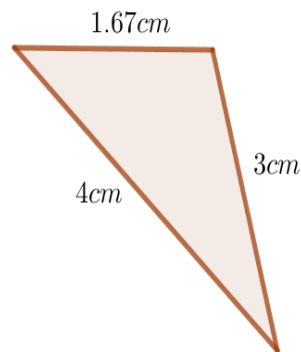
1. Escribe debajo de cada uno de los triángulos siguientes *escaleno*, *equilátero* o *isósceles*, según corresponda.



\_\_\_\_\_

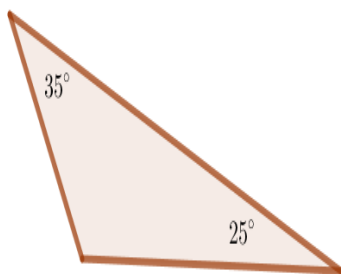


\_\_\_\_\_

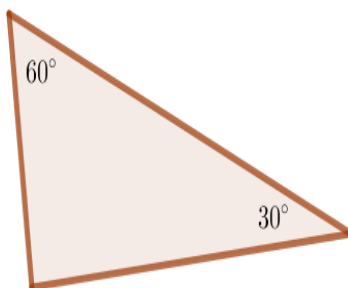


\_\_\_\_\_

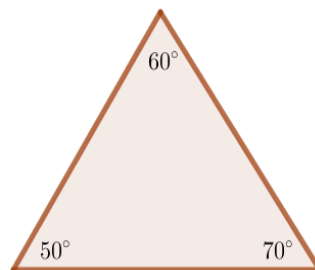
2. Escribe debajo de cada uno de los triángulos siguientes *acutángulo*, *rectángulo*, *obtusángulo*, según corresponda.



\_\_\_\_\_



\_\_\_\_\_



\_\_\_\_\_

### Desarrollo.

Pensemos, que no siempre se podrá construir un triángulo a partir de tres segmentos dados. Por lo que hay que considerar la siguiente propiedad para poder determinar cuándo si y cuándo no podremos construir un triángulo.

**Actividad 2.** Dados tres segmentos, ¿es posible **construir** un triángulo que tenga por lados dichos segmentos? \_\_\_\_\_. Para comprobarlo, procedamos de la manera siguiente: dibujemos al segmento más grande de los tres segmentos dados; tomando como centro sus extremos, dibujemos con el compás circunferencias, cuyos radios son los otros dos segmentos, como se ilustra en la figura 9.

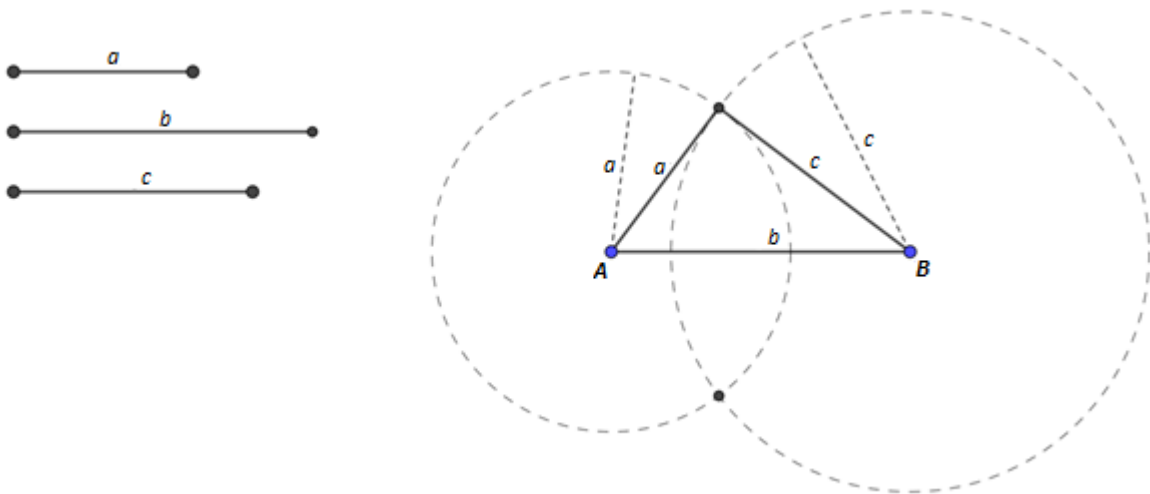


Figura 9.

Como **se intersectan** las circunferencias de radio  $a$  y  $c$ , se puede construir un triángulo.

Consideremos ahora los segmentos en la figura 10.

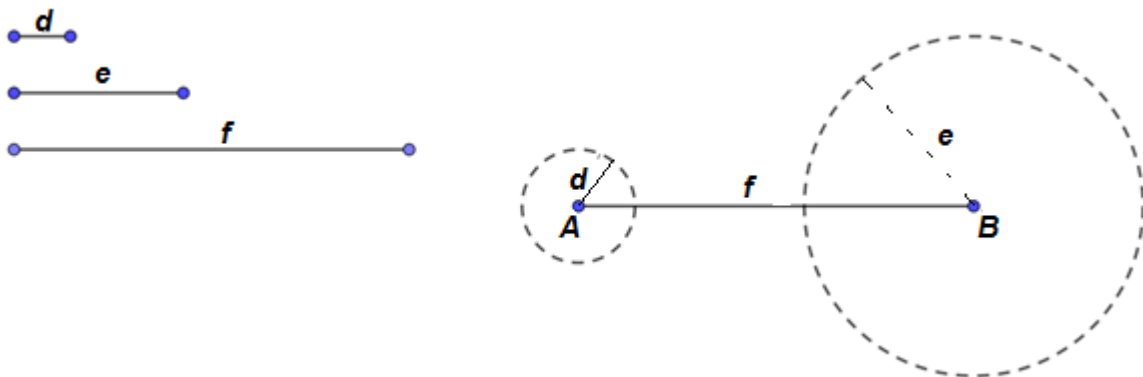


Figura 10.

Como **no se intersectan** las circunferencias de radio  $d$  y  $e$ , no se puede construir el triángulo.

En los casos anteriores,  $a, b$  y  $c$ , representan las longitudes de los segmentos dados (medidos con la misma unidad de longitud), mientras que  $d, e$  y  $f$ , son las longitudes de la otra terna dada de segmentos.

Para la primera terna, esto es:  $a, b$  y  $c$ , se tiene que:

$$b < a + c$$

Esta propiedad es llamada: Desigualdad del triángulo, lo que ocurre siempre que se pueda construir el triángulo con los tres segmentos dados.

**Concluimos:**

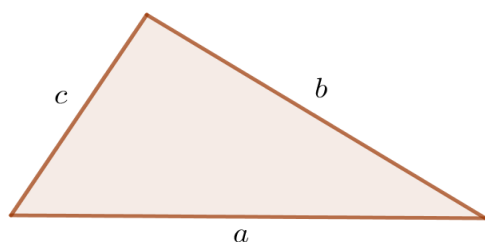
**Teorema de la desigualdad del triángulo.**

La suma de las longitudes de cualesquiera dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.

**Cierre.**

**Actividad 3.** Con el apoyo de tu profesor resuelve los siguientes problemas:

1. En la figura 11, verifica con una regla graduada o con un compás si las siguientes desigualdades son verdaderas.



**Figura 11.**

a)  $a + b > c$  ..... (    )

b)  $a + c > b$  ..... (    )

c)  $b + c > a$  ..... (    )

2. Comprueba si es posible tener un triángulo con las longitudes de lado dadas: 7, 9, 13.

3. Supongamos que te dan la longitud de dos segmentos, por ejemplo, uno mide 12 cm., y el otro 27 cm.; te piden la longitud de un tercer segmento, para que juntos determinen un triángulo, ¿entre qué valores podría estar la longitud del tercer segmento?

### Secuencia didáctica 6. Propiedades de los triángulos.

**Aprendizajes 1:** Aplica las propiedades o teoremas de los triángulos en la resolución de problemas.

**Aprendizaje 2:** Distingue las características que determinan las rectas y puntos notables en un triángulo.

#### Inicio.

**Actividad 4. (Extraclase):** Visita el código QR, expuestos a la derecha, para conocer seis propiedades o teoremas de los triángulos, y saca una copia con la información relativa al tema o cópiala en tu cuaderno ya que estos teoremas se van a usar en la siguiente actividad que realizaras en el salón de clase.

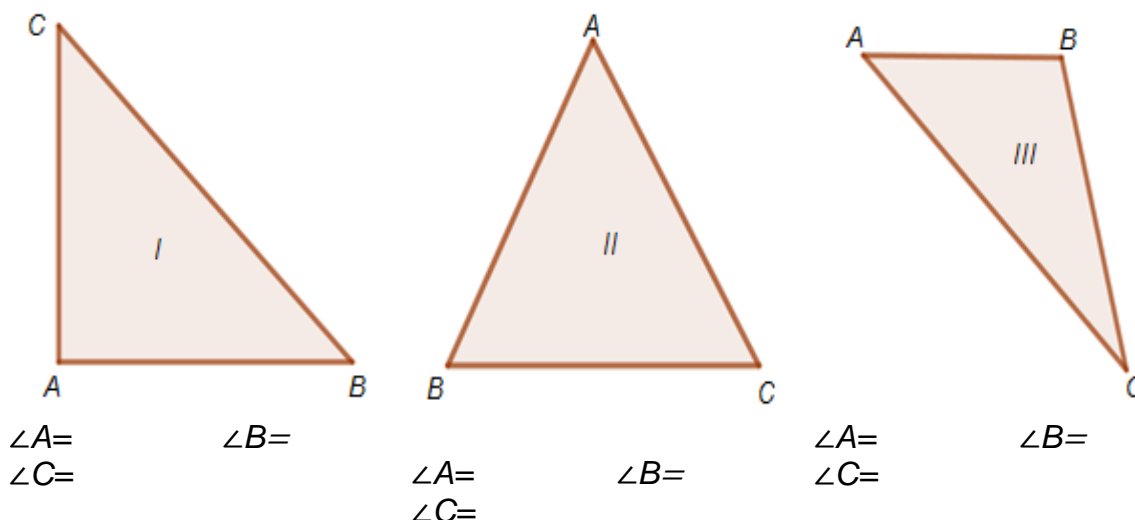


Propiedades de los triángulos.

#### Desarrollo.

**Actividad 5.** Utilizando el transportador, realiza las mediciones de los ángulos de cada triángulo para poder verificar algunos teoremas expuestos en el código QR: Propiedades de los triángulos.

1. Realiza la medición de los tres ángulos de los triángulos *I, II y III*, y escribe debajo de cada uno de los triángulos siguientes sus medidas.



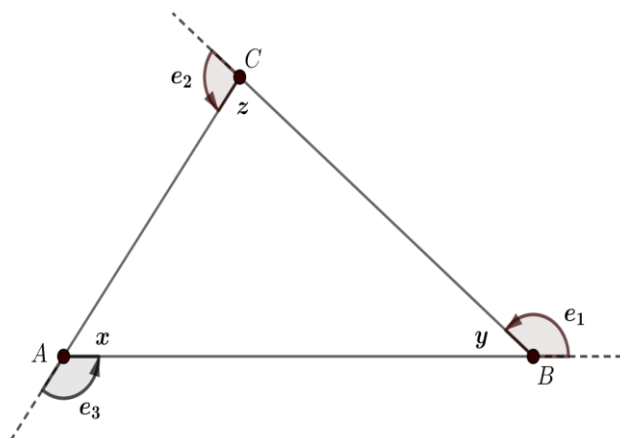
Conclusión: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_.

**Teorema:** La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a:

---

2. Realiza la medición con el transportador de cualquier ángulo exterior ( $e_1, e_2, o e_3$ ) y compáralo con la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a ellos.

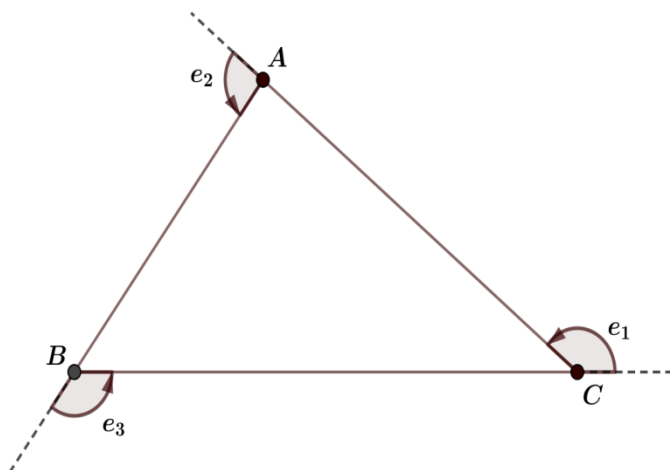


Conclusión:

**Teorema:** Cualquier ángulo exterior ( $e_1, e_2, o e_3$ ), es igual a la suma:

---

3. Realiza la medición con el transportador de los tres ángulos exteriores del triángulo  $\triangle ABC$ .

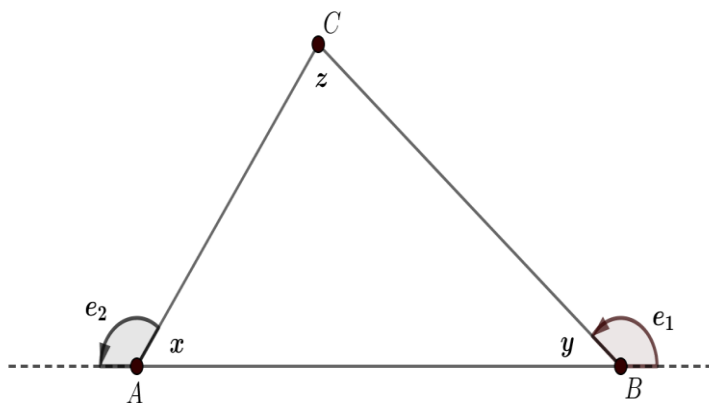


Conclusión:

**Teorema:** La suma de los ángulos exteriores de cualquier triángulo suma:

---

4. En la siguiente figura, realiza la medición con el transportador de los dos ángulos exteriores  $e_1$  y  $e_2$ . Que sucede cuando los sumamos y los comparamos con la suma de  $180^\circ + z$ .



Conclusión:

**Teorema:** La suma de dos ángulos exteriores de cualquier triángulo es igual a: \_\_\_\_\_.

**Rectas y puntos notables de un triángulo:** Las medianas, mediatrices, la bisectrices y la alturas son rectas que al trazarse en un triángulo, se cortan en un punto llamado: Baricentro, Circuncentro, Incentro y Ortocentro respectivamente.

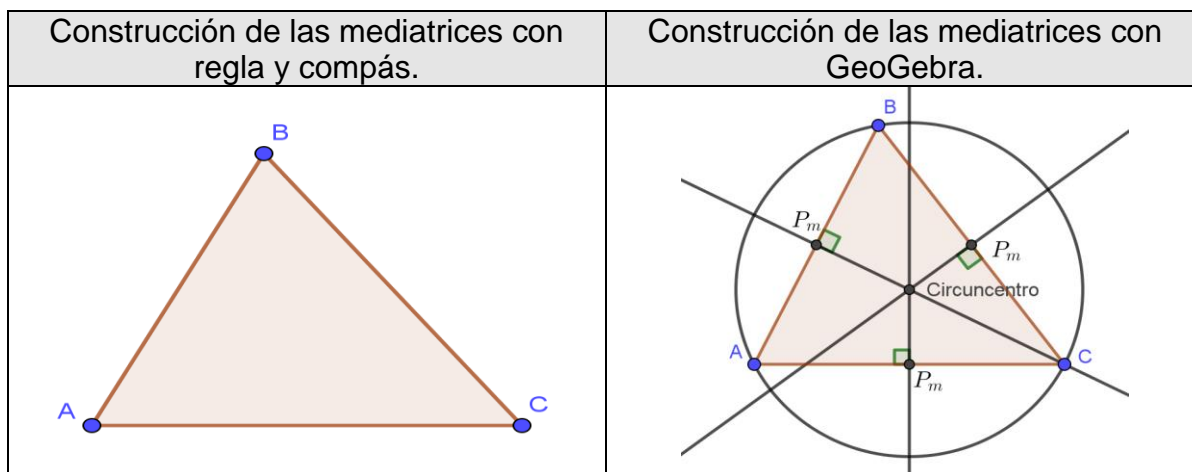
**Actividad 6.** Considerando lo anterior, realiza la construcción de los puntos y rectas notables de un triángulo con regla y compás y compáralo con la construcción hecha en GeoGebra.

- **Medianas y Baricentro.**

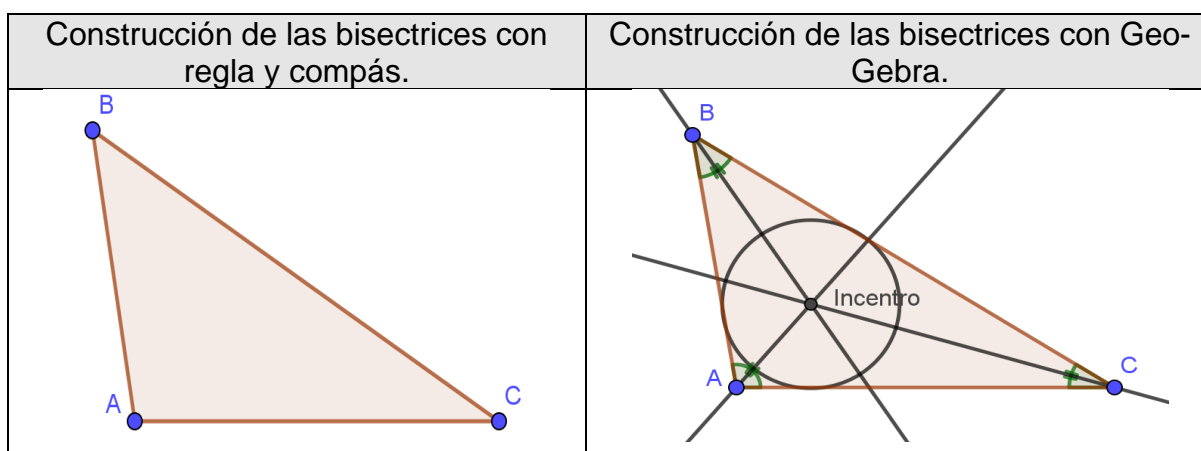
Construcción de las medianas con regla y compás.	Construcción de las medianas con GeoGebra.



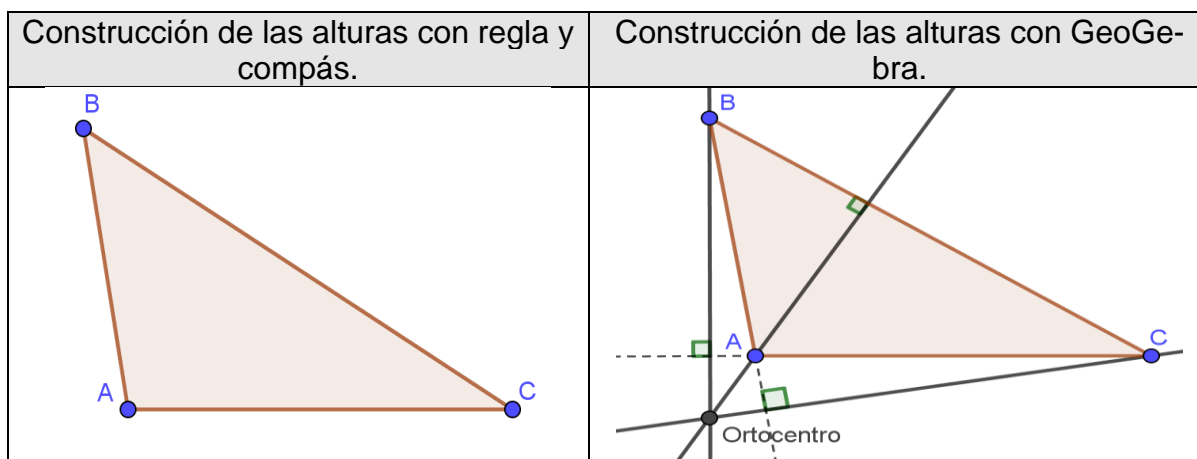
- Mediatrices y Circuncentro.**



- Bisectrices e Incentro.**



- Alturas y Ortocentro.**

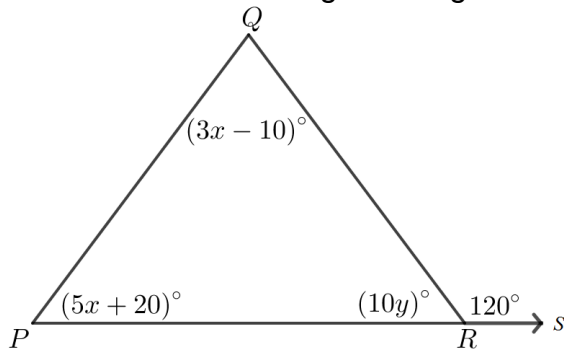


### Cierre.

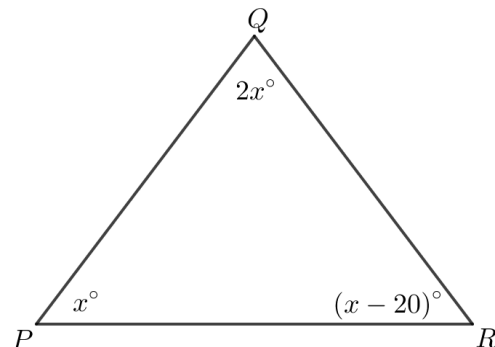
**Actividad 7. (Extraclase):** Visita el código QR, expuestos a la derecha, donde podrás ver ejercicios resueltos sobre los teoremas o propiedades de los triángulos. Saca una copia con la información relativa al tema o cópiala en tu cuaderno ya que estos ejercicios se van a usar en la siguiente actividad de cierre en el salón de clase.



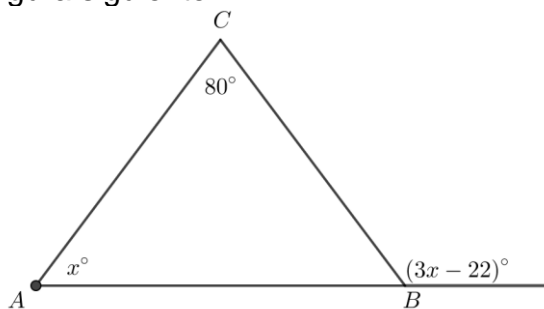
1. Determina el valor de los ángulos interiores del  $\Delta$  en la siguiente figura.



2. Determina el valor del ángulo  $Q$  en la figura siguiente.

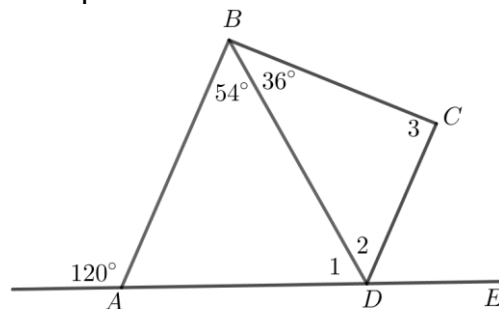


3. Determina la medida del  $\angle ABC$ , de la figura siguiente.



a) Determina  $m\angle 1$ .

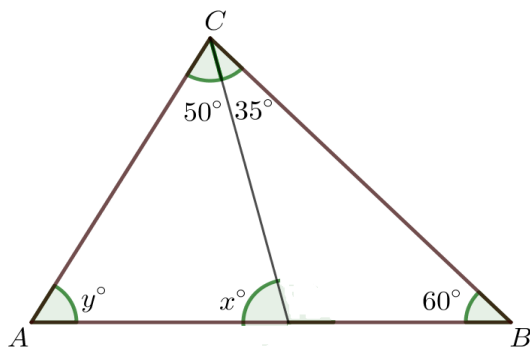
4. Resuelve los incisos a, b y c, en base a los datos de la siguiente figura, donde  $\overline{AB}$  es paralelo a  $\overline{CD}$ .



b) Determina  $m\angle 2$ .

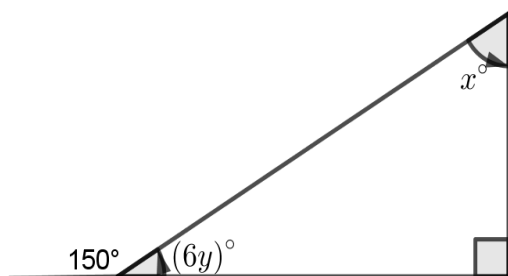
c) Determina  $m\angle 3$ .

5. Resuelve los incisos a y b, en base a los datos de la siguiente figura.

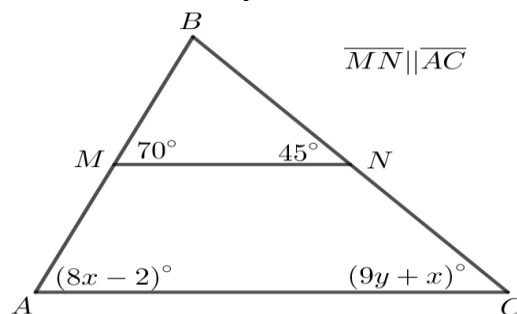


b) Determina el valor de  $y$ .

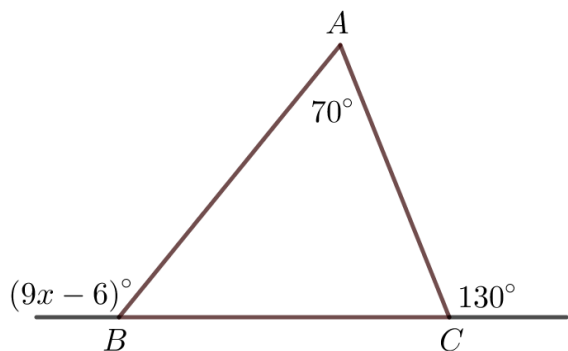
6. A partir de la figura siguiente, determina el valor de  $x$  e  $y$ .



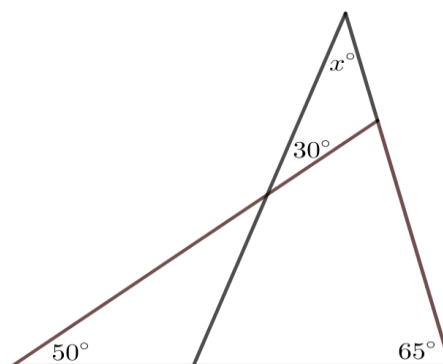
7. Con base en la figura siguiente, encuentra el valor de  $y$ .



8. Con base en la figura siguiente, determina el valor de  $x$ .



9. Con base en la figura siguiente, determina el valor de  $x$ .



### ***Secuencia didáctica 7. Polígonos regulares e irregulares.***

**Aprendizajes:** Describe los polígonos por sus características (regulares e irregulares). Conoce y aplica las propiedades de los polígonos.

#### **Inicio.**

En la naturaleza abundan ejemplos de los diversos conceptos matemáticos, si observas con cuidado puedes reconocer diferentes figuras y cuerpos geométricos a tu alrededor. En las telarañas, las celdas de un panal de abejas, el caparazón de una tortuga, en la disposición de los pétalos de ciertas flores. Incluso los arquitectos para la creación de sus proyectos; se inspiran en los cuerpos y figuras geométricas para realizarlos, en fin en la naturaleza y nuestro diario vivir nos encontramos objetos con formas geométricas diversas.

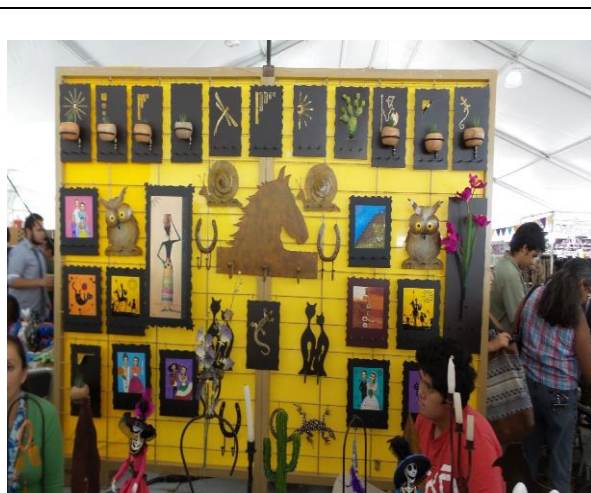


Figura 1. En las obras de arte.



Figura 2. En las frutas.



Figura 3. En el paisaje urbano.



Figura 4. En los señalamientos viales

**Actividad 1. (Extraclase):** Visita el código QR, Polígonos, para conocer las características de los polígonos regulares, y saca una copia con la información relativa al tema, cópiala en tu cuaderno ya que esto te servirá para realizar las actividades 2 y 3 que realizaras en el salón de clase.



## Desarrollo.

### Actividad 2. Polígonos.

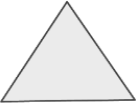

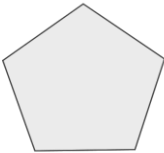
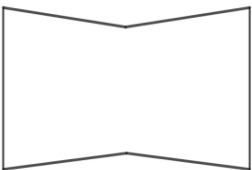
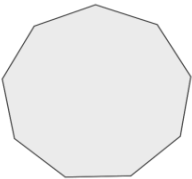
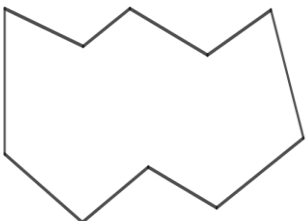
Considerando que un polígono es una figura plana delimitada por una poligonal cerrada y tomando en cuenta lo aprendido en la actividad 1, completa la tabla 1. Definiendo lo que se te pide y llenando el paréntesis con la letra que le corresponda, en base a la figura 5.

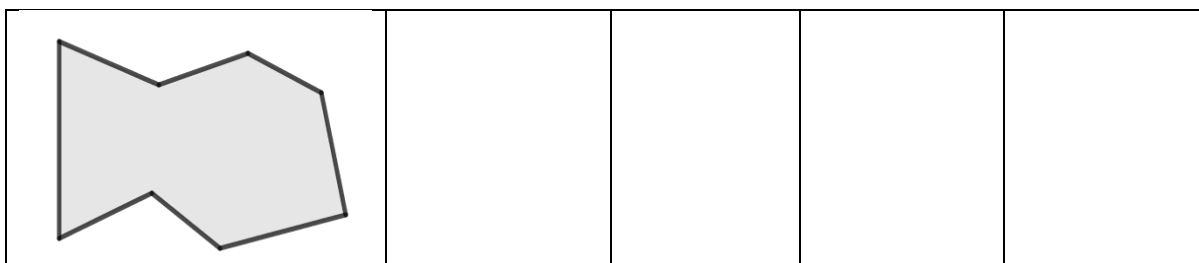
Tabla 1. Elementos de un polígono regular.	
<ul style="list-style-type: none"> <li>Polígono regular: Definir. _____.</li> <li><u>Lado</u> ( ): es cada uno de los segmentos que forman el polígono.</li> <li><u>Vértice</u> ( ): el punto de unión de dos lados consecutivos.</li> <li><u>Centro</u> ( ): el punto central equidistante de todos los vértices.</li> <li><u>Radio</u> ( ): el segmento que une el centro del polígono con uno de sus vértices.</li> <li><u>Apotema</u> ( ): segmento perpendicular a un lado, hasta el centro del polígono.</li> <li><u>Diagonal</u> ( ): segmento que une dos vértices no contiguos.</li> <li><u>Perímetro (P)</u>: Definir. _____.</li> <li><u>Semiperímetro (SP)</u>: Definir. _____.</li> <li><u>Sagita</u> ( ): parte del radio comprendido entre el punto medio del lado y el arco de circunferencia. La suma de la apotema: <b>a</b> más la sagita: <b>S</b>, es igual al</li> </ul>	<p><b>Figura 5. Pentágono regular inscrito en una circunferencia</b></p>

radio: r.	
-----------	--

### Actividad 3. Polígonos regulares e irregulares.

Considerando que en un polígono irregular sus lados y ángulos no miden lo mismo, completa la tabla 2 tomando como ejemplo el primero y segundo renglón de la tabla.

Tabla 2. Polígonos regulares e irregulares.				
Polígono	Nombre	No. de lados	No. de ángulos	El polígono es
	Triángulo	3	3	Regular
	Cuadrilátero	4	4	Irregular
				
				
				
				



#### Actividad 4. Propiedades de los polígonos.

Visita el código QR Ángulos interiores para conocer algunas propiedades y problemas de los polígonos. Saca una copia con la información relativa al tema, cópiala en tu cuaderno ya que esto te servirá para realizar esta actividad en el salón de clase.



1. Completa la siguiente tabla con la información que recopilaste en el código QR (Ángulos interiores).

Tabla 3. Propiedades y características de los polígonos.				
Polígono	Número de lados	Número de diagonales trazadas desde un vértice	Número de triángulos trazados al interior	Suma de los ángulos interiores ( $S_i$ )
Triángulo	3	0	1	$1(180^\circ)=180^\circ$
Cuadrilátero	4	1	2	$2(180^\circ)=360^\circ$
Pentágono	5	2	3	$3(180^\circ)=540^\circ$
Hexágono	6			
Heptágono	7			
Octágono	8			
Nonágono	9			
Decágono	10			
Endecágono	11			
$n$ -ágono <sup>3</sup>	$n$	$d = n - 3$		$180^\circ(n - 2)$

$n$  = Número de lados del polígono.

**Cierre.**

**Actividad 5.** Los siguientes *reactivos* tienen como propósito ubicar tus conocimientos acerca de los polígonos regulares. En la actualidad, la Geometría se utili-

<sup>3</sup> Para polígonos con 13 lados o más, se puede escribir (y es más fácil) "13-ágono", "14-ágono" ... "100-ágono", etc.

Matemáticas II	Elementos Básicos de Geometría Plana.
Unidad III	

za en diversas actividades, como la Arquitectura, Ingeniería, Diseño. Física, Química y topografía.

**INSTRUCCIONES:** Lee cuidadosamente cada uno de las siguientes preguntas y contesta lo que se pide. Apóyate en la tabla 4. Si tiene dudas para contestar alguna(s) pasa a la siguiente y al final regresa a las que te quedaron pendientes.

Tabla 4. Fórmulas para determinar propiedades en un polígono regular.				
Número de diagonales trazadas desde un vértice.	Número total de diagonales que se pueden trazadas desde todos los vértice.	La suma de los ángulos interiores de un polígono regular.	Un ángulo interior de un polígono regular.	Un ángulo central de un polígono regular.
$d = n - 3$	$D = \frac{n(n-3)}{2}$	$S_i = 180^\circ(n - 2)$	$\angle i = \frac{180^\circ(n - 2)}{n}$	$\angle c = \frac{360^\circ}{n}$
La suma de los ángulos exteriores de un polígono regular.	Un ángulo exterior de un polígono regular.			
$S_e = 4rt = 360^\circ$	$\angle e = \frac{360^\circ}{n}$			

- ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice de un icoságono regular?  
a) 23                              b) 17                              c) 20                              d) 15
- ¿Cuántas suman los ángulos interiores de un dodecágono regular?  
a) 1620°                              b) 1440°                              c) 1800°                              d) 1500°
- ¿Cuánto mide cada ángulo interior de un hexágono regular?  
a) 200°                              b) 120°                              c) 150°                              d) 180°
- ¿Cuánto suman los ángulos externos de un decágono regular?  
a) 240°                              b) 180°                              c) 270°                              d) 360°
- ¿Cuánto vale cada ángulo exterior de un pentadecágono regular?  
a) 20°                              b) 24°                              c) 15°                              d) 18°
- ¿Cuál es el polígono regular cuya suma de los ángulos interiores vale 1080°?  
a) Hexágono                              b) Dodecágono                              c) Octágono                              d) Eneágono



Matemáticas II	Elementos Básicos de Geometría Plana.
Unidad III	

7. Si la suma de los ángulos interiores de un polígono regular es de  $1260^\circ$ , ¿cuál es ese polígono?
  - a) Hexágono
  - b) Dodecágono
  - c) Octágono
  - d) Eneágono
8. ¿Cuál es el polígono regular cuya ángulo interior es de  $135^\circ$ ?
  - a) Hexágono
  - b) Dodecágono
  - c) Octágono
  - d) Eneágono
9. El número *total* de diagonales que pueden trazarse en un endecágono regular es.
  - a) 20
  - b) 44
  - c) 25
  - d) 52
10. ¿Cuál es el polígono regular en el cual se pueden trazar 9 diagonales desde uno de sus vértices?
  - a) Hexágono
  - b) Dodecágono
  - c) Octágono
  - d) Eneágono
11. ¿Cuál es el polígono regular en el cual se pueden trazar 20 diagonales en total?
  - a) Hexágono
  - b) Dodecágono
  - c) Octágono
  - d) Eneágono
12. Determina el nombre del polígono regular, en el cual se pueden trazar 52 diagonales más que sus lados.
  - a) Tetradecágono
  - b) Dodecágono
  - c) Eneadecágono
  - d) Tridecágono
13. Determina el nombre del polígono regular, en el que se pueden trazar 152 diagonales totales.
  - a) Tetradecágono
  - b) Dodecágono
  - c) Eneadecágono
  - d) Tridecágono
14. En un polígono regular en el que se pueden trazar 14 diagonales totales, encuentra el nombre que recibe.
  - a) Hexágono
  - b) Heptágono
  - c) Octágono
  - d) Eneágono
15. El número de diagonales totales de un polígono regular es el triple, que su número de lados. ¿De qué polígono se trata?
  - a) Hexágono
  - b) Dodecágono
  - c) Octágono
  - d) Eneágono

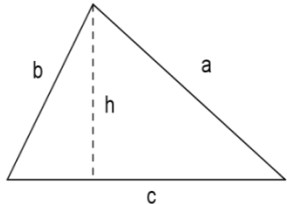
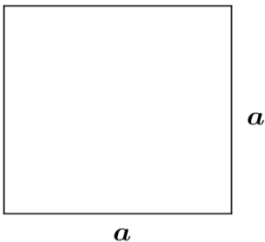
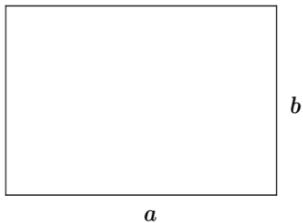
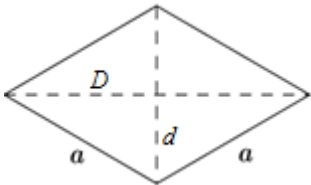
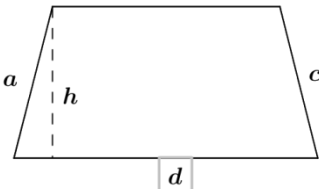
**Secuencia didáctica 8. Perímetro y área de un polígono regular.**

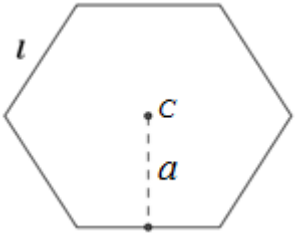
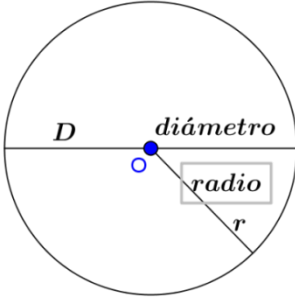
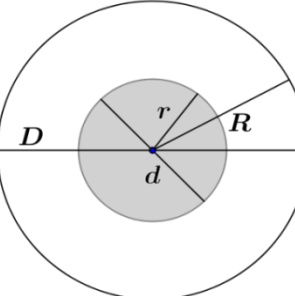
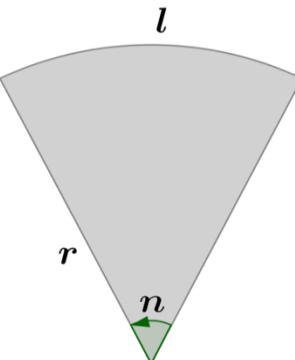
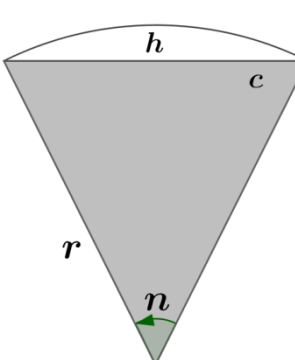
**Aprendizaje 1:** Calcula el perímetro y área de un polígono regular. Utiliza los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas.

**Aprendizaje 2:** Calcula el área de un polígono irregular por triangulación (Fórmula de Herón).

**Inicio**

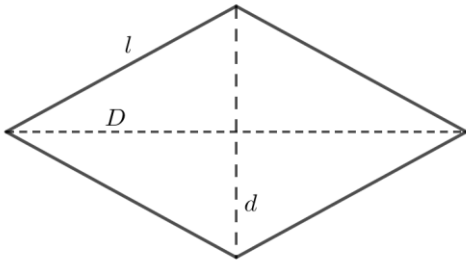
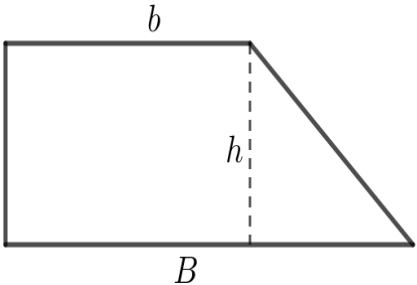
**Actividad 6.** Completa la tabla 5, conforme a la información expuesta en el renglón tres.

Tabla 5. Figuras planas. Perímetro y Área.			
Nombre	Figura	Perímetro	Área
Triángulo cualquiera		$P = a + b + c$ $SP = \frac{a + b + c}{2}$	$A = \frac{c * h}{2}$ $A = \sqrt{SP(SP - a)(SP - b)(SP - c)}$ Fórmula de Herón.
Cuadrado			
Rectángulo			
Rombo			
Trapezio			

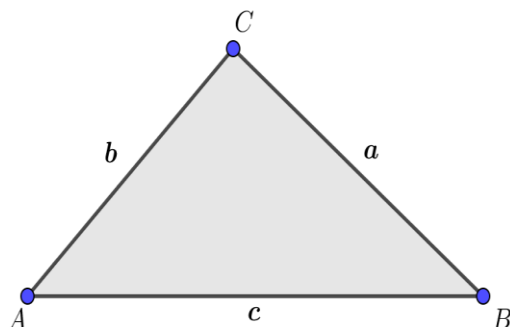
Polígonos regulares		$P = n * l$	$A = \frac{P * a}{2}$
Círculo			
Corona circular			
Sector circular			
Segmento circular			

### Desarrollo.

**Actividad 7.** Considerando los datos de la tabla 5, determina el perímetro y el área de las siguientes figuras

Problema	Construcción con GeoGebra
1. Calcula el perímetro y el área de un rombo de lados 4.03 cm., cuya diagonal mayor es de 7 cm., y la menor de 4 cm.	 <p>Diagrama de un rombo con diagonales <math>D</math> y <math>d</math>, y un lado <math>l</math>.</p>
2. Calcula el perímetro y el área de un hexágono regular cuyo lado mide 3 cm., y su apotema 1.5 cm.	
3. Calcula el perímetro y el área de un trapecio cuyas bases miden 10 cm., y 7 cm., y su altura 7 cm.	 <p>Diagrama de un trapecio con bases <math>b</math> y <math>B</math>, y altura <math>h</math>.</p>
4. Calcula el perímetro y el área de un sector circular de $35^\circ$ y cuyo radio mide 2 m.	

**Actividad 8.** En algunos casos, puede ocurrir que los tres lados del triángulo se conocen, pero no la altura. En dicho caso es útil emplear la fórmula de Herón, para obtener el área, como se muestra en los problemas 1 y 2.



La fórmula de Herón: si las medidas de un triángulo  $\triangle ABC$ , son  $a, b$  y  $c$ , se cumple que:

$$A = \sqrt{sp(sp-a)(sp-b)(sp-c)}$$

$$\text{Donde, } sp = \frac{a+b+c}{2}$$

**Problema 1.** Calcula el área del  $\triangle ABC$ , teniendo en cuenta las medidas dadas.

**Solución:**

Primero calculamos ( $s$ ):

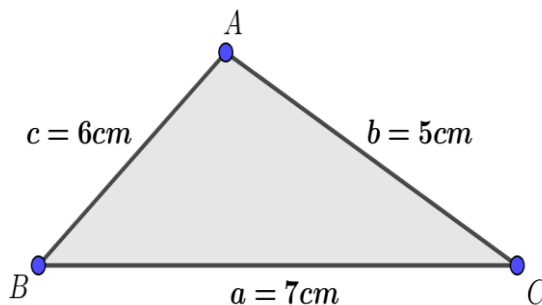
$$s = \frac{1}{2}(7\text{ cm} + 5\text{ cm} + 6\text{ cm}) = 9\text{ cm}$$

Luego se calcula:  $s - a, s - b$  y  $s - c$ :

$$s - a = 9\text{ cm} - 7\text{ cm} = 2\text{ cm}$$

$$s - b = 9\text{ cm} - 5\text{ cm} = 4\text{ cm}$$

$$s - c = 9\text{ cm} - 6\text{ cm} = 3\text{ cm}$$



Finalmente se aplica la fórmula de Herón.

$$A = \sqrt{9(2)(4)(3)} = \sqrt{216} = 14.7\text{ cm}^2$$

Por lo tanto el área del  $\triangle ABC$  es  $14.7\text{ cm}^2$

**Problema 2.** Calcula el área del triángulo equilátero cuyo perímetro es  $18\text{ cm}$ .

**Solución:**

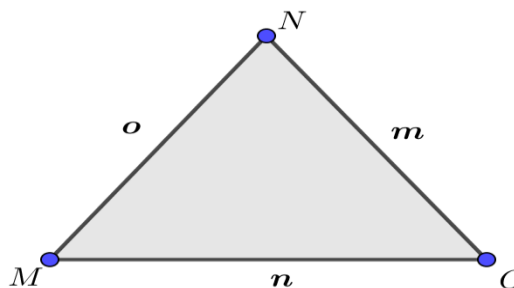
Sea el  $\triangle MNO$  equilátero en el cual se cumple que los tres lados son congruentes y en consecuencia  $m = n = o$ , luego, se divide el perímetro entre 3 para hallar la medida de cada lado, de donde se obtiene que:  $m = n = o = 6\text{ cm}$ . Calculamos ( $s$ ):

$$sp = \frac{1}{2}(6\text{ cm} + 6\text{ cm} + 6\text{ cm}) = 9\text{ cm}$$

Luego:  $sp - a = sp - b = sp - c = 3\text{ cm}$

Finalmente se aplica la fórmula de Herón.

$$A = \sqrt{9(3)(3)(3)} = \sqrt{243} = 15.58\text{ cm}^2$$



Por lo tanto, el área del  $\triangle MNO$  es  $15.58\text{ cm}^2$ .

### Cierre.

En plenaria los alumnos y el profesor revisan los procedimientos y los resultados obtenidos

### ***Secuencia didáctica 9. Líneas notables de una circunferencia.***

**Aprendizajes:** Identifica las líneas notables de una circunferencia. Determina el perímetro de la circunferencia y área del círculo.

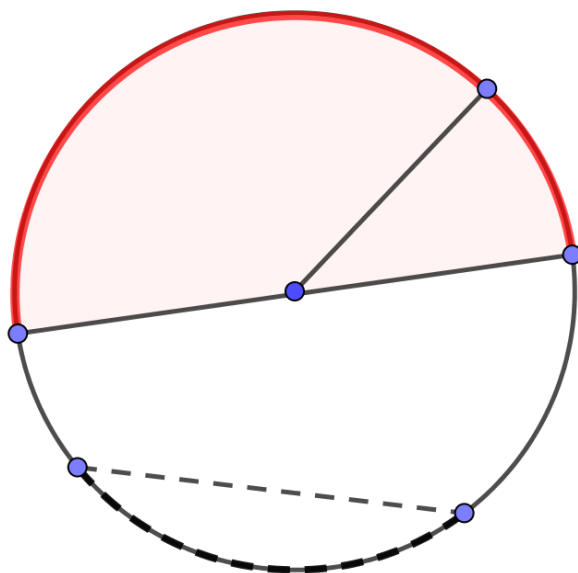
### Inicio.

**Actividad 9. (Extraclase):** Visita el código QR Circunferencia. Saca una copia con la información relativa al tema, cópiala en tu cuaderno ya que esto te servirá para realizar esta actividad en el salón de clase.



### Desarrollo.

**Actividad 10.** Considerando la figura 6, coloca el nombre que le corresponda a cada parte de la circunferencia.

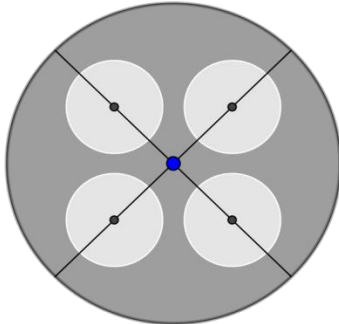
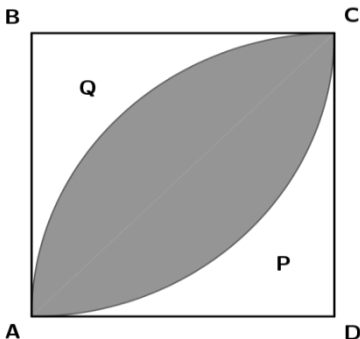
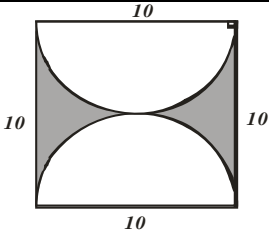


**Líneas notables de una circunferencia.**

- Centro
- Radio
- Diámetro
- Semicircunferencia
- Cuerda
- Arco

**Figura 6. Circunferencia.**

**Actividad 11.** Considerando la tabla 5. Determina el perímetro y el área de las circunferencias siguientes.

Problema	Construcción
1. Calcula el área de la parte sombreada, si el radio del círculo mayor mide 6 cm., y el radio de los círculos pequeños miden 2 cm.	
2. Calcula el área de la parte sombreada, siendo $AB = 10\text{cm.}$ , $ABCD$ un cuadrado y $APC$ y $AQD$ arcos de circunferencia de centro $B$ y $D$ .	
3. Calcula el área de la parte sombreada, sabiendo que tenemos en la figura un cuadrado de lado 10 al que se le han suprimido dos semicírculos de radio 5 unidades, es decir un círculo de radio 5 u.	
4. La rueda de un camión tiene 90 cm., de radio. ¿Cuánto ha recorrido el camión cuando la rueda ha dado 100 vueltas?	
5. Un faro barre con su luz un ángulo plano de $128^\circ$ . Si el alcance máximo del faro es de 7 millas, ¿cuál es La longitud máxima en metros del arco correspondiente? 1 milla = 1,609.34 m.	

**Cierre.**

En plenaria los alumnos y el profesor revisan los procedimientos y los resultados obtenidos.

## 5. Materiales de Apoyo.

### 5.1. EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA.

Contesta el siguiente cuestionario. Cuando termines califícate tú mismo, comparando tus respuestas en la sección correspondiente. Las preguntas tienen como propósito ubicar tus conocimientos previos sobre Geometría.

1. Observa la figura A y une con flechas las frases de la columna de la izquierda con las palabras de la derecha, de manera que obtengas una oración verdadera.

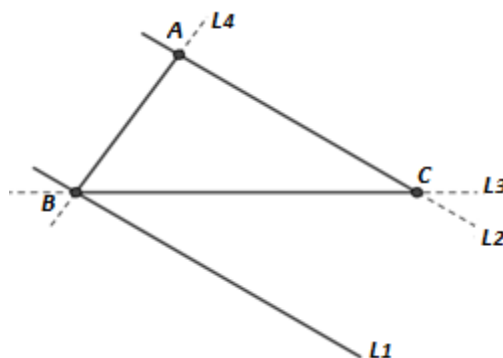


Figura A.

- |   |                 |
|---|-----------------|
| a) Al intersectarse las rectas $L_2$ y $L_4$ en $A$ , se forman ángulos.        | Paralelas       |
| b) Al intersectarse las rectas $L_2$ y $L_3$ en $C$ , se forman ángulos.        |                 |
| c) Las rectas $L_2$ y $L_4$ son.  | Iguales         |
| d) Al intersectarse las rectas $L_1$ y $L_4$ en $B$ , los ángulos formados son. | Perpendiculares |
| e) Las rectas $L_1$ y $L_2$ son.  |                 |
| f) Al intersectarse las rectas $L_3$ y $L_4$ en $B$ , los ángulos formados son. | Distintos       |

2. Contesta lo que se te pide en los dos siguientes incisos en base a la figura B.
- Usando tus escuadras, traza en la figura B una recta perpendicular a la recta  $L_1$ , que pase por Q.
  - Con la ayuda de tus escuadras, traza una recta paralela a la recta  $L_2$  que pase por R.



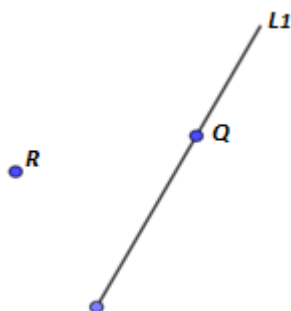
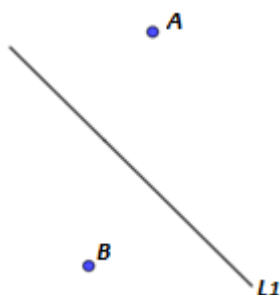


Figura B.

3. Contesta lo que se te pide en los dos siguientes incisos, utilizando regla y compás.

- Por el punto A, traza una perpendicular a la recta  $L_1$ .
- Por el punto B, traza una paralela a la recta que trazaste.



4. Si dos rectas por más que se prolonguen no se cortan, entonces las rectas:

- Son perpendiculares
- Tienen un punto en común
- Son paralelas
- Son colineales.

5. Si la distancia entre dos rectas cambia, entonces las rectas:

- Se cortan
- Son paralelas
- No tienen punto común
- Son distintas

6. Determina la medida del ángulo  $AOB$  de la figura C.

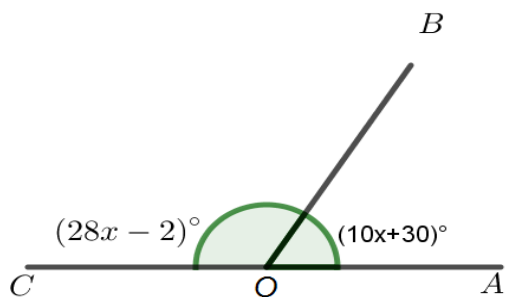
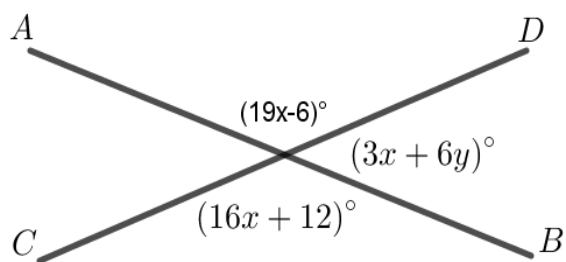


Figura C

- $75^\circ$
- $80^\circ$
- $70^\circ$
- $82^\circ$

7. Con base en la figura siguiente, determina el valor de  $y$ .



a)  $y = 9$

b)  $y = 1$

c)  $y = 12$

d)  $y = 17$

8. Rectas paralelas cortadas por una transversal.

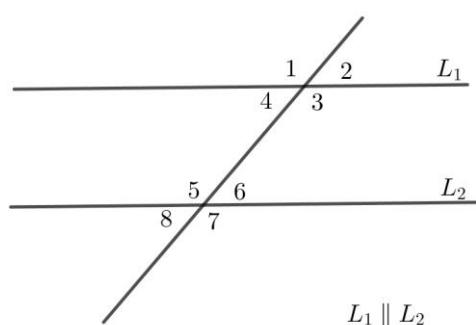
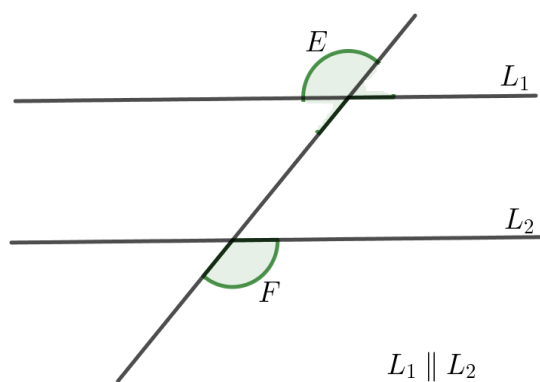
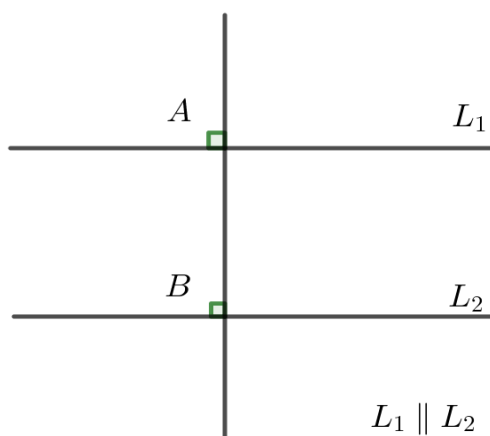
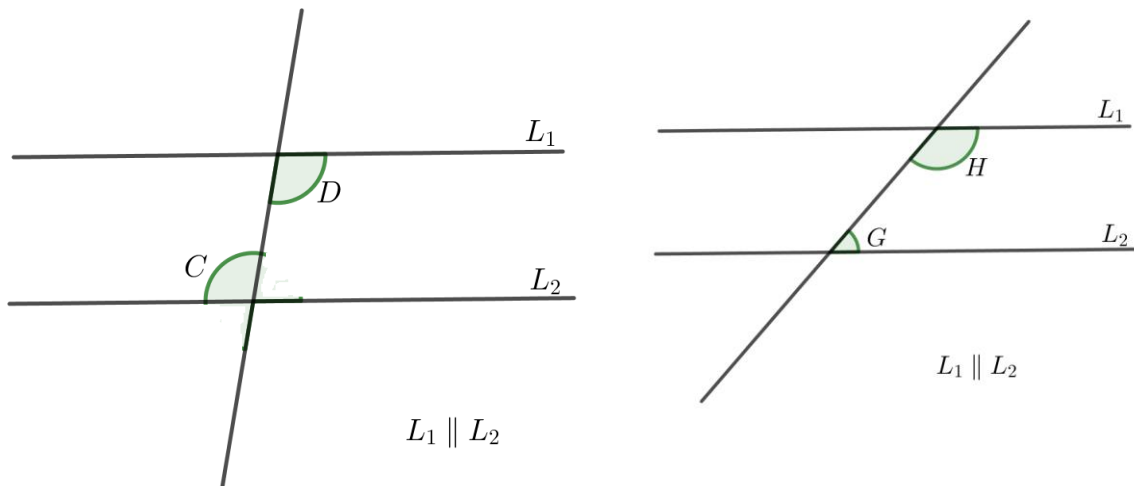


Figura D.

Cuando dos rectas son cortadas por una transversal se forman ocho ángulos: cuatro externos, que de acuerdo con la figura D, son 1, 2, 7 y 8, y cuatro internos, que en esa misma figura son los ángulos: 3, 4, 5 y 6.

a) Las siguientes figuras, son pares de rectas cortadas por una transversal.



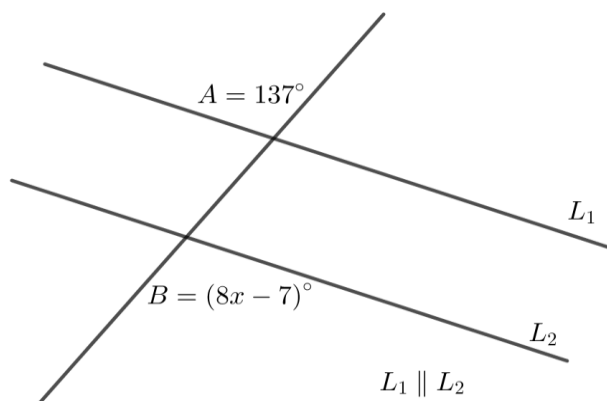


b) Usando tú transportador mide cada uno de los ángulos marcados con  $A, B, C, D, E, F, G, H$  y escribe a continuación la respuesta:

$A =$	$C =$
$B =$	$D =$
$E =$	$G =$
$F =$	$H =$

- c) ¿Cómo son los ángulos  $A$  y  $B$ ? \_\_\_\_\_ .  
d) ¿Cómo son  $C$  y  $D$ ? \_\_\_\_\_ .  
e) ¿Cómo son  $E$  y  $F$ ? \_\_\_\_\_ .  
f) Finalmente, ¿Cómo son  $G$  y  $H$ ? \_\_\_\_\_ .

9. Con base en la figura E, determina el valor de  $x$ . Sea  $L_1 \parallel L_2$ .



**Figura E.**

- a)  $x = 25$   
b)  $x = 18$   
c)  $x = 22$   
d)  $x = 15$

10. Los valores de las variables  $x$  e  $y$  en la figura F, son.

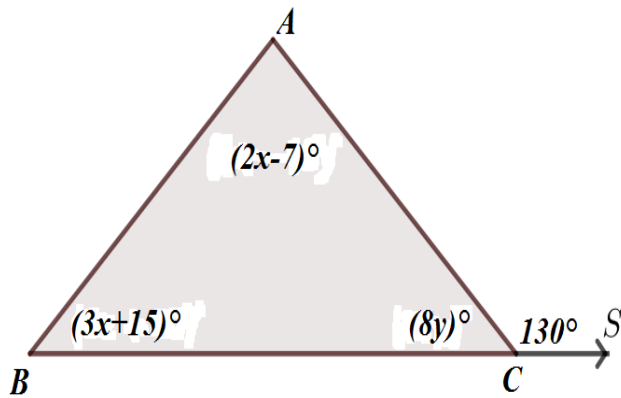


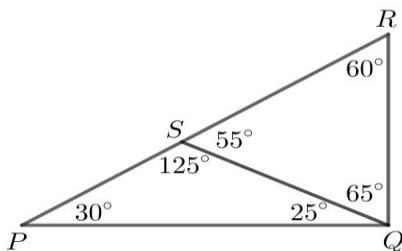
Figura F.

- a)  $x = 20.25$ ;  $y = 9.5$
- b)  $x = 10.25$ ;  $y = 7.5$
- c)  $x = 12.25$ ;  $y = 8.5$
- d)  $x = 24.$ ;  $y = 6.25$

## 5.2. AUTOEVALUACIÓN.

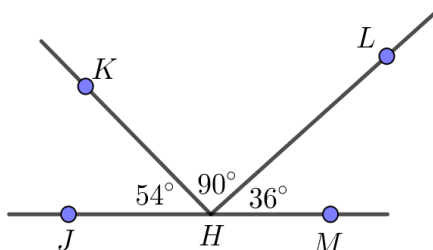
**Actividades de aprendizaje.** Con esta autoevaluación, se pretende verificar los aprendizajes de los estudiantes al cabo de la unidad III, correspondiente a la asignatura de Matemáticas II.

1. En la figura siguiente identifica:



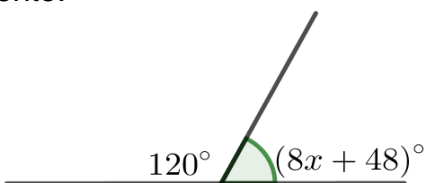
- a) Un triángulo acutángulo.
- b) Un triángulo obtusángulo.
- c) Un triángulo rectángulo.

2. En la figura siguiente identifica:



- a) Dos ángulos agudos.
- b) Dos ángulos obtusos.
- c) Un ángulo recto.
- d) Un par de ángulos complementarios.
- e) Dos pares de ángulos suplementarios.

3. Determina el valor de  $x$  en la figura siguiente.

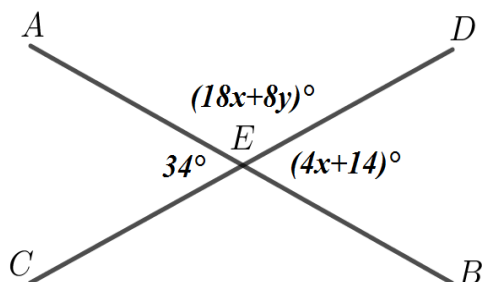


- a)  $\frac{3}{4}$
- b)  $\frac{5}{3}$
- c)  $\frac{3}{2}$
- d)  $\frac{2}{5}$

4. Sean  $A$  y  $B$  dos ángulos suplementarios, donde  $A = 8(2x - 3)^\circ$  y  $B = 10(x + 3.5)^\circ$ . Encuentra la medida del ángulo  $A$ .

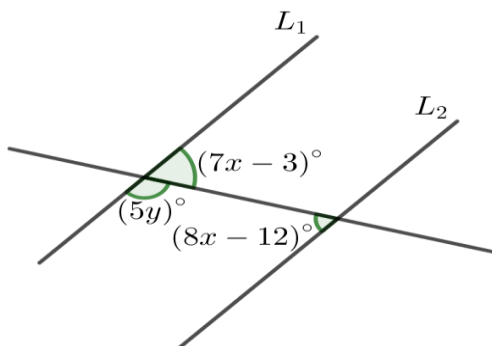
- a)  $80^\circ$                       b)  $40^\circ$                       c)  $42^\circ$                       d)  $57^\circ$

5. A partir de la siguiente figura, encuentra los valores de  $x$  e  $y$ .



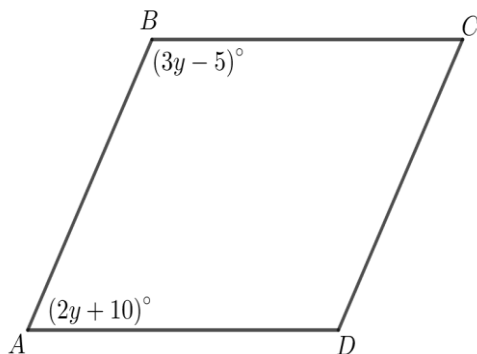
- a)  $x = 12$                        $y = 6$   
b)  $x = 10$ ;                       $y = 8$   
c)  $x = 7$ ;                       $y = 9$   
d)  $x = 5$ ;                       $y = 7$

6. A partir de la siguiente figura, determina el valor de  $x$  e  $y$ . Considerando que  $L_1 \parallel L_2$ .



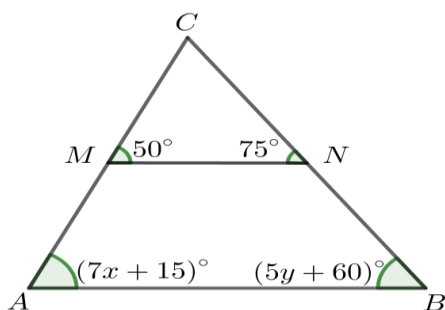
- a)  $x = 12$ ;                       $y = 7$   
b)  $x = 10$ ;                       $y = 27$   
c)  $x = 9$ ;                       $y = 24$   
d)  $x = 15$ ;                       $y = 8$

7. Supón que en el cuadrilátero de la siguiente figura,  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  y  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ . Determina el valor de  $y$ .



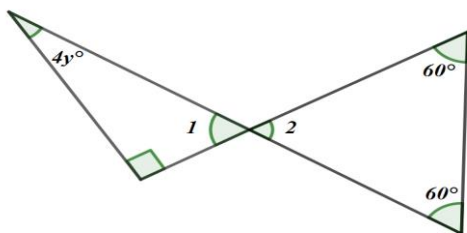
- a)  $y = 37$   
b)  $y = 35$   
c)  $y = 40$   
d)  $y = 48$

8. A partir de la siguiente figura, determina el valor de  $x$  e  $y$ . Considera que  $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ .



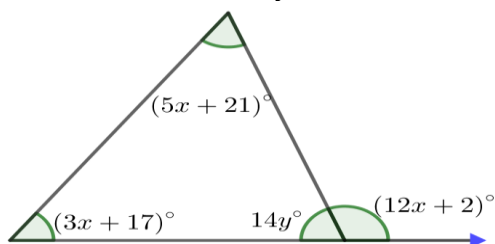
- a)  $x = 5$ ;  $y = 3$
- b)  $x = 10$ ;  $y = 7$
- c)  $x = 9$ ;  $y = 12$
- d)  $x = 15$ ;  $y = 8$

9. Determina el valor de  $y$ , en la siguiente figura.



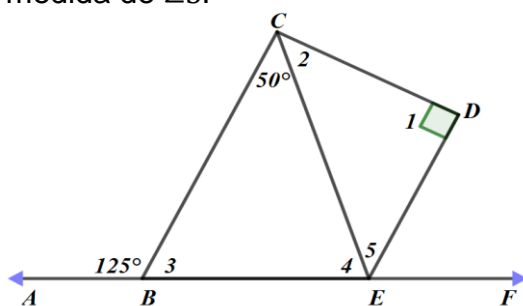
- a)  $y = 3.7$
- b)  $y = 3.5$
- c)  $y = 7.5$
- d)  $y = 4.8$

10. A partir de la figura siguiente, determina el valor de  $x$  e  $y$ .



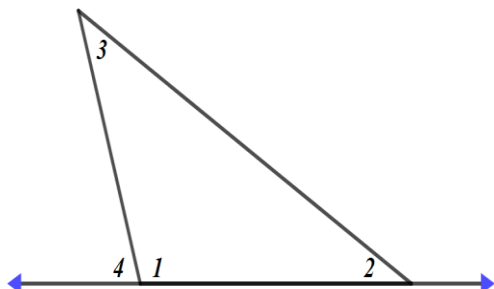
- a)  $x = 6$ ;  $y = 4$
- b)  $x = 15$ ;  $y = 7$
- c)  $x = 7$ ;  $y = 12$
- d)  $x = 9$ ;  $y = 5$

11. Considerando que en la figura siguiente,  $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$  y  $\overline{CD} \perp \overline{DE}$ . Determina la medida de  $\angle 5$ .



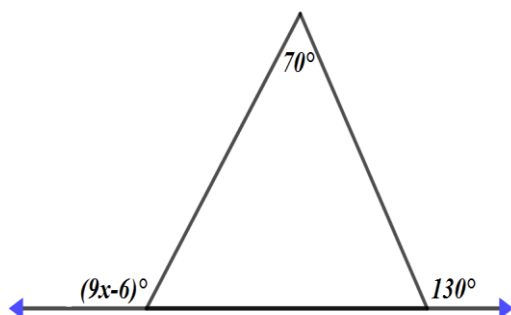
- a)  $45^\circ$
- b)  $50^\circ$
- c)  $75^\circ$
- d)  $60^\circ$

12. Determina la medida del ángulo 3 en el triángulo de la figura siguiente. Considerando que  $\angle 2 = (2n - 3)^\circ$ ,  $\angle 3 = (3n - 2)^\circ$  y  $\angle 4 = (4n + 15)^\circ$ .



- a)  $58^\circ$
- b)  $60^\circ$
- c)  $75^\circ$
- d)  $47^\circ$

13. Con base en la figura siguiente, determina el valor de  $x$ .



- a)  $18^\circ$
- b)  $16^\circ$
- c)  $27^\circ$
- d)  $14^\circ$

14. ¿Cuántos lados tiene un polígono en el cuál se pueden trazar 14 diagonales desde todos sus vértices.

- a) 7 lados.
- b) 9 lados.
- c) 10 Lados.
- d) 12 lados.

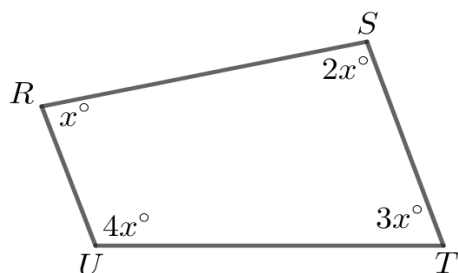
15. El ángulo exterior de un polígono regular mide  $45^\circ$  Determina:

- a) El número de lados.
- b) La suma de los ángulos interiores.
- c) El número total de diagonales.

16. Un polígono regular tiene 15 lados. Determina:

- a) La suma de los ángulos interiores.
- b) La medida de cada ángulo interior.
- c) La medida de cada ángulo exterior.

17. Determina la medida del  $\angle RUT$  de la figura siguiente.



- a)  $144^\circ$
- b)  $150^\circ$
- c)  $140^\circ$
- d)  $148^\circ$

18. Dado un triángulo  $\triangle ABC$ , de lados  $a = 11 \text{ cm.}$ ,  $b = 11 \text{ cm.}$ , y  $c = 7.5 \text{ cm.}$ , determina su área, utilizando la fórmula de Herón.

- a)  $35.7 \text{ cm}^2$
- b)  $40.5 \text{ cm}^2$
- c)  $38.5 \text{ cm}^2$
- d)  $30.8 \text{ cm}^2$

19. La longitud de una circunferencia es  $43.96 \text{ cm.}$  ¿Cuál es el área del círculo?

- a)  $135.75 \text{ cm}^2$
- b)  $153.94 \text{ cm}^2$
- c)  $138.54 \text{ cm}^2$
- d)  $163.85 \text{ cm}^2$

20. El área de un sector circular de  $90^\circ$  es  $4\pi \text{ cm.}$  Calcular el radio del círculo al que pertenece y la longitud de la circunferencia.

- a)  $37.5 \text{ cm}$
- b)  $45.7 \text{ cm}$
- c)  $38.5 \text{ cm}$
- d)  $25.13 \text{ cm}$

### 5.3. REACTIVOS DE OPCIÓN MÚLTIPLE.

1. Dos ángulos cuya suma de magnitudes es de  $180^\circ$ .

- a) Complementarios
- b) Suplementarios
- c) Correspondientes
- d) Opuestos por el vértice

2. Si dos ángulos suplementarios y si la magnitud de uno de ellos es el triple de la magnitud del otro, las magnitudes de los ángulos son.

- a)  $\alpha = 45^\circ$   
 $\beta = 135^\circ$
- b)  $\alpha = 30^\circ$   
 $\beta = 90^\circ$
- c)  $\alpha = 55^\circ$   
 $\beta = 125^\circ$
- d)  $\alpha = 35^\circ$   
 $\beta = 145^\circ$

3. Si dos ángulos suplementarios y si la magnitud de uno de ellos es el doble de la magnitud del otro menos  $30^\circ$ , las magnitudes de los ángulos son.

- a)  $\alpha = 50^\circ$   
 $\beta = 130^\circ$
- b)  $\alpha = 80^\circ$   
 $\beta = 100^\circ$
- c)  $\alpha = 70^\circ$   
 $\beta = 110^\circ$
- d)  $\alpha = 60^\circ$   
 $\beta = 120^\circ$

4. Si dos ángulos suplementarios y si la magnitud de uno de ellos es la mitad de la magnitud del otro más  $30^\circ$ , las magnitudes de los ángulos son.

- a)  $\alpha = 50^\circ$   
 $\beta = 130^\circ$
- b)  $\alpha = 80^\circ$   
 $\beta = 100^\circ$
- c)  $\alpha = 70^\circ$   
 $\beta = 110^\circ$
- d)  $\alpha = 60^\circ$   
 $\beta = 120^\circ$

5. Dos ángulos cuya suma de magnitudes es de  $90^\circ$ .



Matemáticas II	Elementos Básicos de Geometría Plana.
Unidad III	

- a) Complementarios      b) Suplementarios      c) Correspondientes  
d) Opuestos por el vértice
6. Si dos ángulos son complementarios y si la magnitud de uno de ellos es el doble de la del otro menos  $60^\circ$ , las magnitudes de los ángulos son.
- a)  $\alpha = 60^\circ$   
 $\beta = 30^\circ$       b)  $\alpha = 70^\circ$   
 $\beta = 20^\circ$       c)  $\alpha = 50^\circ$   
 $\beta = 40^\circ$       d)  $\alpha = 45^\circ$   
 $\beta = 45^\circ$
7. Si dos ángulos son complementarios y la magnitud de uno de ellos es el triple del otro menos  $10^\circ$ , las magnitudes de los ángulos son.
- a)  $\alpha = 35^\circ$   
 $\beta = 55^\circ$       b)  $\alpha = 70^\circ$   
 $\beta = 20^\circ$       c)  $\alpha = 80^\circ$   
 $\beta = 10^\circ$       d)  $\alpha = 25^\circ$   
 $\beta = 65^\circ$
8. Si dos ángulos son complementarios y la magnitud de uno de ellos es la mitad del otro menos  $30^\circ$ , las magnitudes de los ángulos son.
- a)  $\alpha = 35^\circ$   
 $\beta = 55^\circ$       b)  $\alpha = 70^\circ$   
 $\beta = 20^\circ$       c)  $\alpha = 80^\circ$   
 $\beta = 10^\circ$       d)  $\alpha = 25^\circ$   
 $\beta = 65^\circ$
9. Ángulos que tienen el vértice en común y los lados de uno de ellos son la prolongación de los lados del otro ángulo.
- a) Complementarios      b) Suplementarios      c) Opuestos por el vértice  
d) Agudos
10. Ángulos que miden más de  $0^\circ$  pero menos de  $90^\circ$ .
- a) Agudos      b) Rectos      c) Obtusos      d) Llanos
11. Ángulos que miden exactamente  $180^\circ$ .
- a) Agudos      b) Rectos      c) Obtusos      d) Llanos
12. Ángulos que miden más de  $90^\circ$  pero menos de  $180^\circ$ .
- a) Agudos      b) Rectos      c) Obtusos      d) Llanos
13. Ángulos que miden exactamente  $90^\circ$ .
- a) Agudos      b) Rectos      c) Obtusos      d) Llanos
14. El equivalente de  $\frac{\pi}{6}$  radianes en grados es.
- a)  $45^\circ$       b)  $30^\circ$       c)  $60^\circ$       d)  $75^\circ$
15. El equivalente de  $\frac{\pi}{3}$  radianes en grados es.

Matemáticas II	Elementos Básicos de Geometría Plana.
Unidad III	

- a)  $45^\circ$                       b)  $30^\circ$                       c)  $60^\circ$                       d)  $75^\circ$

16. El equivalente a  $45^\circ$  en radianes es.

- a)  $\frac{\pi}{3}$                       b)  $\frac{\pi}{2}$                       c)  $\frac{\pi}{4}$                       d)  $\frac{2\pi}{3}$

17. El equivalente de  $30^\circ$  en radianes es.

- a)  $\frac{\pi}{3}$                       b)  $\frac{\pi}{2}$                       c)  $\frac{\pi}{4}$                       d)  $\frac{\pi}{6}$

18. Los triángulos que tienen sus tres lados iguales se llaman.

- a) Rectángulos      b) Isósceles      c) Escalenos      d) Equiláteros

19. Los triángulos que tienen sus tres lados de diferente longitud se llaman.

- a) Rectángulos      b) Isósceles      c) Escalenos      d) Equiláteros

20. Los triángulos que tienen dos lados de igual longitud y el otro es de longitud diferente se llaman.

- a) Rectángulos      b) Isósceles      c) Escalenos      d) Equiláteros

21. Los triángulos que tienen un ángulo obtuso se llaman.

- a) Acutángulos      b) Obtusángulos      c) Equiláteros      d) Rectángulos

22. Los triángulos que tienen sus tres ángulos agudos se llaman.

- a) Acutángulos      b) Obtusángulos      c) Equiláteros      d) Rectángulos

23. Los triángulos cuyos tres ángulos son de igual magnitud se llaman.

- a) Acutángulos      b) Obtusángulos      c) Equiláteros      d) Rectángulos

24. Los triángulos que tienen un ángulo recto se llaman.

- a) Acutángulos      b) Obtusángulos      c) Equiláteros      d) Rectángulos

25. La suma de las magnitudes de los ángulos internos de un triángulo es.

- a)  $90^\circ$                       b)  $180^\circ$                       c)  $360^\circ$                       d)  $270^\circ$

26. En un triángulo dado, la magnitud de cualquiera de los ángulos externos es igual a.

- a) La suma de dos cualesquiera ángulos internos.  
b) La suma de los ángulos interiores no adyacentes.  
c) La suma del ángulo interior adyacente y cualquier otro ángulo interior.  
d) La suma de su complemento y un ángulo interior.

Matemáticas II	Elementos Básicos de Geometría Plana.
Unidad III	

27. La recta que divide a un ángulo dado en dos ángulos adyacentes y congruentes es.

- a) Bisectriz      b) Mediana      c) Altura      d) Mediatriz

28. La recta que es perpendicular y pasa por el punto medio de un segmento se llama.

- a) Bisectriz      b) Mediana      c) Altura      d) Mediatriz

29. La recta que pasa por el punto medio de un lado de un triángulo y el vértice opuesto se llama.

- a) Bisectriz      b) Mediana      c) Altura      d) Mediatriz

30. La recta que pasa por el vértice de un triángulo y es perpendicular al lado opuesto o a su prolongación se llama.

- a) Bisectriz      b) Mediana      c) Altura      d) Mediatriz

31. El punto que divide un segmento de tal manera que los segmentos resultantes tienen la misma longitud se llama.

- a) Baricentro      b) Punto Medio      c) Circuncentro      d) Baricentro

32. El punto de intersección de las bisectrices se llama.

- a) Incentro      b) Baricentro      c) Ortocentro      d) Circuncentro

33. El punto de intersección de las alturas se llama.

- a) Incentro      b) Baricentro      c) Ortocentro      d) Circuncentro

34. El punto de intersección de las medianas se llama.

- a) Incentro      b) Baricentro      c) Ortocentro      d) Circuncentro

35. El punto de intersección de las mediatrices se llama.

- a) Incentro      b) Baricentro      c) Ortocentro      d) Circuncentro

36. El punto que se utiliza para trazar una circunferencia inscrita a un triángulo dado es.

- a) Incentro      b) Baricentro      c) Ortocentro      d) Circuncentro

37. El punto que se utiliza para trazar una circunferencia circunscrita a un triángulo dado es.

- a) Incentro      b) Baricentro      c) Ortocentro      d) Circuncentro

Matemáticas II	Elementos Básicos de Geometría Plana.
Unidad III	

38. El punto que no es colineal a los demás es el.
- a) Incentro      b) Baricentro      c) Ortocentro      d) Circuncentro
39. El segmento de recta que va del centro de una circunferencia a cualquiera de sus puntos es un.
- a) Tangente      b) Radio      c) Secante      d) Cuerda
40. La recta que corta una circunferencia en dos puntos diferentes se llama.
- a) Tangente      b) Radio      c) Secante      d) Cuerda
41. La recta que toca a la circunferencia en único punto se llama.
- a) Tangente      b) Radio      c) Secante      d) Cuerda
42. El segmento que une dos puntos diferentes de una circunferencia se llama.
- a) Tangente      b) Radio      c) Secante      d) Cuerda
43. El segmento de recta que une dos puntos diferentes de una circunferencia y que además pasa por el centro se llama.
- a) Diámetro      b) Radio      c) Secante      d) Cuerda
44. Para que se pueda trazar un triángulo, la suma de las longitudes de dos de sus lados debe ser.
- a) Igual a la longitud del tercer lado      b) menor que la longitud del tercer lado
- c) Igual al perímetro del triángulo      d) mayor que la longitud del tercer lado.
45. Si las longitudes de dos lados de un triángulo son 7 y 12 cm. Respectivamente, ¿cuál debe ser del otro lado para poder dibujar un triángulo.
- a) 5 cm.      b) 4 cm.      c) 9 cm.      d) 3 cm.

#### 5.4. REACTIVOS: SOBRE PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

Los siguientes problemas pretender orientar al estudiante para que construya algunos de los significados más importantes de la Geometría, verbigracia, perímetros y áreas, es decir, con el solo hecho de ponernos a observar la naturaleza, el mundo que nos rodea, podemos confirmar la existencia y presencia de las más variadas formas en los cuerpos materiales que conviven en la mencionada naturaleza y entonces, es de estos que nos vamos formando la idea de perímetro, superficie, línea y de punto. Los diferentes tipos de necesidades a las cuales se ha ido enfrentando el hombre a través de los años han generado que este se ponga a

pensar y a estudiar diferentes técnicas que le permitan, por ejemplo, construir, desplazarse o medir y en este camino el hombre ha hecho uso de las diversas figuras geométricas.

### • Circunferencia y Círculo.

1. Hallar el área de un sector circular cuya cuerda es el lado del triángulo equilátero inscrito, siendo 2 cm., el radio de la circunferencia.

$$\text{Respuesta: } A = \frac{\pi * 2^2 * 120^\circ}{360^\circ} = 4.19 \text{ cm}^2.$$

2. Dadas dos circunferencias concéntricas de radio 8 y 5 cm., respectivamente, se trazan los radios OA y OB, que forman un ángulo de 60°. Calcular el área del trapecio circular formado.

$$\text{Respuesta: } A = \frac{\pi * (8^2 - 5^2) * 60^\circ}{360^\circ} = 20.42 \text{ cm}^2.$$

3. En un parque de forma circular de 700 m., de radio; hay situada en el centro una fuente, también de forma circular, de 5 m., de radio. Calcular el área de la zona de paseo.

$$\text{Respuesta: } A = \pi * (700^2 - 5^2) = 1,539,305.46 \text{ m}^2.$$

4. La superficie de una mesa está formada por una parte central cuadrada de 1 m., de lado y dos semicírculos adosados en dos lados opuestos. Calcula el área.

$$l = 1 \text{ m} \quad r = \frac{1}{2} \text{ m} \quad A = l^2 + \pi * r^2$$

$$\text{Respuesta: } A = 1^2 + \pi * \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1.785 \text{ m}^2$$

5. Calcula el área de la parte sombreada, siendo  $AB = 10\text{cm}$ .,  $ABCD$  un cuadrado y  $APC$  y  $AQD$  arcos de circunferencia de centro  $B$  y  $D$ .

Área del segmento circular

= Área del sector circular

– Área del triángulo

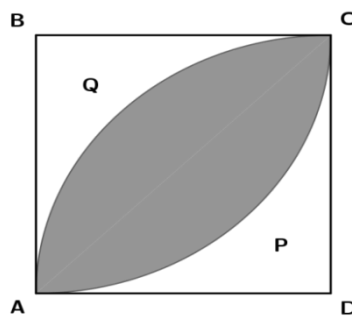
Área del sector circular

$$= \frac{\pi * (10 \text{ cm})^2 * 90^\circ}{360^\circ}$$

$$= 78.5 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{10 \text{ cm} * 10 \text{ cm}}{2}$$

$$= 50 \text{ cm}^2$$



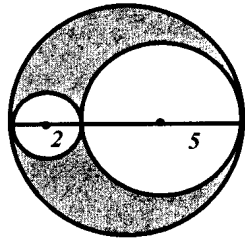
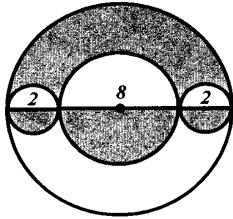
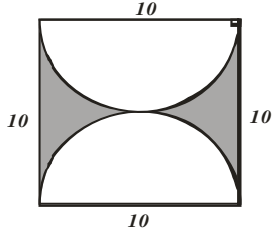
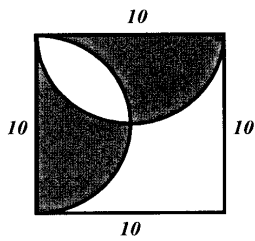
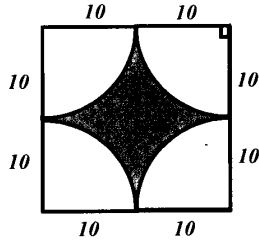
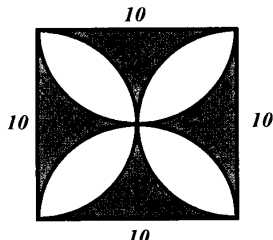
Área del segmento circular:

$$78.5 \text{ cm}^2 - 50 \text{ cm}^2 = 28.5 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área}_s = (28.5 \text{ cm}^2) * 2$$

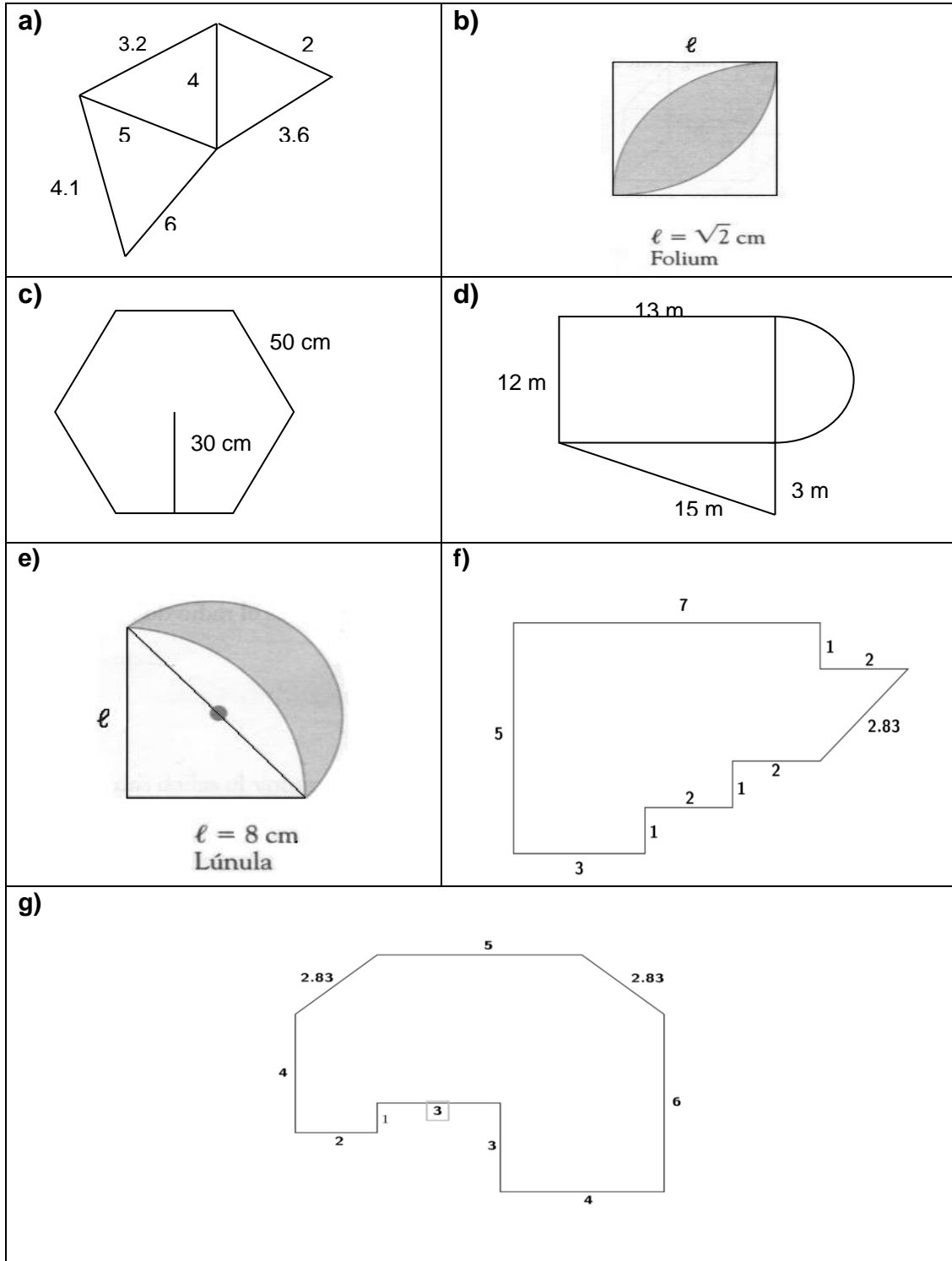
$$\text{Respuesta: } A_s = 57 \text{ cm}^2$$

6. Determine el área de las regiones sombreadas.

Matemáticas II Unidad III	Elementos Básicos de Geometría Plana.
<p><b>a.</b> La región oscura de la figura es un círculo de radio <math>\frac{7}{2}u</math>, al que se le tienen que suprimir dos círculos.</p> <p>Re <i>spuesta</i> : <math>A = \pi \left( \frac{7}{2} \right)^2 - \pi \left( \frac{5}{2} \right)^2 - \pi = \pi \left( \frac{49}{4} - \frac{25}{4} - \frac{4}{4} \right) = 5\pi u^2</math></p>	
<p><b>b.</b> La región oscura de la figura es equivalente a un semicírculo de radio <math>6u</math>. Diámetro <math>12</math> unidades.</p> <p>Re <i>spuesta</i> : <math>A = \frac{1}{2} \pi (6)^2 = 18\pi u^2</math>.</p>	
<p><b>c.</b> La región oscura de la figura corresponde a un cuadrado de lado <math>10</math> al que se le han suprimido dos semicírculos de radio <math>5</math> unidades, es decir un círculo de radio <math>5u</math>.</p> <p>Re <i>spuesta</i> : <math>A = 100 - 25\pi u^2</math>.</p>	
<p><b>d.</b> Si dividimos y reacomodamos las regiones oscuras de la figura podemos formar: una semicircunferencia de radio <math>5u</math> cuya área es <math>A_1 = \frac{25\pi}{2} u^2</math> y otra región cuya área es la mitad de la calculada en el inciso anterior (inciso c.) con área de <math>A_2 = \frac{1}{2}(100 - 25\pi) u^2</math>. Luego:</p> <p>Re <i>spuesta</i> : <math>A = A_1 + A_2 = \frac{25\pi}{2} + \frac{1}{2}(100 - 25\pi) = 50 u^2</math>.</p>	
<p><b>e.</b> La región oscura de la figura corresponde a un cuadrado de lado <math>20</math> unidades de longitud sin las cuatro esquinas circulares de radio <math>10u</math> (que forman un círculo de radio <math>10u</math>), por consiguiente:</p> <p>Re <i>spuesta</i> : <math>A = 20^2 - \pi(10)^2 = 100(4 - \pi) u^2</math>.</p>	
<p><b>f.</b> El área de la región oscura equivale al área de dos regiones como las mostradas en el inciso anterior (inciso e).</p> <p>Re <i>spuesta</i> : <math>A = 2(10^2 - 25\pi) = 50(4 - \pi) u^2</math>.</p>	

• **Perímetros y Áreas.**

1. Calcula el perímetro y el área de unos terrenos que tiene las dimensiones de las siguientes figuras.



Matemáticas II	Elementos Básicos de Geometría Plana.
Unidad III	

### 5.5. CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS.

Actividad. Con el apoyo de regla y compás realiza las siguientes construcciones.

1. Dado un segmento construir su mediatriz.
2. Dado un ángulo trazar su bisectriz.
3. Trazar la perpendicular a un segmento por uno de sus extremos.
4. Dado un ángulo trazar otro de igual magnitud.
5. Trazar un triángulo equilátero.

**Respuestas a los ejercicios de los materiales de apoyo, que conforman la Unidad 3. Elementos Básicos de Geometría Plana.**

### 5.1. EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA.

Respuestas de la sección 5.1. EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA.							
1. a) Iguales b) Distintos c) Perpendiculares d) Iguales e) Paralelas f) Distintos.	4. c	5. a	6. c	7. a	9. b	10. d	

### 5.2. AUTOEVALUACIÓN.

Respuestas de la sección 5.2. AUTOEVALUACIÓN.							
1. a) $\Delta QRS$ b) $\Delta PQS$ c) $\Delta PQR$	2. a) $\angle JHK$ y $\angle LHM$ b) $\angle JHL$ y $\angle KHM$ c) $\angle KHL$ d) $\angle JHK$ y $\angle LHM$ e) $\angle JHK$ y $\angle KHM$ $\angle LHM$ y $\angle JHL$		3. c	4. a	5. d	6. c	7. b
8. a	9. c	10. d	11. b	12. a	13. d	14. a	15. a) 8 lados. b) $1080^\circ$ c) 20
16. a) $2340^\circ$ b) $156^\circ$ c) $24^\circ$	17. a	18. c	19. b	20. d			

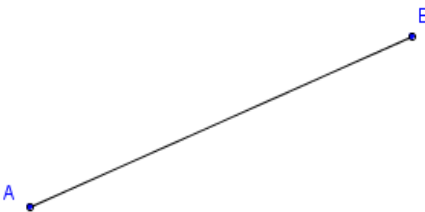
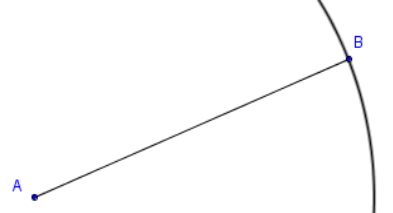
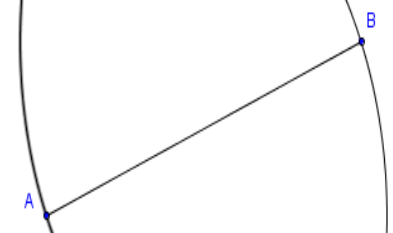
### 5.3. REACTIVOS DE OPCIÓN MÚLTIPLE.

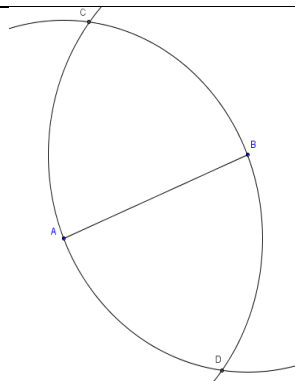
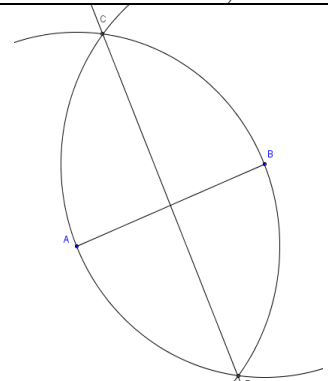


Respuestas de la sección 5.3. REACTIVOS DE OPCIÓN MÚLTIPLE.				
1. b	2. a	3. c	4. b	5. a
6. c	7. d	8. c	9. c	10. a
11. d	12. c	13. b	14. b	15. c
16. c	17. d	18. d	19. c	20. b
21. b	22. a	23. c	24. d	25. b
26. b	27. a	28. d	29. b	30. c
31. b	32. a	33. c	34. b	35. d
36. a	37. d	38. a	39. b	40. c
41. a	42. d	43. a	44. d	45. c

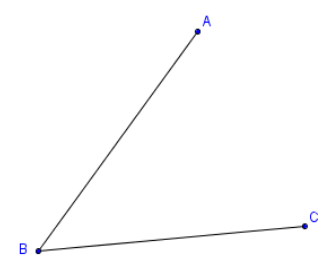
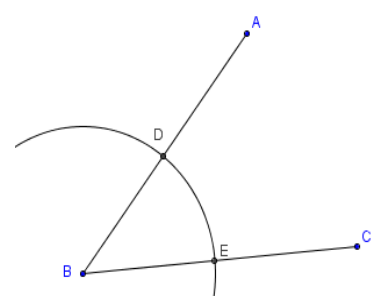
### 5.5. Respuestas a las. CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS.

**Construcción 1. Dado un segmento construir su mediatriz.**

a. Sea $\overline{AB}$ el segmento dado.	
b. Se traza la circunferencia con centro en A que pasa por B.	
c. Se traza la circunferencia con centro en B que pasa por A.	


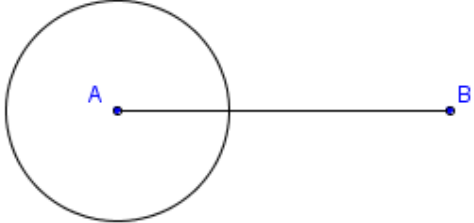
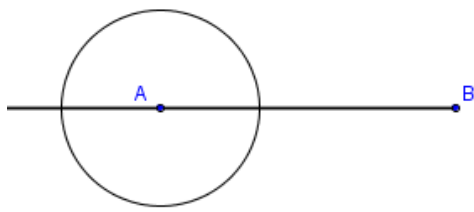
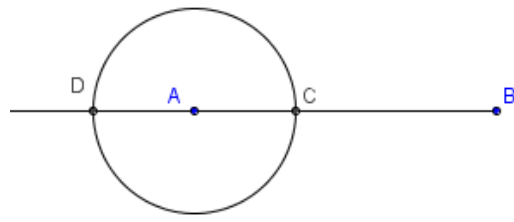
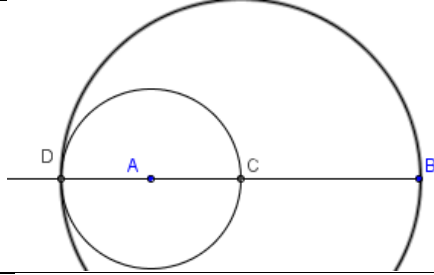
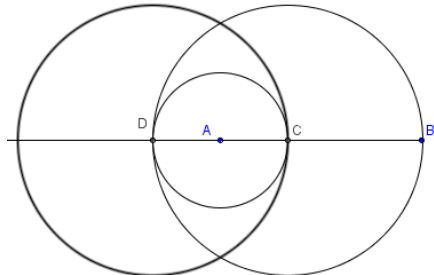
d. Se marcan los puntos C y D de intersección de las dos circunferencias.	
e. La recta que pasa por los puntos C y D es la mediatriz buscada.	

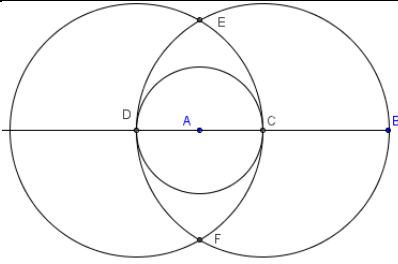
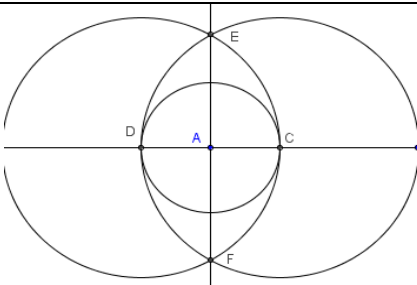
### Construcción 2. Dado un ángulo trazar su bisectriz.

a. Sea $\angle ABC$ el ángulo dado.	
b. Con centro en el punto B, y un radio adecuado se traza una circunferencia que corte los lados del ángulo en los puntos D y E.	

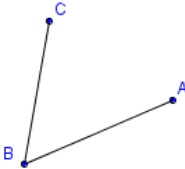
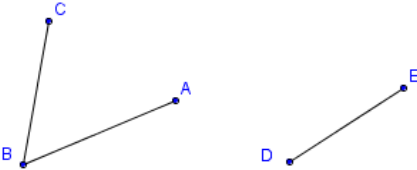
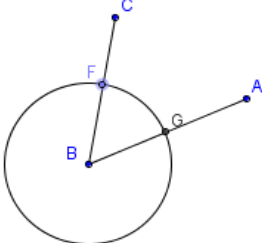
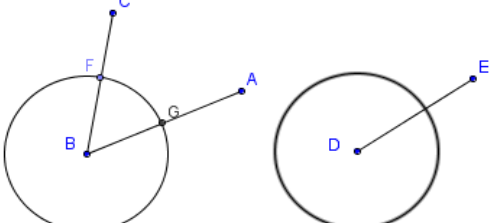
c. Se traza la circunferencia de centro en D que pasa por E.	
d. Se traza la circunferencia de centro en E que pasa por D.	
e. Se marca el punto de intersección F de las dos circunferencias.	
f. La semirrecta BF es la bisectriz buscada.	

**Construcción 3. Trazar la perpendicular a un segmento por uno de sus extremos.**

a. Sea AB el segmento dado.	
b. Con un radio adecuado se traza la circunferencia de centro en A.	
c. Se prolonga el segmento AB a la izquierda hasta pasar la circunferencia.	
d. Se marcan los puntos C y D de intersección de la circunferencia con la extensión del segmento AB.	
e. Se traza la circunferencia con radio igual al segmento DC y centro en C.	
f. Se traza la circunferencia con radio igual al segmento DC y centro en D.	

<p>g. Se marcan los puntos E y F de intersección de las dos circunferencias.</p>	
<p>h. La recta que pasa por los puntos E y F es la perpendicular buscada.</p>	

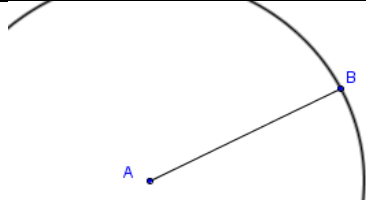
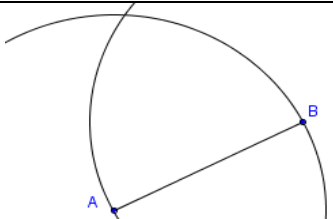
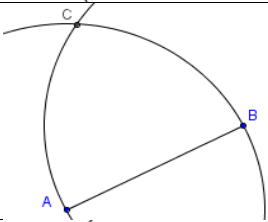
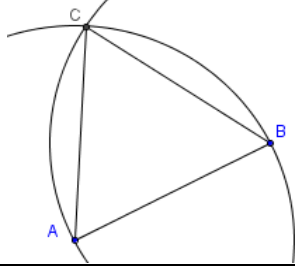
**Construcción 4. Dado un ángulo trazar otro de igual magnitud.**

<p>a. Sea <math>\angle ABC</math> el ángulo dado.</p>	
<p>b. Se traza el segmento DE.</p>	
<p>c. Se traza una circunferencia de centro en B que corte los dos lados del ángulo, en los puntos F y G.</p>	
<p>d. Con radio BG y centro en el punto D se traza una circunferencia.</p>	

e. Se marca el punto H de intersección del segmento DE con la circunferencia.	
f. Con radio GF y centro H se traza una circunferencia.	
g. Se marca el punto I de intersección de las dos circunferencias.	
h. Se traza el segmento DJ con punto inicial D y que pasa por el punto I.	
i. El ángulo $\angle EDJ$ es el ángulo buscado.	

### Construcción 5. Trazar un triángulo equilátero.

a. Se traza el segmento AB.	
-----------------------------	--

b. Se traza la circunferencia con centro en A y radio AB.	
c. Se traza la circunferencia con centro en B y radio AB.	
d. Se marca el punto C de intersección de las dos circunferencias.	
e. Se trazan los segmentos AC y BC, el $\triangle ABC$ es el triángulo buscado.	

## 6. Bibliografía Básica.

Burrill, G. F. et al. (2004). *Geometría: Integración, aplicaciones, conexiones*. México: Mc. Graw Hill, Interamericana.

Clemens, S., O'Daffer, P. y Cooney, T. (2005). *Geometría*. México: Pearson.

Cuellar, J.A. (2012). *Matemáticas II*. México: Mc. Graw-Hill Education.

Filloy, E. y Zubieta, G. (2001). *Geometría*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fuenlabrada, S. y Fuenlabrada, V. (2013). *Geometría y Trigonometría*. México: Mc. Graw-Hill Education.

Novack, J. (1988). *Constructivismo humano: un consenso emergente*. Enseñanza de las Ciencias.

Matemáticas II	Elementos Básicos de Geometría Plana.
Unidad III	

Ortiz Campos, F. J. (1991). *Matemáticas-2, Geometría y Trigonometría*. México: Publicaciones Cultural.

Salazar, L. J. et al. (2004). *Matemáticas II, Geometría y Trigonometría*. México: Publicaciones Cultural.

### **Bibliografía Virtual. Sitios consultados.**

UNAM (CCH). (2016). Programa de estudio. Área de Matemáticas I-IV. Recuperado de:  
<https://www.cch.unam.mx/sites/default/files/programas2016/MATEMATICAS-I-IV.pdf>

Soto, E. (2010). *Construcciones Geométricas*. México: Efraín Soto Apolinar. Recuperado de  
<http://www.clasesdemate.yolasite.com/resources/Construcciones-Geometricas-con-Regla-y-Compas.pdf>

OpenCourse Ware. (2019). *Tema 4. Construcciones Geométricas Básicas*. Universidad de Valencia. Recuperado de  
[http://ocw.uv.es/ingenieria-y-arquitectura/expresion-grafica/eg\\_tema\\_4.pdf](http://ocw.uv.es/ingenieria-y-arquitectura/expresion-grafica/eg_tema_4.pdf)

Rochera, J. (2009). Taller de talentos matemáticos. Construcciones Geométricas. Valencia España. Recuperado de  
<https://ttm.unizar.es/2009-10/ConstrGeom09.pdf>



Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

### Propósitos de la unidad:

Al finalizar el alumno:

Aplicará los conceptos de congruencia y semejanza y usará el Teorema de Pitágoras en la resolución de problemas que involucren triángulos. Argumentará deductivamente sobre la validez de algunas afirmaciones geométricas y procesos en la resolución de problemas.

### 1. Presentación de la unidad IV.

En la unidad 3, aprendiste construcciones con regla y compás, explorar las propiedades de figuras elementales y algunos conceptos básicos de la Geometría Euclidiana. La validez de las propiedades de figuras geométricas se establece por medio de un razonamiento, este razonamiento se llama Demostración. Es importante comentar que existen dos tipos de verdades en la Matemática: las que tienen como procedencia la percepción sensible, es decir se muestran, y las que se infieren por deducción lógica a partir de otros enunciados, en las cuales es preciso demostrarlas. Es necesario señalar que se demuestra lo que existe, en otras palabras, se demuestra lo que se muestra.

El desarrollo de esta unidad la he dividido en dos secciones, las cuales contienen en total 13 secuencias didácticas, en la primera parte se tratará la Congruencia, en la segunda semejanza y el teorema de Pitágoras.

En las secciones se darán definiciones, se mencionarán algunos teoremas y será necesario realizar su demostración, algunas de ellas se realizarán en la presente exposición y otras se dejarán para que las realices en forma individual, grupal o ambas.

Es fundamental tu participación en el desarrollo de esta unidad. Si te surgen dudas, pregunta. Te pido que interactúes con tus compañeros y con tu profesor o asesor.

### 2. Bosquejo Histórico.

Matemático de la antigua  
Grecia.



Euclides (330 a.C.- 275 a. C.)

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

Los griegos justificaban cada paso de las construcciones geométricas con proposiciones que a su vez estaban previamente justificadas y que al conjuntarse y sistematizarse constituyeron la estructura lógica-deductiva que permitió la demostración de los teoremas. Para que la serie de proposiciones no fuera interminable, se establecieron los términos no definidos y las proposiciones no demostrables, llamadas nociones comunes y postulados respectivamente. Es importante tener presente que en la Ciencia se aceptan o rechazan conjeturas, y en particular en la Matemática es necesario justificar cada afirmación, lo cual nos lleva a la importancia de demostrar y así llegar a la generalización.

### **3. Actividades de aprendizaje.**

Cada sección inicia mencionando los aprendizajes que debes alcanzar, de acuerdo con los contenidos (temática). Para el logro de los aprendizajes se presentan secuencias didácticas las cuales contienen inicio, desarrollo y cierre. El desarrollo de las secuencias está diseñado de tal manera que vayas construyendo tu propio conocimiento, realizaré algunas preguntas, por lo tanto, tienes que hacer uso de los conceptos adquiridos, y así llegar a conseguir mayor habilidad para argumentar los procesos utilizados y los resultados obtenidos en la resolución de problemas.

### **4. Puesta en escena de la unidad IV. Congruencia semejanza y teorema de Pitágoras.**

Esta unidad está diseñada con el propósito de que el alumno adquiera los conocimientos necesarios para el logro de aprendizajes, actitudinales, conceptuales y procedimentales señalados en la Unidad Temática 4, de la asignatura de Matemáticas II. A continuación, se presentan secuencias didácticas de las secciones de congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.

#### **Sección 1. Congruencia**

##### **Secuencia didáctica 1. Concepto de congruencia y su notación.**

**Aprendizajes:** El alumno comprenda que en geometría el concepto de congruencia está vinculado con el de igualdad. Además, utilice correctamente la notación de congruencia.

##### **Inicio.**

Para el logro de los aprendizajes de esta sección, se iniciará con las siguientes preguntas:

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

1) ¿Qué significado conoces para la palabra congruente?

2) Construye dos figuras que no sean polígonos.

3) Construye dos figuras que sean polígonos.

4) Construye dos figuras iguales que no sean polígonos.

5) Construye dos figuras iguales que sean polígonos.

### Desarrollo.

En la secundaria se estudian algunos conceptos básicos de Geometría Euclidiana, entre ellos los de congruencia, pero en el nivel bachillerato se retoman y se harán evolucionar para aplicarlos hacia temas más avanzados.

Dos figuras son congruentes, si y sólo si, tienen la misma forma y sus lados y ángulos correspondientes las mismas dimensiones. La notación propia de congruencia es:  $\cong$  en donde  $\sim$  y  $=$  simbolizan igual forma e igual tamaño respectivamente.




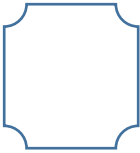
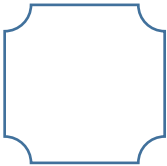
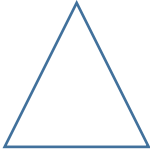
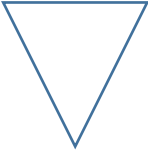



### Actividad 1.

**Comenta con tus compañeros, cuáles de las figuras que construiste son congruentes.**

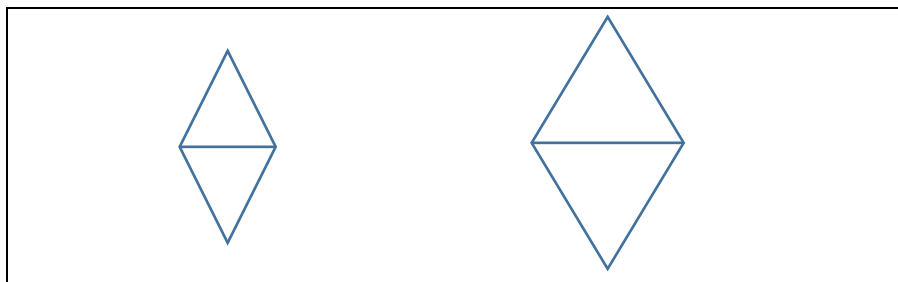
Observa que el concepto congruencia está vinculado con el de igualdad. En la aritmética se habla de igualdad, pero en geometría se utiliza la palabra congruencia en vez de igualdad.

### Actividad 2.

Con el símbolo de congruencia indica que figuras son congruentes. (Puedes utilizar regla y compás)

Figuras		
		
		
		
		

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	



### Cierre.

El profesor conduce a los alumnos para que analicen y obtengan conclusiones de las actividades realizadas, con el propósito de verificar lo aprendido o aclarar dudas.

### Secuencia didáctica 2. Figuras congruentes.

**Aprendizajes:** El alumno utiliza sus conocimientos y habilidades para construir segmentos y ángulos congruentes.

### Inicio.

En la Unidad 3. Elementos Básicos de Geometría Plana, aprendiste a realizar construcciones con regla y compás, esto te permite desarrollar la imaginación espacial y la capacidad de explorar propiedades en geometría, representar y describir el entorno físico, así como comprender la idea de medición.

Completa los siguientes incisos.

- 1) Un segmento de recta es \_\_\_\_\_.
- 2) Un ángulo se define como \_\_\_\_\_.
- 3) El punto de intersección de los lados del ángulo se llama \_\_\_\_\_.
- 4) Dos figuras son congruentes si y sólo si \_\_\_\_\_.

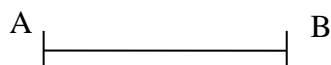
### Desarrollo.

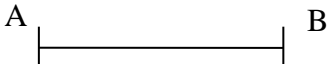
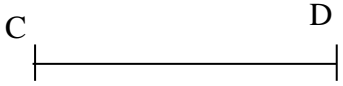
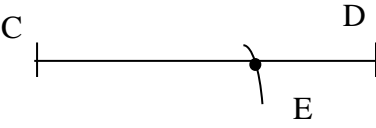
Recuerda que, en matemáticas, se habla de igualdad cuando nos referimos a cantidades iguales, y de congruencia para ángulos, segmentos o figuras que tienen las mismas dimensiones y forma.

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

### Actividad 1.

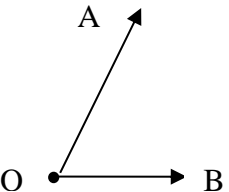
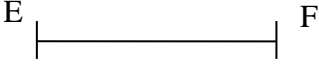
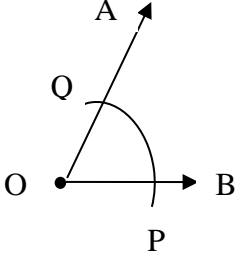
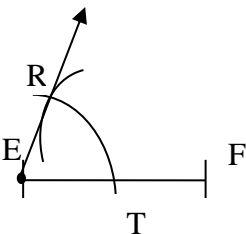
Utilizando regla sin graduar y un compás construir un segmento de recta congruente al siguiente:



<p>1) Segmento dado</p>  <p>2) Con la regla no graduada se traza un segmento de recta de longitud mayor al segmento dado.</p> 	<p>3) Se abre el compás con longitud de radio igual al <math>\overline{AB}</math> y con centro en uno de los extremos de <math>\overline{CD}</math> se traza un arco que intersecte al segmento en un punto E.</p> 	<p>4) Por lo tanto <math>\overline{AB} \cong \overline{CE}</math></p> <p>5) Comprueba con el compás que tienen la misma longitud.</p>
---	--	---

### Actividad 2.

Utilizando regla sin graduar y un compás construir un ángulo congruente al previamente trazado.

<p>1) Sea el <math>\angle AOB</math> trazado</p>  <p>2) Trazar el segmento <math>\overline{EF}</math></p> <p>Como lado inicial del ángulo por construir.</p>  <p>3) En <math>\angle AOB</math>, con centro O y con un radio conveniente se traza un arco que corte a los lados del <math>\angle AOB</math> en los puntos P y Q.</p>	 <p>¿Los segmentos <math>\overline{OP}</math> y <math>\overline{OQ}</math> son congruentes? Justifica tu respuesta _____</p> <p>4) En el segmento <math>\overline{EF}</math> con centro en E y radio <math>\overline{OQ}</math> se traza un arco que corte a <math>\overline{EF}</math> en el punto T.</p> <p>5) Con centro en T y radio <math>\overline{OP}</math>, traza un arco que intersecte al arco que cortó a <math>\overline{EF}</math>, al punto de intersección denótalo con R.</p>	<p>6) Finalmente traza la recta que une a E con R</p>  <p>Por lo tanto</p> <p><math>\angle AOB \cong \angle TER</math></p>
---	---	---

### Cierre.

Como te habrás dado cuenta, los segmentos, puntos y ángulos son algunos elementos básicos de la geometría plana.

Aplicando lo aprendido, en el espacio siguiente, construye un polígono que tenga todos sus lados congruentes y traza una de sus diagonales.

Contesta las siguientes preguntas.

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

- 1) ¿Cuántos segmentos congruentes utilizaste para construir tu polígono?  
\_\_\_\_\_.
- 2) De acuerdo con el número de segmentos que utilizaste tu polígono recibe el nombre de \_\_\_\_\_.
- 3) Al trazar la diagonal, ¿las figuras que se forman son congruentes? Argumenta tu respuesta. \_\_\_\_\_.
- 4) Compara tu construcción con la de tus compañeros.

Habrás observado excepto para los cuadriláteros, dependiendo el polígono y donde se haya trazado la diagonal las figuras que se forman son congruentes o no.

### **Secuencia didáctica 3. Congruencia de triángulos.**

**Aprendizajes:** El alumno reconoce cuándo dos triángulos son congruentes con base en la definición.

#### **Inicio.**

Recordemos la definición de triángulo.

Un triángulo es una figura de tres puntos no colineales y tres segmentos que unen estos puntos. Los puntos se llaman vértices y los segmentos lados del triángulo.

En la secuencia 1, comprendiste que las figuras geométricas son congruentes si y sólo si, tienen la misma forma y sus lados y ángulos correspondientes las mismas dimensiones, por lo tanto, se tiene la siguiente definición.

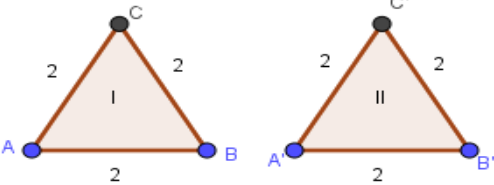
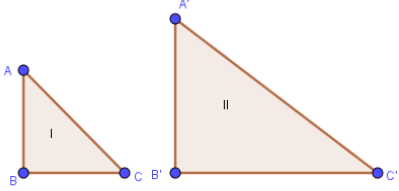
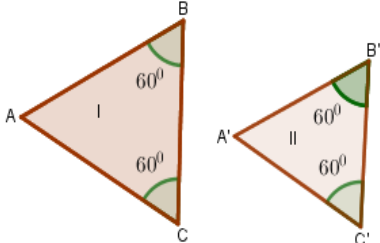
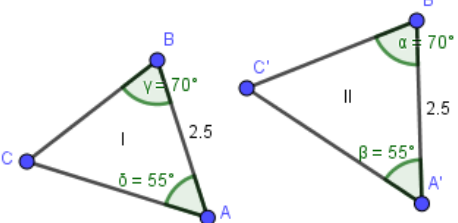
Dos triángulos son congruentes cuando al superponerlos coinciden de manera exacta, es decir, tienen la misma forma y las mismas dimensiones en sus lados correspondientes. Se utiliza el símbolo  $\Delta$  para denotar triángulo. Recordemos que el símbolo  $\cong$  denota congruencia.

#### **Desarrollo.**

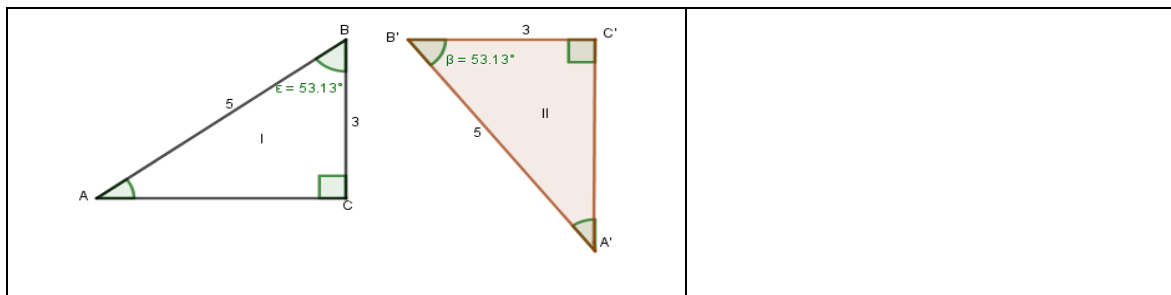


### Actividad 1.

En la siguiente tabla se presentan varios triángulos, utiliza la definición de congruencia de triángulos y la notación propia de congruencia, para indicar que triángulos son congruentes. Justifica tu respuesta.

Figuras	Respuesta
	<p><math>\triangle I \cong \triangle II</math></p> <p>Tienen las mismas dimensiones en sus lados correspondientes.</p>
	
	
	

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	



### Cierre.

El profesor orienta a los alumnos para que obtengan conclusiones respecto a la relación que existe entre los ángulos y lados de los triángulos congruentes.

### Secuencia didáctica 4. Criterios de congruencia de triángulos.

**Aprendizajes:** El alumno argumenta empíricamente la validez de los criterios de congruencia de triángulos. (LAL, LLL, ALA).

### Inicio.

En la Unidad III. Elementos Básicos de Geometría Plana, aprendiste a realizar construcciones con regla y compás, esto te permite desarrollar la imaginación espacial y la capacidad de explorar propiedades en geometría, representar y describir el entorno físico, así como comprender la idea de medición.

En esta secuencia se construirán triángulos congruentes que cumplan ciertas características y será necesario recortarlos.

### Desarrollo.

#### Actividad 1.

1) En una hoja en la que puedas recortar, construye con regla y compás, dos triángulos (para cada inciso)  $\triangle ABC$  y  $\triangle A^1B^1C^1$  que cumplan con las siguientes características:

- a)  $AB \cong A^1B^1$ ,  $AC \cong A^1C^1$  y  $BC \cong B^1C^1$
- b)  $AB \cong A^1B^1$ ,  $AC \cong A^1C^1$  y  $\angle A \cong \angle A^1$
- c)  $AB \cong A^1B^1$ ,  $\angle A \cong \angle A^1$  y  $\angle B \cong \angle B^1$
- d)  $AB \cong A^1B^1$ ,  $AC \cong A^1C^1$  y  $\angle C \cong \angle C^1$

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

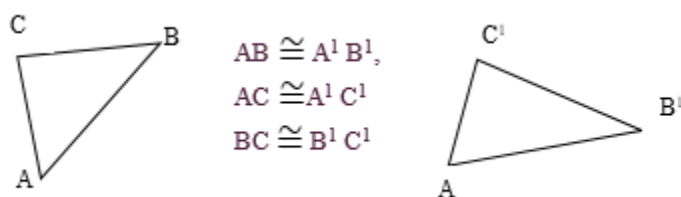
- 2) Recorta los triángulos solicitados en el 1) y muestra que los triángulos contruidos son congruentes, para ellos has coincidir sus lados y ángulos homólogos.
- 3) ¿En qué inciso o incisos los triángulos no son congruentes? \_\_\_\_\_
- 4) Comenta con tus compañeros las observaciones obtenidas, respecto a la actividad realizada.

### Cierre.

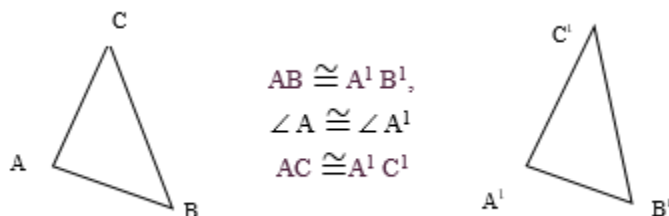
Los alumnos con el apoyo del profesor, obtienen conclusiones y formalizan para obtener los criterios de congruencia.

### Criterios de congruencia de triángulos

**Primer criterio:** Dos triángulos son congruentes, si y sólo si, los tres lados de un triángulo son congruentes a los tres lados homólogos (correspondientes) del otro triángulo. Se denota LLL.

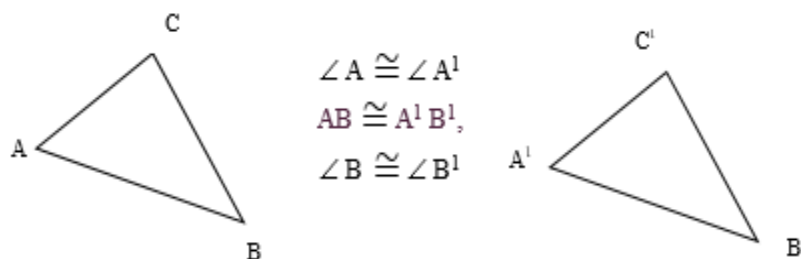


**Segundo criterio:** Dos triángulos son congruentes, si y sólo si, tienen dos de sus lados homólogos y el ángulo comprendido entre ellos congruente. Se denota LAL.



**Tercer criterio:** Dos triángulos son congruentes, si y sólo si, tienen dos ángulos homólogos congruentes y el lado comprendido entre ellos también congruente. Se denota ALA.

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	



### Secuencia didáctica 5. Validez de algunas construcciones geométricas y de algunas afirmaciones.

**Aprendizajes:** El alumno argumenta deductivamente la validez de algunas construcciones geométricas y de algunas afirmaciones, como las siguientes construcciones como:

- ❖ Bisectriz de un ángulo.
- ❖ Mediatriz de un segmento.
- ❖ Perpendicular de una recta.
- ❖ Teorema de triángulo isósceles y su recíproco.

#### Inicio.

En esta sección, se justificará formalmente las observaciones obtenidas de las construcciones que en la unidad anterior realizaste con regla y compás de: Bisectriz de un ángulo, Mediatriz de un segmento, Perpendicular de una recta, Teorema de triángulo isósceles y su recíproco.

Es importante tener presente que en la demostración de una construcción, **la hipótesis** son los pasos que se realizan para dicha construcción.

Con los conocimientos adquiridos en la unidad 2, contesta las siguientes preguntas.

- 1) ¿Cómo se define la bisectriz de un ángulo? \_\_\_\_\_.
- 2) La mediatriz de un segmento es: \_\_\_\_\_.
- 3) Las rectas perpendiculares forman ángulos de: \_\_\_\_\_.
- 4) El triángulo isósceles es: \_\_\_\_\_.

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

## Desarrollo.

### Actividad 1.

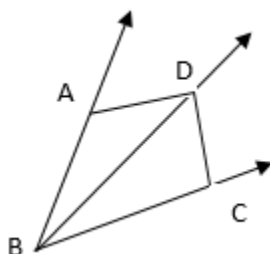
Justificación la construcción de la bisectriz de un ángulo:

Para justificar la construcción de la bisectriz es preciso indicar en la hipótesis, los pasos necesarios para dicha construcción.

Hipótesis:

- 1) Dibujamos un ángulo.
- 2) Con centro en B y un radio arbitrario trazamos un arco de circunferencia que intercepte a los lados del ángulo.
- 3) Denotamos con A y C a los puntos donde el arco intercepta a los lados.
- 4) Con un radio cualquiera, (puede ser con el radio anterior) pero con centro en A y después en C dibujamos arcos que se corten en un punto el cual denotaremos D.

Tesis: **Justificar que el segmento BD divide al ángulo en dos ángulos congruentes**



Observa que se han formado dos triángulos ABD y BCD

Completa la siguiente tabla de afirmaciones y Justificaciones.

Afirmaciones	Justificaciones
1) $AB \cong BC$	Por Construcción. ( se tomó el mismo radio)
2) $AD \cong$ _____	Por _____
3) $BD \cong BD$	Por ser lado común.
4) $\triangle ABD \cong$ _____	Por el criterio _____
5) $\therefore \angle ABD \cong \angle DBC$	Por ser ángulos homólogos de triángulos congruentes, <b>lo cual se quería justificar.</b>

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

## Actividad 2.

Justificación la construcción de la Mediatriz de un segmento.

Enuncia la definición de mediatriz. \_\_\_\_\_.

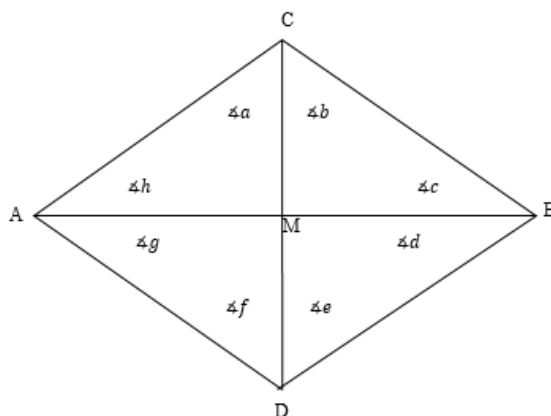
Enuncia la hipótesis. \_\_\_\_\_.

\_\_\_\_\_.

Construye la mediatriz de un segmento AB.

Tesis: El punto de intersección M, de AB y CD es punto medio del segmento AB y el segmento CM es perpendicular a AB.

Espero que siguiendo los pasos de la hipótesis, hayas obtenido una figura parecida a la siguiente.



Completa la siguiente tabla de afirmaciones y Justificaciones.

	Afirmaciones	Justificaciones
1)	M punto de intersección de AB con CD	Por _____
2)	$AC \cong BC$	Por construcción
3)	$AD \cong DB$	Por _____
4)	$CD \cong CD$	Por ser lado común

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

5)	$\triangle ACD \cong \triangle BCD$	Por el criterio_____
6)	$\angle a \cong \angle b, \angle e \cong \angle f, \angle e \cong \angle f \cong$ _____	Por 5), son ángulos correspondientes de triángulos congruentes.
7)	$AC \cong BC$	Por construcción
8)	$CM \cong CM$	Por ser_____
9)	$\triangle ACM \cong \triangle BCM$	Por el criterio_____
10)	$\angle ACM \cong \angle BCM$	Son ángulos_____
11)	$\angle AMC + \angle BMC = 180^\circ$	Por formar un ángulo llano.
12)	$\angle AMC + \angle BMC = 180^\circ$ $2\angle AMC = 180^\circ$	Por 10) y 11) Toda cantidad puede ser sustituida por su igual.
13)	$\angle AMC =$ _____	Despejando $\angle AMC$ en 12).
14)	$\angle AMC = 90^\circ = \angle BMC$	Por _____
15)	<b><math>\therefore CM \perp AB</math></b>	<b>Es una parte de la demostración.</b>
16)	$AM \cong MB$	Por 9), son lados homólogos de $\triangle ACM \cong \triangle BCM$
17)	<b><math>\therefore M</math> es punto medio de <math>AB</math></b>	<b>Es la otra parte de la demostración.</b>

### Actividad 3.

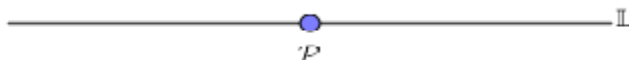
Justificación la construcción de la perpendicular a una recta. Existen dos situaciones.

Aplicando lo aprendido en la Unidad 3. Elementos Básicos de Geometría Plana, realiza la construcción solicitada y completa las tablas respectivas.

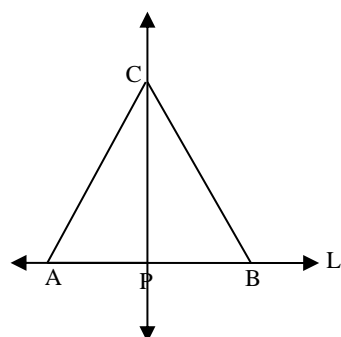
Situación 1. Construye con regla y compás, la perpendicular a la recta  $L$  que pase por el punto  $P$ , que se encuentra sobre la recta.

Hipótesis: Sea  $L$  una recta, y  $P$  un punto sobre la recta.

Tesis:  $CP \perp L$



Espero que hayas obtenido una construcción similar a la siguiente figura



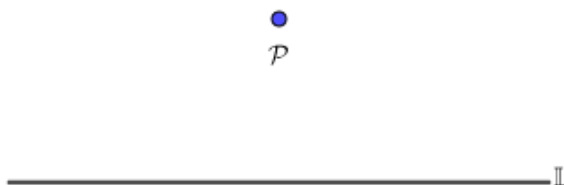
El punto P se encuentra sobre la recta L.

Afirmaciones	Justificaciones
1) P equidista de A y ____	Por construcción
2) P es punto medio del segmento _____	Por Construcción
3) CP es mediatriz de AB	Por ser P punto medio de AB
4) $CP \perp$ _____	Por definición de mediatriz
5) $\therefore CP \perp L$	<b>Lo que se quería demostrar.</b>

Situación 2. Construye con regla y compás, la perpendicular a recta L que pase por el punto P, fuera de ella.

Hipótesis: Sea L una recta, y P un punto fuera de la recta.

Tesis:  $CP \perp L$





Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

Afirmaciones	Justificaciones
1) C equidista de A y _____ 2) P equidista de A y B 3) CP es _____ de AB 4) $CP \perp AB$ 5) $\therefore CP \perp L$	Por construcción Por _____ Por ser P _____ Por definición de _____ <b>Lo que se quería demostrar.</b>

#### Actividad 4.

Teorema del triángulo isósceles y su recíproco.

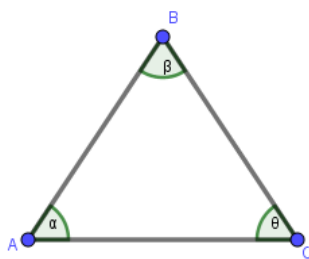
Completa la Demostración del siguiente teorema.

**TEOREMA: En todo Triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes.**

Hipótesis:  $\triangle ABC$  es isósceles,  $AB = BC$

Tesis:  $\alpha = \theta$

En el triángulo ABC, construye la bisectriz de  $\beta$  y denota con la letra D, al punto de intersección de la bisectriz con el segmento AC



#### Demostración

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\angle ABD = \angle CBD$ 2) $AB = BC$ 3) $BD = BD$ 4) $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ 5) $\therefore \alpha = \theta$	Por ser BD bisectriz Por _____ Por ser lado común Por _____ Por _____ <b>El teorema queda demostrado.</b>

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

### **Cierre.**

Con la orientación del profesor los alumnos exponen ante el grupo lo realizado en las actividades y se comentan los resultados.

Se solicita a los alumnos que con base a lo aprendido realice la siguiente actividad, como trabajo extra clase.

### **Actividad 5.**

Realiza la demostración del siguiente teorema:

Recíproco del teorema del triángulo isósceles.

**TEOREMA: En todo Triángulo isósceles los lados opuestos a ángulos congruentes son congruentes.**

### **Secuencia didáctica 6. Problemas de aplicación.**

**Aprendizaje 1:** El alumno aplica los criterios de congruencia de triángulos para justificar congruencia entre lados, ángulos y triángulos.

**Aprendizaje 2:** Resuelve problemas por medio de los criterios de congruencia.

### **Inicio.**

Es fundamental aplicar lo aprendido, ya que permitirá desarrollar todavía más tu capacidad de formular conjeturas, construir argumentos válidos para efectuar generalizaciones, comprender el significado de los conceptos, símbolos y procedimientos matemáticos, así como la habilidad en el manejo de estrategias de resolución de problemas donde se involucran la congruencia de triángulos.

En esta sección, también aplicarás los conocimientos de álgebra que adquiriste en la asignatura de matemáticas I.

Completa las siguientes afirmaciones. Comenta tus respuestas con la de tus compañeros.

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

- 1) Dos segmentos son congruentes Si y sólo si \_\_\_\_\_.
- 2) Si dos ángulos tienen la misma amplitud o medida son: \_\_\_\_\_.
- 3) Dos triángulos son congruentes: \_\_\_\_\_.
- 4) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es de: \_\_\_\_\_.
- 5) Los criterios de congruencia de triángulos son: \_\_\_\_\_.

## Desarrollo.

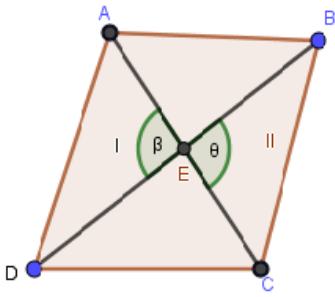
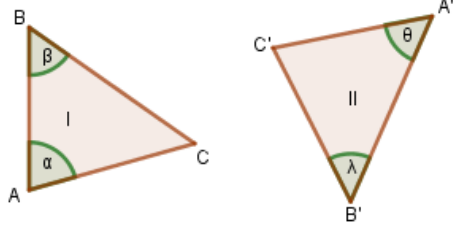
### Actividad 1.

Aplicación los criterios de congruencia.

En la siguiente tabla se presentan varias figuras. Demuestra si el triángulo 1 es congruente al triángulo 2, o que no lo es. En caso de ser congruentes indica el criterio de congruencia.

Figuras	Datos	Justificación	Criterio
	$BC = 4$ $A'C' = 4$ $\angle B \neq \angle B'$		
	$\alpha = \lambda$ $\beta = \theta$		
	$\triangle ABC$ es equilátero BD es Bisectriz		

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

	$AE = EB$ $DE = CE$		
	$AB = A'B'$ $\alpha = \theta$ $\beta = \lambda$		

## Actividad 2.

En colaboración con tus compañeros resuelve el siguiente problema:

Calcular la distancia entre dos árboles A y B que se encuentran en lados opuestos de un lago que impide la medición directa.

¿Cómo lo resolverías? \_\_\_\_\_

¿Podrías resolverlo por congruencia de triángulos? Justifica tu respuesta.

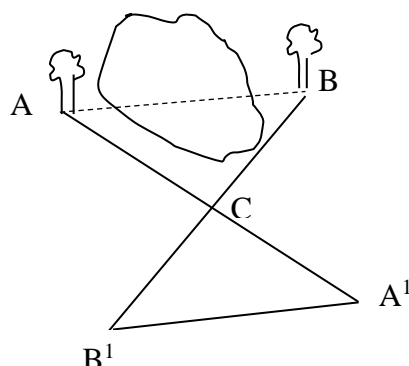
A continuación, se te presenta una forma de resolver el problema, compárala con la que tú y tus compañeros propusieron.

## Solución:

- 1) Tracemos una distancia  $AA^1$
- 2) En el punto medio de  $AA^1$  coloquemos una estaca C
- 3) Tracemos otra distancia  $BB^1$  de tal forma que  $BC = CB^1$

Hipótesis: Sean  $AC = CA^1$  y  $BC = CB^1$

Tesis:  $AB = AB^1$



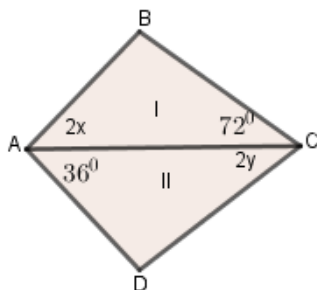
Afirmaciones	Justificaciones
1) $AC = CA'$	Por _____
2) $BC =$ _____	Por _____
3) $\angle ACB =$ _____	Por _____
4) $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$	Por criterio _____
5) $AB = A'B'$	Por ser lados homólogos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$
6) $\therefore$ La distancia es $A'B'$	Por ser la medida de $A'B'$ accesible.

### Cierre.

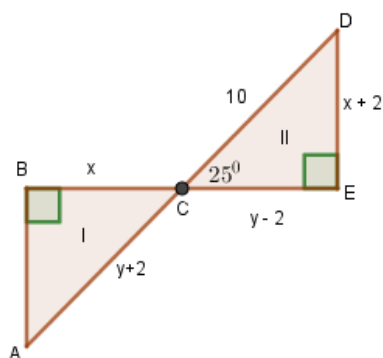
Considerando que  $\triangle I \cong \triangle II$ , aplica tus conocimientos para determinar el valor de las incógnitas y dar respuesta a lo que se pide en cada inciso. Apóyate con tus compañeros y con tú profesor.

Después ante grupo se expondrán la forma en que se resolvió cada ejercicio.

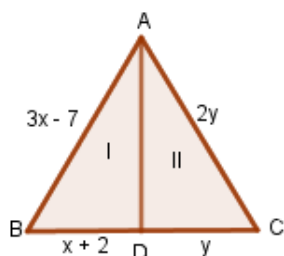
- 1) Determinar el valor del  $\angle CAB$  y *del*  $\angle ACD$



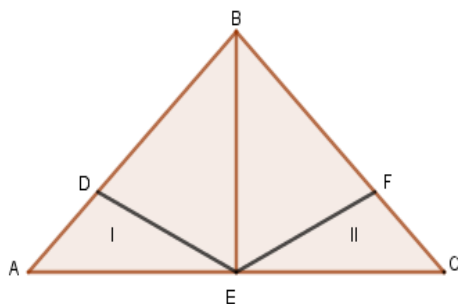
- 2) Obtener la magnitud de los segmentos AB, AC, BC, CE y de los ángulos BCA y CAB.



3) Obtener la magnitud de los segmentos AB, AC, BD, DC.



4) En un predio que tiene forma de un triángulo isósceles, se desean construir las secciones I y II para la venta de comida, las cuales deben ser en forma de dos triángulos congruentes como se muestra en la siguiente figura.



- ¿Qué condiciones debe considerar el constructor para cumplir con que los triángulos sean congruentes?
- ¿Con qué criterio argumenta que  $\triangle I \cong \triangle II$ ?

## Sección 2. Semejanza de Triángulos y teorema de Pitágoras.

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

### Secuencia didáctica 7. Concepto de semejanza y su notación.

**Aprendizajes:** El alumno utiliza correctamente la notación propia de semejanza, comprende el concepto de semejanza y reconoce cuando dos figuras son semejantes.

#### Inicio.

¿A qué se refiere el término semejanza? \_\_\_\_\_

Menciona tres ejemplos de figuras que consideres que son semejantes y justifica tu respuesta. \_\_\_\_\_

Para justificar que los ejemplos antes mencionados son semejantes, será necesario definir figuras semejantes y ver si cumplen con la definición.



Dos figuras son semejantes, si tienen la misma forma y sus dimensiones son proporcionales.

#### Desarrollo.


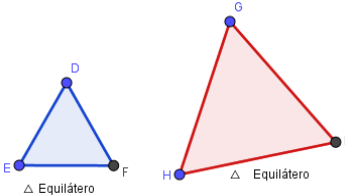

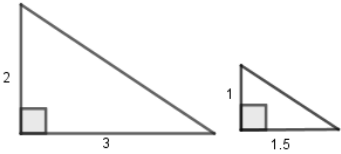
##### Actividad 1.

Identificación de objetos semejantes.

En la siguiente tabla se presentan varias figuras, identifica cuales son semejantes y cuáles no. Justifica tu respuesta.

Figuras	Semejantes	No semejantes
		
		

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

### Cierre.

Los alumnos exponen ante el grupo, la fundamentación de sus respuestas, de la actividad encomendada. El profesor conduce para que obtengan conclusiones, como las siguientes:

En nuestro entorno, existen muchas figuras que son similares, pero no semejantes de acuerdo a la definición de figuras semejantes, pero también existen muchas otras que son semejantes, por ejemplo: los anuncios de publicidad de algunos productos son realizados en escala, las fotografías se pueden reproducir en diferentes tamaños, en geometría existen muchas figuras que son semejantes porque cumplen con la definición de semejanza.

### Secuencia didáctica 8. Semejanza de triángulos.

**Aprendizajes:** El alumno reconoce cuándo dos triángulos son semejantes con base en la definición.

### Inicio.



Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

En la aritmética se realizan comparaciones entre cantidades, en la geometría entre figuras. En la sección1, se trabajó con figuras de la misma forma y las mismas dimensiones, y recordarás que son llamadas congruentes. También existen figuras geométricas que tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño,

Con base a lo anterior ¿Cómo definirías a los triángulos semejantes?\_\_\_\_\_.

En general podemos concluir que los triángulos semejantes se definen como:

Dos triángulos son semejantes, si y sólo si, sus ángulos correspondiente son congruentes, y las dimensiones sus lados homólogos (correspondientes) son proporcionales. El símbolo  $\sim$  se utiliza para denotar semejanza.

Para comprobar que los lados correspondientes de los triángulos son proporcionales, es necesario conocer la definición en matemáticas de una razón y una proporción.

Una razón  $r$ , es la comparación por cociente entre dos cantidad de la misma unidad de medida, es decir:  $r$  de  $a$  y  $b$ , con  $b \neq 0$ , se expresa como:  $r = \frac{a}{b}$ .

Una proporción es la igualdad de dos razones es decir:  $r = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  con  $b$  y  $c \neq 0$

La congruencia es un caso particular de la semejanza donde la constante de proporcionalidad es 1.

### Actividad 1.

Determinar las razones que solicitan en los siguientes incisos.

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

- a) \$50 y \$100.
- b) \$100 y \$50.
- c) 60 años y 15 años.
- d) 15 años y 60 años.
- e) 80 km y 240 km.

## Actividad 2.

Obtener el valor de la incógnita x en las siguientes proporciones.

Ejemplo.

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{2x-3}$$

Solución:  $2(2x-3) = 3x$

$$4x-6 = 3x$$

$$4x - 3x = 6$$

$$x = 6$$

a)  $\frac{x}{4} = \frac{8}{2}$

b)  $\frac{3}{x} = \frac{4}{5}$

c)  $\frac{1}{4} = \frac{x}{2}$

d)  $\frac{8}{4} = \frac{x}{1}$

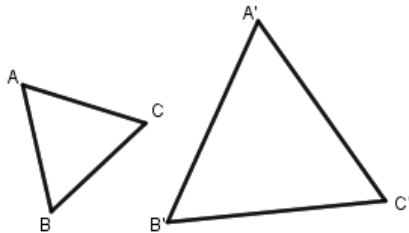
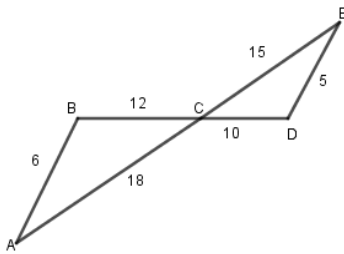
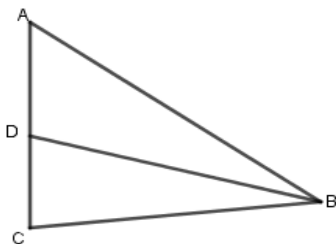
e)  $\frac{8}{4} = \frac{2x}{x-2}$

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

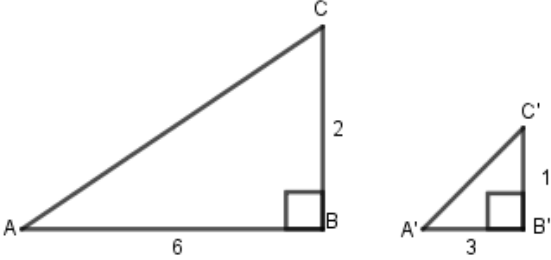
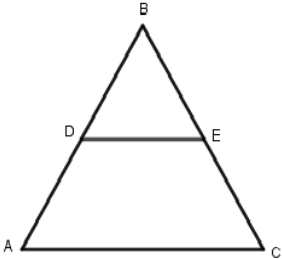
## Desarrollo.

### Actividad 3.

Considerando la definición de semejanza de triángulos, verifica si los triángulos que se presentan a continuación son semejantes. Justifica tu respuesta.

Triángulos	Justificación
 <p>Los <math>\triangle ABC</math> y <math>\triangle A'B'C'</math> son equiláteros.</p>	
	
 <p>DB bisectriz del <math>\angle ABC</math></p>	

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

	
 <p style="text-align: center;"><math>\triangle ABC</math> y <math>\triangle DEB</math></p> <p style="text-align: center;">Datos: AC paralela DE</p>	

### Cierre.

Los alumnos exponen ante el grupo, el porqué de sus respuestas. Se reflexiona respecto a las condiciones que se presentan en los triángulos semejantes y de la importancia de relacionar el álgebra con la geometría para obtener respuesta a lo requerido.

### Secuencia didáctica 9. Teorema de Thales y su recíproco.

**Aprendizajes:** El alumno divide un segmento en  $n$  partes iguales y a partir de la construcción infiere el Teorema de Thales.

### Inicio.

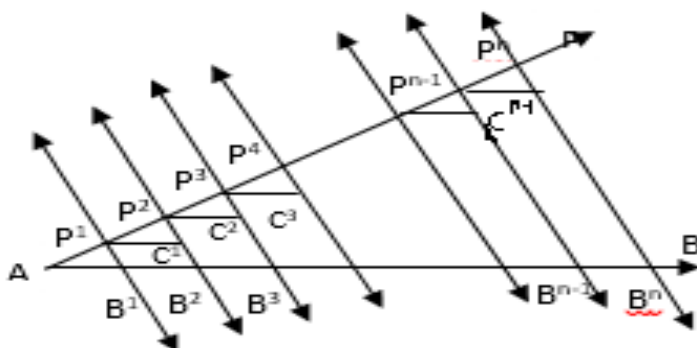
#### Actividad 1.

Sigue las instrucciones para dividir el segmento AB en  $n$  partes congruentes.

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

- Traza el segmento AB.
- Traza el rayo AP, de tal forma que no pertenezca al segmento AB.
- Con los conocimientos adquiridos en la unidad 3, divide el segmento AB y AP en  $n$  partes congruentes. Denota los segmentos formados de AB con  $AB^1, B^1B^2, B^2B^3, \dots, B^{n-1}B^n$ . Los segmentos de AP con  $AP^1, P^1P^2, P^2P^3, \dots, P^{n-1}P^n$ .
- Traza la recta que pase por  $P^n$  y  $B^n$ . Después traza rectas paralelas a  $P^nB^n$  que pase por los puntos  $P^1, P^2, P^3, \dots, P^{n-1}$ .
- Traza segmentos paralelos a los obtenidos en AB de tal forma que pasen por los puntos  $P^1, P^2, P^3$  hasta  $P^n$  respectivamente. Denota con C y su respectivo subíndice a la intersección de estos segmentos con los segmentos  $P^nB^n$ . (Observa que se formaron varios triángulos).

La figura que construiste, seguramente es de la siguiente forma:



- Menciona tres triángulos en donde uno de sus vértices sea el punto  $C^n$ .

## Desarrollo.

### Actividad 2.

Con base a la construcción realizada en la actividad 1, y considerando a los triángulos en donde uno de sus vértices sea el punto  $C^n$ , justifica las afirmaciones que faltan.

Afirmaciones	Justificación
1) $B^1B^2 \cong P^1C^1, B^2B^3 \cong P^2C^3, B^3B^4 \cong P^3C^4, \dots, B^{n-1}B^n \cong P^{n-1}C^n$	Por ser segmentos paralelos entre rectas paralelas.

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

2) $\angle P^2P^1C^1 \cong \angle P^3P^2C^2 \cong \angle P^4P^3C^3 \cong \angle P^5P^4C^4 \cong \dots$	Por ser ángulos_____
3) $\angle P^1P^2C^1 \cong \angle P^2P^3C^2 \cong \angle P^3P^4C^3 \cong \angle P^4P^5C^4 \cong \dots$	Por ser ángulos correspondientes.
4) $\angle P^1C^1P^2 \cong \angle P^2C^2P^3 \cong \angle P^3C^3P^4 \cong \angle P^4C^4P^5 \cong \dots$	Por _____
5) Los triángulos que sean formados son congruentes.	Por el criterio_____
6) $P^1P^2 \cong P^2P^3 \cong P^3P^4 \cong P^4P^5 \cong \dots$	Por ser lados _____

Continuando con la construcción, comparemos los segmentos siguientes:

$$\frac{B^1B^2}{P^1P^2} = \frac{B^2B^3}{P^2P^3} = \frac{B^3B^4}{P^3P^4} = \dots$$

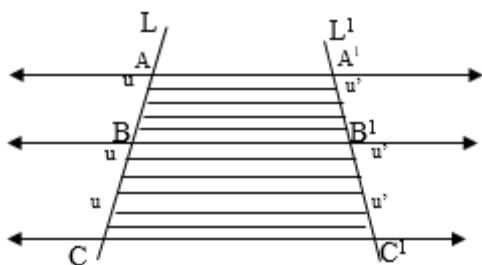
La comparación de segmentos nos conduce a uno de los teoremas más importantes de la geometría plana, conocido como el teorema de Thales,

**TEOREMA DE THALES:** Si por lo menos tres rectas paralelas son interceptadas por dos transversales, entonces ellas determinan segmentos correspondientes proporcionales en dichas transversales.

### Actividad 3.

Demostrar el teorema de Thales.

**Representación:** tracemos rectas paralelas que intercepten al segmento AB en  $n$  partes, cuya dimensión de cada uno de los segmentos resultantes sea  $m$ , al segmento BC en  $m$  partes de dimensión  $u$ .



**Hipótesis:** Sean L y L' transversales

$AA' \parallel BB' \parallel CC'$  ; AB es correspondiente  $A'B'$  y BC correspondiente a  $B'C'$ .

**Tesis:**  $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$

Con base a la construcción, justifica las afirmaciones.

Demostración:

Afirmaciones	Justificaciones
1) $AB = u(n)$	Por construcción
2) $BC = (m)u$	Por _____
3) $\frac{AB}{BC} = \frac{(n)u}{(m)u} = \frac{n}{m}$	Por 1) y 2)
4) $A'B' = (n)u'$	Por _____
5) $B'C' = (m)u'$	Por construcción
6) $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{(n)u'}{(m)u'} = \frac{n}{m}$	Por 4) y 5)
7) $\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$	Por 3) y 6) dos cosas iguales a _____
<b>El teorema queda demostrado.</b>	

Del teorema de Thales se deriva el teorema siguiente:

**Teorema de Thales para triángulos.** Toda paralela interior, a un lado de un triángulo, divide a los otros dos lados en segmentos proporcionales al primer triángulo.

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

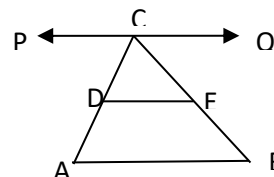
#### Actividad 4.

Completar las afirmaciones, para demostrar el teorema de Thales para triángulos.

Hipótesis: Toda paralela interior a un lado de un triángulo, divide a los otros dos lados en segmentos. Sea DE paralela al lado AB del triángulo ABC.

Tesis: Los segmentos son proporcionales.

$$\frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC}$$



Representación.

Tracemos una recta auxiliar PQ paralela AB que pase por el punto C.

Observa que AC y BC son transversales que interceptan a AB y PQ.

Demostración:

Afirmaciones	Justificaciones
1) $DE \parallel AB$	Por construcción (hipótesis)
2) $AC = AD + DC$	Por construcción (hipótesis)
3) $BC = BE + EC$	Por _____
4) $\therefore \frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC}$	Por ser AC y BC son transversales (Teorema de Thales) <b>El teorema queda demostrado.</b>

#### Cierre.

El profesor orienta a los alumnos para obtener conclusiones.

La división de un segmento en  $n$  partes iguales permite la formación de triángulos congruentes, pero también triángulos de diferentes tamaños, como son  $\Delta AP^1B^1$ ,  $\Delta AP^2B^2$ ,  $\Delta AP^3B^3$  ...  $\Delta AP^nB^n$ .

El teorema de Thales, es de gran utilidad para determinar segmentos proporcionales y por lo tanto en la semejanza de triángulos.

#### Actividad 5.

Investiga el recíproco del teorema de Thales y demuéstalo.



Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

### Secuencia didáctica 10. Criterios de semejanza de triángulos.

**Aprendizajes:** El alumno establece como válidos los criterios de semejanza.

#### Inicio.

Para comprobar que dos triángulos son semejantes no es suficiente observar si tienen la misma forma, necesitamos comprobar la congruencia de sus ángulos homólogos y que las dimensiones de sus lados correspondientes son proporcionales, para ellos es necesario establecer criterios básicos que nos permitan determinar si son semejantes.

El siguiente teorema nos conduce a los criterios de semejanza de triángulos.

**Teorema fundamental de la semejanza de triángulos:** Si dos lados de un triángulo son cortados por una paralela al otro lado del triángulo, entonces se forma un nuevo triángulo semejante al original.

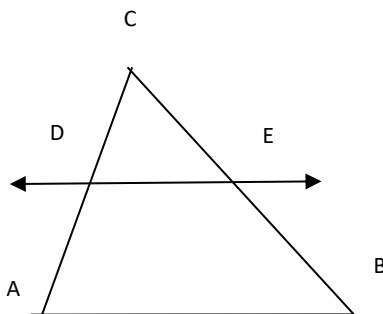
#### Actividad 1.

Completa las justificaciones para demostrar el teorema fundamental de la semejanza de triángulos.

Demostración.

Hipótesis: Si dos lados de un triángulo son cortados por una paralela al otro lado del triángulo, se forma un nuevo triángulo.  $AB \parallel DE$

Tesis: El nuevo triángulo es semejante al original.  $\triangle ABC \sim \triangle DCE$



Demostración.

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\angle CAB = \angle CDE$ 2) $\angle CBA = \angle CED$ 3) $\angle ACB = \angle DCE$  4) $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC}$ 5) $\therefore \triangle ABC \sim \triangle DCE$	Por ser ángulos _____ Por _____ ser _____ ángulos  Por ser ángulo común  Por de Teorema de Thales  <b>El teorema queda demostrado.</b>

En conclusión se tiene que el teorema demostrado nos permite afirmar que: Si dos triángulos tienen sus ángulos correspondientes congruentes, entonces son semejantes.

Los siguientes criterios de semejanza de triángulos se derivan del teorema anterior.

**Primer criterio. Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres ángulos correspondientes congruentes. Se denota AAA.**

**Segundo Criterio. Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos congruente. Se denota LAL.**

**Tercer criterio. Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales. Se denota LLL:**

**Desarrollo.**

**Actividad 2.**

Completar las afirmaciones, para demostrar el primer criterio de semejanza.

**Hipótesis:** Se tiene  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$ , donde:

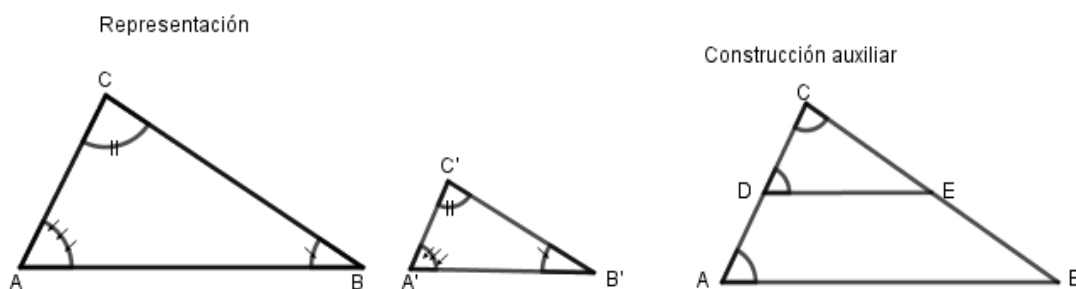
$$\angle BAC \cong \angle B'A'C'$$

$$\angle ABC \cong \angle A'B'C'$$

$$\angle ACB \cong \angle A'C'B'$$

**Tesis:**  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	



Construcción auxiliar: En  $\triangle ABC$  se traza el segmento  $DE \parallel AB$ , de tal forma que:  $DC \cong A'C'$ . Se formó el  $\triangle DCE$ .

Demostración:

Afirmaciones	Justificación
1) $\angle C \cong \angle C'$	Por hipótesis.
2) $\angle D \cong \angle A$	Por ser ángulos _____
3) $\angle A \cong \angle A'$	Por _____
4) $\angle D \cong \angle A'$	Por 2) y 3). ( Transitividad)
5) $\triangle DCE \cong \triangle A'C'B'$	Por 1) , 2) y ser $DC \cong$ _____ Criterio de congruencia _____
6) $\triangle ACB \sim \triangle DCE$	Por el teorema fundamental de semejanza de triángulos.
7) $\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$	Por 5) y 6). ( transitividad)  <b>El teorema queda demostrado.</b>

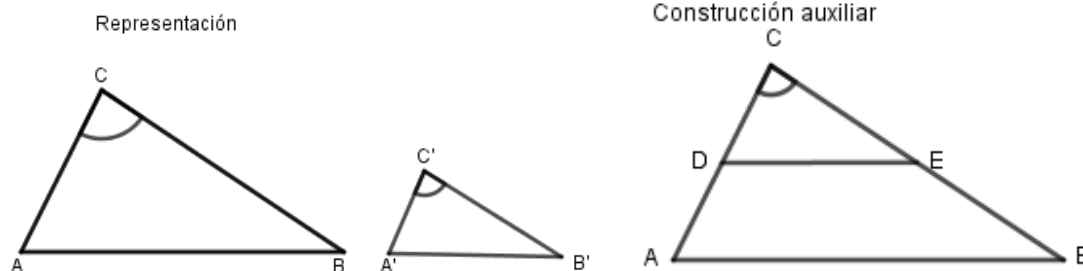
### Actividad 3.

Completar las afirmaciones, para demostrar el segundo criterio de semejanza.

**Hipótesis:**  $\angle C \cong \angle C'$  ;  $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

**Tesis:**  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$



Construcción auxiliar: En  $\triangle ABC$  se traza el segmento  $DE \parallel AB$ , de tal forma que:

$DC \cong A'C'$ . Se tiene que  $\triangle DCE \sim \triangle ACB$

Demostración:

Afirmaciones	Justificación
1) $DC \cong A'C'$	Por _____
2) $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC}$	Por ser $\triangle ACB \sim \triangle DCE$
3) $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{EC}$	Por _____
4) $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$	Por hipótesis
5) $\frac{BC}{EC} = \frac{BC}{B'C'}$	Por 3) y _____ (Transitividad)
6) $EC = B'C'$	Despejando EC en 5)
7) $\triangle CDE \cong \triangle A'B'C'$	Por criterio de congruencia LAL
8) $\triangle ACB \sim \triangle DCE$	Por teorema fundamental de semejanza de triángulos.
9) $\triangle DCE \sim \triangle A'B'C'$	Por _____

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

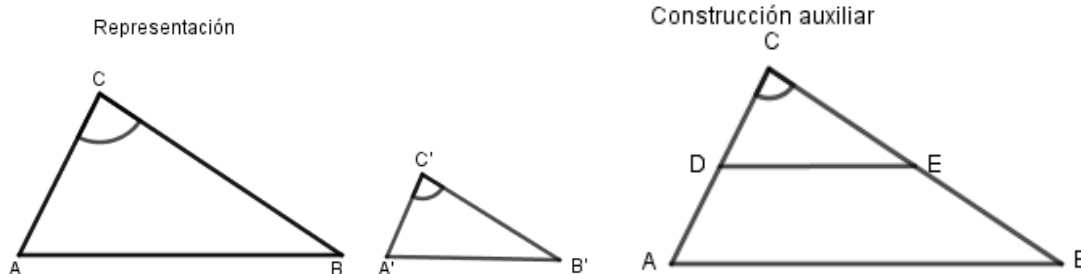
10) $\therefore \triangle ACB \sim \triangle A'B'C'$	Por 8) y 9). (Transitividad)  <b>El teorema queda demostrado.</b>
--	---

#### Actividad 4.

Completar las afirmaciones, para demostrar el tercer criterio de semejanza.

**Hipótesis:**  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$

**Tesis:**  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$



Construcción auxiliar: En  $\triangle ABC$  se traza el segmento  $DE \parallel AB$ , de tal forma que:  
 $DC \cong A'C'$ . Se tiene  $\triangle DCE \sim \triangle ACB$

Demostración:

Afirmaciones	Justificación
1) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EC} = \frac{AC}{DC}$	Por ser $\triangle ACB \sim \triangle DCE$ (Por construcción)
2) $DC \cong A'C'$	Por _____
3) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EC} = \frac{AC}{A'C'}$	Sustituyendo 2) en 1)
4) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$	Por _____
5)	
6) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EC}$	Por 3) y 4). (Transitividad)

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

7) $\frac{AB}{DE} = \frac{AB}{A'B'}$	Por 1) y 3)
8) $DE = A'B'$	Despejando _____
9) $\frac{BC}{CE} = \frac{BC}{B'C'}$	Por 3) y 4)
10) $CE = B'C'$	Despejando CE en 8)
11) $DE = A'B'$	Por 7)
12) $CE = B'C'$	Por _____
13) $AD = A'C'$	Por construcción.
14) $\triangle CDE \cong \triangle A'B'C'$	Por criterio de congruencia LLL
15) $\triangle CDE \sim \triangle ABC$	Por _____
16) $\triangle CDE \sim \triangle A'B'C'$	Por construcción
17) $\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$	Por 12) y 13) (Transitividad)  <b>El teorema queda demostrado.</b>

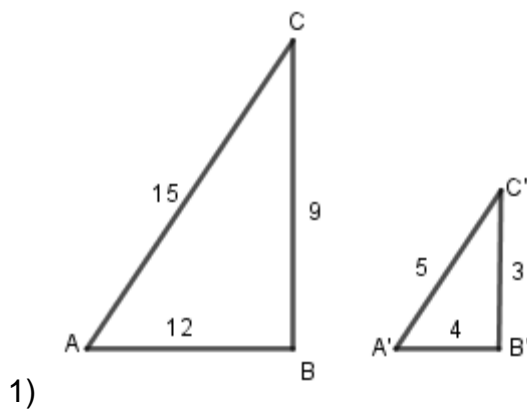
### Cierre.

Los alumnos con el apoyo del profesor realizan las siguientes actividades.

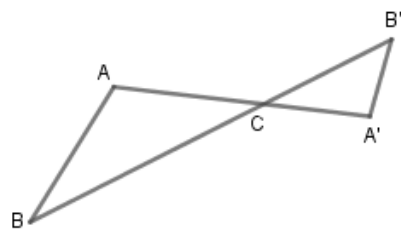
### Actividad 5.

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

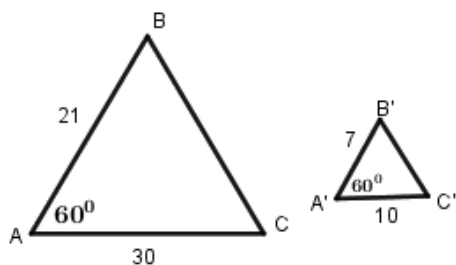
Determinar el criterio de semejanza para que  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ . Justifica la respuesta.



2) Se sabe que  $\angle A \cong \angle A'$

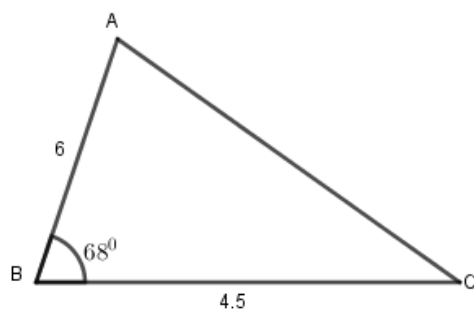


3) Se sabe que  $\angle A \cong \angle A'$



### Actividad 6.

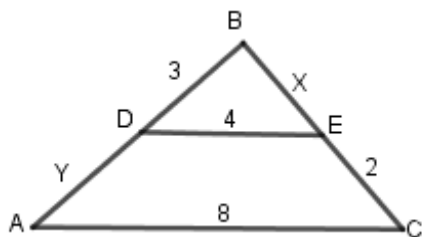
Construye el  $\triangle A'B'C'$  semejante al  $\triangle ABC$ , donde la razón de proporcionalidad sea  $\frac{1}{3}$



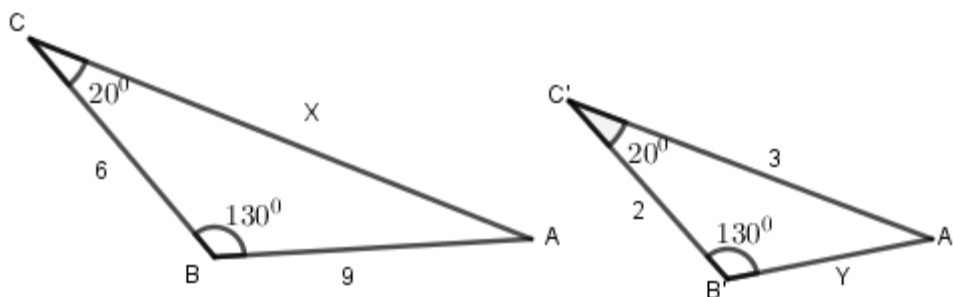
### Actividad 7.

En los siguientes incisos, justifica si los triángulos son o no, semejantes. En caso de serlo determinar el valor de las incógnitas X y Y

- 1) En el siguiente triángulo  $AC \parallel DE$



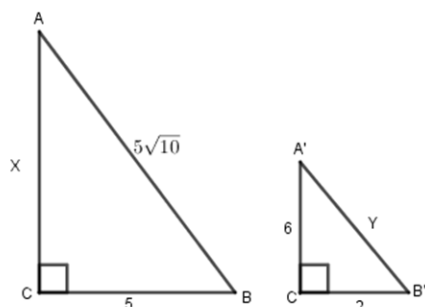
- 2)



- 3)



Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	



### Secuencia didáctica 11. Problemas de aplicación.

**Aprendizajes:** El alumno aplica los criterios de semejanza en la resolución de problemas.

#### Inicio.

Es indiscutible, que la resolución de problemas es parte de la enseñanza de la Matemática, por ello en esta secuencia aplicarás tus conocimientos de álgebra y geometría, en particular de la semejanza de triángulos para obtener las respuestas de los problemas planteados.

#### Actividad 1.

Con el propósito de que tengas presente los conocimientos de semejanza de triángulos completa las siguientes afirmaciones.

Completa las siguientes afirmaciones. Comenta tus respuestas con la de tus compañeros.

- 1) Dos triángulos son semejantes si tienen respectivamente congruente un ángulo \_\_\_\_\_ comprendido \_\_\_\_\_ entre \_\_\_\_\_ lados \_\_\_\_\_
- 2) En semejanza de triángulos el criterio representado por LLL significa que los \_\_\_\_\_ triángulos \_\_\_\_\_ tienen \_\_\_\_\_ sus \_\_\_\_\_ respectivos lados \_\_\_\_\_
- 3) Dos triángulos son semejantes si tienen respectivamente sus tres ángulos \_\_\_\_\_
- 4) El teorema Fundamental de la semejanza de triángulos dice que: \_\_\_\_\_
- 5) En matemáticas un ejemplo de una proporción es \_\_\_\_\_

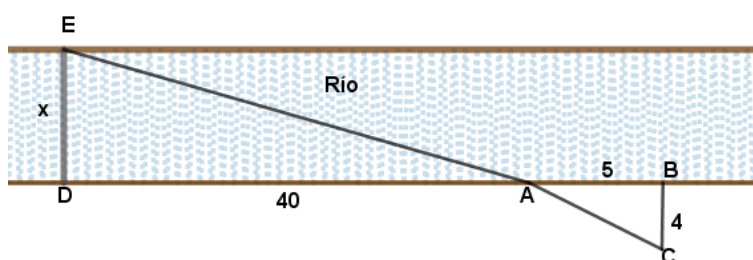
Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

## Desarrollo.

### Actividad 1.

Resuelve los siguientes problemas.

- 1) Un Ingeniero desea calcular la anchura de un río en el cual no es posible la medición directa. Para ello utiliza la siguiente estrategia: coloca una estaca en los puntos A, B, C, D, de tal forma que:  $AB = 5$ ,  $BC = 4$ ,  $AD = 40$  y  $\angle B = \angle D$ . La representación de lo realizado se muestra en la siguiente figura. ¿Cuál es la anchura del río?

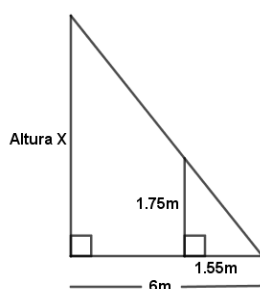


Solución.

- a)  $\angle B = \angle D$  por construcción
  - b)  $\angle BAC = \angle DAE$  por \_\_\_\_\_
  - c)  $\angle E = \angle C$  por la suma de \_\_\_\_\_
  - d)  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$  por criterio \_\_\_\_\_
  - e) Los lados de los triángulos son \_\_\_\_\_
  - f)  $\frac{5}{40} =$  \_\_\_\_\_
  - g)  $x = 32$
- 2) Una persona 1.75 metros de altura proyecta una sombra de 1.55 metros a la misma hora, un árbol proyecta una sombra de 6 metros. Calcular la altura del árbol.

Solución

- a) Representación gráfica.



- b) Los triángulos son semejantes por el teorema \_\_\_\_\_

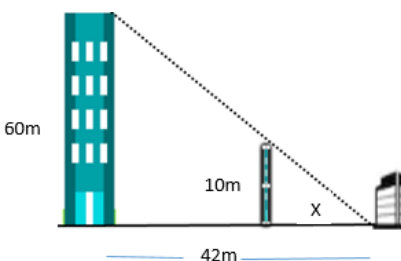
Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

c) La altura del árbol es \_\_\_\_\_

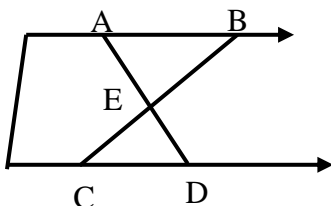
- 3) La distancia un edificio de 60 metros de altura hacia una tienda de autoservicio es de 42 metros. Se observa que un poste de 10 metros de altura se encuentra paralelo al edificio. ¿Cuál es la distancia de tienda al poste?

Solución.

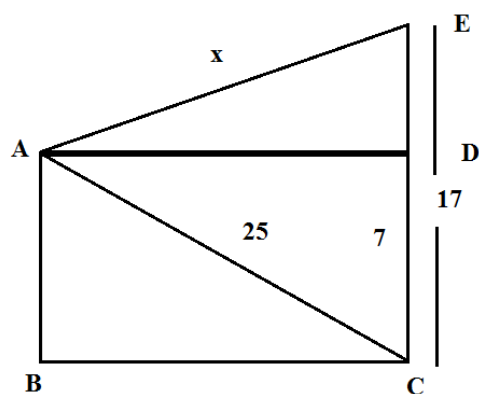
a) Representación



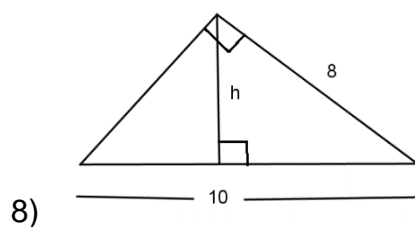
- 4) Demuestra que si  $AB \parallel CD$ , entonces:  $(\overline{AB}) (\overline{DE}) = (\overline{AE}) (\overline{CD})$



- 5) Un edificio proyecta sobre el piso una sombra de 25 metros. En ese mismo momento un poste de 6 metros, que está a su lado, proyecta una sombra de 2 metros. Determina la altura del edificio.
- 6) Determina el valor de x de la figura siguiente



- 7) Determinar la altura  $h$  del siguiente triángulo. Observa que se tienen 3 triángulos.



### Secuencia didáctica 12. Razón entre perímetros y áreas de triángulos semejantes.

**Aprendizajes:** El alumno calcula perímetros y áreas en triángulos semejantes y la razón entre ellos.

#### Inicio.

Con los conocimientos adquiridos de semejanza de triángulos, se realizarán ejercicios donde se involucre la razón de semejanza. También se trabajará con perímetros de triángulos y polígonos semejantes. Se compararán la razón de los perímetros de triángulos con la razón de semejanza, para obtener conclusiones.

Recuerda que el perímetro de un triángulo es la suma de la longitud de sus lados. El área del triángulo es el producto de la base por la altura entre dos.

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

Los polígonos semejantes son aquellos que se pueden descomponer en triángulos semejantes.

## Desarrollo.

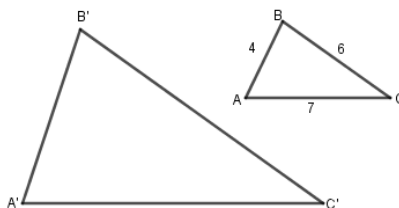
### Actividad 1.

Resuelve los siguientes reactivos

- 1)  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ , Si los lados del triángulo ABC son 4, 6 y 7. Si el perímetro de  $\triangle A'B'C'$  es de 51 unidades, determinar:
  - a) La representación geométrica de la situación planteada.
  - b) El perímetro del triángulo ABC.
  - c) La razón de semejanza entre ellos.
  - d) La longitud de los lados de  $\triangle A'B'C'$ .
  - e) Comprobar que el perímetro del  $\triangle A'B'C'$  es de 51 unidades.

Solución.

a)



b) Perímetro de  $\triangle ABC = 4 + 6 + 7 =$  \_\_\_\_\_

c) Como  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ , entonces, la razón de sus lados es la misma que hay entre sus perímetros, por lo tanto la razón de sus perímetros es: \_\_\_\_\_

Sabemos que  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ , entonces  $\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'C'}{\quad}$ .

La razón de sus lados es la misma que hay entre sus perímetros, por lo tanto,  $\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'C'}{7} = \frac{51}{17}$ . La razón de semejanza es \_\_\_\_\_

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

d) Despejando  $A'C'$  en  $\frac{A'C'}{7} = \frac{51}{17}$  se tiene  $A'C' = \underline{\hspace{2cm}}$

$$\frac{A'B'}{4} = \frac{51}{17} . \text{ Despejando } A'B' = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{B'C'}{17} = \frac{51}{17} . \text{ Despejando } B'C' = \underline{\hspace{2cm}}$$

Los lados de  $\triangle A'B'C'$  son 12, 18 y 21 unidades.

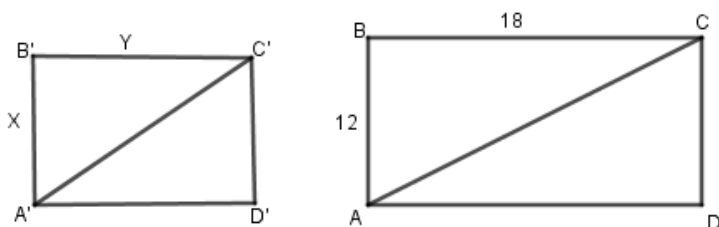
e) El perímetro del  $\triangle A'B'C'$  es:  $12 + 18 + 21 = 51$  unidades.

2) Los lados de un triángulo rectángulo ABC son 6, 8 y 10. El perímetro de otro triángulo semejante a ABC es de 72 unidades. Considerando  $\triangle A'B'C'$  el otro triángulo, determinar:

- La representación geométrica de la situación planteada.
- El perímetro del triángulo ABC.
- La razón de semejanza entre ellos.
- La longitud de los lados de  $\triangle A'B'C'$ .
- Comprobar que el perímetro del  $\triangle A'B'C'$  es de 72 unidades.

3) El rectángulo ABCD, tiene dimensiones de 12cm de ancho y 18cm largo. Se sabe que la razón de semejanza con el rectángulo  $A'B'C'D'$  es de  $\frac{5}{6}$ . Observa que al trazar una de las diagonales en cada uno los rectángulos se forman triángulos semejantes.

La representación geométrica de la situación planteada.



Determinar:

- Las dimensiones del  $\triangle A'B'C'$ .

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

- b) El área del rectángulo ABCD.
- c) El área del rectángulo A'B'C'D'.
- d) Área de triángulo ABC.
- e) Área de triángulo A'B'C
- f) La razón entre las áreas de los rectángulos.
- g) La razón entre las áreas de los triángulos de cada rectángulo.
- h) Como son las razones obtenidas de f) y g).

### Cierre.

El profesor conduce a los alumnos para que analicen y obtengan conclusiones de las actividades realizadas, con el propósito de verificar lo aprendido o aclarar dudas.

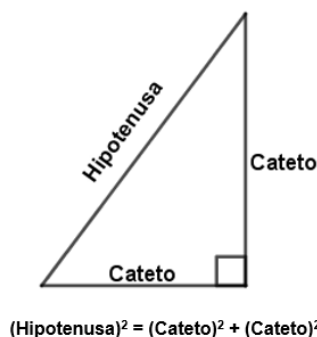
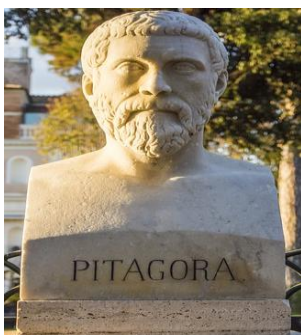
### Secuencia didáctica 13. Teorema de Pitágoras y su recíproco

**Aprendizajes:** El alumno reconoce y justifica el Teorema de Pitágoras y su recíproco, desde el punto de vista geométrico y algebraico.

### Inicio.

Pitágoras fue un filósofo y matemático griego, se cree que nació en la isla de Samos el año 569 a.C. hasta 500 a.C. Impulsó el desarrollo de las matemáticas en la antigua Grecia. Sus discípulos formaron la hermandad la Orden de Pitágoras.

Una de las aportaciones en geometría de la Orden de Pitágoras, es el teorema de la hipotenusa, el cual relaciona en un triángulo rectángulo a sus catetos con la hipotenusa. Se atribuye a Pitágoras la primera demostración de dicho teorema, por lo tanto, se le conoce como **Teorema de Pitágoras**.



### Teorema de Pitágoras

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

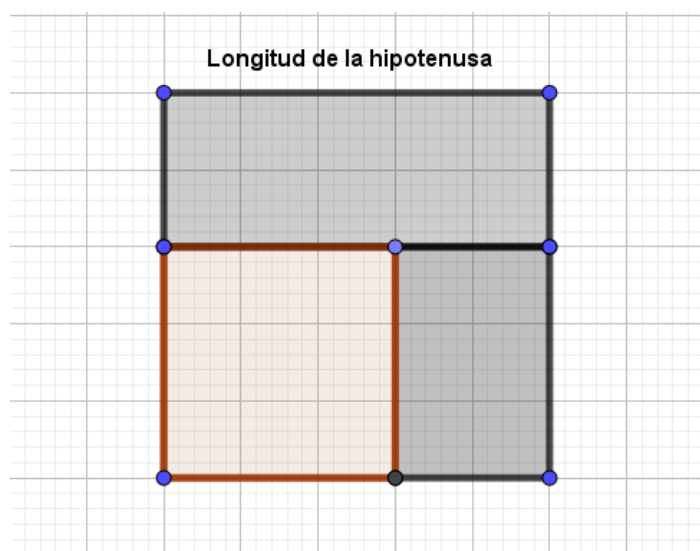
En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

### Actividad 1.

En una hoja cuadriculada construye:

- Un triángulo rectángulo.
- Un cuadrado con la longitud de la hipotenusa.
- Dos cuadrados, uno con la longitud de uno de los catetos y el otro con la del otro cateto.

Los cuadrados construidos en b) y c) sobreponlos en el cuadrado construido con la longitud de la hipotenusa. Realiza los cortes que consideres necesarios.



Analiza con tus compañeros lo realizado y obtén conclusiones.

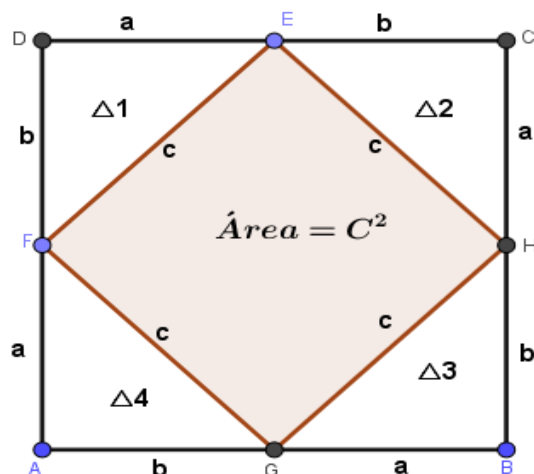
### Desarrollo.

#### Actividad 2.

En la actividad 1, mostraste que el área del cuadrado construido con la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados formados con la longitud de los catetos, pero no se ha demostrado el Teorema de Pitágoras.

Existen varias demostraciones del Teorema de Pitágoras, a continuación se presenta una de ellas donde además de las áreas se involucra el álgebra.





### Teorema de Pitágoras.

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

**Hipótesis:** Sea el cuadrado EFGH inscrito en el cuadrado ABCD de lado  $a + b$ .

**Tesis:**  $C^2 = a^2 + b^2$

Demostración:

- 1) El área del cuadrado ABCD =  $(a + b)^2$  ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- 2) ¿Los  $\Delta 1$ ,  $\Delta 2$ ,  $\Delta 3$  y  $\Delta 4$  son congruentes? Justifica tu respuesta \_\_\_\_\_
- 3) ¿Cuál es el área de cada triángulo del 2). \_\_\_\_\_
- 4) La suma de las áreas de los 4 triángulos es: \_\_\_\_\_
- 5) El área del cuadrado EFGH es \_\_\_\_\_
- 6) El área del cuadrado ABCD =  $(a + b)^2$  . Pero también es igual a la suma del área de los triángulos más el área del cuadrado de lado  $c$ .
- 7) Es decir:  $(a + b)^2 = \frac{a \cdot b}{2} + c^2$
- 8) Desarrollando el binomio.

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

$$(a+b)^2 = \frac{a \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

9) Simplificando:

$$a^2 + b^2 = 2ab + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

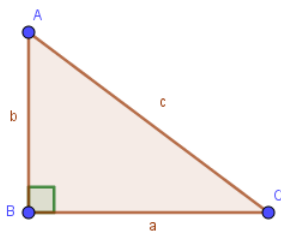
$$a^2 + b^2 = 2ab - \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Por lo tanto el teorema queda demostrado.

### Actividad 3.

Dado el siguiente triángulo, determinar:



a) Obtener la hipotenusa.

Por el teorema de Pitágoras se tiene,  $C^2 = a^2 + b^2$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros.

$$C = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ valor de la hipotenusa.}$$

b) Determinar valor del cateto a.

c) Determinar el valor del cateto b.

### Actividad 4.

Construir al menos dos triángulos que cumplan con el teorema de Pitágoras.

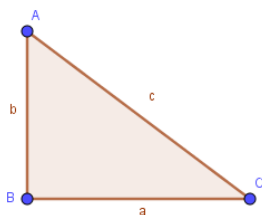
### Actividad 5.

**Recíproco del Teorema de Pitágoras.**

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

Si la suma de los cuadrados de las longitudes de dos lados de un triángulo es igual al cuadrado de la longitud del tercer lado, entonces el triángulo es rectángulo.

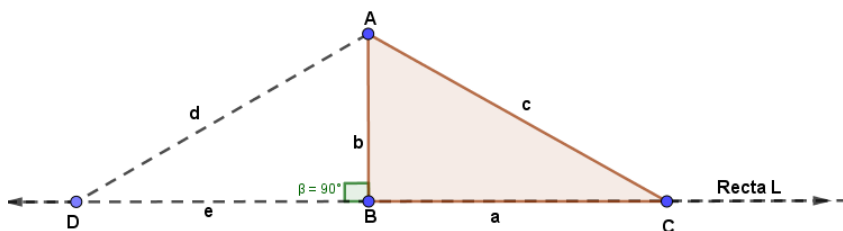
Dado el triángulo ABC donde  $C^2 = a^2 + b^2$ .



**Hipótesis:**  $C^2 = a^2 + b^2$ .

**Tesis:**  $\angle ABC = 90^\circ$ , es decir el  $\triangle ABC$  es rectángulo.

Demostración:



- 1) Trazar una recta auxiliar L perpendicular AB, que pase por el punto B.
- 2) Localizar un punto D en la recta L de tal forma que,  $DB = BC = a$ .
- 3) Se traza el segmento AD.
- 4) El triángulo ABD es rectángulo. Por construcción, del 1).
- 5)  $BD = e = BC = a$ . Por Construcción de 2).
- 6) En triángulo ABD.  $d^2 = e^2 + b^2$  Por teorema de Pitágoras.
- 7)  $d^2 = b^2 + a^2$  Por 5).
- 8)  $c^2 = a^2 + b^2$  Por hipótesis.
- 9)  $c^2 = a^2$  Por 7) y 8).
- 10) Como  $c$  y  $d$  son mayores que cero, entonces extrayendo raíz cuadrada se tiene.  $c = d$ .
- 11)  $\triangle ABC \sim \triangle DBC$  Por el criterio L L L. ya que:
  - $DB = BC$  Por 2)
  - $AB = AB$  Por ser lado común.
  - $DA = AC$  Por 7)
- 12)  $\angle ABC = \angle ABD = 90^\circ$

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

13) Por lo tanto  $\triangle ABC$  es rectángulo. El Teorema queda demostrado.

### Actividad 6.

En colaboración con tus compañeros y después en plenaria con todo el grupo, resolver los siguientes ejercicios.

- 1) Un rectángulo, tiene de ancho 9 cm. y de largo 12 cm. Determina la longitud de su diagonal.
- 2) ¿Cuánto miden los catetos de un triángulo rectángulo isósceles, si su hipotenusa tiene una longitud de  $\sqrt{80}$  ?
- 3) Las dimensiones de un triángulo son 9, 12 y 15. Determinar si el triángulo es rectángulo.
- 4) En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 20 unidades y uno de sus catetos mide 12 unidades. Determinar la medida del otro cateto.
- 5) Dado el triángulo formados por los lados de dimensiones 11, 8 y 6 unidades. Determinar si es rectángulo.

### Cierre.

### Actividad 6.

- a) Investigar la demostración del Teorema de Pitágoras basada en la semejanza de triángulos.

**Secuencia didáctica 14. Problemas de longitudes y áreas que involucran semejanza, congruencia y teorema de Pitágoras. Teorema de la altura de un triángulo rectángulo.**

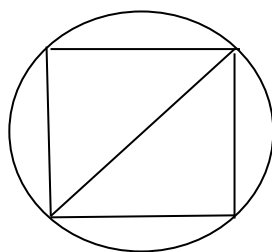
**Aprendizajes:** El alumno utiliza los conocimientos adquiridos en esta unidad, en la resolución de problemas.

**Inicio.** Realiza los siguientes ejercicios.

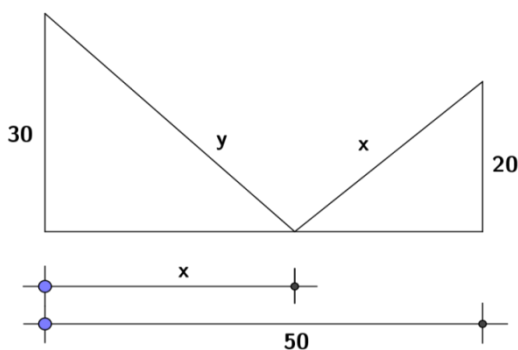
Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

### Actividad 1.

- 1) El área de un triángulo rectángulo es de 45 cm cuadrados, la suma de sus catetos es de 21 cm. Calcular la longitud de sus lados.
- 2) Determinar la longitud de una escalera que se encuentra apoyada en una pared vertical, alcanzando una altura de 3.7 metros, y la distancia del pie de la escalera a la pared es de 1.5 metros.
- 3) Se va a sembrar pasto en el mayor cuadrado posible de un jardín circular de 12 metros de diámetro. Determinar el área aproximada del cuadrado y del jardín sobrante.

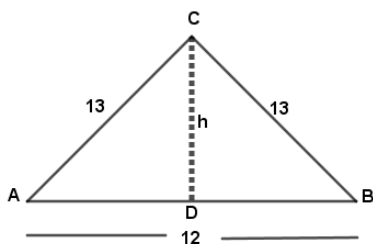


- 4) En la siguiente figura, determina la longitud de los segmentos  $x$  e  $y$ , considerando que los dos triángulos mostrados son rectángulos.



- 5) En el siguiente triángulo isósceles, calcular la altura  $h$  si sus lados iguales miden 13 cm. y su base mide 12 cm. Justifica que la altura es mediatriz.

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	



## 5. Materiales de Apoyo.

### 5.5. AUTOEVALUACIÓN.

Las actividades de aprendizaje siguientes tienen la finalidad de poner en práctica lo aprendido en la unidad 4 de la asignatura de Matemáticas II. Realiza tu autoevaluación comparando tus respuestas en la sección correspondiente.

## CONGRUENCIA

**Ejercicio 1.** En la siguiente tabla relaciona la columna de tu izquierda con la de la derecha, para completar las oraciones.

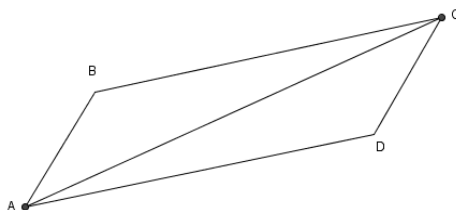
1	Criterio de congruencia en triángulos. (LLL).	( )	Tienen dos de sus lados homólogos y el ángulo comprendido entre ellos congruentes.
2	Figuras congruentes.	( )	Tienen dos ángulos homólogos al lado comprendido entre ellos congruentes.
3	Criterio de congruencia en triángulos (LAL).	( )	No existe.
4	Criterio de congruencia en triángulos (ALA).	( )	Los tres lados de un triángulo son congruentes a los tres lados homólogos del otro triángulo.
5	En todo triángulo isósceles los lados opuestos a los ángulos congruentes son congruentes.	( )	Recíproco del teorema del triángulo isósceles
6	Son triángulos rectángulos.	( )	Uno de sus lados es perpendicular a otro.

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

7	Es la notación para triángulos congruentes	( )	$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$
8	En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes.	( )	Tienen la misma forma las mismas dimensiones.
9	Criterio de congruencia en triángulos (AAA).	( )	Teorema del triángulo isósceles.

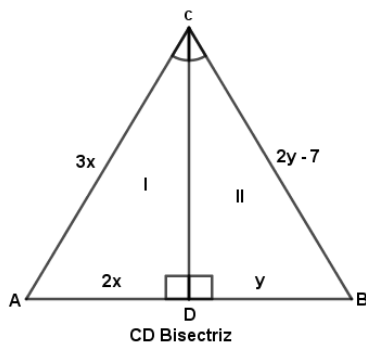
**Ejercicio 2.** Resuelve los siguientes problemas.

- 1) Un agricultor desea heredar en partes iguales a dos de sus hijos con un terreno que tiene forma de un paralelogramo. Uno de sus hijos le dice que deberá trazar una de las diagonales del terreno para obtener dos triángulos congruentes. ¿Cuál es el criterio que permite afirmar que los triángulos que se forman son congruentes? Justificar la respuesta.

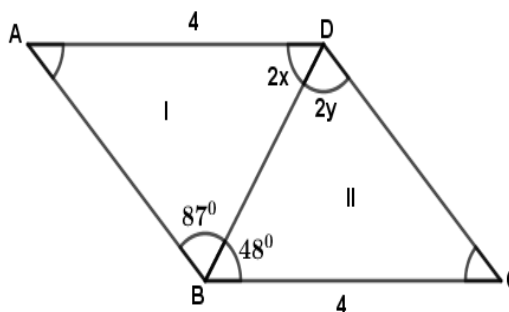


- 2) En los incisos siguientes determinar el criterio por el cual los triángulos I y II son congruentes y obtener el valor de  $x$  y  $y$ .

a)

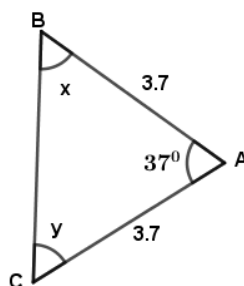


b)



Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

c)



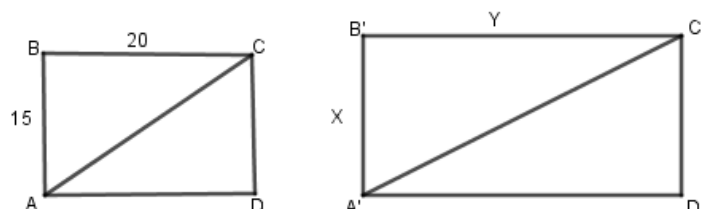
### Ejercicio 3.

#### SEMEJANZA

- 1) Enunciar el teorema de Thales para triángulos.
- 2) Mencionar tres criterios de semejanza de triángulos y ejemplificar.
- 3) Los lados de un triángulo rectángulo ABC son 3, 4 y 5 El perímetro de otro triángulo semejante a ABC es de 24 unidades. Considerando  $\triangle A'B'C'$  el otro triángulo, determinar:
  - a) La representación geométrica de la situación planteada.
  - b) El perímetro del triángulo ABC.
  - c) La razón de semejanza entre ellos.
  - d) La longitud de los lados de  $\triangle A'B'C'$ .
  - e) Comprobar que el perímetro del  $\triangle A'B'C'$  es de 24 unidades.
- 4) El rectángulo ABCD, tiene dimensiones de 15cm de ancho y 20cm largo. Se sabe que la razón de semejanza con el rectángulo  $A'B'C'D'$  es de  $\frac{3}{2}$ . Sugerencia. Traza una diagonal en cada rectángulo.

La representación geométrica de la situación planteada.

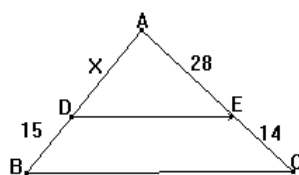




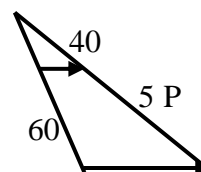
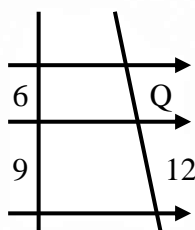
Determinar:

- Las dimensiones del  $\triangle A'B'C'$ .
- El área del rectángulo ABCD.
- El área del rectángulo A'B'C'D'.
- Área de triángulo ABC.
- Área de triángulo A'B'C
- La razón entre las áreas de los rectángulos.
- La razón entre las áreas del triángulo ABC y del triángulo A'B'C
- Como son las razones obtenidas de f) y g).

5) Determinar el valor de la incógnita.



DE paralela a BC



El valor de X es:

- 28
- 43
- 42
- 30
- 33

El valor de Q es:

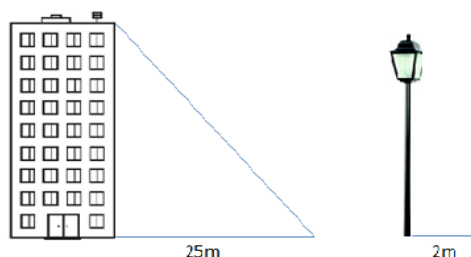
- 18
- 8
- 6
- 15
- 12

El valor de P es:

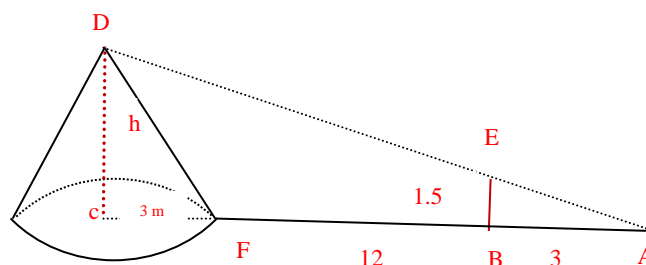
- 8
- 10.32
- 12.33
- 13.33
- 20

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

- 6) Un edificio proyecta sobre el piso una sombra de 25 metros. En ese mismo momento un poste de 6 metros, que está a su lado, proyecta una sombra de 2 metros. Determinar la altura del edificio.



- 7) Calcula la altura “h” del cono que se muestra en la figura. (El radio del círculo de su base mide 3m).



#### Ejercicio 4.

Teorema de Pitágoras

1. Enunciar el teorema de Pitágoras y ejemplificar.
2. En el teorema de Pitágoras, ¿cuál es la hipótesis y cuál la tesis?
3. Escribe la expresión algebraica para obtener la hipotenusa.
4. Escribe la expresión algebraica para obtener los catetos.
5. Enunciar el recíproco del teorema de Pitágoras.

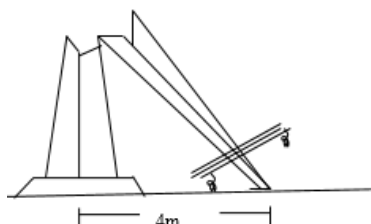
#### Ejercicio 5.

Realizar las operaciones necesarias para contestar los reactivos siguientes:

- 1) En un rectángulo, su diagonal mide 9 cm. y uno de sus lados 5 cm. Determinar la longitud del otro lado.
- 2) Determinar el valor del cateto **a**, si el cateto **b=6** y la hipotenusa **c=8**.
- 3) El área de un triángulo rectángulo es de 88 cm cuadrados, y un cateto es mayor que el otro por 5 cm. Calcular la longitud de sus lados.

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

- 4) Un rayo partió un poste de 8m. de altura, como se observa en la figura. Si la punta quedó en el suelo a 4m. de la base como se muestra en la figura. ¿A qué altura se partió el poste?



- 5) Una escalera de 25 m. de longitud está recargada en un muro, la distancia del pie de la escalera al muro es de 15 m. ¿Qué altura alcanza la escalera?

## RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN, QUE CONFORMAN LA UNIDAD 4. CONGRUENCIA, SEMEJANZA Y TEOREMA DE PITÁGORAS.

### CONGRUENCIA

**Ejercicio 1.** En la siguiente tabla relaciona la columna de tu izquierda con la de la derecha, para completar las oraciones.

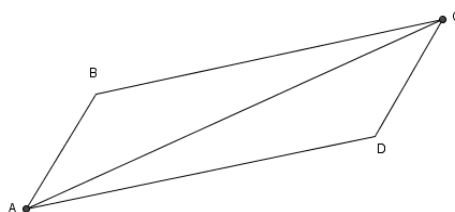
1	Criterio de congruencia en triángulos. (LLL).	( 3 )	Tienen dos de sus lados homólogos y el ángulo comprendido entre ellos congruentes.
2	Figuras congruentes.	( 4 )	Tienen dos ángulos homólogos al lado comprendido entre ellos congruentes.
3	Criterio de congruencia en triángulos (LAL).	( 9 )	No existe.
4	Criterio de congruencia en triángulos (ALA).	( 1 )	Los tres lados de un triángulo son congruentes a los tres lados homólogos del otro triángulo.

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

5	En todo triángulo isósceles los lados opuestos a los ángulos congruentes son congruentes.	( 8 )	Recíproco del teorema del triángulo isósceles
6	Son triángulos rectángulos.	( 6 )	Uno de sus lados es perpendicular a otro.
7	Es la notación para triángulos congruentes	( 7 )	$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$
8	En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes.	( 2 )	Tienen la misma forma las mismas dimensiones.
9	Criterio de congruencia en triángulos (AAA).	( 5 )	Teorema del triángulo isósceles.

**Ejercicio 2.** Resuelve los siguientes problemas.

- 1) Un agricultor desea heredar en partes iguales a dos de sus hijos con un terreno que tiene forma de un paralelogramo. Uno de sus hijos le dice que deberá trazar una de las diagonales del terreno para obtener dos triángulos congruentes. ¿Cuál es el criterio que permite afirmar que los triángulos que se forman son congruentes? Justificar la respuesta.



Sol.

Como el lado BC es paralelo a AD y AC es la transversal que los corta entonces:

$\angle ACB \cong \angle CAD$  Por ser correspondientes.

El lado  $AC \cong AC$  Por ser lado común de los triángulos ABC y ACD.

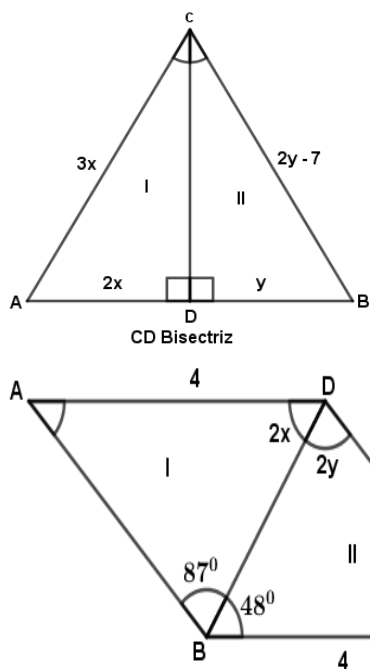
$\angle ACD \cong \angle BAC$  Por ser correspondientes.

$\triangle ABC \cong \triangle ACD$  Por el criterio ALA

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

- 2) En los incisos siguientes determinar el criterio por el cual los triángulos I y II son congruentes y obtener el valor de  $x$  y  $y$ .

a)

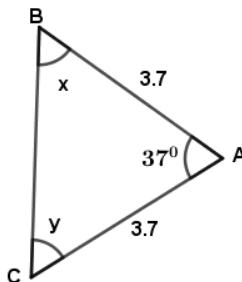


b)

Sol. a). Criterio ALA  
 $X = 7$ ,  $Y = 14$ .

Sol. b) Criterio LAL  
 $X = 24^\circ$ ,  $Y = 43.5^\circ$

c)



Sol. Es un triángulo isósceles  $x = y$ ;  $2x + 37^\circ = 180$

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

Por el teorema de triángulo isósceles y la suma de los ángulos interiores de un triángulo  $X = 71.5^\circ$  y  $Y = 71.5^\circ$

### Ejercicio 3.

#### SEMEJANZA

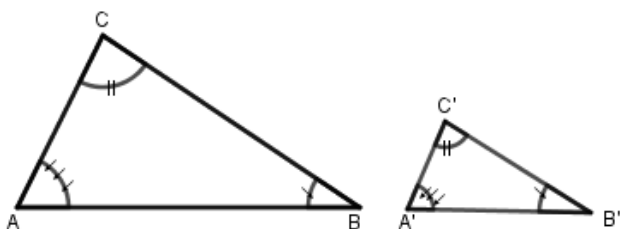
- 1) Enunciar el teorema de Thales para triángulos.

Sol. TEOREMA DE THALES: Si por lo menos tres rectas paralelas son interceptadas por dos transversales, entonces ellas determinan segmentos correspondientes proporcionales en dichas transversales.

- 2) Mencionar tres criterios de semejanza de triángulos y ejemplificar.

- I) Criterio: Ángulo, Ángulo, Ángulo

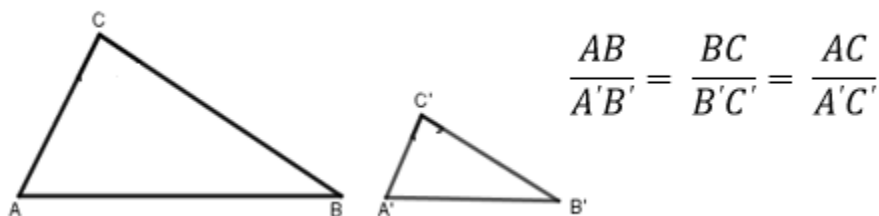
Representación



- I) Criterio: Lados homólogos proporcionales ( Lado, Lado, Lado)

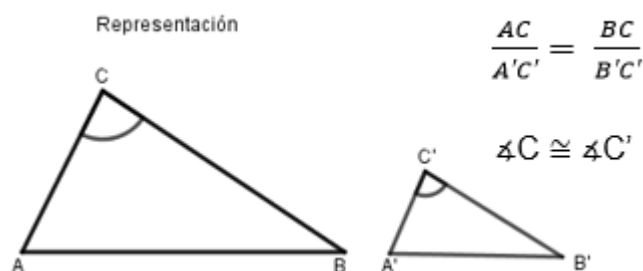
- II)

Representación



Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

- III) Criterio: Lados homólogos proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos congruente ( Lado, Ángulo, Lado)

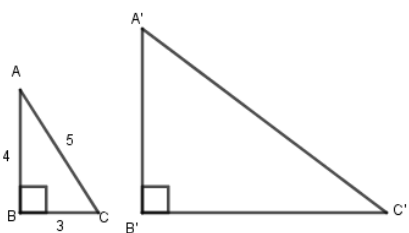


3) Los lados de un triángulo rectángulo ABC son 3, 4 y 5. El perímetro de otro triángulo semejante a ABC es de 24 unidades. Considerando  $\triangle A'B'C'$  el otro triángulo, determinar:

- La representación geométrica de la situación planteada.
- El perímetro del triángulo ABC.
- La razón de semejanza entre ellos.
- La longitud de los lados de  $\triangle A'B'C'$ .
- Comprobar que el perímetro del  $\triangle A'B'C'$  es de 24 unidades.

Sol.

a)

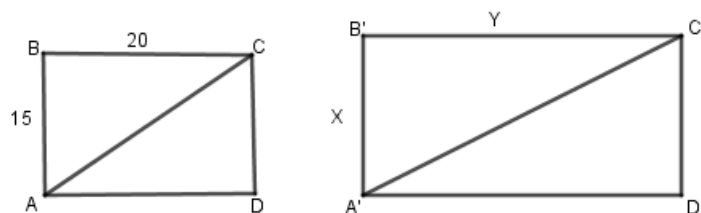


- Perímetro del triángulo ABC es 12
- Razón de semejanza es:  $r = \frac{12}{24}$
- 6, 8 y 10.
- $6+8+10 = 24$ .

4) El rectángulo ABCD, tiene dimensiones de 15cm de ancho y 20cm largo. Se sabe que la razón de semejanza con el rectángulo  $A'B'C'D'$  es de  $\frac{3}{2}$ .

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

La representación geométrica de la situación planteada.



Determinar:

- Las dimensiones del  $\triangle A'B'C'$ .
- El área del rectángulo ABCD.
- El área del rectángulo A'B'C'D'.
- Área de triángulo ABC.
- Área de triángulo A'B'C
- La razón entre las áreas de los rectángulos.
- La razón entre las áreas del triángulo ABC y del triángulo A'B'C
- Como son las razones obtenidas de f) y g).

Sol.

$$a) \frac{X}{15} = \frac{3}{2} \quad X = 22.5$$

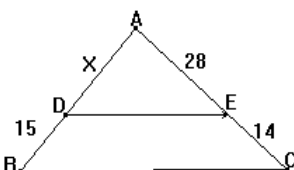
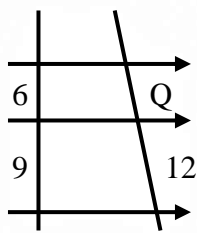
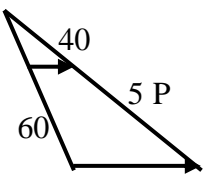
$$\frac{Y}{20} = \frac{3}{2} \quad Y = 30$$

- $15(20) = 300$
- $22.5(30) = 675$
- 150
- 337.5
- $\frac{300}{675} = \frac{4}{9}$
- $\frac{150}{337.5} = \frac{4}{9}$
- Iguals



Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

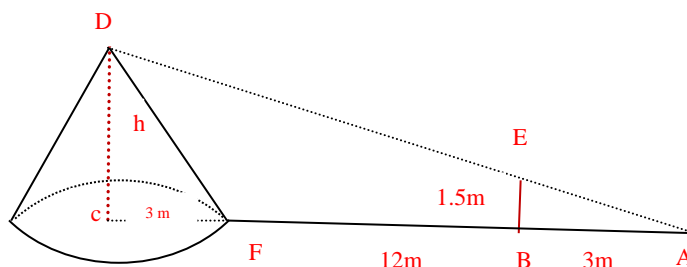
5) Determinar el valor de la incógnita.

 <p>DE paralela a BC</p>		
Solución X = 30	Q = 8	P = 13.33

6) Un edificio proyecta sobre el piso una sombra de 25 metros. En ese mismo momento un poste de 6 metros, que está a su lado, proyecta una sombra de 2 metros. Determinar la altura del edificio.

Sol. La altura de edificio es de 75 metros.

7) Calcula la altura “h” del cono que se muestra en la figura. (El radio del círculo de su base mide 3m).



$$\frac{h}{1.5} = \frac{18}{3}$$

Sol. La altura del La altura del cono es de 9 metros.

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

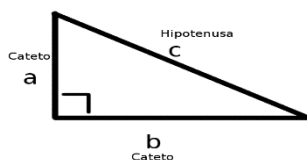
#### Ejercicio 4.

##### Teorema de Pitágoras

- 1) Enunciar el teorema de Pitágoras y ejemplificar.

Sol.

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.



- 2) En el teorema de Pitágoras, ¿cuál es la hipótesis y cuál la tesis?

Sol.

Hipótesis: Triángulo rectángulo donde la hipotenusa es el lado opuesto al vértice del ángulo recto, y los catetos son los lados que forman el ángulo recto.

Tesis: El cuadrado de la longitud de la hipotenusa, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

- 3) Escribe la expresión algebraica para obtener la hipotenusa C.

Sol.  $C = \sqrt{a^2 + b^2}$

- 4) Escribe la expresión algebraica para obtener los catetos a y b.

Sol.

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

- 5) Enunciar el recíproco del teorema de Pitágoras.

Si la suma de los cuadrados de las longitudes de dos lados de un triángulo es igual al cuadrado de la longitud del tercer lado, entonces el triángulo es rectángulo.

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

### Ejercicio 5.

Realizar las operaciones necesarias para contestar los reactivos siguientes:

- 1) En un rectángulo, su diagonal mide 9 cm. y uno de sus lados 5 cm.  
Determinar la longitud del otro lado.

Sol. El otro lado del rectángulo tiene de longitud 7.48 cm.

- 2) Determinar el valor del cateto **a**, si el cateto **b=6** y la hipotenusa **c=8**.

Sol. El cateto a = 5.29

- 3) El área de un triángulo rectángulo es de 88 cm cuadrados, y un cateto es mayor que el otro por 5 cm. Calcular la longitud de sus lados.

Sol. Los catetos miden 11 cm. y 16 cm. la hipotenusa mide 19.42 cm.

- 4) Un rayo partió un poste de 8m. de altura, como se observa en la figura. Si la punta quedó en el suelo a 4m. de la base como se muestra en la figura. ¿A qué altura se partió el poste?

Sol. El poste se partió a una altura de 3 metros.

- 5) Una escalera de 25 m. de longitud está recargada en un muro, la distancia del pie de la escalera al muro es de 15 m. ¿Qué altura alcanza la escalera?

Sol. La escalera alcanza una altura de 20 metros.

### 6. Bibliografía Básica.

Ávila, C. A., Jiménez, M. C., Jiménez, S. S., Martínez, T. M., García, L. J., Solís. P. R. (2009). *Paquete Didáctico para el curso de Matemáticas II*. México: UNAM. CCH Oriente.

Barnett, R. (1990). *Geometría Plana con Coordenadas*. México: McGraw-Hill.

García, A.J. (1998). *Geometría y Experiencias*. México: Addison Wesley.

Hernández, F. F. & Ramírez, G. R. *Geometría Euclidiana Para Bachillerato*. México: UNAM. CCH Oriente.

Pogorélov. A.V. (1974). *Geometría Elemental*. URSS: Mir Moscú.

Matemáticas II	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.
Unidad IV	

### **Bibliografía Virtual. Sitios consultados.**

UNAM (CCH). (2006). Orientación y Sentido de las Áreas del Plan de Estudios Actualizado. Recuperado de:

[https://www.cch.unam.mx/sites/default/files/planestudios/orientacion\\_sentido.pdf](https://www.cch.unam.mx/sites/default/files/planestudios/orientacion_sentido.pdf)

UNAM (CCH). (2016). Programas de estudios. Área de Matemáticas I-IV. Recuperado de:

<https://www.cch.unam.mx/sites/default/files/programas2016/MATEMATICAS-I-IV.pdf>

Juárez, J. A., Martínez, A.Y. (2012). Matemáticas III, Geometría y trigonometría. México: Servicios Editoriales Once Ríos. Recuperado de:

[http://uaprepasemi.uas.edu.mx/libros/3er\\_SEMESTRE/19\\_Matematicas\\_III.pdf](http://uaprepasemi.uas.edu.mx/libros/3er_SEMESTRE/19_Matematicas_III.pdf)

**Anexo 1. Fases de una secuencia didáctica:** Es la serie de actividades que con un progresivo nivel de complejidad desarrollan los alumnos auxiliados por el profesor, con el propósito de llegar a un aprendizaje determinado. Las principales características de cada una de estas fases quedan expuestas en la siguiente tabla. Cabe mencionar que, las tres fases marcadas en el “Protocolo de Equivalencias para el Ingreso y la Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades (3ª Versión 2008)”, son: 1) fase de inicio, 2) fase de desarrollo, 3) fase de síntesis<sup>1</sup>. Las cuales quedan descritas en la tabla 1.

Tabla 1. Fases de una Secuencia Didáctica.		
Fase	Trabajo del Profesor	Trabajo del Alumno
<p>1) <i>Fase de Inicio</i></p> <p><i>I. Iniciación al tema o unidad didáctica.</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-El profesor identificará las preconcepciones del estudiante acerca del tema o unidad didáctica bajo consideración, a través de la elaboración de un cuestionario diagnóstico o una entrevista donde sean señaladas las ideas, prejuicios y conceptos con que llega el alumno.</li> <li>-Con lo anterior, el profesor detectará y considerará los posibles errores conceptuales de los estudiantes, a partir de los cuales planifica su enseñanza.</li> <li>-Organizar el trabajo en el aula y coordinar las puestas en común.</li> <li>-Informar sobre los contenidos que se van a desarrollar.</li> <li>- Interesar a los estudiantes por los contenidos de enseñanza y fomentar el trabajo individual y colectivo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-En esta fase, los alumnos explicitan sus ideas y modelos explicativos con los que inicia el tema de estudio.</li> <li>-Es esencial en esta etapa provocar la inquietud por aprender, lo cual implica que el alumno, en cierto modo, se comprometa a participar activamente y a profundizar sobre el tema.</li> <li>-Investigación documental dirigida u orientada a confrontar aquellas preconcepciones del estudiante y las validadas por las matemáticas, con lo que comenzará a diferenciar su interpretación de aquella proporcionada por la matemática.</li> </ul>
<p>2) <i>Fase de desarrollo</i></p> <p><i>II. Información e introducción de conceptos</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>El profesor investigará, seleccionará, traducirá y adecuará diverso tipo de materiales para introducir los nuevos conocimientos.</li> <li>-El profesor divide la unidad temática en subunidades, cada una de ellas conformada por una serie de secuencias didácticas en las que el diseño de modelos y hojas de trabajo constituyen una parte fundamental para la enseñanza.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Investigará en la bibliografía señalada y en los materiales seleccionados los conceptos pertinentes al tema.</li> <li>-Desarrollará las actividades bajo la dirección del profesor y de acuerdo con la hoja de trabajo correspondiente. En ambos casos, el estudiante recabará información para organizarla e interpretarla desde el punto de vista matemático y ya no desde el sentido común.</li> </ul>

<sup>1</sup> Cf. Página 32. Gaceta CCH Suplemento especial número 4, 23 de mayo de 2008.

	<p>-Diseño de modelos. Se considera el tema, los objetivos programáticos, así como los obstáculos epistemológicos visibles y generales del grupo, con la finalidad de alcanzar o acceder al conocimiento matemático, sea estableciendo un nuevo conocimiento, ampliándolo o, inclusive reelaborándolo.</p> <p>-Las hojas de trabajo pueden ser cuestionarios, prácticas virtuales, guías de lectura, etcétera.</p>	<p>Ello dará como resultado la diferenciación y construcción de nociones, conceptos o procedimientos matemáticos.</p>
<p>3) Fase de cierre</p> <p>III. Ampliación y aplicación de conceptos.</p>	<p>-El profesor diseñará hojas de trabajo que favorezcan y extiendan el significado de los conceptos ya introducidos, lo que deberá dar lugar a que el estudiante logre una diferenciación conceptual más precisa y, en última instancia, a que den lugar a una reconciliación de los significados previos con los nuevos.</p> <p>- El profesor diseñará actividades que muestren la utilidad de las nociones, conceptos o procedimientos matemáticos involucrados que contribuyan a que los alumnos vean la relevancia y utilidad de lo aprendido en el contexto actual.</p> <p>- El planteamiento de conjeturas, así como la corroboración de los contenidos conceptuales, resulta crucial en esta etapa para lograr una clara diferenciación, así como una mejor reconciliación de significados.</p>	<p>-El estudiante realizará las actividades indicadas.</p> <p>-El estudiante resolverá las hojas de trabajo planteadas en esta fase.</p> <p>-El estudiante buscará la utilidad del nuevo conocimiento en su entorno social, para dar relevancia y significado a lo aprendido.</p> <p>-El estudiante expresará los conocimientos matemáticos adquiridos no sólo a través del lenguaje cotidiano, sino también a través de diferentes registros de representación matemática, a saber, por medio de tablas, de gráficas y de su modelo algebraico.</p>
<p>IV. Evaluación y Conclusión.</p>	<p>-El profesor indagará sobre el cambio o evolución de las ideas de los alumnos, realizando comparaciones entre su pensamiento actual y el inicial, a través de un cuestionario o entrevista. Conviene, por lo tanto, recoger las preconcepciones de los estudiantes para así observar la evolución de las mismas a partir de la reflexión y diferenciación progresiva que el estudiante ha realizado a través de esta secuencia de aprendizaje.</p>	<p>-Realización del cuestionario y de la entrevista (en caso de que así sea), para comparar los conocimientos que poseen con los iniciales y establecen las diferencias más destacadas entre estos.</p>

Cabe destacar que cada una de las fases de una unidad didáctica se constituye con diversas *secuencias didácticas u hojas de trabajo* para que los alumnos aprendan significativamente las principales *ideas, nociones, conceptos y procedimientos matemáticos*, cuestión con la que se les involucra, además, con otra forma de trabajo, en donde el auténtico protagonista es él mismo. Por otra parte, conviene

observar que cada unidad didáctica debe diseñarse, considerarse y presentarse de manera flexible, en absoluto rígida, pues debe depender de las características de los alumnos y de cómo construyan el conocimiento, por lo que deberán permitir modificar las fases originalmente planeadas sin olvidar en ningún instante las metas que se pretenden alcanzar. En este sentido, el constructivismo empata o se complementa con otras teorías del aprendizaje como, por ejemplo, con la *teoría de registros de representación semióticas* de R. Duval, en donde:<sup>2</sup>

[Esta teoría] permitirá analizar las actividades que se desarrollen en diferentes registros y los pasajes entre ellos, en ambos sentidos. [Por lo que] Se prestará especial atención a proponer ejercicios que requieran de pasajes entre representaciones no congruentes, según el *sentido de conversión*.<sup>3</sup>

Los registros a los que se refiere Duval son, en nuestro caso, los *registros de representación geométrica* (gráficas de las funciones), los *registros de representación algebraica* (fórmulas de las funciones), así como los *registros de representación aritmética* (tablas o muestras de datos de fenómenos diversos). La conversión de uno de estos registros en otro no siempre es algo asequible al estudiante por lo que, a diferencia de lo establecido por Duval, que exige la conversión completa de registros, en nuestra propuesta estas conversiones deberán seleccionarse de acuerdo con los objetivos y la estructura cognitiva de los aprendices.

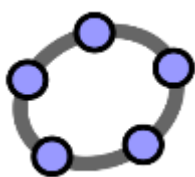
Por lo anterior, resultará fundamental elaborar y disponer de un amplio banco de secuencias didácticas y hojas de trabajo para ampliar las opciones de aprendizaje y no dar lugar a la improvisación. Este abanico de posibilidades estará directamente vinculado con los materiales y recursos didácticos de que se disponga y de los que se haya pensado echar mano.

---

<sup>2</sup> Cf. [Duval; 1999].

<sup>3</sup> Como dice Duval: "un cambio de registro resulta interesante y fecundo cuando los tratamientos en dos registros diferentes no son computacionalmente equivalentes, es decir, no son congruentes".

## **Anexo 2. Interfaz álgebra-geométrica GeoGebra.**



GeoGebra 5.0

El uso de GeoGebra no es complicado y no requiere dedicar sesiones específicas para la explicación de su funcionamiento. Desde el primer contacto con el mismo y con pequeñas aclaraciones por parte del profesor, el alumno será capaz de crear construcciones elementales. Conforme vaya utilizándolo con más frecuencia irá profundizando en sus posibilidades.

GeoGebra permite abordar la geometría desde una forma dinámica e interactiva que ayuda a los estudiantes a visualizar contenidos matemáticos que son más complicados de afrontar desde un dibujo estático. También permite realizar construcciones de manera fácil y rápida, con un trazado exacto y real que, además, revelarán las relaciones existentes entre la figura construida; también permitirá la transformación dinámica de los objetos que la componen. Debido a estas dos características el profesorado y el alumnado pueden acercarse a GeoGebra de varias maneras, no excluyentes entre sí pero que a menudo están relacionadas con el nivel de capacitación que se tenga del programa. Por otro lado, las funciones, ecuaciones y los elementos de una construcción pueden ser introducidos directamente. La integración de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) en el mundo educativo nos permite disponer de unos recursos que, usados de forma adecuada, se convierten en una herramienta potente y con interesantes funcionalidades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

La buena disposición por parte del alumno para el uso de estos recursos es muy favorable. Es evidente el carácter motivador de los mismos y su eficacia para favorecer metodologías activas y participativas, que permiten además que el estudiante se sienta partícipe de su propio aprendizaje. Podrá trabajar las matemáticas de forma experimental, esto es, interactuar con objetos matemáticos, construirlos, analizar comportamientos, comprobar propiedades, hacer conjeturas, realizar simulaciones. El profesor dispone, con estas herramientas, de un medio para presentar de forma atractiva y dinámica distintos conceptos y procedimientos, así como, para fomentar la reflexión y el análisis. La utilización correcta de las mismas deberá permitirle reducir esfuerzos y tiempos dedicados a algunas tareas que pueden resultar tediosas e incidir en aspectos que resulten más pedagógicos e interesantes.

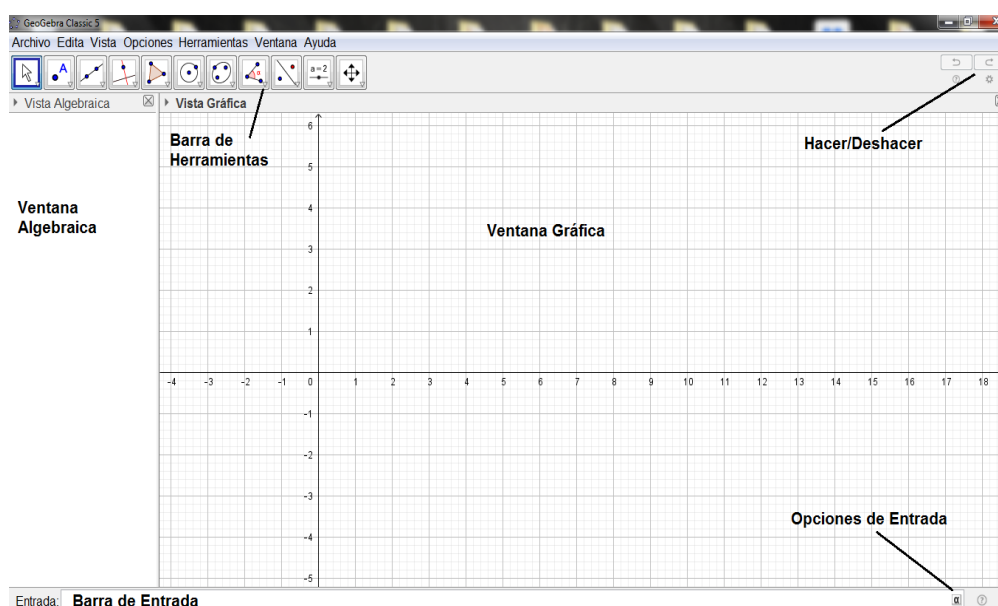
Cabe mencionar que este programa "solo" no garantizan los aprendizajes de los temas exigidos en la asignatura de Matemáticas III, por lo que las secuencias



didácticas y las hojas de trabajo elaboradas para esta asignatura, son, por así decirlo, la parte medular del aprendizaje de los estudiantes. Estas posibilidades no deben perder de vista que su propósito o fin es el de coadyuvar a que el alumno haga una reflexión sobre sus propias ideas, manteniéndolo activo y con su atención puesta en la intersección de sus intereses y de los contenidos de enseñanza, pues sólo podrá reestructurarlas si éstas caen en su propio lenguaje.

A continuación, se muestra las diferentes partes de la ventana de GeoGebra, mismas que se muestran en la figura 1.

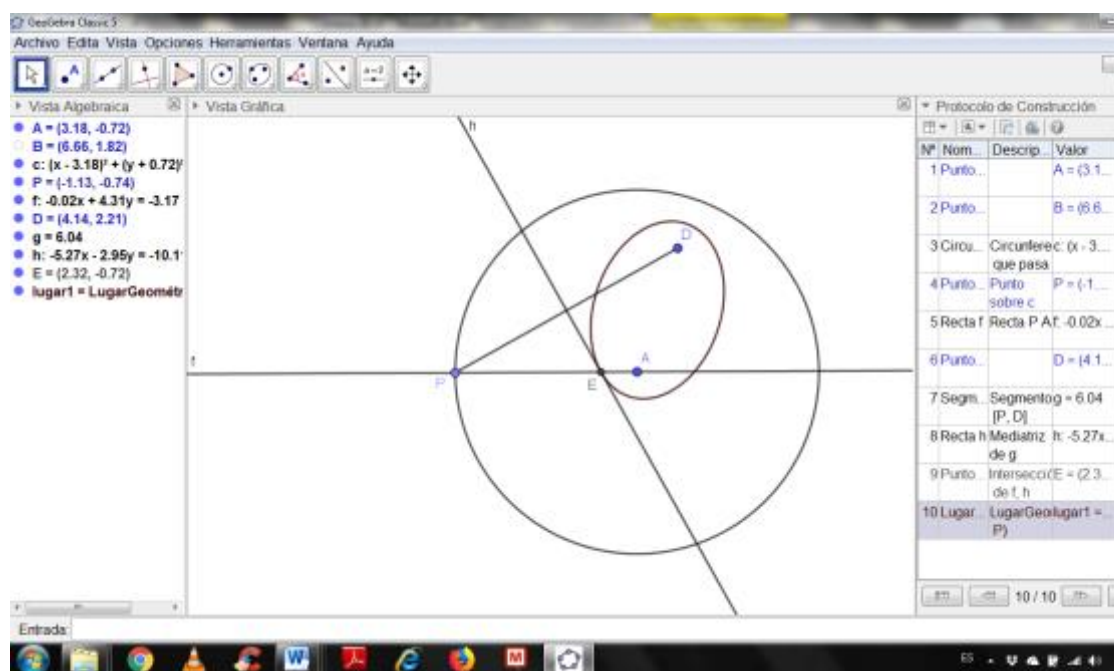
**Figura 1. Ventana de GeoGebra.**



Las experiencias de aprendizaje en un aula de medios (sala Telmex, por ejemplo), brinda al alumno unas experiencias completamente diferentes a lo que han sido las "clases" de la enseñanza tradicional, son la realización de nuestra unidad y secuencias didácticas, es decir, son nuestros espacios de aprendizaje. En ellas ha lugar para la interacción entre estudiantes, el profesor y las tecnologías informáticas contemporáneas, por lo que son el lugar propicio para la construcción de conocimiento matemático conjugando el análisis, la síntesis, la modelación, la representación, etc., así como la evaluación del conocimiento construido por todos los participantes. En nuestro caso, la generación de estas experiencias de aprendizaje presume tener un lugar (aula) equipado con computadoras con GeoGebra. En la figura 2, se muestra un Applet o escenario interactivo donde a partir de la construcción de un lugar geométrico (elipse) se obtienen dos más (circunferencia e hipérbola), únicamente moviendo el punto D hacia el punto A y

moviendo el punto D fuera de la circunferencia hacia fuera de ella respectivamente. Además, se muestra el protocolo de construcción el cual es muy simple.

**Figura 2. Construcción de un escenario interactivo para visualizar tres secciones cónicas.**



Las experiencias de aprendizaje en el aula de medios son experiencias completamente diferentes a lo que han sido las "clases" de la enseñanza tradicional, es decir, son otro espacio de aprendizaje. En ellas ha lugar para la interacción entre estudiantes, el profesor y las tecnologías informáticas contemporáneas, por lo que son el lugar propicio para la construcción de conocimiento matemático conjugando el análisis, la síntesis, la modelación, la representación, etc., así como la evaluación del conocimiento construido por todos los participantes.