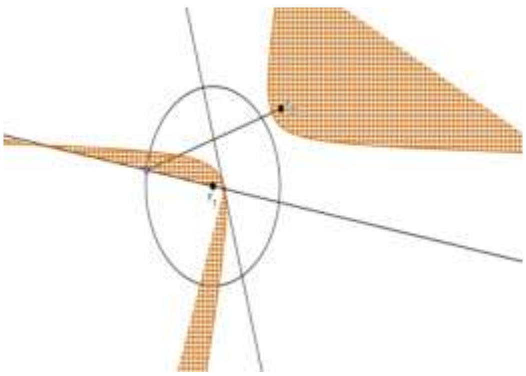
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL ORIENTE

GÚIA PARA EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS III



Elaborado por los profesores:

COORDINADORES:

Roberto Pedro Robledo Arana.

Claudia Verónica Morales Montaño.

INTEGRANTES:

Alberto Benítez Pérez

Jesús García López

Gabriel De Anda López

María del Carmen Martínez Tapia

Martín Mejía Espinosa

Juan Gabriel Montes Medrano.

JULIO DE 2019

Índice

Anexos.

I. INTRODUCCIÓN.

La presente Guía para el Profesor de Matemáticas III de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, se elaboró considerando el Programa de Estudio del Área de Matemáticas I-IV, 2016, de acuerdo a los contenidos y enfoque de la asignatura, con el propósito de apoyar al profesor en el desarrollo de la asignatura. Esta guía está formada por secuencias didácticas[1], mismas que están formadas por hojas de trabajo de acuerdo a los distintos aprendizajes que están señalados en cada una de las unidades del programa de estudio, de manera que el profesor puede aplicar las que considere pertinentes de acuerdo a las necesidades del grupo, ya que las secuencias deben ser trabajadas en equipo por parte de los alumnos, lo que permite que el profesor revise el trabajo colectivo y les vaya indicando los errores que se van cometiendo para su corrección por parte de los alumnos, y está apoyada por los programas de GeoGebra y Excel, que ofrece al estudiante ambientes de trabajo que estimulan la reflexión y lo convierten en un ser activo y responsable de su propio aprendizaje, además provee un espacio problemático común al maestro y al estudiante para construir significados, elimina la carga de los algoritmos rutinarios para concentrarse en la conceptualización y la resolución de problemas, da un soporte basado en la retroalimentación y reduce el miedo del estudiante a expresar algo erróneo y, por lo tanto, se aventura más a explorar sus ideas.

Al trabajar colectivamente, los alumnos pueden socializar de manera más libre sus conocimientos, la mayor parte de este curso se centra en el método analítico que permite representar y analizar a través del álgebra, a las curvas y los objetos geométricos que, desde el punto de vista euclidiano sólo admite formas particulares de construcción, estudio y análisis de sus elementos. El tratamiento

[1] Cf. Anexo 1

de la temática no se centra en manejar un conjunto de fórmulas, se intenta aprender estrategias generales y diversas formas de representación que apoyan la comprensión y facilitar el trabajo, dependiendo de los elementos o condiciones que se estipulan en un problema.

Como todo producto de trabajo colegiado, sabemos que la presente Guía está sujeta a la discusión y replica de los docentes del Área de Matemáticas, pues no hay otra forma de medir su contribución. Los autores asumimos como benéficas la retroalimentación, críticas y comentarios con fundamentos académicos que puedan desprenderse de este recurso didáctico.

II. PRESENTACIÓN.

Sin duda, el principal actor de esta experiencia didáctica, es el alumno o aprendiz. Ahora, puesto que es de suma importancia conocer su contexto, aunque sea de manera general, conviene echar mano de la información disponible acerca de esta cuestión. En general, este material está diseñado para ser trabajado de forma individual o por equipo con el fin de que todos los alumnos participen y el profesor pueda interactuar con los alumnos para detectar a los alumnos con problemas de aprendizaje.

La presente guía consiste de un conjunto de secuencias didácticas que cubren los aprendizajes del programa de estudios al nivel y profundidad de los contenidos actitudinales, conceptuales y procedimentales especificados en el programa de estudio de Matemáticas III, y está dirigida principalmente al profesor para que después de un análisis de la misma seleccione las secuencias que considere más adecuadas para que sean trabajadas en sus grupos, se recomienda utilizar la tecnología ya que en esta guía se utiliza principalmente GeoGebra por lo cual hay que leer el *anexo 2.*

En esta propuesta didáctica el principal papel del profesor consistirá en *generar espacios de aprendizaje* que faciliten la construcción de los conocimientos establecidos institucionalmente. De hecho, esos espacios de aprendizaje deben ser la consecuencia y conclusión de la puesta en escena de las secuencias didácticas para las que, como hemos venido señalando, el profesor es el principal encargado de su ejecución. Ahora bien, el uso de la sala Telmex, genera experiencias completamente diferentes a lo que han sido las "clases" de la enseñanza tradicional, son la realización de nuestras secuencias didácticas, es decir, son nuestros espacios de aprendizaje. En ellas ha lugar para la interacción entre estudiantes, el profesor y las tecnologías informáticas contemporáneas, por lo que son el lugar propicio para la construcción de conocimiento matemático conjugando el análisis, la síntesis, la modelación, la representación, etc., así como la evaluación del conocimiento construido por todos los participantes.

Cabe mencionar que al final de cada unidad didáctica hay una *autoevaluación* que puede aplicarse antes de cada examen para detectar si los alumnos han tenido un cambio o evolución en los aprendizajes esperados para cada unidad didáctica.

III. USO DE ESTRATEGIAS Y/O SECUENCIAS DIDÁCTICAS.

En general, *las estrategias y/o secuencias didácticas* que se diseñarán para esta guía de Matemáticas III, tienen como fin en menor o mayor medida que los alumnos alcancen los *aprendizajes propuestos* para cada curso, por las siguientes *consideraciones*:

- *Inciden* en la estructura cognitiva[2] del aprendiz ya que a partir de los conceptos base con los que cuenta el alumno, las ideas nuevas puedan ser relacionadas o ligadas. Por esto, Ausubel argumenta que *el factor individual más importante que influye en el aprendizaje es lo que el estudiante ya sabe.* De ahí que, cada secuencia didáctica debe tener en cuenta *los conocimientos previos, concepciones y motivaciones de los alumnos.*

- Se crean con estas un entorno adecuado para el aprendizaje y la enseñanza.

- Cada secuencia y/o estrategia deberá plantear situaciones en las que los alumnos identifiquen y reconozcan sus ideas, a partir de una reflexión individual y del contraste o diferenciación con las del profesor, de otros compañeros o de la información documental.

[2] Hablar de la estructura cognitiva es referirse a la posibilidad de recibir, asimilar, asociar, almacenar y abstraer información, además de darle significado. Pero estas habilidades pudieran no ser sólo producto de la biología humana, sino el resultado de la constante interacción de un individuo con su entorno próximo.

- Favorecen aquellos procesos que ayudan a los alumnos a ser responsables de su propio aprendizaje. (Esto tiene lugar cuando los estudiantes construyen sus propios conocimientos).

- Utilizan hechos, fenómenos y situaciones próximas al contexto de los estudiantes, ya que para aprender algo, los alumnos necesitan ver su utilidad.

- Para cada secuencia y/o estrategia didáctica se deberá disponer de un amplio abanico de actividades y recursos para ser utilizados según los diferentes estilos de aprendizaje de los estudiantes, así como la diversidad de situaciones en las que se desarrolla, evitando con ello la improvisación.

- Todas las *situaciones de aprendizaje*, es decir, los trabajos prácticos, la resolución de problemas, la utilización del conocimiento en la vida cotidiana, etcétera., deben ser contempladas en el diseño y realización de una secuencia didáctica como actividades coadyuvantes para que el aprendizaje sea significativo.
- Dan lugar a una enseñanza intencionada y dirigida de los conocimientos implicados, es decir, el sentido de los conocimientos por enseñar debe ser pertinente al estudiante y a los contenidos, tratando de que esto de lugar a que los descubra o aprenda de manera significativa.

- Favorecen el desarrollo personal, el debate, la cooperación, el rigor, la honestidad, la creatividad, la crítica razonada, los planteamientos no dogmáticos y la satisfacción por aprender.

Finalmente, consideramos que a lo largo del desarrollo de cada hoja de trabajo, se deberá ir determinando la adecuación y pertinencia de las construcciones conceptuales de los alumnos a través del uso de los “materiales de apoyo” para cada unidad didáctica, para que se vaya confrontando a cada estudiante con sus nuevas adquisiciones y ello le permitirá ir diferenciando aquellas interpretaciones no matemáticas de las que sí lo son para que, en última instancia, reconcilie las interpretaciones matemáticas con las restantes de manera que los nuevos conocimientos queden integrados en su acervo lingüístico de manera permanente y estable. Estos “materiales de apoyo” deben tener siempre presente el trabajo cotidiano que desarrollan los alumnos a través de las secuencias didácticas.

En particular, la resolución de estos materiales de apoyo, se deberán sustentar más en el esfuerzo, trabajo, participación y actitud (disposición para aprender) de cada estudiante, que en las “respuestas rápidas y/o correctas” de “los estudiantes brillantes”. El aprendizaje es todo un proceso del que no se puede soslayar lo anterior, antes al contrario, habría que estimular a los estudiantes en la cultura del esfuerzo.

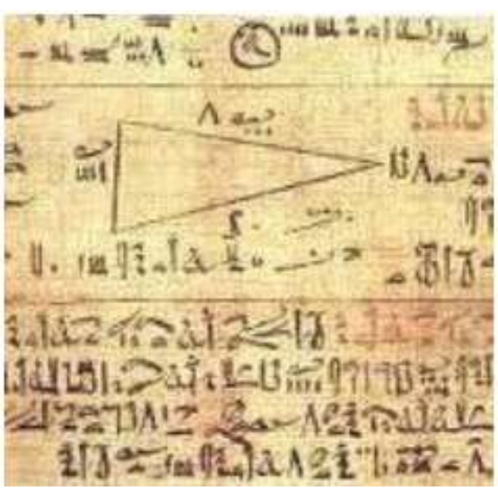
UNIDAD 1.	MATEMÁTICAS III.
Elementos de Trigonometría	

Propósito:
Al finalizar el alumno:
Utilizará las razones e identidades trigonométricas, así como las leyes de senos y cosenos mediante la resolución de problemas en distintos contextos que involucren triángulos con la finalidad de construir conocimientos que serán empleados en asignaturas posteriores. **Tiempo: 15 horas.**

1. **Presentación de la Unidad 1.**

En esta unidad se trabajará de manera que los alumnos tengan una visión general de la trigonometría para que tengan una visión general de la misma y entiendan el porqué de la definición de las razones trigonométricas y que dichas definiciones solo dependen de las magnitudes de los ángulos.
Luego se pasa a la resolución de algunos triángulos rectángulos para que posteriormente apliquen la metodología aprendida en la solución de problemas cuyo modelo sea un triángulo rectángulo.
Posteriormente se pasa a la deducción de algunas identidades trigonométricas paso a paso para que los alumnos entiendan el procedimiento y puedan aplicar estos conocimientos posteriormente, por último, se amplían las aplicaciones a triángulos no rectángulos.
El significado de la palabra trigonometría de acuerdo con las raíces griegas es, “trigonon” triángulo y “metrón” medida, así que la trigonometría se encarga de la medida del triángulo.
A continuación, hacemos una pequeña introducción a la historia de la trigonometría de la cual el profesor puede tomar los puntos que considere importantes.

EGIPTO 2000-1800 a.C.

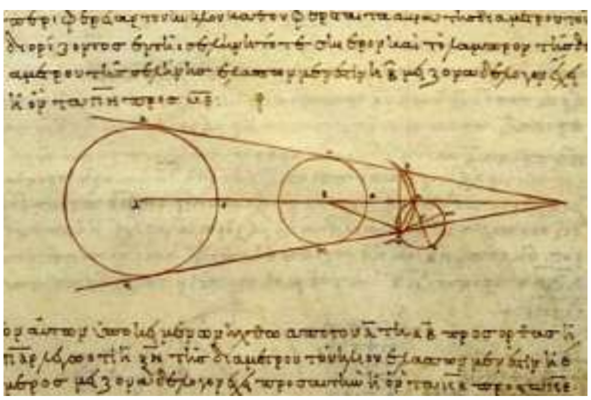


En el problema 56 del Papiro de Rhind o de Ahmes (en la figura se observa un detalle de este papiro) se encuentran por primera vez rudimentos de trigonometría y de teoría de triángulos semejantes. Del problema de mantener la pendiente de cada cara constante durante la construcción de una pirámide, surge lo que podríamos considerar como la primera razón trigonométrica. Los egipcios tenían en cuenta el cociente entre “el avance” y “la subida” para medir la pendiente, es decir, lo hacían por medio del cociente entre la variación horizontal y la vertical (la actual cotangente) a la que llamaban “seqt”.

BABILONIA 1900-1600 a. C.

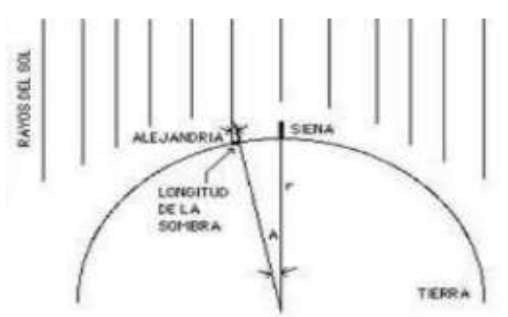
En la tablilla 322 de la colección Plimpton, conservada en la Universidad de Columbia, aparece otro “germen” de la trigonometría. Esta tablilla muestra una tabla con una serie de ternas pitagóricas formadas por números enteros (idearon un método para obtenerlas) y aparece también en la tabla la razón entre hipotenusa y cateto mayor (la actual secante) en una secuencia de grado en grado de 31º a 45º, Además los babilonios establecieron los grados, minutos y segundos para obtener la magnitud de los ángulos. Aunque los resultados de los babilonios y los egipcios eran más bien prácticos, para resolver problemas de la vida diaria.

GRECIA.

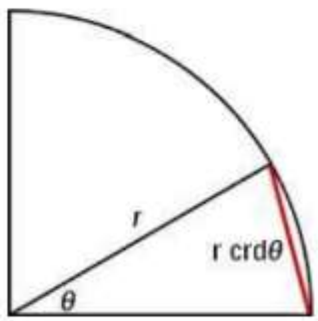


Aristarco logró descubrir que los **planetas** se encontraban orbitando alrededor del **Sol** y no de la Tierra como se pensó por muchísimos años. Escribió un tratado (en torno al 260 a.C.) titulado Sobre los tamaños y distancias del Sol y la Luna en el que, por medio de la semejanza de triángulos logro hacer estimaciones sobre el **tamaño** de la **Tierra**, el tamaño de la **luna** y la **distancia** que hay hasta ella, y con respecto al tamaño y la distancia del sol, Descubrió también que las **estrellas** eran cuerpos similares al sol que se encontraban a distancias enormes. Dejó como legado el **modelo heliocéntrico**, que nos explica que el sol es el centro del universo y no la tierra.

Eratóstenes de Cirene. (276 a.C. -194 a.C.), que, en su tratado, Sobre la medida de la tierra, aproxima el tamaño de ésta utilizando una medición del ángulo entre dos ciudades, Assuan y Syena, situadas en el mismo meridiano, obteniendo el resultado de un cincuentavo de círculo completo, para después multiplicar por 50 la distancia entre



estas dos ciudades y obtener así una aproximación bastante buena de la longitud de la circunferencia de la tierra, de unos 250.000 estadios, o lo que es lo mismo, unos 46.000 Km. En este trabajo se aprecia cómo se empiezan a relacionar ángulos (en la circunferencia) y distancias (longitud del arco).

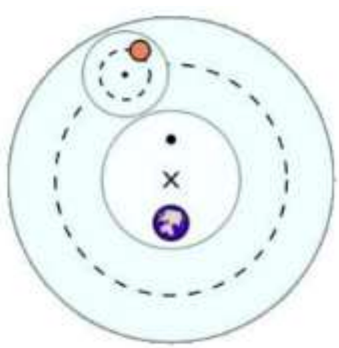


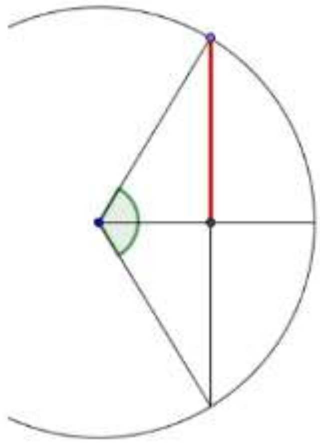
Hiparco de Nicea, considerado el padre de la trigonometría porque elabora la primera tabla trigonométrica de la que se tiene constancia. Hiparco de Nicea (ca. 180-ca. 125 a.C.) se ocupó de elaborar una tabla en la que aparecieran valores de arcos y sus cuerdas correspondientes, así como la razón entre éstos, para una serie completa de ángulos. La contribución que se le atribuye a Hiparco es la de organizar y ordenar los datos empíricos obtenidos por los babilonios. No sabemos con precisión cuando comenzó a usarse una división del círculo completo en 360º, pero parece ser que este hecho se debe principalmente a Hiparco.

$$\frac{\operatorname{sen} ACF}{\operatorname{sen} FCB} \cdot \frac{\operatorname{sen} BAD}{\operatorname{sen} DAC} \cdot \frac{\operatorname{sen} CBE}{\operatorname{sen} EBA} = 1.$$

Menelao de Alejandría. Nace en el 70 d. C. y muere en el 140 d. C. Su nombre ha quedado ligado al teorema de Geometría plana o esférica relativo a un triángulo cortado por una recta o un gran círculo, de los muchos libros de Menelao sólo ha sobrevivido Sphaerica. Se trata de triángulos esféricos y su aplicación a la astronomía. Él fue el primero en escribir la definición de un triángulo esférico que recoge la definición en el comienzo del libro I.

Ptolomeo. En su obra Sintaxis matemática (que fue llamada por los árabes Almagesto), escrita durante el segundo siglo de nuestra era, de la cual se conservan copias, Ptolomeo realiza un tratado astronómico, en el que calcula tablas de cuerdas, usadas para “leer” la posición de los astros. En este tratado Ptolomeo presenta un importante resultado, del cual se deducen como casos particulares fórmulas para el cálculo de cuerdas para la suma y diferencia de arcos, y de éstas las del arco doble y mitad. Con estas herramientas, Ptolomeo tuvo más fácil la elaboración de tablas de cuerdas con mayor exactitud, e incluyó en su Almagesto una para ángulos desde medio grado hasta 180º, de medio en medio grado.





LA TRIGONOMETRÍA HINDÚ.

Los Siddhãntas son unas obras escritas, que aparecieron hacia finales del siglo IV, que recogen conocimientos sobre astronomía. En ellos se puede observar una gran influencia de las teorías astronómicas griegas, La trigonometría de Ptolomeo se basaba en la relación entre las cuerdas y los correspondientes arcos o ángulos centrales que ellas subtienden, pero los hindúes estudiaron la razón entre la mitad de la cuerda (semicuerda) y la mitad del arco, y esta razón fue el antecesor de nuestro actual seno.

LA TRIGONOMETRÍA ÁRABE.

Un par de siglos después de Aryabatha, aparecen las primeras referencias sobre trigonometría en Arabia. Estas referencias en principio adoptaban el modelo de cuerdas griego, pero finalmente se decantaron por el modelo hindú, basando así su teoría sobre la función seno, y fue a través de los árabes como llegó a Europa la trigonometría del seno. Una de las obras destacables es la de Al-Battani (ca. 850-929), conocido en Europa como Albategnius, que en su libro Sobre el movimiento de las estrellas aplica la trigonometría directamente al triángulo rectángulo, obteniendo una fórmula que en la actualidad se leería como $b = a\frac{sen(90° - A)}{sen(A)}$ donde a y b son los catetos de un triángulo rectángulo y A el ángulo opuesto al lado a.

LA EUROPA MEDIEVAL.

El libro de Ibn Muʿādh al-Jayyānī del siglo XI, *El libro de los arcos desconocidos de una esfera* introdujo la ley general de los senos. La ley plana de los senos fue descrita más tarde en el siglo XIII por Nasīr al-Dīn al-Tūsī. En su *Sobre la figura del sector*, declaró la ley de los senos para triángulos planos y esféricos, y proporcionó las pruebas de esta ley.

Según Glen Van Brummelen, «La ley de los senos está en realidad basada en Regiomontanus, en sus soluciones de triángulos rectángulos en el Libro IV, y estas soluciones fueron a su vez las bases de sus soluciones de los triángulos generales.» Regiomontanus fue un matemático alemán del siglo XV.

Durante el siglo XII los europeos latinos superaron la barrera lingüística que les separaba de la cultura árabe, e incluso de la cultura griega. Comenzaron a hacerse en esta época una oleada de traducciones del árabe, hebreo y griego al latín.

De una de estas traducciones, hecha por Gerardo de Chester sobre el 1150, surge el término seno.
Europa no alcanzó un alto nivel en el campo de la trigonometría hasta que Regiomontano (1436-1476) escribió su obra De triangulis hacia el 1464 En el primer
libro de este tratado, encontramos una exposición de los conceptos fundamentales sobre magnitudes y razones, inspirada por Euclides, y a continuación vienen más de 50 proposiciones que tratan de la resolución de triángulos basándose en las propiedades de los triángulos rectángulos.
En esta época también contribuyó al desarrollo de la trigonometría Nicholas Copernicus o Copérnico (1473-1543) que fue un astrónomo que revolucionó la concepción del mundo, si bien es cierto que su obra estaba directamente influenciada por la obra de Regiomontano.
Se sabe que en 1539 Copérnico recibió como estudiante al joven matemático prusiano Georg Joachim Rheticus (1514-1576) que había estado en contacto con la matemática que se hacía en Nuremberg, por lo tanto con la trigonometría de Regiomontano, pero Rheticus fue más lejos, aunando las ideas de estos dos maestros escribió el tratado más completo que se había escrito hasta el momento sobre trigonometría, bajo una obra en dos volúmenes titulada Opus palatinum de triangulis.

PRELUDIO A LA MATEMÁTICA MODERNA.

François Viète (1540-1603), o en su forma latinizada Franciscus Vieta. La trigonometría de Viète se caracteriza por su enfoque analítico general. Realizó un trabajó similar al de Rheticus, realizando también tablas para las seis razones trigonométricas, en su obra Canon mathematicus (1579).
En 1635, Gilles Persone de Roberval realizo un bosquejo de la mitad de un arco de la curva “seno”, hecho con el que se descubre un nuevo aspecto de la trigonometría, encaminada ahora hacia un enfoque funcional, que culminará con Euler.

Pocos años más tarde, la trigonometría tomó un nuevo rumbo dado por los hermanos Jacques Bernoulli (1654-1705) y Jean Bernoulli (1667-1748), que redescubrieron los desarrollos de sen $n\theta$, cos $n\theta$, en función de sen θ y cos θ dados anteriormente por Viète y los generalizaron a valores racionales de n.
Un trabajo fundamental en este nuevo aspecto analítico de la trigonometría fue el de Roger Cotes (1682-1716). Cotes tuvo una muerte prematura y sólo se publicaron algunos trabajos incompletos, a título póstumo, en 1722 con el nombre de Harmonia mensurarum. En esta obra se reconocía el carácter periódico de las

funciones trigonométricas, y aparecieron por primera vez impresas las representaciones de las funciones tangente y secante.
De Moivre siguió utilizando la trigonometría para experimentar con números complejos que resolvieran ecuaciones polinómicas o facilitaran descomponer polinomios sin raíces reales en factores cuadráticos, como ya hiciera Cotes.
En lo que respecta a la trigonometría, para Euler el seno de un ángulo era indistintamente un segmento, sino simplemente un número, la ordenada de un punto de la circunferencia unidad, o el número definido por una serie infinita. Euler convirtió la trigonometría en una potente herramienta del análisis.
Como último apunte de la aportación que Euler hizo a la trigonometría, cabe decir también que la notación que actualmente se utiliza para las funciones trigonométricas, sin, cos, tan, cot, sec, cosec se debe también a su obra Introductio en la cual utilizaba estas abreviaturas.
Es importante hacer notar que todas las secuencias están diseñadas de manera que los alumnos vayan paso a paso en la obtención de los conceptos y en el inicio de cada una hagan un pequeño repaso de algunos conceptos que necesitan para comprender de manera adecuada los conceptos y métodos presentados.
Los conceptos que consideramos básicos para el buen desarrollo de la unidad son los siguientes.

Triángulo rectángulo, ángulos complementarios, teorema de Pitágoras, razones y proporciones, congruencia, semejanza de triángulos, suma de los ángulos internos de un polígono, ángulos alterno – internos, áreas de figuras geométricas, polígonos regulares, líneas importantes de un triángulo, operaciones con fracciones y manejo algebraico.
Por lo que durante el desarrollo de la unidad se pueden ir presentando entre otros los siguientes problemas de aprendizaje:

a. El distinto ritmo de aprendizaje de los alumnos.
b. Que a pesar de decirles que externen sus dudas no lo hacen.
c. No tienen un manejo adecuado de las operaciones aritméticas básicas en particular con los números racionales representados en su forma fraccionaria.
d. Desarrollar un binomio al cuadrado como producto notable o como el producto de dos polinomios.
e. No saber bien los conceptos de congruencia y semejanza.
f. No manejar de manera adecuada el álgebra.

Para que el alumno supere estas dificultades proponemos lo siguiente:

- Aplicar una evaluación diagnóstica al inicio de la unidad de aprendizaje.

- Dejar actividades de forma paralela al curso, en base a las deficiencias detectadas en la evaluación diagnóstica.
- Manejar de manera adecuada las plenarias para hacer participar a los alumnos detectados con problemas de aprendizaje.
- Fomentar el trabajo entre pares, para socializar los aprendizajes.
- Invitarlos a participar en el Programa Institucional de Asesorías (PIA).

2. Actividades de Enseñanza Aprendizaje.

El estudiante comprenderá y aplicará las razones trigonométricas, así como las identidades trigonométricas y las leyes de los senos y cosenos a partir del desarrollo de las siguientes secuencias didácticas, conceptos que aplicará posteriormente en sus cursos posteriores:

- Recordará y reafirmará el concepto de razón trigonométrica y lo aplicará en problemas donde se encuentran los ángulos de elevación, depresión y también calculará distancias inaccesibles.

- Deducirá y comprenderá que el valor de las razones trigonométricas no depende del triángulo en particular que se trabaje, más bien de la magnitud del ángulo.

- Deducirá paso a paso las identidades trigonométricas fundamentales, para que posteriormente aplique los conceptos aprendidos en la comprobación de otras identidades.

- Deducirá paso a paso la ley de los senos, para que posteriormente la aplique en la resolución de otros problemas de aplicación.

- Deducirá la ley de los cosenos y la aplicará en la resolución de problemas cuyo modelo de solución se adapte a dicha ley.

3. Conceptos Clave.

Razones trigonométricas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante, ángulo de elevación, ángulo de depresión y distancias inaccesibles, triángulo rectángulo, semejanza de triángulos, identidades trigonométricas fundamentales, reciprocas y pitagóricas, ley de los senos, ley de los cosenos, fórmulas de reducción del segundo al primer cuadrante para el seno y el coseno.

4. Puesta en Escena de los Aprendizajes por Desarrollar.

Aprendizajes. Al realizar las secuencias didácticas, los ejercicios propuestos en las secuencias, las discusiones de pares, las plenarias, y los ejercicios adicionales, así como asistiendo si es necesario a las asesorías, el alumno podrá acceder a lo siguiente:

• Razón trigonométrica: El alumno: recuerda la definición de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo. • El valor depende de la magnitud del ángulo y no del triángulo rectángulo en particular: El alumno: Emplea la semejanza de triángulos para ver que las magnitudes de los lados del triángulo no determinan el valor de las razones trigonométricas. • Resolución de triángulos rectángulos: El alumno: estudia los problemas resueltos de triángulos rectángulos para luego aplicar los métodos en otros problemas.	• Resolución de problemas con ángulos de elevación, depresión y cálculo de distancias inaccesibles: Aplica los conceptos mencionados y obtiene el modelo matemático del problema para resolverlo. • Identidades trigonométricas: Aprende la deducción de las rezones trigonométricas fundamentales, reciprocas y pitagóricas para luego demostrar otras identidades que posteriormente utilizará si lleva la materia de cálculo diferencial e integral. • Deduce la ley de los senos para luego aplicarla en la resolución de problemas cuyo modelo matemático se adapte a dicha ley. • Deduce la ley de los cosenos para luego aplicarla en la resolución de problemas cuyo modelo matemático se adapte a dicha ley.

Secuencia 1. Razones Trigonométricas. Parte 1.

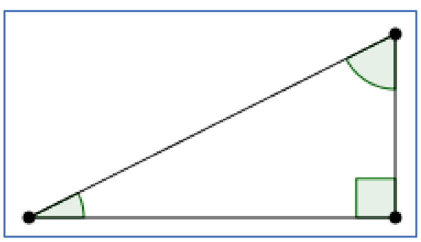
Aprendizajes: El alumno.

Comprende que el concepto de razón trigonométrica se deriva de las razones entre los lados de un triángulo rectángulo dos a dos.

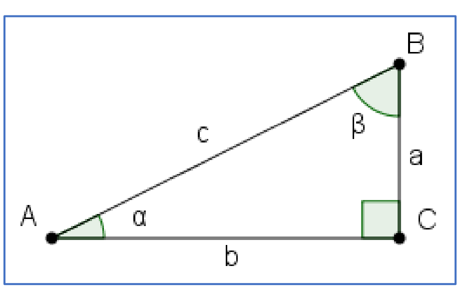
APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Comprende la definición de las razones trigonométricas.
Procedimentales:	• Construye un triángulo rectángulo y recuerda la definición de las razones trigonométricas.
Actitudinales:	• Valora el procedimiento geométrico para obtener los valores de las razones trigonométricas por medio de triángulos rectángulos semejantes. • Valora el uso de la calculadora para obtener los valores de las razones trigonométricas para un ángulo agudo dado.

Fase de inicio.

Actividad 1. Realiza las siguientes operaciones paso a paso.



1. Dibuja un triángulo rectángulo.
2. Asigna a los ángulos agudos los nombres de α y β.
3. Nombre el vértice que corresponde al ángulo α con la letra A y al cateto opuesto a dicho ángulo con la letra a.
4. Nombre el vértice que corresponde al ángulo β con la letra B y al cateto opuesto a dicho ángulo con la letra b.
5. El vértice que corresponde al ángulo recto nómbralo con la letra C, y a la hipotenusa con la letra c.

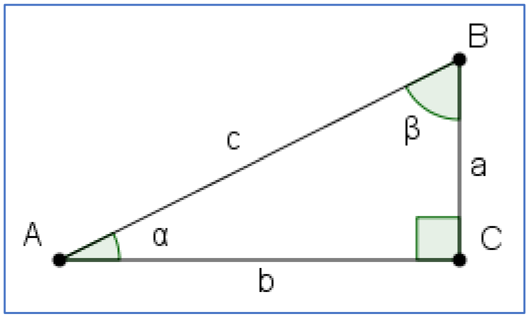


6. El cateto opuesto al ángulo α es: __________.
7. El cateto adyacente al ángulo α es: ________
8. La hipotenusa es: ______________________.

9. Cómo la suma de las magnitudes de α y β es de _____ los ángulos se llaman. _________________.

Al terminar se deben formar equipos de 2 o 3 alumnos para revisar sus resultados, en caso de duda deben preguntarle a su profesor.

Fase de Desarrollo.

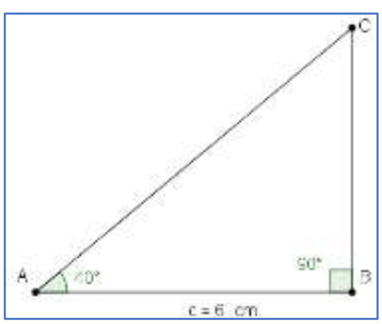


10. De acuerdo con la siguiente figura, escribe las definiciones correspondientes.

Sen α = ———	Cos α = ———	Tan α = ———
Cotan α = ———	Sec α = ———	Csc α = ———

11. Traza un segmento $\overline{AB}$ de 6 centímetros de longitud.
12. En el extremo A traza un ángulo de 40º.
13. En el extremo B traza un ángulo de 90º.
14. Prolonga la perpendicular y el lado terminal del ángulo de 40º hasta que se corten en el punto C.

La figura obtenida debe ser parecida a la siguiente.



15. La magnitud del ángulo <ACB es. _____________.
16. El cateto $\overline{BC}$ mide. _______________.
17. La hipotenusa $\overline{AC}$ mide. ____________.
18. Calcula hasta centésimos las siguientes razones trigonométricas considerando las magnitudes que obtuviste.

Sen 40º = ———	Cos 40º = ———	Tan 40º = ———
Cotan 40º = ———	Sec 40º = ———	Csc 40º = ———

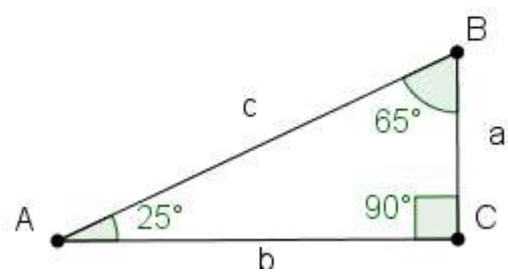
19. Utilizando la calculadora obtén el seno, coseno y tangente de 40º y compara los valores que obtuviste con los de la calculadora.

Sen 40º = ———	Cos 40º = ———	Tan 40º = ———

20. ¿Son iguales o diferentes? __________________.
21. En caso de ser diferentes, escribe la magnitud de las diferencias.

Sen 40º - Sen 40º = ___ Manual calculadora	Cos 40º - Sen 40º = ___ Manual calculadora	Tan 40º - Tan 40º = ___ Manual calculadora

22. ¿Se pueden obtener las razones trigonométricas cotangente, secante y cosecante, con la calculadora? ________________.
23. Traza un triángulo rectángulo cuyos ángulos midan 25º - 65º - 90º.



24. La magnitud del cateto a es = ____________.
25. La magnitud del cateto b es = ____________.
26. La magnitud de la hipotenusa c es = _______.
27. Con respecto al $< 25°$ el cateto adyacente es __________ el cateto opuesto es ___________ y la hipotenusa es ____________.
28. Encuentra el valor de las siguientes razones trigonométricas aproximadas hasta centésimos.

Sen 25º = ———	Cos 25º = ———	Tan 25º = ———

29. Con respecto al $< 65°$ el cateto adyacente es ___________ el cateto opuesto es ____________ y la hipotenusa es _____________.
30. Encuentra el valor de las siguientes razones trigonométricas aproximadas hasta centésimos.

Sen 65º = ———	Cos 65º = ———	Tan 65º = ———

Fase de Cierre.

En plenaria con ayuda del profesor se revisan todos los resultados obtenidos en la secuencia, y se resuelven los siguientes ejercicios.

31. Si sen(α) = 0.6, ¿se pueden encontrar las demás razones trigonométricas?
Busquen dos números a y c, cuyo cociente sea $\frac{a}{c} = 0.6$, a = ______, c = ________.
32. Por la definición del seno, el número a representa la longitud del cateto __________ y c representa la longitud de la ______________, aplicando el teorema de Pitágoras la longitud del cateto ____________ es = _____________.

Dibuja un triángulo rectángulo cuyos lados tengan las longitudes obtenidas y marca el ángulo α en el lugar correcto, las demás razones trigonométricas son.

Sen α = ——— $= 0.6$	Cos α = ———	Tan α = ———
Cotan α = ———	Sec α = ———	Csc α = ———

33. Traza un triángulo rectángulo cuyos ángulos midan 30º - 60º - 90º y encuentra el valor de las razones trigonométricas del ángulo de 60º.

Sen 60º = ———	Cos 60º = ———	Tan 60º = ———
Cotan 60º = ———	Sec 60º = ———	Csc 60º = ———

Secuencia 2. Razones Trigonométricas. Parte 2.

Aprendizaje: El alumno.
Comprende que el valor de las razones trigonométricas depende únicamente del valor del ángulo.

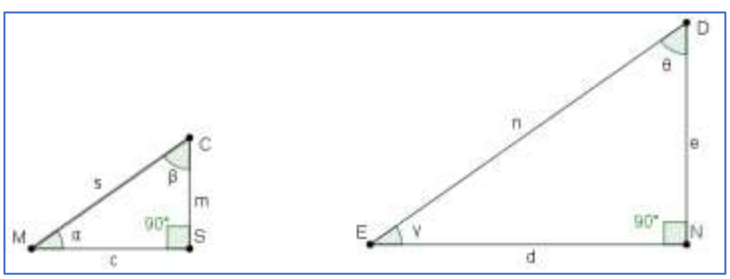
APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Comprende que el valor de una razón trigonométrica para un ángulo determinado es el mismo en triángulos rectángulos semejantes.
Procedimentales:	• Obtiene el valor de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para diferentes ángulos agudos utilizando triángulos rectángulos semejantes. • Comprueba los valores obtenidos utilizando una calculadora científica.
Actitudinales:	• Valora el procedimiento geométrico para obtener los valores de las razones trigonométricas por medio de triángulos rectángulos semejantes. • Valora el uso de la calculadora para obtener los valores de las razones trigonométricas para un ángulo agudo dado.

Fase de Inicio.

El grupo se divide en equipos de 3 o 4 alumnos.
Cada alumno de manera individual debe contestar cada una de las siguientes preguntas.

1. Dos triángulos son semejantes, sí.
   a) Sus ángulos correspondientes son ______________.
   b) Sus lados correspondientes son ________________.

Si los siguientes triángulos rectángulos son semejantes.



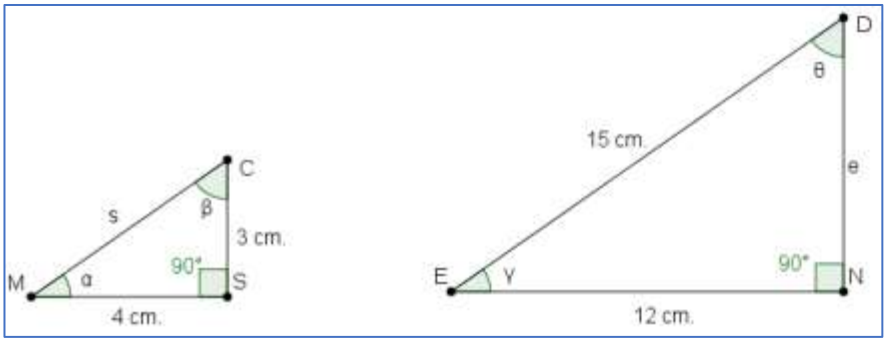
2. Si α es correspondiente con γ, entonces β es correspondiente con ____.
3. Si “s” es correspondiente con n, entonces m es correspondiente con ____ y “c” es correspondiente con ____.

Recordando que, si dos triángulos son semejantes, entonces sus lados correspondientes son proporcionales.

4. Por lo tanto.

$$\frac{s}{n} = \frac{m}{} = \frac{}{d}$$

5. Si los siguientes triángulos son semejantes, encuentra los valores pedidos.



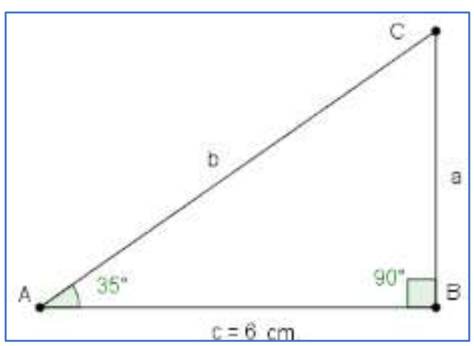
6. La longitud de e es = ________.
7. La longitud de s es = ________.

Cada equipo debe revisar los resultados obtenidos hasta el punto 7.

Fase de Desarrollo.

En cada equipo se realizan las siguientes operaciones de manera individual

8. Cada alumno selecciona un número entre 6 y 12 para que cada uno trace un segmento de $\overline{AB}$ centímetros de longitud, cada segmento debe ser de diferente longitud.
9. En el extremo A del segmento $\overline{AB}$, traza un ángulo de 35º.
10. En el extremo B traza una semirrecta perpendicular al lado $\overline{AB}$.
11. Si es necesario prolonga la semirrecta y el lado terminal del ángulo para que se corten en el punto C. La figura que se muestra a continuación es:

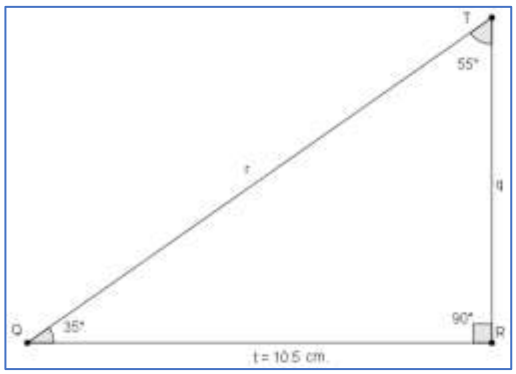


12. cuando la longitud del cateto $\overline{AB}$ es de 6 centímetros.
    Mide las longitudes hasta centésimos.
13. La longitud del cateto $\overline{BC}$ es de ______ centímetros.

14. La longitud de la hipotenusa $\overline{AC}$ es de ________ centímetros.
15. El seno de 35º es, $sen\ 35° = \frac{cateto\ opuesto}{} = \frac{a}{b} = \frac{}{} =$ ______.
16. El coseno de 35º es, $cos\ 35° = \frac{}{hipotenusa} = \frac{c}{b} = \frac{}{} =$ ______.
17. La tangente de 35º es, $tan\ 35° = \frac{}{cateto\ adyacente} = \frac{a}{c} = \frac{}{} =$ ______.

Las siguientes operaciones las hacen cada uno de los alumnos.

18. Traza un segmento $\overline{QR}$ de longitud de 10.5 centímetros.
19. En el punto Q traza un ángulo de 35º.
20. En el punto R levanta una perpendicular al segmento $\overline{QR}$.
21. Si es necesario prolonga la perpendicular y el lado final del ángulo de 35º hasta que se corten en el punto T.



La figura obtenida debe ser parecida a la siguiente.

22. La longitud del cateto q es ____________.
23. La longitud de la hipotenusa r es ______________.

Calcula las siguientes razones trigonométricas aproximadas hasta centésimos.

24. $sen\ 35° = \frac{q}{r} = \frac{}{} =$ _______.
25. $cos\ 35° = \frac{t}{r} = \frac{10.5}{} =$ _______.
26. $tan\ 35° = \frac{q}{t} = \frac{}{10.5} =$ _______.
27. Escribe los valores obtenidos por cada uno de los alumnos en la siguiente tabla del paso 14 al paso 16, luego escriban en la última columna los valores obtenidos del paso 23 al paso 25 de uno de los alumnos para compararlos.

alumno	1	2	3	4	Valor del 23 al 25
Seno					
Coseno					
Tangente					

Fase de Cierre.

En plenaria con ayuda del profesor se revisan los procedimientos y respuestas hasta el punto 26, del punto 27 en adelante se contestan y revisan de manera grupal.

28. ¿Son semejantes los triángulos ∆ABC y ∆QRT? ___________.
29. Indica las razones por las que son semejantes ____________________ ____.
30. Indica cuál es el lado correspondiente al lado $\overline{AB}$ en el triángulo ∆QRT __________________.
31. Indica cuál es el lado correspondiente al lado $\overline{BC}$ en el triángulo ∆QRT__________________.
32. Indica cuál es el lado correspondiente al lado $\overline{CA}$ en el triángulo ∆QRT __________________.
33. Como los triángulos son semejantes sus lados correspondientes son proporcionales y se pueden establecer las siguientes proporciones.
$$\frac{AB}{QR} = \frac{\_\_\_\_\_}{RT} = \frac{AC}{\_\_\_\_}$$
34. Si consideramos únicamente $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{RT}$ por la propiedad fundamental de las proporciones, el producto de medios es igual al producto de los extremos.
$$(\overline{AB})(\overline{RT}) = (\overline{BC})(\overline{QR})$$
35. Dividiendo la igualdad por $\overline{AB}$ tenemos.
$$(\overline{RT}) = \frac{(BC)(QR)}{(\overline{AB})}$$
36. Dividiendo la igualdad por $\overline{QR}$ se tiene.
$$\frac{(\overline{RT})}{(QR)} = \frac{(BC)}{(\overline{AB})}$$
37. En el triángulo ∆QRT la razón $\frac{(\overline{RT})}{(QR)}$ corresponde a la ___________ de 35º.
38. En el triángulo ∆ABC la razón $\frac{(\overline{BC})}{(AB)}$ corresponde a la ___________ de 35º.
39. Como los triángulos ∆QRT y ∆ABC son semejantes, la tan (35º) tiene el mismo valor en ambos triángulos, lo que nos indica que el valor de la tan(35º) no depende de las longitudes de los lados de los triángulos, sino únicamente de la magnitud del ángulo.

Secuencia 3. Razones de 30°, 45° y 60°. Secuencia Didáctica de Exploración y Consolidación.

Aprendizaje: Determina los valores de las razones trigonométricas para los ángulos de 30º, 45º, y 60º y emplea la calculadora para verificarlos.

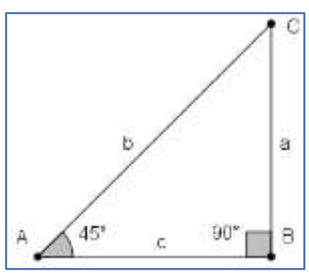
APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Determina el seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante de 30º. • Determina el seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante de 60º. • Determina el seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante de 45º.
Procedimentales:	• Utiliza la semejanza de triángulos para obtener las razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Muestra tolerancia. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Lee con cuidado y realiza las indicaciones de la secuencia, puedes consultar tus apuntes y en caso de alguna duda pregunta a tu profesor.
El grupo se divide en equipos de trabajo de 3 o 4 alumnos.

Fase de Inicio.

Obtención de las razones trigonométricas para los ángulos de 45º.

1. Cada alumno elige un número entre 4 a 8 cm, y traza el segmento $\overline{AB}$ con la longitud seleccionada, cada número seleccionado debe ser diferente.
2. En el punto **A** traza un ángulo de 45º con $\overline{AB}$ cómo lado inicial.
3. En el punto **B** Traza una perpendicular al segmento $\overline{AB}$.
4. Prolonga los dos segmentos trazados hasta que se corten en el punto C.
5. Nombra con "**a"** el lado opuesto al ángulo A, con "**b"** al lado opuesto al ángulo B y con "**c"** el lado opuesto al ángulo C.



6. Tu figura debe ser parecida a la siguiente ΔABC.
7. La longitud del cateto $\overline{AB}$ es, $\overline{AC}$ = __________.

8. La longitud del cateto $\overline{BC}$ es, $\overline{BC}$ = __________.
9. Con el teorema de Pitágoras, determina la longitud de la hipotenusa $\overline{AC}$ = ___________.
10. La magnitud del ángulo <C = _________.

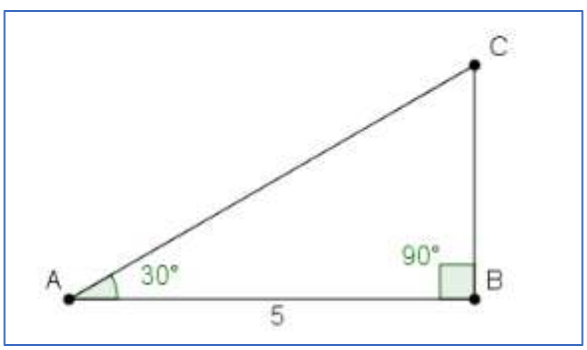
En el triángulo ∆ABC, calcula las razones trigonométricas indicadas.

11. Seno de 45º = __________.
12. Coseno de 45º = __________.
13. Tangente de 45º = __________.
14. Cotangente de 45º = __________.
15. Secante de 45º = __________.
16. Cosecante de 45º = __________.

Fase de Desarrollo.

Para obtener el valor de las razones trigonométricas de los ángulos de 30º y 60º realiza las siguientes instrucciones.

17. Traza un segmento $\overline{AB}$ cuya longitud puede ser de 4 hasta 9 centímetros de largo, con incrementos de 1 centímetro.
18. En el extremo A traza un ángulo de 30º.
19. En el extremo B traza un ángulo de 90º.
20. Prolonga los segmentos hasta formar el triángulo, el punto donde se cortan los segmentos desígnalo por C, la figura obtenida debe ser parecida a la siguiente.



La magnitud del ángulo <C es, ____ .

21. La longitud del cateto $\overline{CB}$ es, ______
22. La longitud de la hipotenusa $\overline{AC}$ es, ______________
23. Con respecto al ángulo <A el cateto adyacente es, _________ y el cateto opuesto es, ___________.
24. De acuerdo con las longitudes de los lados del triángulo que trazaste.

    Sen (30º) = ________.

    Cos (30º) = ________.

    Tan (30º) = ________.

    Cotan (30º) = ______.

    Sec (30º) = _______.

    Csc (30º) = _______.

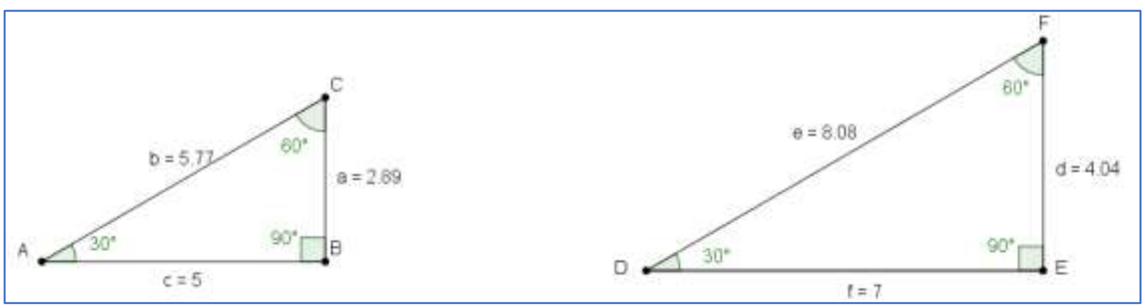
Ahora se calcularán las razones trigonométricas del ángulo de 60º.

25. Con respecto al ángulo <C el cateto adyacente es, __________ y el cateto opuesto es, ____________.
26. Sen (60º) = _________.
    Cos (60º) = _________.
    Tan (60º) = _________.
    Cotan (60º) = ______.
    Sec (60º) = ________.
    Csc (60º) = ________.

Compara tus resultados con uno de tus compañeros, y hagan una tabla en sus cuadernos indicando cuáles son iguales y cuales son diferentes. Cuando sean diferentes agreguen una columna más en la que anoten la diferencia.

Fase de Cierre.

En plenaria y con ayuda del profesor se revisan los procedimientos y respuestas obtenidas, y las siguientes preguntas se responden de manera grupal de manera que el profesor pueda resolver las dudas que se presenten.
A continuación, veremos la explicación del por qué los valores obtenidos son iguales, o muy aproximados.
La siguiente figura muestra dos de los triángulos que pudieron ser trazados en el punto anterior, con sus medidas aproximadas. Observa que los nombres de los vértices del segundo triángulo fueron cambiados.



27. Escribe el concepto de semejanza de triángulos.

____

____.

28. Escribe la razón por la cual los triángulos ΔABC y ΔDEF son semejantes. ____.
29. Como sabes si dos triángulos son semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales, así que indica los lados proporcionales de los siguientes lados en el triángulo ΔABC en el triángulo ΔDEF.

$\overline{AB} \leftarrow - - - - \rightarrow$ ___________
$\overline{CB} \leftarrow - - - - \rightarrow$ ___________
$\overline{AC} \leftarrow - - - - \rightarrow$ ___________

Entonces podemos establecer las siguientes proporciones.

$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{} = \frac{}{\overline{DF}}$

Tomando la primera parte de las proporciones.

$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$, de donde $(\overline{AB})(\overline{EF}) = (\overline{BC})(\overline{DE})$, y finalmente, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$.

30. En el triángulo ΔABC, la razón $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$ es la razón trigonométrica que corresponde a:_________________________________.
31. En el triángulo ΔDEF, la razón $\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$ es la razón trigonométrica que corresponde a: _________________________________.

Como observas, cotangente (A) = cotangente (D). Que nos indica que el valor de la cotangente del ángulo de 30º no depende de las longitudes de los lados del triángulo, únicamente depende de la magnitud del ángulo.

32. Si ahora consideramos la segunda parte de la razón $\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$, prueba que se cumple la siguiente proporción: $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{DF}}$.
    En el triángulo ΔABC la razón $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ corresponde al seno (30º) y en el triángulo ΔDEF la razón $\frac{\overline{EF}}{\overline{DF}}$ corresponde al _______, así que ___________________.
33. Utilizando los triángulos semejantes ΔABC y ΔDEF, ahora muestra que el seno y el coseno para el ángulo de 60º son iguales al ser calculados en los dos triángulos.
34. Cada alumno hace una tabla con los valores de las razones trigonométricas para los ángulos de 30, 45º y 60, luego compara los valores obtenidos con los que se obtienen al usar una calculadora.

razón	Manual	Calculadora	Diferencia Manual - calculadora
Seno			
Coseno			
Tangente			
Cotangente			
Secante			
cosecante			

35. Se comparan los resultados de todo el grupo, y se hacen las conclusiones.
36. El profesor muestra una hoja de trabajo de GeoGebra para obtener las razones trigonométricas en diferentes triángulos que sean semejantes.

Tarea complementaria de la práctica.

Investiga la forma de obtener las razones trigonométricas de 45º, usando un cuadrado cuyos lados miden 10 cm.
Investiga la forma de obtener las razones trigonométricas de 30º y 60º utilizando un triángulo equilátero cuyos lados midan 10 cm, cada lado.
Compara tus resultados con los que se obtuvieron en la práctica para los ángulos de 30º, 45º y 60º, en una tabla escribe los que se obtuvieron en la práctica, los que se obtienen en esta actividad y los que nos da una calculadora, indicando si son iguales o muy aproximados.

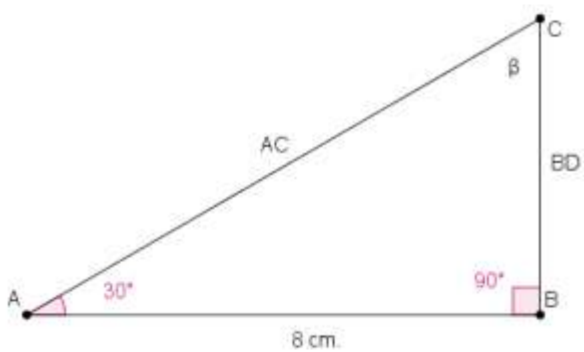
Secuencia 4. Solución de Triángulos Rectángulos (introducción). Secuencia Didáctica de Exploración.

Aprendizaje: Resuelve problemas que involucran triángulos rectángulos.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Comprende las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
Procedimentales:	• Resuelve triángulos rectángulos utilizando las razones trigonométricas.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Muestra tolerancia. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Fase de Inicio.

Lee y analiza los siguientes problemas debido a que después tienes que resolver problemas parecidos, las operaciones se aproximan a centésimos sin redondear. Encontrar los elementos que faltan en el siguiente triángulo rectángulo.



1. Para encontrar el ángulo β, recordamos que la suma de los ángulos agudos de todo triángulo rectángulo es de 90^o.

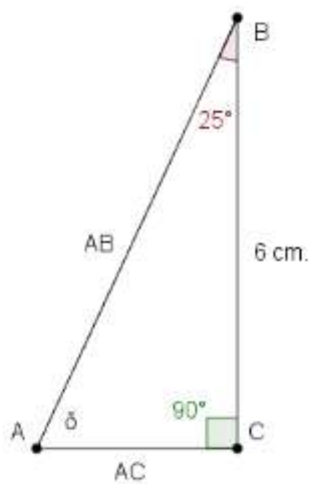
$30^o + \beta = 90^o$.
Despejando β, se tiene.
$\beta = 90^o - 30^o = 60^o$. $\beta = 60^o$.

2. Para encontrar la longitud del segmento AC, tenemos que utilizar una razón trigonométrica en la que intervengan dos datos conocidos y el segmento AC. En este caso la razón coseno.
   $cos(30°) = \frac{8}{AC}$, despejando AC, $ACcos(30°) = 8$, $AC = \frac{8}{\cos(30°)}$.
   Sustituyendo en el despeje cos (30°) = 0.86, tenemos, $AC = \frac{8}{0.86}$.
   Haciendo las operaciones indicadas, AC = 9.30 cm.
   La longitud del segmento AC = 9.30 cm.

3. Para encontrar la longitud del segmento BD, utilizamos la razón trigonométrica tangente.
   $\tan(30°) = \frac{BD}{8}$, de donde, $BD = 8\tan(30°)$.

Como $\tan(30°) = 0.57$ sustituyendo este valor en el despeje.
Haciendo las operaciones indicadas, BD = 8 (0.57) = 4.56.
La longitud del segmento BD es de, BD = 4.56 cm.

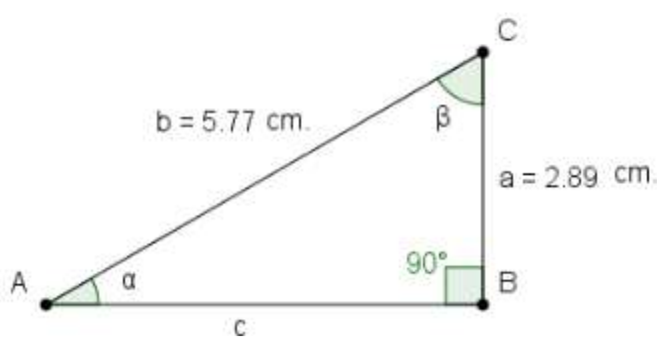
Encontrar los elementos que faltan en el siguiente triángulo rectángulo.



4. Para encontrar la longitud del cateto AC, usamos la razón trigonométrica tangente.
$\tan(25°) = \frac{AC}{6}$, de donde $AC = 6\tan(25°)$.
Sustituyendo tan (25°) = 0.46 en el despeje, se tiene que $AC = 6\ (0.46)$
Realizando la operación se tiene AC = 6(0.46) = 2.76.
La longitud del segmento AC = 2.76 cm.

5. Para encontrar la longitud de la hipotenusa AB usamos la razón trigonométrica coseno.
$\cos(25°) = \frac{6}{AB}$, despejando AB tenemos $AB = \frac{6}{\cos(25°)}$.
Como cos (25°) = 0.90, Sustituyendo el valor en el despeje.
Haciendo la operación $AB = \frac{6}{0.90}$.
La longitud del segmento AB = 6.66 cm.

6. El valor del ángulo δ, se obtiene de, 25° + δ = 90°.
De donde δ = 65°.



Encontrar los elementos que faltan en el siguiente triángulo rectángulo.

7. Para encontrar la longitud del cateto c, podemos emplear el teorema de Pitágoras, $c^2 + a^2 = b^2$.
Con b = 5.77 y a = 2.89.
Sustituyendo estos valores en la ecuación, $c^2 + (2.89)^2 = (5.77)^2$.
Despejando c^2 tenemos, $c^2 = (5.77)^2 - (2.89)^2$.
Haciendo las operaciones indicadas, $c^2 = 33.29 – 8.35$.
De donde $c^2 = 24.94$, haciendo la raíz cuadrada, c = 4.99 centímetros.
Para encontrar el ángulo α, utilizamos la razón trigonométrica tangente.

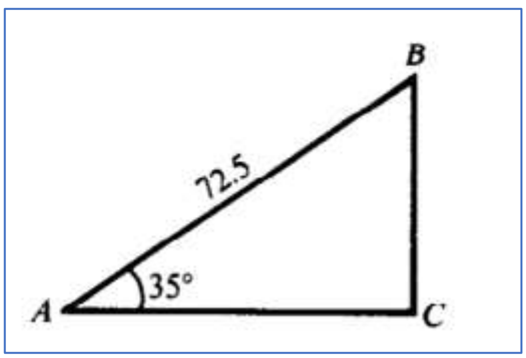
Tan(α) = $\frac{2.89}{4.99} = 0.57$

8. Como vamos a usar la calculadora, primero presionamos la tecla SHIFT.
Después la tecla tan, y en la pantalla aparece, $\tan^{-1}($.
Ahora escribimos el valor de 0.57 y cerramos el paréntesis, $\tan^{-1}(0.57)$.
Al presionar la tecla =, la pantalla muestra, 29.68.
Para ver el ángulo en grados se presiona la tecla °' ' '.
La pantalla nos muestra que el ángulo α mide 29º 40'.
El ángulo β se encuentra utilizando que la suma de los ángulos agudos de todo triángulo rectángulo es 90º.
$\alpha + \beta = 90º$
Como α = 29º 40', sustituyendo en la ecuación tenemos, 29º 40' + β = 90º

De donde β = 90º - 29º 40' = 89º 60' - 29º 40', y el valor de β es, β = 60º 20'.

Fase de Desarrollo.

Ahora cada alumno resuelve los siguientes problemas utilizando lo aprendido en los problemas anteriores.
Encuentra los elementos que faltan en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos.



9. Para determinar la longitud del cateto $\overline{AC}$, Utiliza la razón trigonométrica cos (35º).

cos (35º) = $\frac{\quad}{72.5}$.

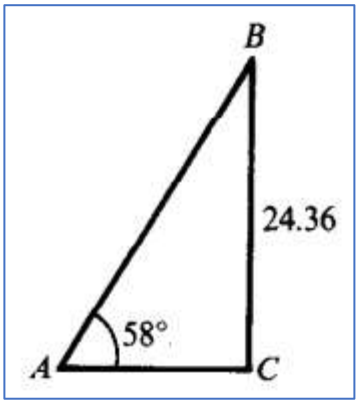
El valor de cos (35º) = _______.

Sustituyendo el valor en la igualdad se tiene, __________ = $\frac{\quad}{72.5}$, y despejando $\overline{AC}$ = __________________, de manera que el valor de $\overline{AC}$ = _____________.

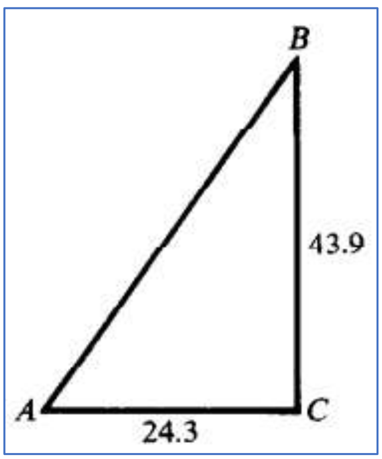
El valor del ángulo <CBA = ________.

Para determinar la longitud del cateto $\overline{BC}$, Utiliza la razón trigonométrica sen (35º) = $\frac{\quad}{72.5}$.

Como sen (35º) = _____________, sustituyendo el valor en la igualdad se tiene, ___________ = $\frac{\quad}{72.5}$, y despejando $\overline{BC}$ = ______________, de manera que la longitud de $\overline{BC}$ = _____________.



10. Para determinar la longitud del cateto $\overline{AC}$ usamos la razón trigonométrica tan (58º) = $\frac{24.36}{\quad}$, como el valor de tan (58º) = 1.60, sustituyendo en la ecuación tenemos _________ = $\frac{24.36}{\quad}$, despejando y haciendo la operación indicada la longitud de $\overline{AC}$ = ________.
Para determinar la longitud de la hipotenusa $\overline{AB}$
Se puede utilizar la razón trigonométrica
sen (58º) = $\frac{24.36}{\quad}$.
Sustituyendo el valor de sen (58º) = 0.84, en la ecuación, 0.84 = $\frac{24.36}{\quad}$, despejando AB y haciendo las operaciones indicadas el valor de la hipotenusa es $\overline{AB}$ = _______.
La magnitud del ángulo <CBA se encuentra utilizando la siguiente igualdad.
<CBA + 58º = 90º, así que <CBA = _________________.

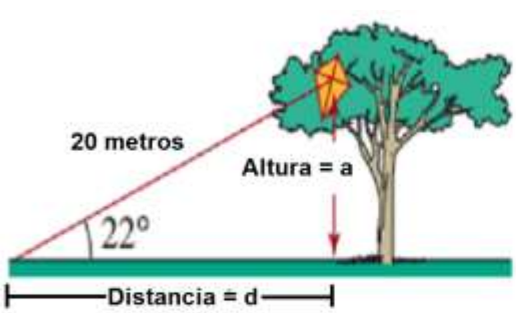


11. Primero encontramos el ángulo <CAB, utilizando la razón trigonométrica de tan (<CAB) = $\frac{43.9}{24.3}$ = ____.
Una vez calculado el valor, usamos la calculadora para encontrar la magnitud del ángulo, para lo cual realizamos el siguiente procedimiento.

- Presionamos la tecla shift
- Presionamos la tecla tan
- En la pantalla aparece, $\tan^{-1}$(
- Ahora escribimos el valor del cociente, cerramos el paréntesis y presionamos la tecla =.
- Para ver el valor del ángulo en grados presionamos la tecla °' ' '.

La magnitud del <CAB es = _______.
Utilizando el teorema de Pitágoras la longitud de la hipotenusa $\overline{AB}$ = ________.

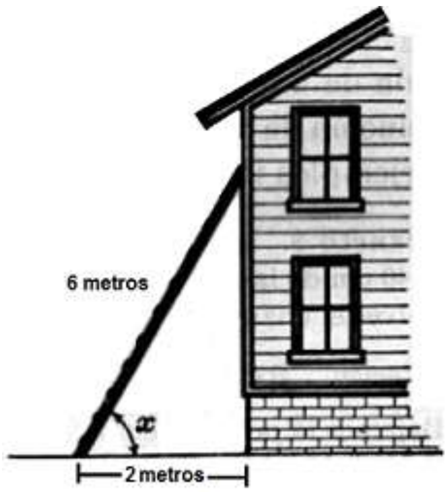
12. Un papalote queda atorado en las ramas superiores de un árbol. Si el cordón de 20 metros forma un ángulo de 22º con el suelo, la altura aproximada del árbol, calculando la altura del papalote sobre el piso es.



Como puedes observar podemos formar un triángulo rectángulo, de manera que.
La hipotenusa es = __________.
El cateto opuesto es = ________.
El cateto adyacente es = ______.

Para encontrar la altura del papalote sobre el suelo usamos la identidad trigonométrica _______________, sustituyendo datos en la ecuación: $sen(22°) = \frac{}{20}$, como sen(22º) = _____, al sustituir este valor y despejar a = _______________, y después de hacer la operación indicada el valor de la altura es a = ________________.

13. Una escalera de 6 metros esta recargada sobre una casa, si la base de la escalera está a 2 metros de la casa, ¿el ángulo x que forma la escalera con el piso es?



La razón trigonométrica que usaremos es.

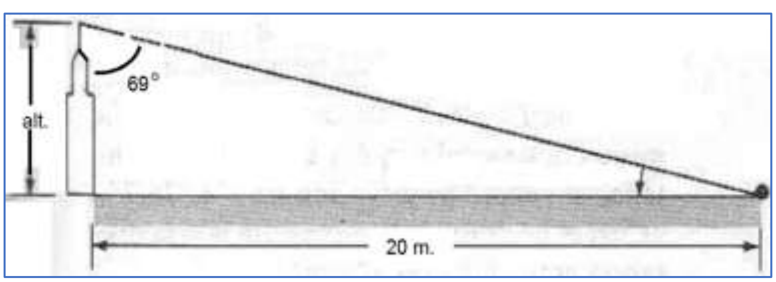
__________ $= \frac{2}{6} =$ ______, para encontrar el ángulo realiza el siguiente procedimiento.

- Presiona la tecla Shift.
- Presiona la tecla ______.
- Escribe el valor del cociente ________.
- El valor en la pantalla es ___________.
- Al presionar la tecla °' '' el valor del ángulo en grados es _______.

Fase de Cierre.

En plenaria con ayuda del profesor se revisan los resultados se aclaran las dudas y se resuelven los siguientes problemas.

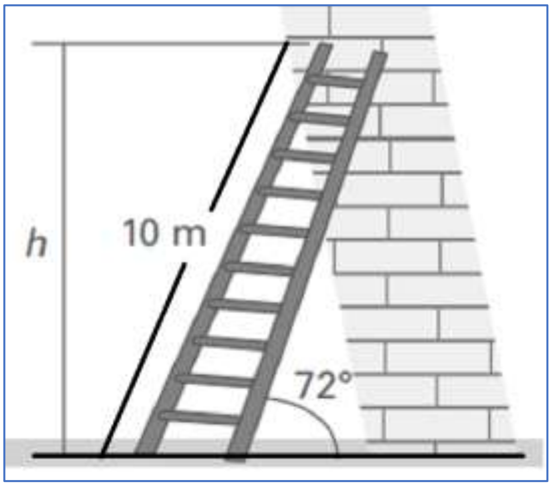
14. Un edificio proyecta una sombra de 20 m de longitud. Si el ángulo que forma el edificio con el segmento que va desde el punto más alto del edificio con el punto más lejano de la sombra del edificio es de 69° ¿qué altura tiene el edificio?



La altura de edificio es.

alt = _________.

15. Una escalera de 10 metros está recargada sobre una pared. ¿Qué altura alcanza si forma con el suelo un ángulo de 72º?



Altura = ________.

Secuencia 5. Solución de Triángulos Rectángulos. Parte 1.

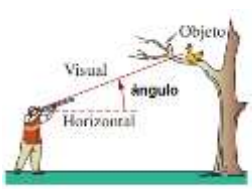
Aprendizaje: Resuelve problemas que involucran triángulos rectángulos.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Comprende los conceptos de ángulos de elevación y ángulos de depresión.
Procedimentales:	• Resuelve problemas de aplicación con ángulos de elevación y ángulos de depresión.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Muestra tolerancia. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Fase de Inicio.

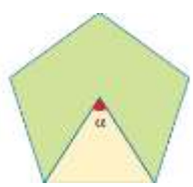
Al resolver algunos problemas de aplicación a veces hay que considerar alguno de los siguientes ángulos.
El que se forma de la línea visual del observador que es horizontal hacia arriba localizando el objeto o punto de referencia, a dicho ángulo le llamamos ángulo de elevación.
El otro ángulo que consideramos es el que se forma de la línea visual hacia abajo para localizar el objeto o punto de referencia, a este ángulo lo designamos como ángulo de depresión.

1. ¿Qué ilustración muestra un ángulo de elevación?

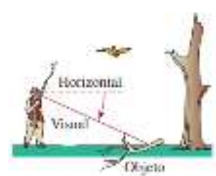


a.


b.

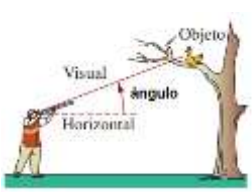


c.



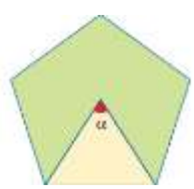
d.

2. ¿qué ilustración muestra en ángulo de depresión?

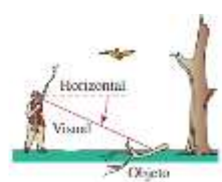


a.


b.

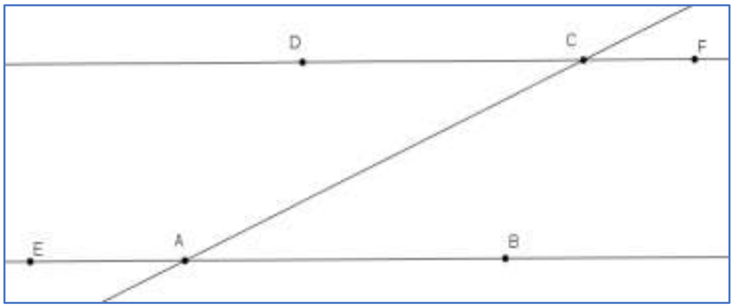


c.



d.

3. En la siguiente figura tenemos dos rectas cortadas por una transversal, marca los ángulos alterno – internos.



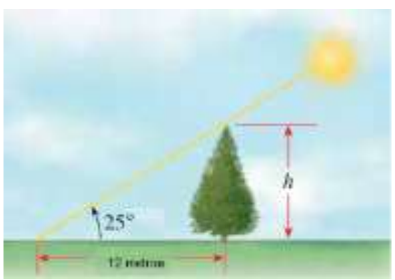
Respuesta: _______________
_________________________.

4. En la figura anterior, los ángulos alternos – interno que marcaste son.
a. Iguales b. complementarios c. suplementarios d. diferentes

Ahora lee con cuidado cada uno de los siguientes problemas y completa las respuestas, aquí aplicaremos los conceptos de ángulos de elevación y ángulos de depresión.

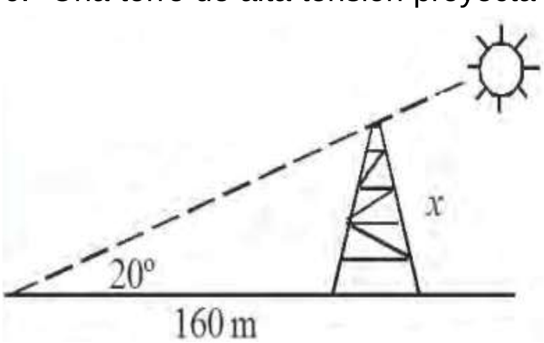
Fase de Desarrollo.

5. Una secoya proyecta una sombra de 12 metros de largo. Encuentre la altura del árbol si el ángulo de elevación del Sol es 25°



En la figura que representa el problema, con respecto al ángulo de 25°, el cateto adyacente es __________.
El cateto opuesto es __________________.
¿Qué ángulo forma el segmento que va de donde termina la sombra de la secoya hasta la punta de esta con respecto al piso? ____________________.
¿Cuál de los catetos es la incógnita? _____________.
¿Qué razón trigonométrica se usa para resolver este problema? ________________________________, escribe la razón trigonométrica que indicaste para resolver el problema. __________________________________.
Despeja la incógnita de la igualdad que escribiste. ______________________.
Sustituye el valor de la razón trigonométrica en tu despeje, realiza las operaciones indicadas, el valor de la altura del árbol es. _________________.

6. Una torre de alta tensión proyecta una sombra de 160 metros de largo, cuando el ángulo de elevación del sol mide 20°. ¿Cuál es la altura de la torre?



En la figura traza el segmento que represente la altura de la torre.
Marca con las letras A, B y C los siguientes puntos, A el final de la sombra, B el pie de la altura de la torre y con C el punto final del segmento que representa la

altura de la torre.

¿Qué segmento representa la incógnita del problema? _________________.

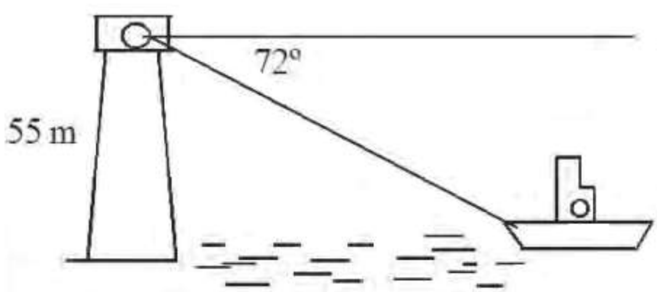
¿Escribe la razón trigonométrica que se utiliza para encontrar la incógnita del problema? ____.

Despeja la incógnita de la razón que escribiste. ______________________.

Encuentra el valor de la razón que escribiste y realiza las operaciones indicadas para encontrar el valor de la incógnita. ____________________.

La altura de la torre es ____.

7. Un faro tiene una altura de 55 metros de altura. El ángulo de depresión desde la cima del faro hasta un barco en el mar es de 72°. ¿Qué tan lejos de la base del faro se encuentra el barco?



Traza en la figura el segmento que representa la distancia del barco a la base de la torre.

Coloca las siguientes letras en los puntos indicados, A al inicio del segmento que representa la distancia de la base del faro al barco, B en donde termina el segmento que representa la distancia entre el barco y la base del barco, el punto C en la cima del faro.

Escribe la magnitud del ángulo <CBA = ___________, escribe el segmento que representa la distancia buscada ___________________

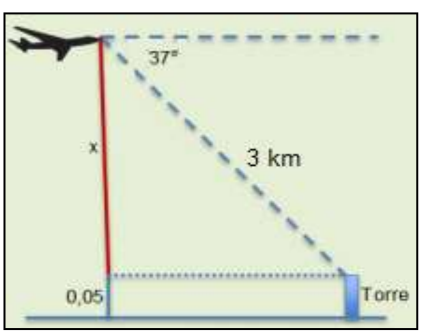
Escribe la razón trigonométrica que se utiliza para encontrar la distancia buscada de acuerdo con los datos ____________________________

Despeja la incógnita de la igualdad escrita _______________________

Sustituye el valor de la razón trigonométrica en el despeja y realiza las operaciones indicadas, el valor de la incógnita es __________________

La distancia del faro al barco es _______________________________

8. El piloto de un avión en vuelo observa la torre de control del aeropuerto a 3 km de distancia desde el avión con un ángulo de depresión de 37° . Si la torre de control tiene una altura de 50 m, calcule la altitud aproximada a la que vuela el avión en ese momento. Se transforman los 50 metros a su equivalente en kilómetros.



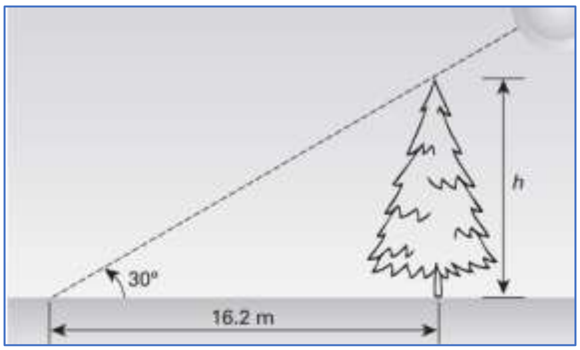
50 m = $50\,m\,\frac{1\,km}{1000\,m} = 0.05\,km$

En el dibujo se muestran los datos del problema, de acuerdo con la misma escribe la razón trigonométrica que se utiliza para encontrar la altura de lo alto de la torre al avión _________, ahora despeja la incógnita ________________.

Sustituye el valor de la razón usada en el despeje y realiza las operaciones indicadas, el valor encontrado es ________________________________.
Para encontrar la altura aproximada suma al valor encontrado la altura de la torre y el resultado es ____.
La altura aproximada del avión al suelo es ___________________________.

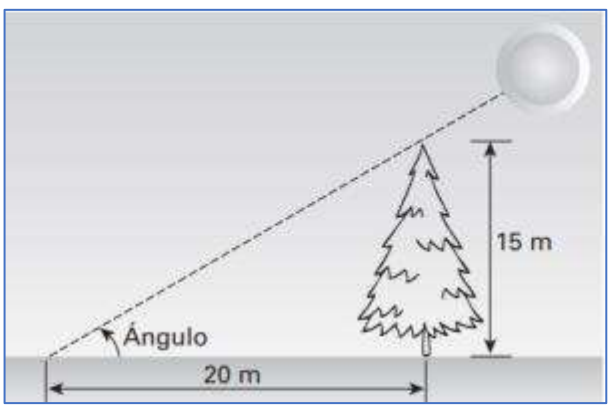
Fase de Cierre.

Resuelve los siguientes problemas y al finalizar en plenaria serán revisados todos los resultados y se aclararán las dudas que surjan con ayuda del profesor.



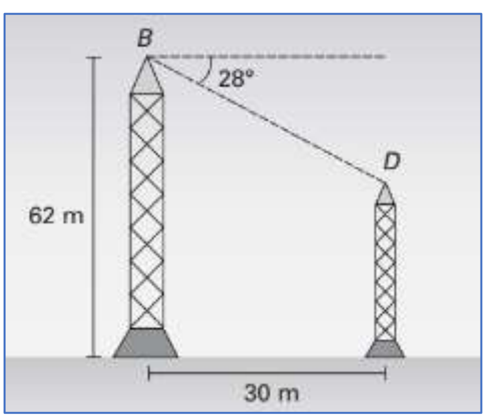
9. Un pino grande proyecta una sombra de 16.2 metros de largo. Determina la altura del árbol, sí el ángulo de inclinación del sol en ese momento es de 30º.

La altura h del pino es _______.



10. Un árbol de 15 metros de altura proyecta una sombra de 20 metros de largo, ¿cuál es el ángulo que forma el sol con el horizonte?

Ángulo = ___________.

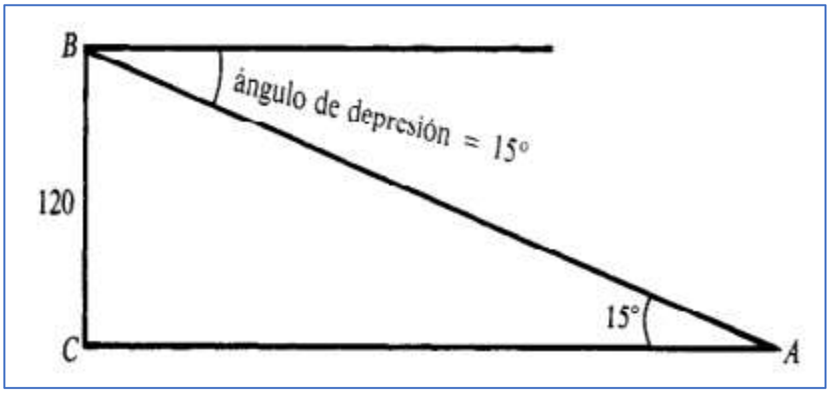


11. Desde la punta B de una torre, el ángulo de depresión a la punta D de otra torre, que está a 30 metros de la primera es de 28º. Si la torre más alta mide 62 metros, ¿cuál es la altura de la torre menor?

Altura de la torre menor __________.

12. De lo alto de un faro, de 120 metros sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión de un bote es de 15º, ¿a qué distancia de la base del faro está el bote?

La distancia del bote a la base del faro es __________.



Secuencia 6. Solución de Triángulos Rectángulos. Parte 2.

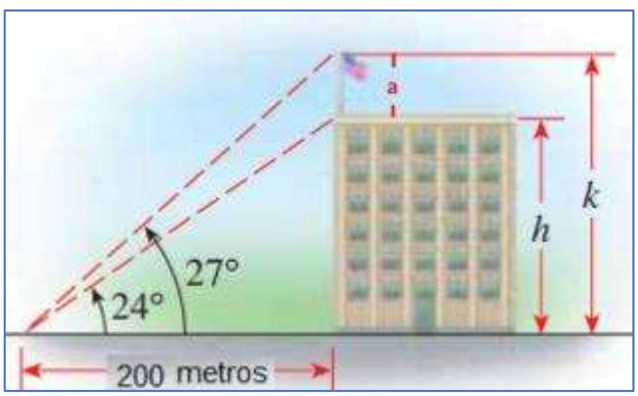
Aprendizaje: Resuelve problemas que involucran triángulos rectángulos.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Aplica en la resolución de problemas los conceptos de distancias inaccesibles y cálculo de áreas.
Procedimentales:	• Resuelve problemas de aplicación con ángulos de elevación y ángulos de depresión.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Muestra tolerancia. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Fase de Inicio.

El grupo se divide en equipos de 4 o 5 alumnos, cada uno lee y resuelve los siguientes dos problemas, después discuten sus resultados, en caso de dudas deben preguntar a su profesor.

13. Desde un punto en el suelo a 200 metros de la base de un edificio, un observador encuentra que el ángulo de elevación a lo alto del edificio es 24° y que el ángulo de elevación a lo alto de una astabandera que está en el edificio es de 27°. Encuentre la altura del edificio y la longitud de la astabandera.
La figura muestra los datos y los nombres asignados a la altura del edificio (h) y la altura desde el piso hasta lo alto de la astabandera (k), y la altura del astabandera (a)

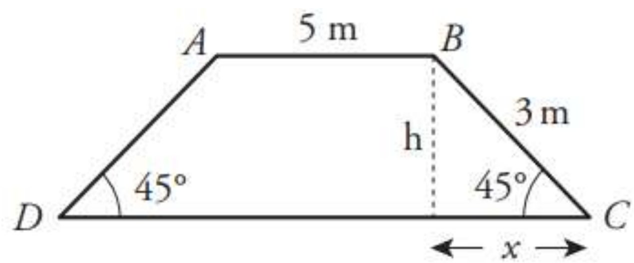


Asigna la letra A al punto a 200 metros del edificio, la letra B al punto donde empieza el edificio, C al punto donde empieza la astabandera, y el punto D hasta el punto más alto del astabandera.

Para encontrar la altura del edificio utilizamos el ∆ABC, así que escribe la razón trigonométrica para encontrar el valor de h, ________________________.
Despeja la h de la igualdad anterior __________________________________.
El valor de tan (24º) = __________.
Escribe el valor de la razón trigonométrica en el despeje y realiza las operaciones indicadas, el valor de h es _______________________________.

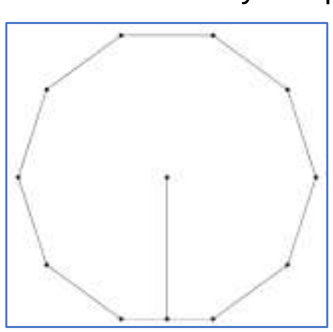
La altura del edificio es ____________________.
Usaremos el triángulo ∆ABD para encontrar la altura desde el piso hasta la punta del astabandera, o sea que k = h + ____.
Escribe la razón trigonométrica para encontrar la longitud del segmento BD, que corresponde a (k) __________________.
Despeja la incógnita k de la igualdad escrita _________________________.
El valor de tan (27º) = __________.
Sustituye el valor de la razón trigonométrica en la ecuación y realiza las operaciones indicadas, el valor de k es _____________________________.
La altura de la astabandera es, a = k – h = _______.

14. En un trapecio isósceles de bases *AB* y *DC,* sí la longitud de los lados *es AB* = 5m y *BC* = 3 m, y los ángulos que forma la base mayor con los lados oblicuos, miden 45°. Halla su área.

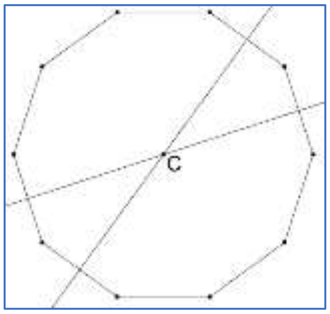


Asigna la letra E al punto donde el segmento h corta la base mayor.
Escribe la razón trigonométrica para encontrar el valor de h en el ∆ECB ____________.
El valor de sen (45º) = _______.
Sustituye el valor del seno en la igualdad, y despeja la incógnita h = ___________________.
Realiza las operaciones indicadas, el valor de h = ___________________.
Escribe la razón trigonométrica para calcular x en el triángulo ∆ECB _________.
El valor de cos (45º) es ____________.
Sustituye el valor del coseno en la igualdad, y despeja la incógnita.
x = ___________________.
Realiza las operaciones indicadas, el valor de x = ___________________.
Escribe la fórmula para encontrar el área del trapecio _________________, sustituye los valores en la fórmula, realiza las operaciones indicadas.
El valor del área es ________.

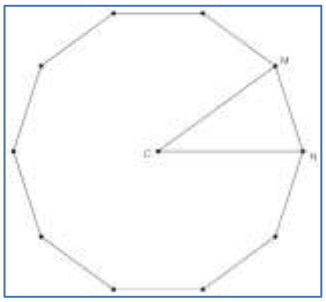
15. Calcular el área y la apotema de un decágono regular si sus lados miden 20 centímetros.



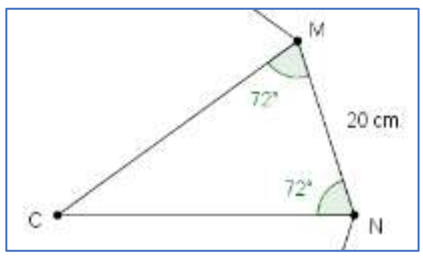
Primero se determina el centro del polígono, para lo cual se deben trazar las mediatrices de dos lados del polígono.
El punto donde se cortan las dos mediatrices corresponde al dentro del polígono, y lo designaremos con la letra C.



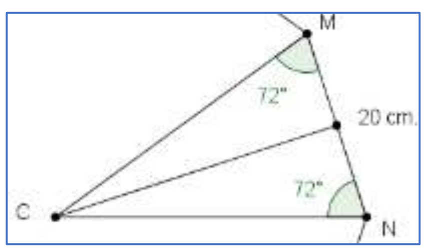
Una vez determinado el centro, trazamos desde dicho punto los segmentos a los extremos de uno de los lados del polígono, a los cuales designaremos con las letras M y N.
Como los dos lados del triángulo trazados son radios de la circunferencia donde está inscrito el polígono, el triángulo tiene dos lados iguales es un triángulo ________________.



Para determinar la magnitud de los ángulos de la base, primero determinamos la magnitud de cada uno de los ángulos internos del polígono con la fórmula.
S = $(n-2)180°$, con n = 10, sustituyendo en la fórmula, S = $(10-2)180°$
Después de hacer operaciones la suma S = 1440º, dividiendo entre 10 que es el número de ángulos internos tenemos que cada ángulo mide, 144º.
Como cada radio trazado a uno de los vértices, es bisectriz del ángulo correspondiente, cada ángulo formado mide 72º.
Si llevamos esta información al triángulo formado tenemos.



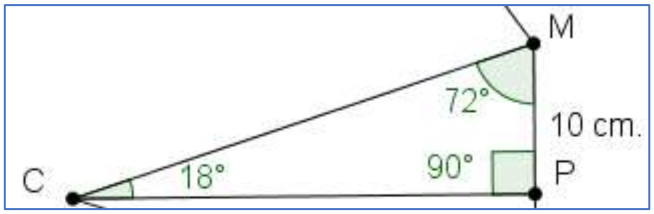
Si trazamos la bisectriz al tercer ángulo tenemos la siguiente figura.



Se tiene que la bisectriz además tiene las siguientes propiedades, debido a que los triángulos formados son congruentes.

Es mediatriz del lado MN, es la mediana del triángulo ∆NCM, es la altura del triángulo ∆NCM con respecto al lado MN, al punto de intersección de la bisectriz con el lado MN lo llamamos P.

Así que si nos fijamos en uno de los dos triángulos formados tenemos el siguiente triángulo, ∆CPM.



Para encontrar la longitud del segmento CP, Usamos la razón trigonométrica de $tan(72°) = \frac{\overline{CP}}{10}$.

Como tan (72º) = 3.07.

Sustituyendo el valor en la ecuación y despejando $\overline{CP}$, tenemos $\overline{CP}$ = 10(3.07) = 30.70.

La longitud la apotema CP del polígono es de 30.70 cm.

El área del ∆CPM es igual a, A = $\frac{base\ x\ altura}{2}$, base = 10 cm y altura = 30.70 cm.

Sustituyendo valores y haciendo las operaciones indicadas se tiene que.

A = $\frac{10\ x\ 30.70}{2} = 153.5.$

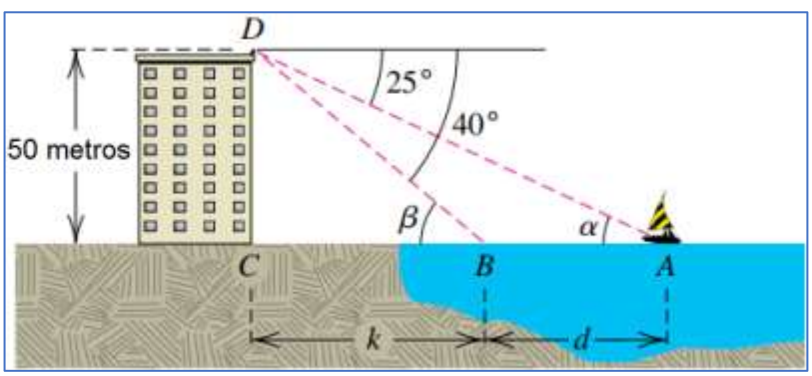
Como el triángulo ∆CMN, está formado por dos triángulos congruentes, su área es A = 2(153.5) = 307.0 cm^2.

Y como el decágono está formado por 10 triángulos congruentes al ∆CMN, su área es $A_{\Delta CMN}$ = 10(307.0) = 3070 cm^2.

Fase de Desarrollo.

Cada alumno debe leer y resolver cada uno de los siguientes problemas.

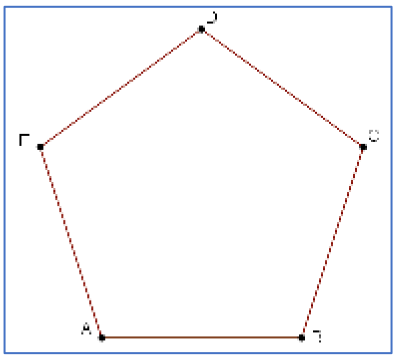
16. Desde lo alto de una torre situado frente a un océano, una persona ve un barco que navega directamente hacia la torre. Si el observador está a 50 metros sobre el nivel del mar y si el ángulo de depresión del bote cambia de 25° a 40° durante el tiempo que dura la observación, encontrar la distancia que recorre el bote.



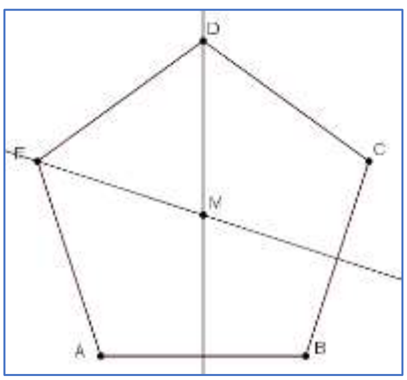
Como el nivel del piso es paralelo a la línea horizontal que parte del punto D, el ángulo β mide 40º, y el ángulo α mide 25º.

En el ∆BCD, para encontrar la longitud del segmento $\overline{CB}$ usamos la razón trigonométrica, ______________________________.

Si despejamos $\overline{CB}$ de la razón tenemos, $\overline{CB} = \frac{50}{\rule{1cm}{0.4pt}}$, como tan (40º) = 0.83, sustituyendo este valor en despeje y haciendo las operaciones indicadas, el valor de $\overline{CB}$ = __________.
En el ∆ACD, la razón trigonométrica para encontrar la longitud del cateto $\overline{AC}$ es _____________________.
Cómo tan (25º) = 0.46, sustituyendo valores, despejando AC y haciendo las operaciones indicadas, la longitud de AC es = ___________________.
Así que la distancia recorrida BA por el barco es = _____________________.



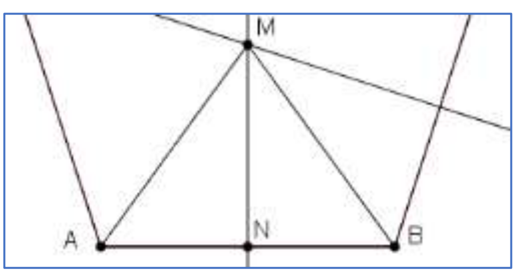
17. Calcula el área y la apotema de un pentágono regular de perímetro 100 cm.
Para localizar el centro de la circunferencia donde está inscrito el pentágono regular debes trazar las siguientes dos mediatrices. La mediatriz al lado AB
La mediatriz al lado BC. El punto de intersección de las dos mediatrices asígnale la letra M.



La figura que se obtiene es parecida a la siguiente.
Ahora traza los siguientes segmentos.

$$\overline{AM}$$
$$\overline{BM}$$

Y designa con la letra N el punto de intersección de la mediatriz al lado AB, con el lado AB, Para tener el siguiente triángulo isósceles.



La magnitud del ángulo <BNM = ________.
La magnitud del ángulo <MBN = ________.
La longitud del segmento $\overline{NB}$ = __________.
La razón trigonométrica para obtener la longitud del segmento $\overline{NM}$, en el ∆NMB es.
Como tan (54º) = ___________.
Al despejar MN tenemos, _______________________.

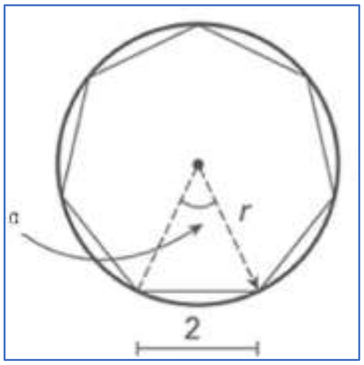
Sustituyendo el valor de tan (54º) y haciendo las operaciones, MN = ________.

Así que la longitud del **apotema** es ______.

El área del triángulo $\triangle NMB$ = _____
El área del triángulo $\triangle ABM$ = _____
El **área** del pentágono es = ______

Fase de Cierre.

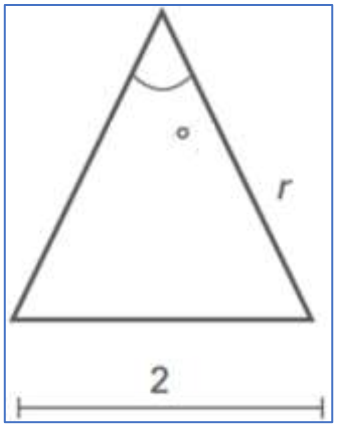
Con ayuda del profesor en plenaria se resuelven los siguientes problemas y luego se revisan los procedimientos y resultados de toda la secuencia.

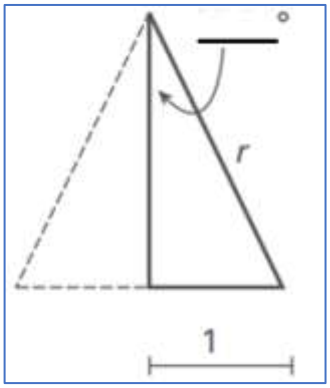


18. ¿Cuál es el radio de una circunferencia que tiene un heptágono regular inscrito si sus lados miden 2 cm?

Como puedes observar en la figura se tienen 7 ángulos centrales α, y la medida de cada uno de los ángulos es, α = _______.

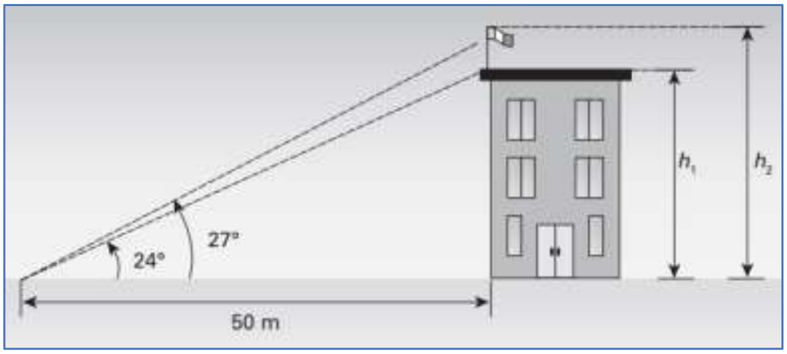
En la siguiente figura anota el valor de α.
¿Qué tipo de triángulo es el que se forma al trazar segmentos desde el centro a los extremos de uno de los lados del heptágono?______________________.





Si trazamos la bisectriz del ángulo α, se forman dos triángulos __________ y en la siguiente figura se muestra uno de ellos.
Escribe el valor del ángulo indicado, _______________.
¿Por qué la longitud del cateto opuesto al ángulo que escribiste es 1? ________________________________.
La razón trigonométrica para encontrar r es __________________.
Despeja r de la ecuación anterior __________________________.
El valor de sen (25º 42’) = _________________.
Sustituyendo el valor de sen (25º 42’) y haciendo las operaciones indicadas, la longitud de r es ___________________________.

19. Desde un punto en el suelo a 50 metros de la base de un edificio, se observa que el ángulo de elevación hasta la parte superior del edificio es de 24º y que el ángulo de elevación hasta la parte superior del astabandera del edificio es de 27º. Determinar la altura del edificio y la longitud del astabandera.



Sen (24º) = $\frac{h_1}{\_\_\_\_\_\_}$

De donde h_1 = _______________.

Sustituyendo en el despeje sen (24º) = __________ y haciendo las operaciones indicadas h_1 = _____________ y la altura del edificio h_1 = ______.

Sen (27º) = $\frac{h_2}{\_\_\_\_\_\_}$.

De donde h_2 = _______________

Sustituyendo en el despeje sen (27º) = __________ y haciendo las operaciones indicadas h_2 = _____________.

Así que la longitud del piso hasta la punta del astabandera h_2 = ______.

La longitud del astabandera = h_2 - _____ = _____ - _________ = ______.

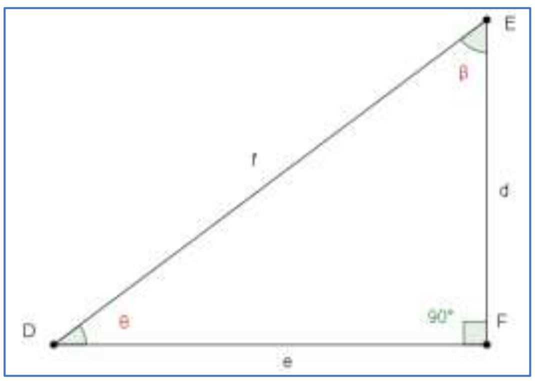
Secuencia 7. Identidades Trigonométricas.

Aprendizaje: Comprende la deducción de algunas identidades trigonométricas.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Identifica las identidades fundamentales, reciprocas y Pitagóricas.
Procedimentales:	• Aprende el procedimiento para deducir las identidades fundamentales, reciprocas y Pitagóricas.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Muestra tolerancia. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Fase de Inicio.

Cada uno de los alumnos responde las preguntas de acuerdo con la figura del siguiente triángulo rectángulo.



1. Con respecto al ángulo ϴ del triángulo rectángulo, indica el:
Cateto opuesto _____________.
Cateto adyacente ___________.
2. Ahora con respecto al ángulo β indica el:
Cateto opuesto _____________.
Cateto adyacente ___________.
3. Ahora con respecto al ángulo ϴ, completa las siguientes definiciones.

$$sen\ \theta = \frac{d}{f} \qquad cos\ \theta = \frac{}{} \qquad tan\ \theta = \frac{}{}$$

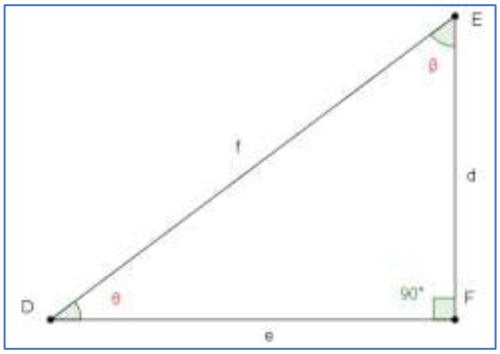
$$cotan\ \theta = \frac{}{} \qquad sec\ \theta = \frac{f}{e} \qquad csc\ \theta = \frac{}{}$$

4. Ahora con respecto al ángulo β, completa las siguientes definiciones.

$$sen\ \beta = \frac{}{} \qquad cos\ \beta = \frac{d}{f} \qquad tan\ \beta = \frac{}{}$$

$$cotan\ \beta = \frac{}{} \qquad sec\ \beta = \frac{}{} \qquad csc\ \beta = \frac{f}{e}$$

Con respecto al siguiente triángulo rectángulo, en cada uno de los ejercicios aplica el Teorema de Pitágoras para encontrar la incógnita indicada.



5. Escribe el Teorema de Pitágoras con respecto al ΔDFE. ____________________

6. Si f = 15 cm., d = 12 cm., la longitud del segmento e, ______________________.

7. Si d = 13 cm., y e = 10 cm., la longitud de la hipotenusa f es, ____________.

8. Si d = 2e, y f = 20 cm., la longitud de los segmentos d y e son.
d = __________, e = ____________

Efectúa en cada caso la división de fracciones indicada.

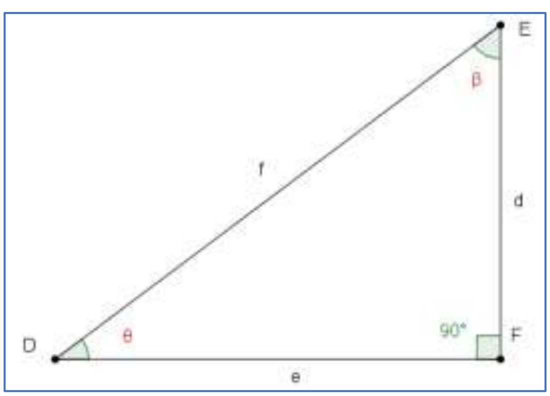
9. Si $a = \frac{3}{4}$, y $b = \frac{5}{2}$, el cociente $\frac{a}{b}$ = _________, el cociente $\frac{b}{a}$ = _________
10. Si $a = \frac{6}{5}$, y $b = \frac{3}{7}$, el cociente $\frac{a}{b}$ = _________, el cociente $\frac{b}{a}$ = _________
11. Si $a = \frac{1}{3}$, y $b = \frac{7}{2}$, el cociente $\frac{a}{b}$ = _________, el cociente $\frac{b}{a}$ = _________

Una vez que los alumnos han terminado, se revisan los resultados en el pizarrón con la participación de todos los alumnos y el profesor.

En caso de haber un error, no se corrige la respuesta incorrecta, a un lado se escribe la respuesta correcta para que se comparen.

Fase de Desarrollo.

Para obtener las Identidades Trigonométricas fundamentales, cada alumno debe leer con cuidado y seguir las instrucciones dadas.



12. Con respecto al ángulo Ɵ, el seno del ángulo es.
$sen(\theta) = \frac{\quad}{\quad}$.

13. El coseno del ángulo Ɵ es.
$cos(\theta) = \frac{\quad}{\quad}$.

14. Ahora sustituye la definición de ambas razones en el siguiente cociente.
$\frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} = \frac{\frac{\quad}{\quad}}{\frac{\quad}{\quad}}$.

15. Ahora realiza la división de fracciones indicada, simplifica el resultado y escribe a continuación el resultado. $\frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} = \frac{\quad}{\quad}$.

16. ¿A qué identidad trigonométrica es igual la fracción simplificada?

$\frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} =$

17. Ahora sustituye la definición de ambas razones en el siguiente cociente.

$\frac{cos(\theta)}{sen(\theta)} = \frac{\frac{-}{-}}{}$, como en el ejemplo anterior realiza la operación indicada y simplifica el resultado, $\frac{cos(\theta)}{sen(\theta)} = \frac{}{}$.

18. ¿A qué identidad trigonométrica es igual la fracción simplificada?

Para obtener las Identidades **Trigonométricas reciprocas**, cada alumno debe leer con cuidado y seguir las instrucciones dadas.

19. Considerando el triángulo rectángulo ∆DFE, escribe las definiciones de las siguientes razones trigonométricas.

$$tan(\theta) = \frac{}{} \qquad sec(\theta) = \frac{}{}$$

$$cot(\theta) = \frac{}{} \qquad csc(\theta) = \frac{}{}$$

20. Ahora sustituye las definiciones de las expresiones, en el siguiente producto.

$tan(\theta)\ cot(\theta) = \left(\frac{}{}\right)\left(\frac{}{}\right)$.

21. Realiza la multiplicación de fracciones indicada, simplifica y escribe a continuación el resultado, $tan(\theta)\ cot(\theta) =$ __________.

22. Escribe nuevamente la igualdad que se obtiene.

____.

23. En la igualdad anterior despeja la razón $tan(\theta)$, y ahora escribe el resultado. ____.

24. Ahora sustituye las definiciones de las expresiones, en el siguiente producto.

$sen(\theta)\ csc(\theta) = \left(\frac{}{}\right)\left(\frac{}{}\right)$.

25. Realiza la multiplicación de fracciones indicada, simplifica y escribe a continuación el resultado, $sen(\theta)\ csc(\theta) =$ __________.

26. Escribe nuevamente la igualdad que se obtiene.

____.

27. En la igualdad anterior despeja la razón $sen(\theta)$, y ahora escribe el resultado. ____.

28. Ahora sustituye las definiciones de las expresiones, en el siguiente producto.

$cos(\theta)\ sec(\theta) = \left(\frac{}{}\right)\left(\frac{}{}\right)$.

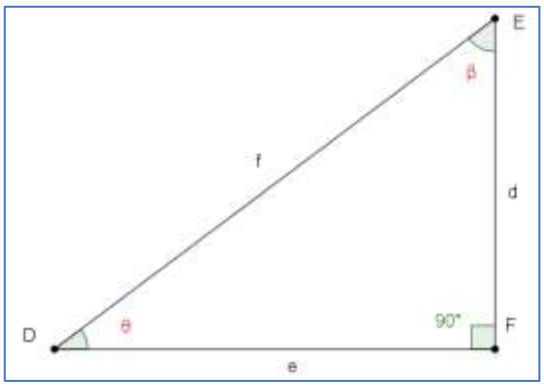
29. Realiza la multiplicación de fracciones indicada, simplifica y escribe a continuación el resultado, $cos(\theta)\ sec(\theta) =$ __________.

30. Escribe nuevamente la igualdad que se obtiene.

____.

31. En la igualdad anterior despeja la razón $cos(\theta)$, y ahora escribe el resultado. ____.

Para obtener las Identidades **Trigonométricas pitagóricas**, cada alumno debe leer con cuidado y seguir las instrucciones dadas.



De acuerdo con el ΔDFE. Sí $sen(\theta) = \frac{d}{f}$, al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación.

32. Tenemos $\left(sen(\theta)\right)^2 = \left(\frac{d}{f}\right)^2$, realiza la operación de la derecha y escribe el resultado en la siguiente expresión. $\left(sen(\theta)\right)^2 = \frac{}{}$.

33. Sí $cos(\theta) = \frac{e}{f}$, al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación, tenemos, $\left(cos(\theta)\right)^2 = \left(\frac{e}{f}\right)^2$, realiza la operación de la derecha y escribe el resultado en la siguiente expresión, $\left(cos(\theta)\right)^2 = \frac{}{}$.

34. Ahora sustituye el valor de cada identidad en la siguiente y realiza la suma de fracciones y simplifica el resultado.

$\left(sen(\theta)\right)^2 + \left(cos(\theta)\right)^2 = \frac{}{} + \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} =$ _______.

35. Escribe la igualdad obtenida.

____.

36. Nuevamente de acuerdo con el triángulo ΔDFE.

$tan(\theta) = \frac{d}{e}$, así que $\left(tan(\theta)\right)^2 = \left(\frac{d}{e}\right)^2$, realiza la operación indicada y escribe el resultado, $\left(tan(\theta)\right)^2 = \frac{}{}$.

37. Sí $sec(\theta) = \frac{f}{e}$, al elevar al cuadrado se obtiene, $\left(sec(\theta)\right)^2 = \left(\frac{f}{e}\right)^2$, realiza la multiplicación de fracciones y escribe el resultado.

$(sec(\theta))^2 = \frac{}{}$.

38. Sustituye el valor de $\tan^2(\Theta)$ en la siguiente expresión.

$1 + \tan^2(\Theta) = 1 + \text{–}$, realiza la suma de fracciones, y escribe el resultado a continuación, $1 + \tan^2(\Theta) =$ ————.

39. La suma que aparece en el numerador de acuerdo con el teorema de Pitágoras en el triángulo ∆DFE, es igual a ____, sustituyendo el valor en la fracción se obtiene. $1 + \tan^2(\Theta) = \text{–}$.

    Compara la fracción de la derecha con el valor de $(sec(\theta))^2$

40. Cómo son las expresiones entre sí ________________________, en caso de ser iguales escribe la expresión que resulta ___________________.

Fase de Cierre.

41. Cada alumno usando un método parecido para obtener la igualdad, $1 + \tan^2(\Theta) = \sec^2(\Theta)$, probará que $\cot^2(\Theta) = 1 + \csc^2(\Theta)$.
42. Si Csc (*x*) = $\frac{5}{4}$, ¿cuánto vale el seno del mismo ángulo?
43. Demostrar que, sen (A) cot (A) = cos (A).
44. Demostrar que, $\frac{1+sen\,(\alpha\,)}{sen\,(\alpha\,)} = 1 + \csc(\alpha\,)$.

Luego en equipos de 3 o 4 alumnos comparan sus resultados, así como los demás resultados del inicio y el desarrollo de la práctica.
Finalmente, con ayuda del profesor corregirán los errores que hayan ocurrido en la práctica.

Secuencia 8. Triángulos Oblicuángulos.

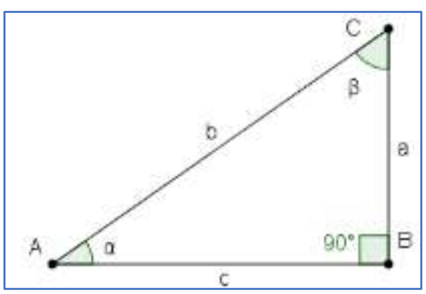
Aprendizaje: Comprende el proceso de deducción de las leyes de senos y cosenos.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Aplica la ley de los senos para resolver triángulos oblicuángulos. • Aplica la ley de los cosenos para resolver triángulos oblicuángulos.
Procedimentales:	• Aprende los procedimientos para deducir las leyes de los senos y cosenos. • Aprendo procedimientos para la solución de triángulos oblicuángulos.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Muestra tolerancia. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Cuando tenemos triángulos que no son triángulos rectángulos, no podemos emplear las razones trigonométricas para resolverlos, así que tenemos que aprender nuevos procedimientos que nos permitan resolverlos.

Fase de Inicio.

Daremos un repaso de algunos conceptos vistos antes de pasar a la demostración de los dos teoremas.

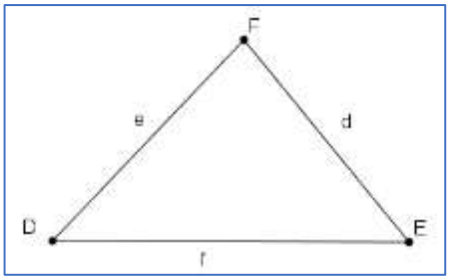


De acuerdo con la siguiente figura contesta las preguntas.

1. La suma de los ángulos internos del triángulo es de _____________.
2. La suma de los ángulos α y β es _________, por lo cual se llaman ____________.
3. El cateto opuesta al ángulo β es __________
4. El cateto adyacente al ángulo β es __________.
5. Y la hipotenusa es __________.
6. La razón trigonométrica de sen (β) = —————————.
7. La razón trigonométrica de cos (β) = —————————.
8. Escribe el teorema de Pitágoras de acuerdo con el triángulo rectángulo trazado:

____

De acuerdo con la siguiente figura realiza lo que se piden y contesta las preguntas.



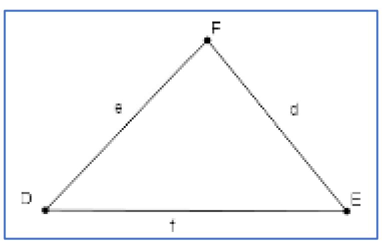
Traza la altura correspondiente al vértice F.
Asigna la letra M al punto de intersección de la altura trazada con el segmento f.

9. El triángulo ∆EMF es un triángulo ________________________.
10. El triángulo ∆DMF es un triángulo ________________________.
11. El seno del ángulo <MDF es = ——————
12. El seno del ángulo <MEF es = ——————

Traza la altura correspondiente al vértice D, y asigna la letra S al punto de intersección a la altura trazada con el lado d.

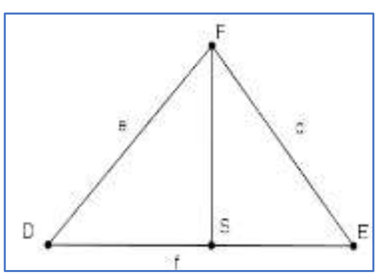
13. El triángulo ∆EDS es un triángulo __________.
14. El triángulo ∆FSD es un triángulo __________.
15. El seno del ángulo <SED es = ——————
16. El seno del ángulo <SFD es = ——————

Fase de Desarrollo.



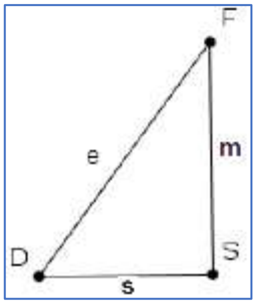
Ley de los senos: Lee con cuidado la demostración de la ley de los senos
Trazaremos en el ∆DFE la altura correspondiente al lado f, y el punto de intersección de la altura con el lado f nómbralo con la letra s.

La altura trazada que corresponde al segmento SF lo designaremos dicho segmento con la letra m. Al hacerlo se forman los triángulos, ∆DSF y ∆ESF.



17. ¿Qué tipo de triángulos son?_________________.

En el triángulo ΔDSF, al segmento DS lo designaremos con la letra s, y se muestra a continuación.

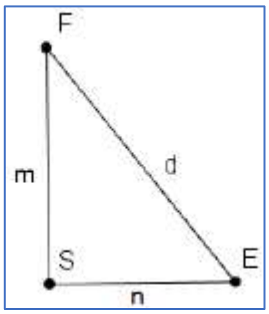


El seno del ángulo D es igual a.

$$sen < D = \frac{m}{e}$$

De donde m = $e\ (sen < D)$. . .. (1)

En el triángulo ΔESF, al segmento SE lo designaremos con la letra n, y se muestra a continuación.



El seno del ángulo E es igual a.

$$sen < E = \frac{m}{d}$$

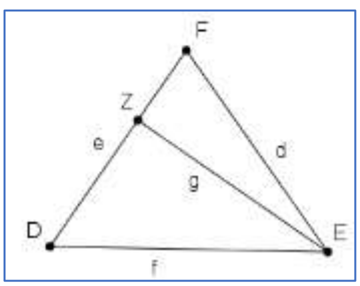
De donde m = $d\ (sen < E)$ . . .. (2)

De las igualdades (1) y (2) tenemos.

$$e\ (sen < D) = d\ (sen < E)$$

Dividiendo la igualdad por (e)(d), se obtiene.

$$\frac{sen{<}D}{d} = \frac{sen{<}E}{e} \text{ . . .. (3)}$$

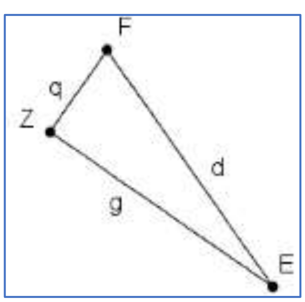


Ahora trazamos la altura al lado DF, a la altura le asignaremos la letra g, el punto de intersección de la altura g, con el lado e lo designaremos con la letra Z.

Se forman los triángulos ΔFZE y ΔDZE.

17. ¿Qué tipo de triángulos son? ______________________.

En el triángulo ΔFZE, designamos al segmento ZF con la letra q.

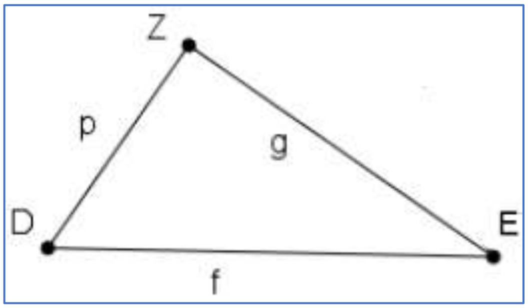


El seno del <F es igual a.

$$sen(< F) = \frac{g}{d}$$

De dónde.

$$g = d(sen(< F)) \text{ . . .. (4)}$$



En el triángulo ΔDZE, designamos al segmento DZ con la letra p.

El seno del <D es igual a.

$$sen(< D) = \frac{g}{f}$$

De dónde.

$$g = f(sen(< D)) \; . \; . \; .. \; (5)$$

De las igualdades (4) y (5) tenemos.

$$d(sen(< F)) = f(sen(< D))$$

Dividiendo la igualdad por (d)(f), se tiene.

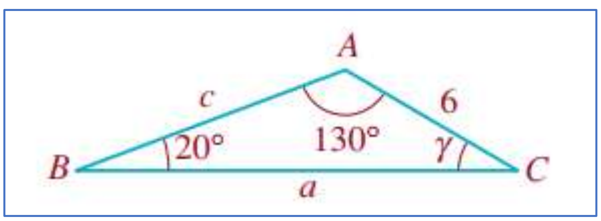
$$\frac{sen{<}D}{d} = \frac{sen{<}F}{f} \; . \; . \; .. \; (6)$$

De las igualdades (3) y (6) tenemos.

$$\frac{sen{<}D}{d} = \frac{sen{<}E}{s} = \frac{sen{<}F}{f} \text{ ley de los senos.}$$

Fase de Cierre.

A continuación, se resolverán dos problemas utilizando la ley de los senos, luego tienes que resolver dos problemas más que luego serán revisados en plenaria con ayuda del profesor.



Ejemplo 1. Calcular las partes restantes del triángulo de la siguiente figura.

Como la suma de los ángulos internos de todo triángulo es 180º.

20º + 130º + γ = 180º.

De donde 150º + γ = 180º.

Así que, γ = 180º - 150º, la magnitud del ángulo γ = 30º.

Para la resolución de algunos triángulos usando la ley de los senos, se utiliza la siguiente igualdad.

Sí α + β = 180º, entonces, sen (α) = sen (180º - α) = sen (β), con 90º < α < 180º

La cual puedes comprobar con tu calculadora, sean α = 110º, y β = 70º, entonces 110º + 70º = 180º, y 70º = 180º - 110º, por lo que.

Sen (110º) = sen (180º - 110º) = sen (70º) = 0.939.

Ahora aplicando la ley de los senos al triángulo dado.

$$\frac{sen(20°)}{6} = \frac{sen(130°)}{a} = \frac{sen(30°)}{c}$$

y como sen (130º) = sen (50º), podemos escribir.

$$\frac{sen(20°)}{6} = \frac{sen(50°)}{a} = \frac{sen(30°)}{c}$$

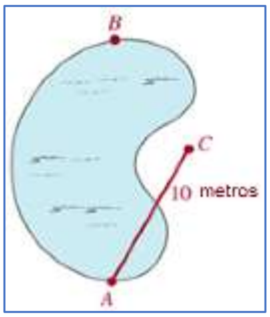
Considerando, $\frac{sen(20°)}{6} = \frac{sen(50°)}{a}$, $a = \frac{6xsen(50°)}{sen(20°)} = \frac{6x(0.766)}{(0.342)} = 13.438.$

La longitud del lado a = 13.438.

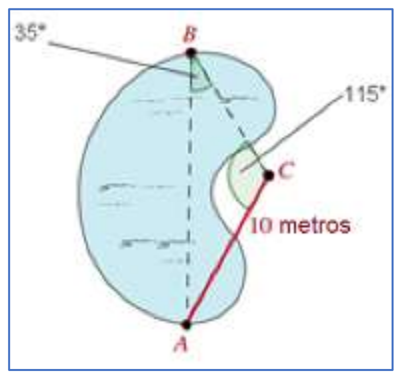
Ahora considerando, $\frac{sen(20°)}{6} = \frac{sen(30°)}{c}$, $c = \frac{6xsen(30°)}{sen(20°)} = \frac{6x(0.5)}{(0.342)} = 8.771.$

La longitud del lado c = 8.771.

Ejemplo 2. Longitud de una alberca. Se quiere medir la longitud de una alberca en forma de riñón del punto A al punto B en los extremos opuestos, pero la cuerda de 10 metros que se tiene no es lo bastante larga. Así que se encuentra un tercer punto *C* tal que la distancia de *A* a *C* es de 10 metros. Y se determina que el ángulo *ACB* es de 115°, y que el ángulo *ABC* es de 35°, como se muestra en la figura. Calcula la distancia de *A* a *B*.



En la siguiente figura se colocan las magnitudes indicadas en el problema.



Como 115º = 180º - 65º

Sen (115º) = sen (65º)

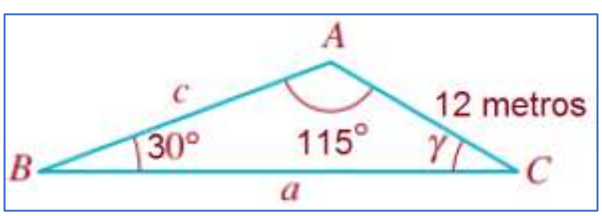
Aplicando la ley de los senos tenemos.

$$\frac{sen(65°)}{AB} = \frac{sen(35°)}{10}$$

Despejando AC cuya longitud queremos determinar, tenemos.

$AB = \frac{10xsen(65°)}{sen(35°)} = \frac{10x0.906}{0.573} = 15.81$, La distancia de AB = 15.81 metros

Ejercicio 1. Calcular las partes restantes del triángulo de la siguiente figura.



18. La suma de los ángulos internos de todo triángulo es _____________.

19. La suma de los ángulos del triángulo dado es, 30º + __________+ γ = ________.

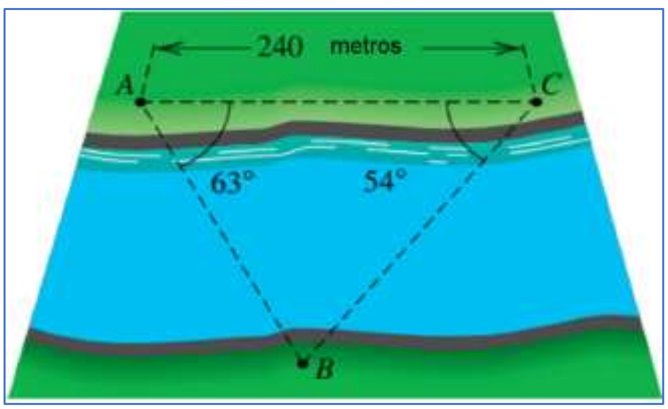
De donde γ = 180º - __________.

20. El valor de γ = ________.
21. Para el ángulo de 115º, sen (115º) = sen (______º) y aplicando la ley de los senos.

$$\frac{sen(65°)}{} = \frac{sen(\quad °)}{} = \frac{sen(30°)}{12}$$

22. Considerando la igualdad, $\frac{sen(65°)}{a} = \frac{sen(30°)}{12}$, al despejar la incógnita a, se obtiene a = _________________.
23. Como sen (65º) = __________, y sen (30º) = ______________, al sustituir en el despeje y hacer las operaciones indicadas el valor de a = _______________.
24. Considerando la igualdad, $\frac{sen(35°)}{c} = \frac{sen(30°)}{12}$, al despejar la incógnita c, se obtiene c = _________________.
25. Como sen (35º) = __________, y sen (30º) = ______________, al sustituir en el despeje y hacer las operaciones indicadas el valor de c = _______________.

Ejercicio 2. Para hallar la distancia entre dos puntos *A* y *B* que se encuentran en márgenes opuestas de un río, un topógrafo traza un segmento de recta *AC* de 240 metros de longitud a lo largo de una de las márgenes y determina que las medidas de los ángulos son *<BAC = 63º* y *<ACB= 54º*, respectivamente. Calcule la distancia entre *A* y *B.*



26. La magnitud del <*CBA* = ______________.
27. Completa los huecos que se muestran al aplicar la ley de los senos $\frac{Sen(63°)}{} = \frac{Sen(\quad)}{AB}$.
28. Despeja AB, _____________________.
29. Sustituye sen (63º) = _____ y sen (54º) = _____ en el despeje.
30. Realiza las operaciones indicadas, AB = ___________________.

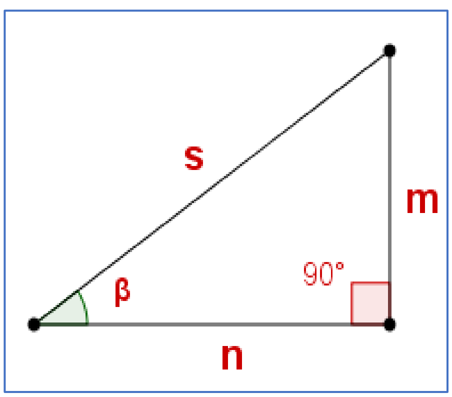
Secuencia 9. Triángulos Oblicuángulos. (Continuación).

Aprendizaje: Comprende el proceso de deducción de las leyes de senos y cosenos.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Aplica la ley de los senos para resolver triángulos oblicuángulos. • Aplica la ley de los cosenos para resolver triángulos oblicuángulos.
Procedimentales:	• Aprende los procedimientos para deducir las leyes de los senos y cosenos. • Aprende procedimientos para la solución de triángulos oblicuángulos.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Muestra tolerancia. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Cuando tenemos triángulos que no son triángulos rectángulos, no podemos emplear las razones trigonométricas para resolverlos, así que tenemos que aprender nuevos procedimientos que nos permitan resolverlos.

Fase de Inicio.



De acuerdo con las siguientes figuras contesta las siguientes 4 preguntas.

1. Escribe el teorema de Pitágoras.

____.

2. Despeja m^2. ________________________.
3. Despeja n^2. ________________________.

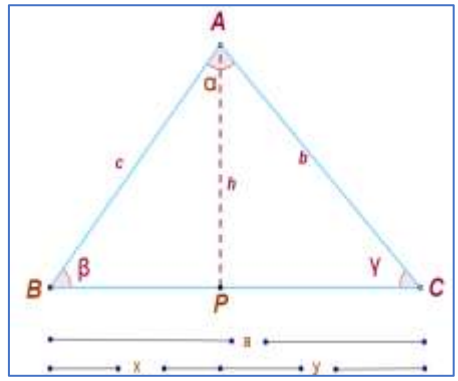
El coseno de β es igual a.

4. Cos(β) = ————————.

Para las siguientes preguntas consideramos el triángulo ∆ABC.

5. De acuerdo con triángulo ΔABP de la izquierda, el teorema de Pitágoras es.

______________________________.



6. De acuerdo con el triángulo ΔAPC de la derecha el teorema de Pitágoras es.

______________________________.

7. De acuerdo con el triángulo ΔABP de la izquierda.

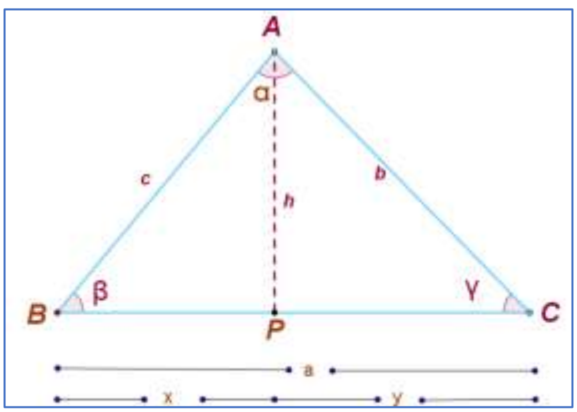
   El cos(β) = ___________.

8. De acuerdo con el triángulo ΔABC se tiene que a = x + ________, despejando de la ecuación anterior y, se obtiene y = _______.
9. El desarrollo de las siguientes expresiones es.

$(a - x)^2$ = _________________.

$(a - y)^2$ = _________________.

Fase de Desarrollo.



Ahora veamos la deducción de la ley de los cosenos.

Se tiene que.

$$a = x + y$$

de donde

$$y = c - x$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ΔABP de la izquierda.

$$x^2 + h^2 = c^2 \dots (1)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ΔAPC de la derecha.

$$(a - x)^2 + h^2 = b^2 \dots (2)$$

Despejando h^2 de (1) y (2).

$$h^2 = c^2 - x^2 \dots (3)$$

$$h^2 = b^2 - (a - x)^2 \dots (4)$$

Igualando los despejes en (3) y (4).

$$c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2 \dots (5)$$

Desarrollando el binomio y simplificando.

$$c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$$

$$c^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2 + x^2$$

$$c^2 = b^2 - a^2 + 2ax \dots (6)$$

En el triángulo ∆APC de la derecha.

$$\cos(\gamma) = \frac{y}{b} = \frac{a-x}{b}$$

Despejando x.

$$b^* \cos(\gamma) = a - x \Rightarrow \quad x = a - b^* \cos(\gamma)$$

Sustituyendo el valor de x en (6).

$c^2 = b^2 - a^2 + 2a\,(a - b^* \cos(\gamma))$
$c^2 = b^2 - a^2 + 2a^2 - 2ab^* \cos(\gamma)$
$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab^* \cos(\gamma))$ … (7)

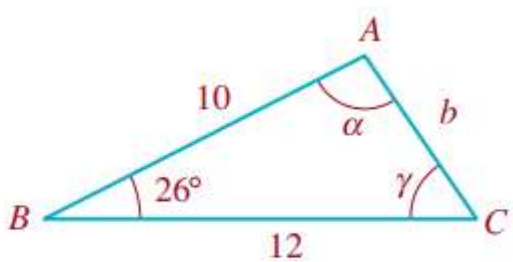
La expresión (7) es la ley de los cosenos.
Y con respecto al triángulo dado, las tres expresiones representan la ley de los cosenos.

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab^* \cos(\gamma)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc^* \cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac^* \cos(\beta)$$

Fase de Cierre.

A continuación, mostraremos dos ejemplos de la ley de los cosenos, después debes resolver los dos ejercicios, al final en plenaria con ayuda del profesor se revisa el procedimiento y los resultados.

Ejemplo 1. Encuentra las partes restantes del siguiente triángulo.



Aplicando la ley de los cosenos al lado b.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac^* \cos(\beta)$$

con a = 12, c = 10 y β = 26º.
$b^2 = 12^2 + 10^2 - 2(12)\,(10) \cos(26º)$
Haciendo operaciones.
$b^2 = 144 + 100 - 2(12)\,(10)\,(0.898)$
$b^2 = 244 - 240(0.898) = 244 - 215.52 = 28.48$
Sacando raíz cuadrada en ambos miembros.
b = $\sqrt{28.48} = 5.33$, el valor de b = 5.33
Aplicando la ley de los senos para encontrar el ángulo γ.
Se tiene, c = 10, a = 12, b = 5.33
$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab^* \cos(\gamma)$
$10^2 = 5.33^2 + 12^2 - 2(12)\,(5.33) * \cos(\gamma)$
$100 = 28.48 + 144 - 127.92 * \cos(\gamma)$
$100 = 172.48 - 127.92 * \cos(\gamma)$
$127.92 * \cos(\gamma) + 100 = 172.48 \Rightarrow 127.92 * \cos(\gamma) = 172.48 - 100$

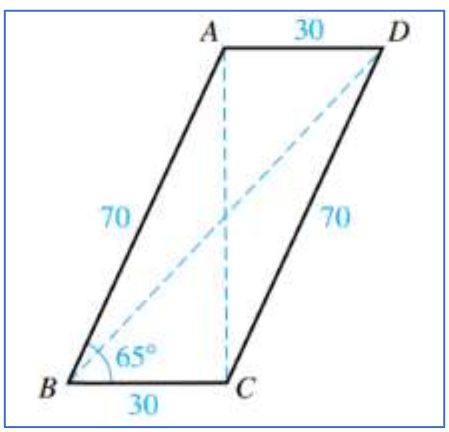
$127.92 * \cos(\gamma) = 72.48 \;\Rightarrow\; \cos(\gamma) = \frac{72.48}{127.92} = 0.566$

Para encontrar γ realiza el siguiente procedimiento en la calculadora.

- Presiona la tecla Shift
- Luego presiona la tecla cos
- En la pantalla se despliega, $\cos^{-1}($
- Escribe el número 0.566
- Cierra el paréntesis derecho y presiona la tecla =
- El resultado es, 55.52823806, para tener el resultado en grados presiona la tecla °' ''
- En la pantalla vemos, 55º 31'
- La magnitud del ángulo γ = 55º 31'

La aproximación en los minutos de la magnitud de γ depende de la cantidad de decimales que se tomen en los resultados.
Como la suma de los ángulos internos de todo triángulo es de 180º, el valor de α, lo obtenemos de, α + β + γ = 180º, con γ = 55º 31' y β = 26º.
Sustituyendo valores, α + (26º) + (55º 31') = 180º, después de hacer las operaciones indicadas α = 98º 29'

Ejemplo 2. Un paralelogramo tiene lados de longitudes de 30 centímetros y 70 centímetros y un ángulo de 65°. Calcule la longitud de la diagonal AC al centímetro más cercano



La siguiente figura ilustra el problema.
En el ∆BCA, se tiene.
a = 30, c = 70 y <β = 65º.
La ley del coseno dice,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac^* \cos(\beta)$$

sustituyendo valores.

$$b^2 = (30)^2 + (70)^2 - 2\,(30)\,(70)\cos(65º)$$

Haciendo las operaciones indicadas.

$$b^2 = (30)^2 + (70)^2 - 2\,(30)\,(70)\cos(65º) = 900 + 4900 - 4200\,(0.422)$$

$= 5800 - 1772.4 = 4027.6$, así que, $b^2 = 4027.6$

Sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad.

b = 63 centímetros

Algunas veces es necesario obtener el coseno de un ángulo obtuso, y aunque las calculadoras lo hacen de manera automática te mostraremos la siguiente igualdad que permite la obtención del coseno antes mencionado.

Sí α es un ángulo que cumple con $90º < \alpha < 180º$ y $\alpha + \beta = 180º$, entonces.

$$\text{Cos}(\alpha) = \cos(180 - \alpha) = -\cos(\beta)$$

Ejemplo. Sí $\alpha = 100º$ entonces $\beta = 80º$ ya que $\alpha + \beta = 180º$, entonces.

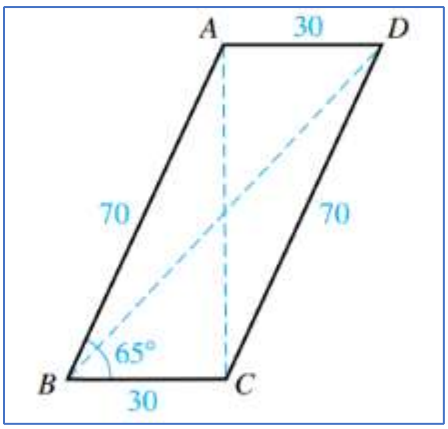
$$\text{Cos}(100º) = \cos(180º - 80º) = -\cos(80)$$

$$\text{Cos}(100) = -0.17 \text{ y } -\cos(80) = -0.17$$

Que puedes comprobar con tu calculadora.

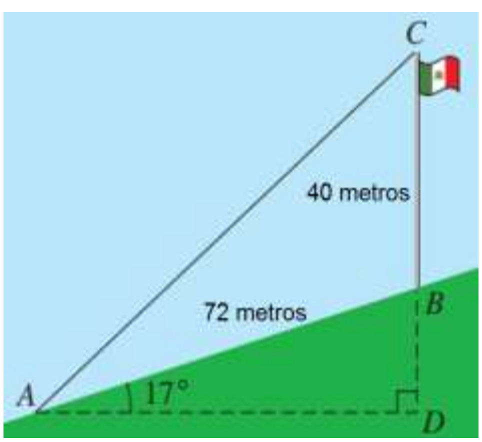
Ejercicios.

a) Calcula la diagonal BD al centímetro más cercano en el paralelogramo del ejemplo 2.



10. BD = __________

b) Un poste vertical de 40 metros de alto se encuentra sobre una ladera que forma un ángulo de 17° con la horizontal. Calcule la longitud mínima de cable que llegará de lo alto del poste a un punto situado a 72 metros colina abajo desde la base del poste.



11. Como <DAB y <DBA son _____________________________.

12. <DAB + <DBA = _____________________.

De donde.

13. <DBA = _____________________.

14. Como los ángulos <DBA y <ABC son _____________________.

15. <DBA + <ABC = ________________.

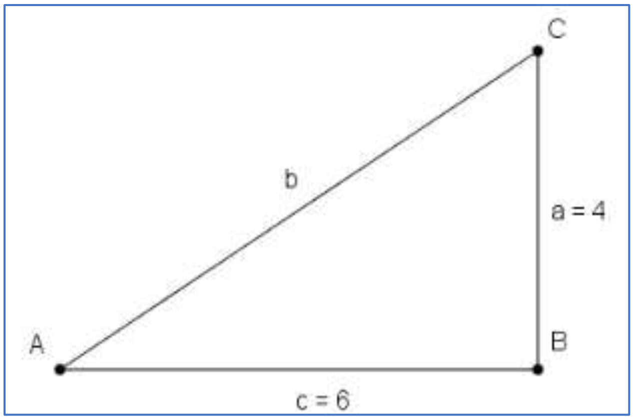
16. <ABC = ________________.

Aplicando la ley de los cosenos para el ∆ABC.

17. AC = ___________________.

5. Materiales de Apoyo para las Secuencias Didácticas.

Secuencia Didáctica 1.



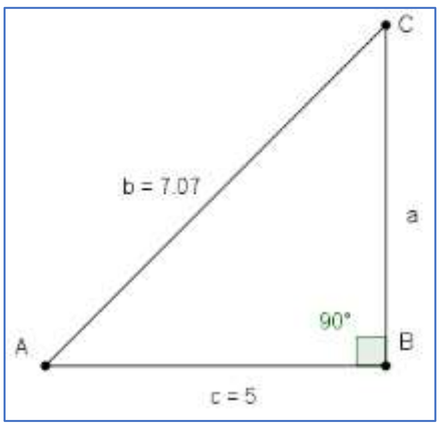
1. Encuentra los elementos que se piden en el siguiente triángulo rectángulo.

b = ___________

$sen(A) = \frac{\quad}{\quad}$

$cos(A) = \frac{\quad}{\quad}$

$tan(A) = \frac{\quad}{\quad}$



2. Encuentra los elementos que se piden en el siguiente triángulo rectángulo.

a = _____________

$sen(C) = \frac{\quad}{\quad}$

$csc(A) = \frac{\quad}{\quad}$

$tan(A) = \frac{\quad}{\quad}$

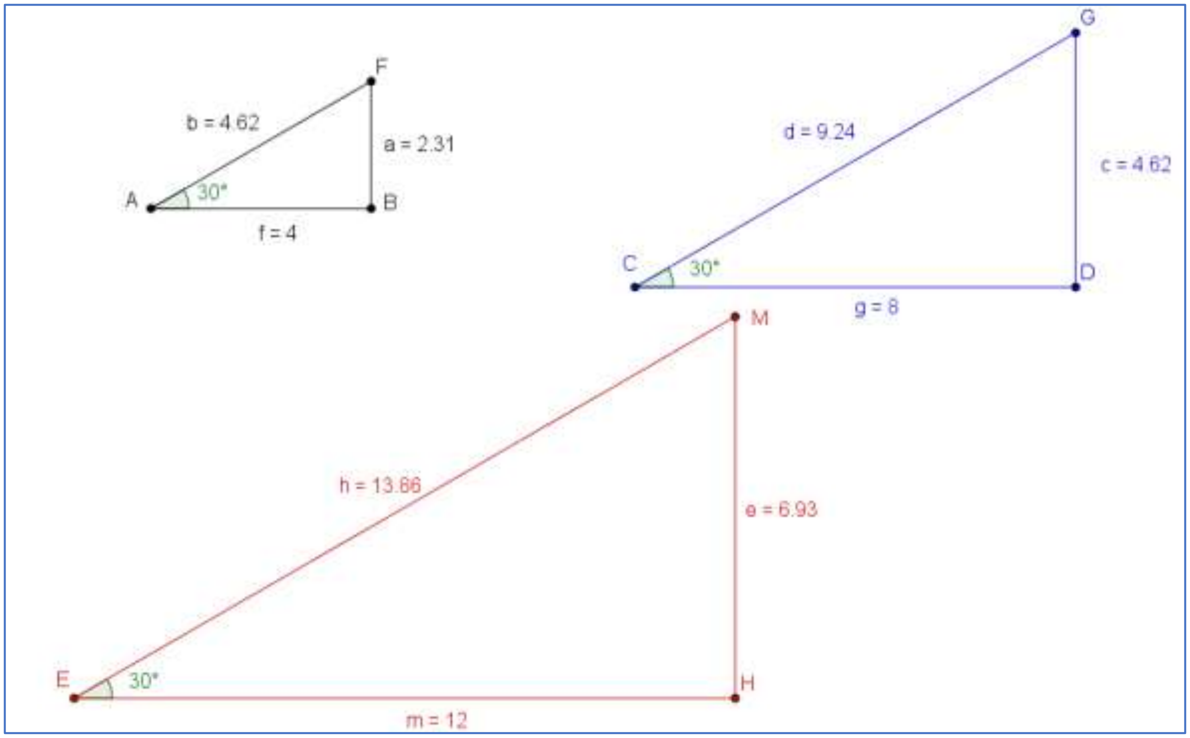
3. Traza un segmento AB de 6 cm. de longitud, en el vértice A traza un ángulo de 45º, en el vértice B traza una perpendicular al segmento AB, prolonga los dos segmentos trazados hasta que se corten en el punto D.
   Realiza con cuidado las siguientes medidas.

   Longitud del cateto BD = _______________.
   Longitud de la hipotenusa AD = __________.

   $csc(A) = \frac{\quad}{\quad}$

   $tan(A) = \frac{\quad}{\quad}$

Secuencia Didáctica 2.



Los siguientes tres triángulos son semejantes.

4. En el ∆ABF.

$sen(30°) = \frac{}{} =$ ______

$con(30°) = \frac{}{} =$ ______

$tan(30°) = \frac{}{} =$ ______

5. En el ∆CDG.

$sen(30°) = \frac{}{} =$ ______

$con(30°) = \frac{}{} =$ ______

$tan(30°) = \frac{}{} =$ ______

6. En el ∆EHM.

$sen(30°) = \frac{}{} =$ ______

$con(30°) = \frac{}{} =$ ______

$tan(30°) = \frac{}{} =$ ______

De acuerdo con los resultados, consideras que el valor de las razones trigonométricas para el ángulo de 30º depende de las longitudes de los triángulos.

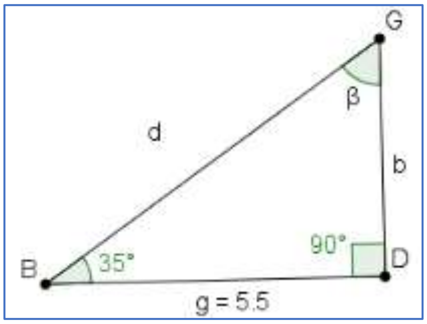
________________________. ¿Se podrán construir triángulos semejantes para cualquier otro valor de un ángulo? ________________.

Secuencia Didáctica 3.

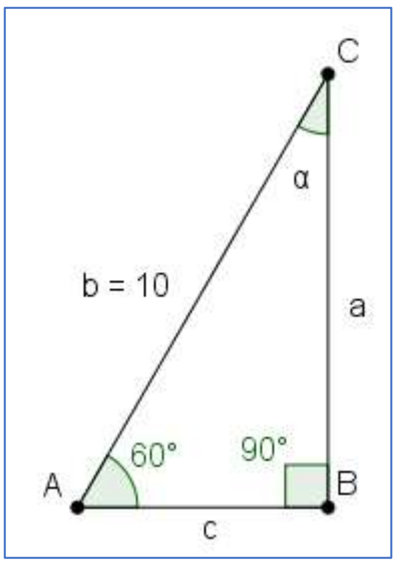
7. Aquí daremos solución a los problemas de la tarea complementaria de la práctica.

Secuencia Didáctica 4.

Resolver los siguientes triángulos rectángulos.

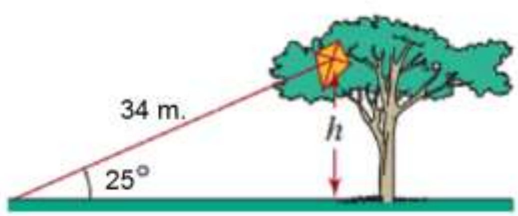


8. El valor del ángulo β = ______
9. Longitud del cateto b = ________
10. Longitud de la hipotenusa d = ________



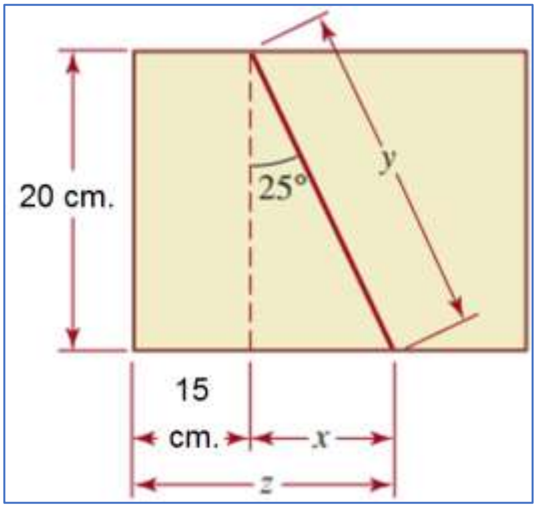
11. La magnitud del <α = ______
12. La longitud del cateto a = ______
13. La longitud del cateto c = ____

Un papalote queda atrapado en las ramas de la parte alta de un árbol. Si la cuerda de 34 metros de largo forma un ángulo de 25º con el suelo, encuentra la altura aproximada del árbol.



14. h = altura del árbol = ______

Un carpintero hace un corte en el extremo de una tabla de 20 centímetros de ancho, formando un bisel de 25º con respecto a la parte vertical comenzando en un punto a 15 centímetros del borde. Calcular la longitud del corte y de los lados restantes.



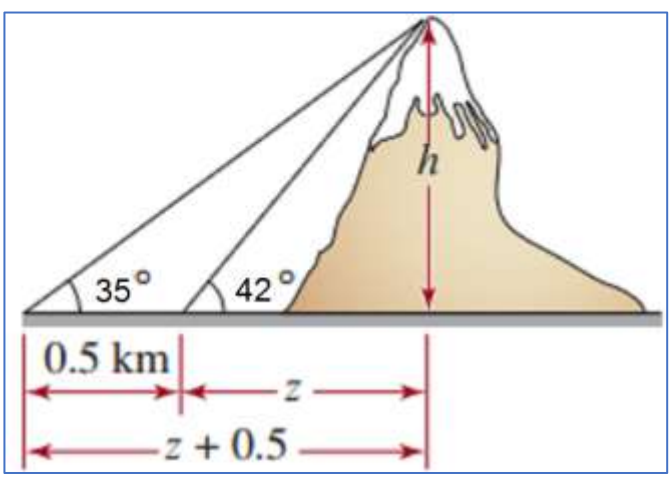
15. x = ___________.

16. y = ___________.

17. z = ___________.

Secuencia Didáctica 5.

Un topógrafo usa un instrumento llamado teodolito para medir el ángulo de elevación entre el nivel del piso y la cumbre de una montaña. En un punto, se mide un ángulo de elevación de 42°. Medio kilómetro más lejos de la base de la montaña, el ángulo de elevación medido es de 35°. ¿Qué altura tiene la montaña?



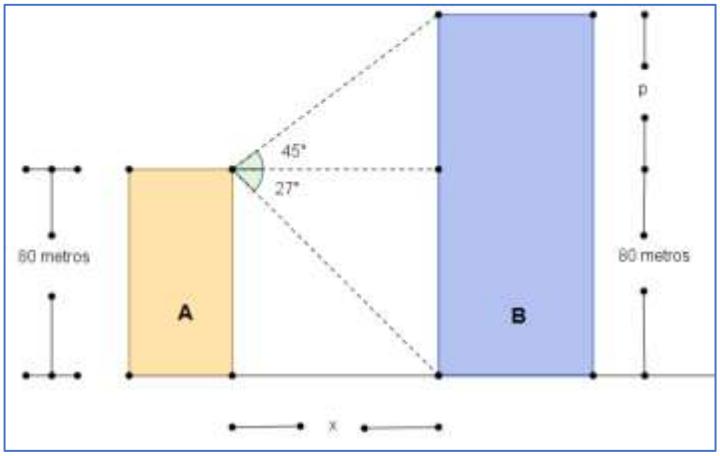
z = _________.

18. h = __________.

Altura de la montaña = ________.

19. x = __________.

Un observador en la azotea del edificio *A* mide un ángulo de depresión de 27° entre la horizontal y la base del edificio *B*. El ángulo de elevación del mismo punto en la azotea a la azotea del segundo edificio es de 45°. ¿Cuál es la altura del edificio *B*, si la altura del edificio *A* es de 80 metros? Suponga que los edificios *A* y *B* están sobre el mismo plano horizontal.

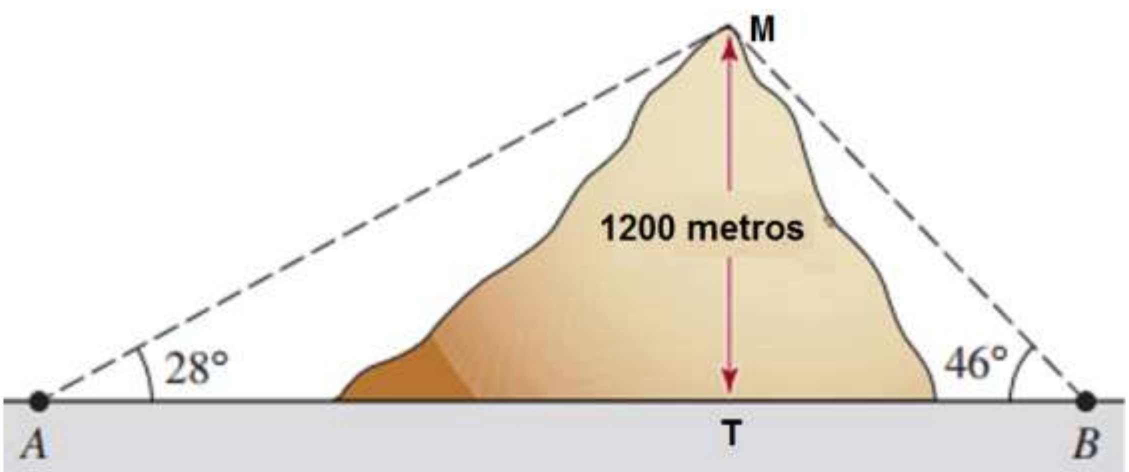


20. x = distancia entre los edificios = ___________.

21. p = distancia entre la parte más alta del edificio A hasta la parte alta del edificio B = __________.

22. h = distancia entre los edificios = _____________.

Unos observadores en dos pueblos *A* y *B*, a cada lado de una montaña de 1200 metros de altura, miden los ángulos de elevación entre el suelo y la cumbre de la montaña. Suponiendo que los pueblos y la cumbre de la montaña están en el mismo plano vertical, calcule la distancia entre ellos.



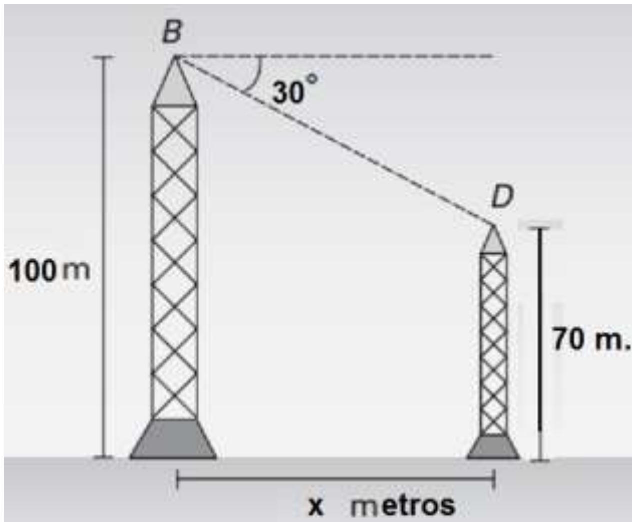
AT = distancia del pueblo A hasta el punto T que está debajo de la cumbre.

BT = distancia del pueblo B hasta el punto T que está debajo de la cumbre.

AB = distancia entre los dos pueblos.

23. AT =
24. BT =
25. AB =

Desde la punta *B* de una torre, el ángulo de depresión de la punta *D* de otra torre, es de 30°. Si la torre más alta mide 100 metros y la más pequeña mide 70 metros, ¿a qué distancia están entre sí las torres?

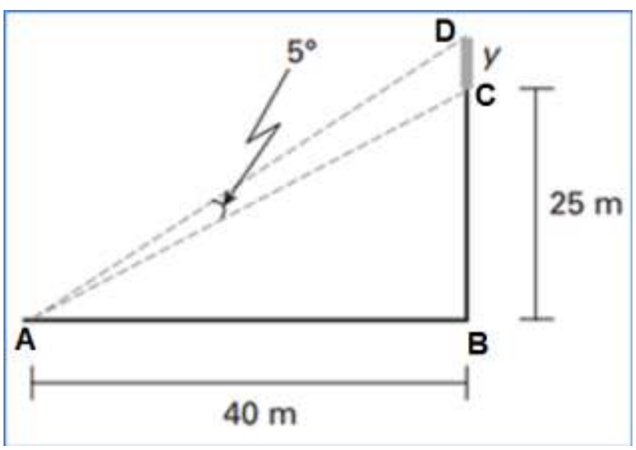


26. La distancia vertical que hay entre los puntos B y D es ____________.

27. La distancia entre las dos torres es x = ____________.

Secuencia Didáctica 6.

Determina el valor de la distancia *y*.



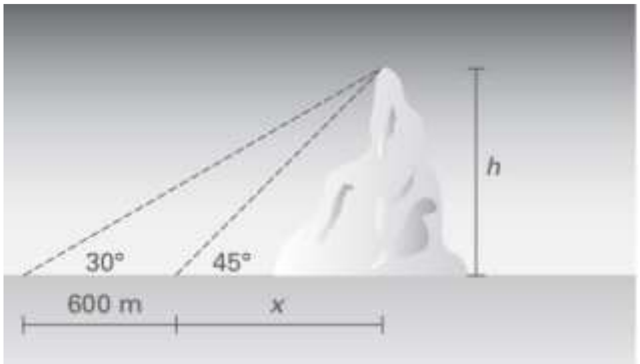
28. <BAC = __________.

29. <BAD = <BAC + <CAD = _______.

30. DB = ___________.

31. DC = y = __________.

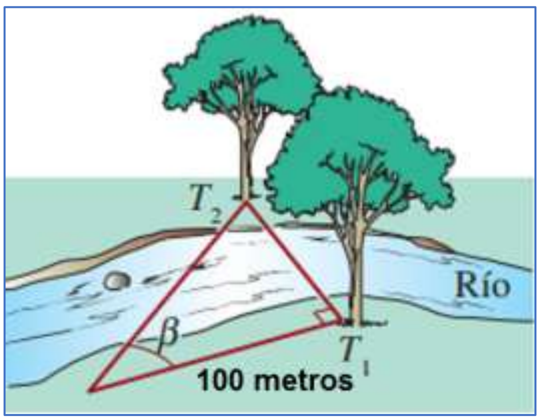
Desde el nivel del piso, el ángulo de elevación con respecto a un risco distante es de 30º. Al caminar 600 metros directamente a la base del risco, el ángulo de elevación mide 45º. ¿Cuál es la altura del risco?



32. x = _____________.

33. Altura = h = _________.

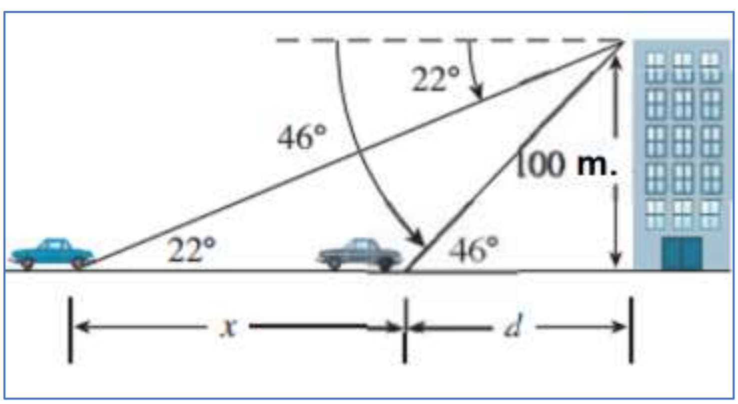
Dos árboles están en las orillas opuestas de un río, como se ve en la. Se mide una línea de referencia de 100 metros del árbol *T*1 y de esa posición se mide un ángulo β a *T*2, que resulta de 29°. Si la línea de referencia es perpendicular al segmento de recta entre *T*1 y *T*2, calcule la distancia entre los dos árboles.



34. T1T2 = distancia entre los árboles.

=

Desde la parte superior de un edificio que mide 100 metros de altura, un hombre observa un automóvil que se desplaza frente al edificio. Si el ángulo de depresión del automóvil cambia de 22 a 46° durante el periodo de observación, ¿cuánto se ha trasladado el automóvil?



35. d = ________.

36. x = ________.

Secuencia Didáctica 7.

Demuestra las siguientes identidades trigonométricas.

37. tgϴ + cotgϴ = $\sec^2$ϴ cotgϴ

    Sugerencia utilizar cotgϴ tgϴ = 1

38. Sec^2ϴ – csc^2ϴ = tg^2ϴ – $cotg^2$ϴ

    Sugerencia utilizar, 1 + tg^2ϴ = sec^2ϴ, 1 + $cotg^2$ϴ = csc^2ϴ

39. Senϴ cotgϴ secϴ = 1

    Sugerencia utilizar, secϴ cosϴ = 1, cotgϴ = $\frac{cos\theta}{sen\theta}$

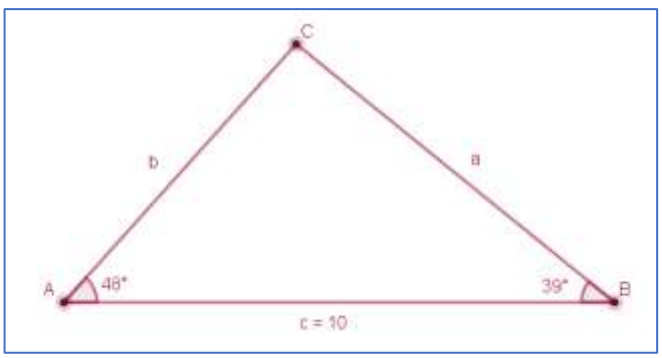
40. 1 – 2sen^2ϴ = 2cos^2ϴ – 1

    Sugerencia utilizar, cos^2ϴ + sen^2ϴ = 1

41. $\frac{cotg\theta cos\theta}{csc^2\theta - 1} = sen\theta$

    Sugerencia utilizar, 1 + $cotg^2$ϴ = csc^2ϴ

Secuencia Didáctica 8.



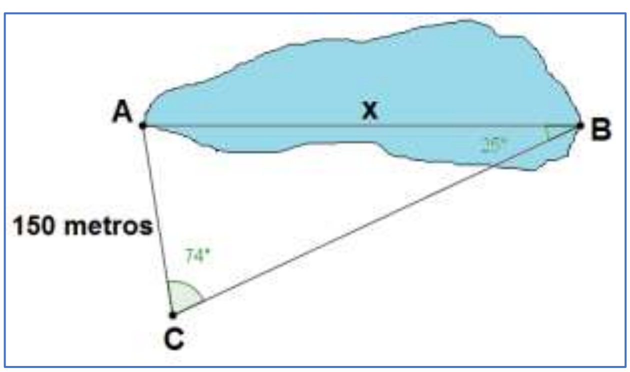
Encontrar los elementos indicados en el siguiente triángulo.

42. <ACB = ________.

43. a = ___________.

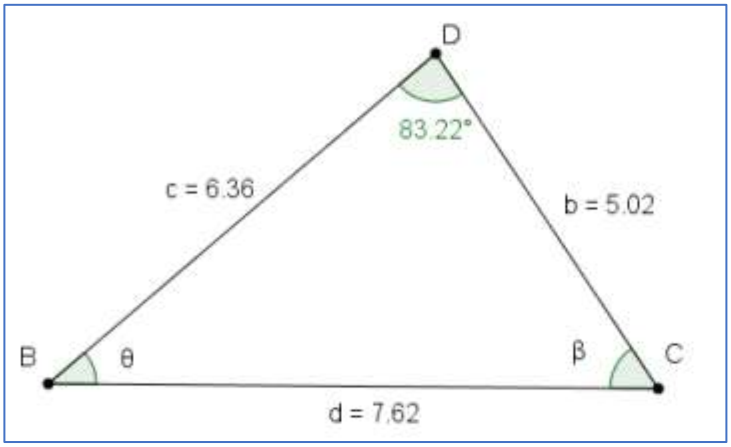
44. b = ___________.

Determinar la distancia entre los puntos A y B en las orillas opuestas de un lago, redondear la distancia a metros.



45. Distancia entre los puntos A y B en las orillas opuesta de un lago.

    x = ________________

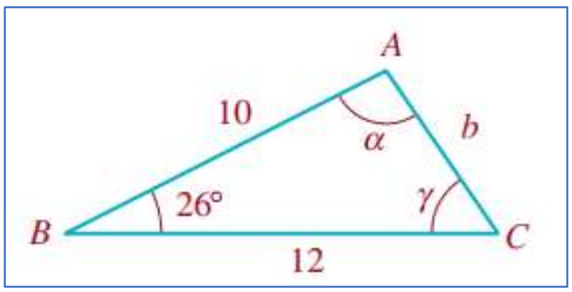


Encuentra el valor de los elementos indicados en el siguiente triángulo.

46. β = ________

47. ϴ = ______

Secuencia Didáctica 9.



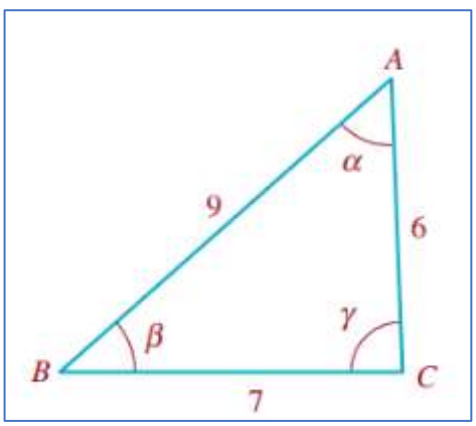
Encuentra los elementos indicados en el siguiente triángulo.

48. b = ________.

49. α = ___________.

50. γ = ___________.

.



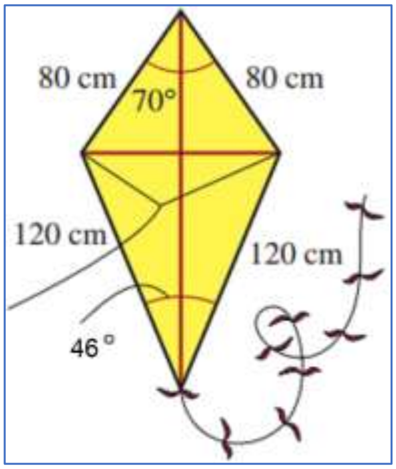
Encuentra los elementos indicados en el siguiente triángulo.

51. α = ___________.

52. β = ___________.

53. γ = ___________.

Para el cometa que se muestra, use la ley de los cosenos para calcular las longitudes de las dos varas que se requieren para los soportes diagonales.



54. Vara grande = ___________

55. Vara chica = ___________

Respuestas de los Materiales de Apoyo de las secuencias didácticas.

Secuencia Didáctica 1.

1. b = 7.21

$sen(A) = 0.55$

$cos(A) = 0.83$

2. a = 4.99

$sen(C) = 0.70$

$csc(C) = 1.41$

3. BD = 6

AD = 8.48

$csc(A) = 1.41$

$tan(A) = 1$

Secuencia Didáctica 2.

4. Para el △ABF.

$sen(30°) = \frac{2.31}{4.62} = 0.5$

$cos(30°) = \frac{4}{4.62} = 0.86$

$tan(30°) = \frac{2.31}{4} = 0.57$

5. Para el $\triangle$CDG.

$$sen(30°) = \frac{4.62}{9.24} = 0.5$$

$$cos(30°) = \frac{8}{9.24} = 0.86$$

$$tan(30°) = \frac{4.62}{8} = 0.57$$

6. Para el $\triangle$EHM.

$$sen(30°) = \frac{6.93}{13.86} = 0.5$$

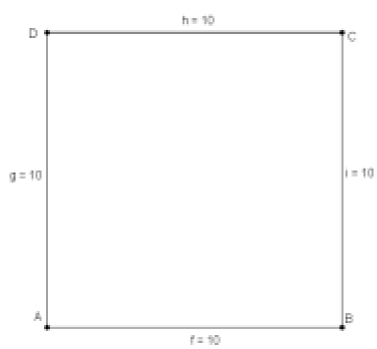
$$cos(30°) = \frac{12}{13.86} = 0.86$$

$$tan(30°) = \frac{6.93}{12} = 0.57$$

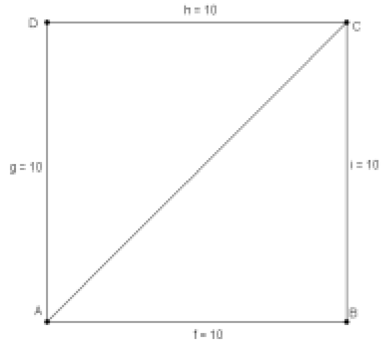
El valor de las razones trigonométricas no depende de las longitudes de los lados del triángulo rectángulo. Si se pueden construir triángulos semejantes para ángulos agudos, aunque tomar medidas puede ser un poco difícil.

Secuencia Didáctica 3.

7. La longitud de los lados del siguiente cuadrado es de 10 cm.



Se traza la diagonal AC para obtener los triángulos $\triangle$ABC y $\triangle$CDA.



Los cuales son congruentes, ya que.

AB ←→ DC, y AB = DC = 10 cm.

BC ←→ DA, y BC = DA = 10 cm.

Y AC = AC lado común de los triángulos.

ΔABC ≅ ΔCDA por el axioma (l, l , l).

En el ΔABC Como AB = BC, entonces.

<BAC = <BCA, y <BAC + <BCA = 90º

Se tiene que <BAC = <BCA = 45º.

La longitud de AC = 14.14 cm, y ya podemos calcular las razones trigonométricas de 45º.

$$sen(45°) = \frac{10}{14.14} = 0.70$$

$$cos(45°) = \frac{10}{14.14} = 0.70$$

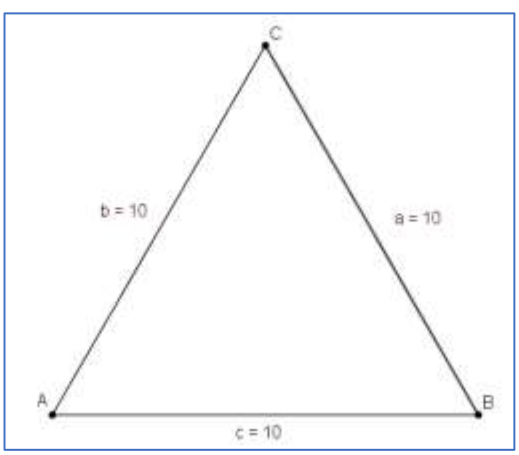
$$tan(45°) = \frac{10}{10} = 1$$

$$cotan(45°) = \frac{10}{10} = 1$$

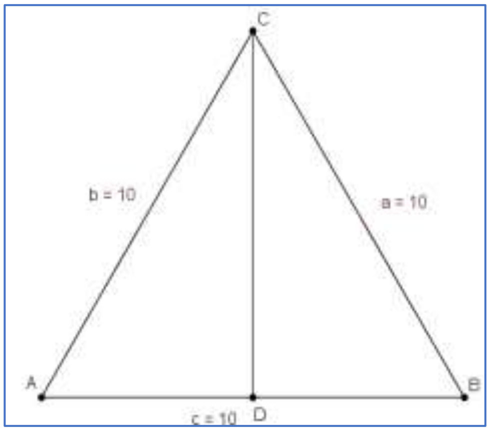
$$sec(45°) = \frac{14.14}{10} = 1.41$$

$$csc(45°) = \frac{14.14}{10} = 1.41$$

La longitud de los lados del siguiente triángulo equilátero es de 10 cm.



Se traza la bisectriz al ángulo <C, y se asigna la letra D al punto de intersección de la bisectriz con el lado AB.



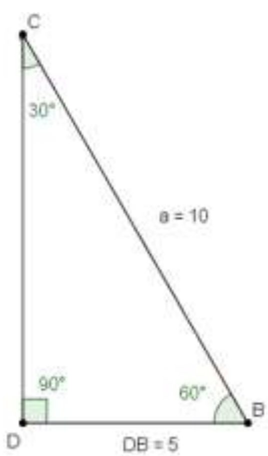
Se obtienen los triángulos ∆ADC y ∆BDC, que son congruentes ya que.

AC = BC = 10 cm.

Como la bisectriz CD al <BCA, también es mediatriz del segmento AB, y tenemos que, AD = BD = 5 cm.

Se cumple que <DCA = <DCB = 30º, por ser DC bisectriz del <<BCA.

Luego se cumple el axioma (l. a. l) y los triángulos son congruentes.



Consideremos el triángulo ∆CDB que se muestra a continuación.

Aplicando el teorema de Pitágoras.

DC = $\sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 8.66$

Las razones trigonométricas de 30º.

$sen(30°) = \frac{5}{10} = 0.5$

$cos(30°) = \frac{8.66}{10} = 0.86$

$tan(30°) = \frac{5}{8.66} = 0.57$

$cotan(30°) = \frac{8.66}{5} = 1.73$

$$sec(30°) = \frac{10}{8.66} = 1.15$$

$$csc(30°) = \frac{10}{5} = 2$$

Las razones trigonométricas de 60º.

$$sen(60°) = \frac{8.66}{10} = 0.86$$

$$cos(60°) = \frac{5}{10} = 0.5$$

$$tan(60°) = \frac{8.66}{5} = 1.73$$

$$cotan(60°) = \frac{5}{8.66} = 0.57$$

$$sec(60°) = \frac{10}{2} = 2$$

$$csc(60°) = \frac{10}{8.66} = 1.15$$

Secuencia Didáctica 4.

8. β = 55º
9. b = 3.85
10. d = 6.79
11. α = 30º
12. a = 8.6
13. b = 5
14. La altura del árbol es = h = 12.48 metros
15. x = 9.2 cm.
16. y = 22.22 cm. longitud del bisel
17. z = 24.2 cm.

Secuencia Didáctica 5.

18. z = 1.75 km.
19. Altura de la montaña = h = 1.57 km.
20. x = 2.25 km

21. Distancia entre los edificios = x = 160 metros

22. Distancia de la azotea del edificio A hasta la azotea del edificio B = 160 m.

23. Altura del edificio B = 80 + p = 80 + 160 = h = 240 metros

24. AT = distancia del pueblo A al punto debajo del punto más alto = 2264 m.

25. BT = distancia del pueblo B al punto debajo del punto más alto = 1165 m.

26. AB = distancia entre los pueblos = 3429 metros.

27. La diferencia de alturas entre las dos torres es de 30 metros

28. La distancia entre las dos torres es x = 52.63 metros.

Secuencia Didáctica 6.

29. <BAC = 31º 47’

30. <BAD = 36º 47’

31. DB = 29.6 metros.

32. DC = y = DB – CB = 4.6 metros

33. x = 795.34 metros

34. h = la altura es = 795.34 metros.

35. Distancia entre los dos árboles = 55 metros

36. Distancia del auto al edificio al inicio de la observación 97.08 metros

37. La distancia recorrida por el auto entre las dos observaciones 151.95 m.

Secuencia Didáctica 7.

38. $tg\theta + cotg\theta = sec^2\theta \; cotg\theta$

Sugerencia utilizar $cotg\theta \; tg\theta = 1$, $1 + tg^2\theta = sec^2\theta$

$tg\theta + \frac{1}{tg\theta} = \frac{tg^2\theta+1}{tg\theta} = \frac{sec^2\theta}{tg\theta} = sec^2\theta \; cotg\theta$

39. $Sec^2\theta - csc^2\theta = tg^2\theta - cotg^2\theta$

Sugerencia utilizar, $1 + tg^2\Theta = sec^2\Theta$, $1 + cotg^2\Theta = csc^2\Theta$

$Sec^2\Theta - csc^2\Theta = (1 + tg^2\Theta) - (1 + cotg^2\Theta) = tg^2\Theta - cotg^2\Theta$

40. $Sen\Theta \; cotg\Theta \; sec\Theta = 1$

Sugerencia utilizar, $sec\Theta \; cos\Theta = 1$, $cotg\Theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}$

$Sen\Theta \; cotg\Theta \; sec\Theta = sen\Theta \left(\frac{cos\theta}{sen\theta}\right)\left(\frac{1}{cos\theta}\right) = \frac{sen\theta cos\theta}{sen\theta cos\theta} = 1$

41. $1 - 2sen^2\Theta = 2cos^2\Theta - 1$

Sugerencia utilizar, $cos^2\Theta + sen^2\Theta = 1$

$1 - 2sen^2\Theta = 1 - 2(1 - cos^2\Theta) = 1 - 2 + 2cos^2\Theta = 2cos^2\Theta - 1$

42. $\frac{cotg\theta cos\theta}{csc^2\theta - 1} = sen\theta$

Sugerencia utilizar, $1 + cotg^2\Theta = csc^2\Theta$

$\frac{cotg\theta cos\theta}{csc^2\theta - 1} = \frac{cotg\theta cos\theta}{cotg^2\theta} = \frac{cos\theta}{cotg\theta} = \frac{cos\theta}{\frac{cos}{sen\theta}} = sen\theta$

Secuencia Didáctica 8.

43. $<C \approx 93º$

44. a = 7.47

45. b = 6.26

46. x = 343 metros

47. Θ ≈ 46º 53’

48. β ≈ 79º 45’

Secuencia Didáctica 9.

49. b = 5.51

50. α ≈ 96º 53’

51. γ ≈ 57º 7’

52. α ≈ 50º 58’

53. β ≈ 41º 45’

54. γ ≈ 87º 17’

55. Vara grande = 175.45 cm.

56. Vara chica = 99.91 cm.

6. Bibliografía Básica.

Goodman A., Hirsh L.. (1994). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Pearson Educación.

Barnett R., Ziegler M., Byleen K., (2000). *Álgebra*. México: Mc Graw Hill.

Swokowski E., Cole J., (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México: Cengage Learning.

Smith, et al., (1998). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México: Addison Wesley.

Internet.

Duarte J., Martínez A., Flores A., (2008). Geometría y Trigonometría. 24 de febrero de 2019, de Universidad Autónoma de Sinaloa Sitio web: http://uaprepasemi.uas.edu.mx/libros/3er_SEMESTRE/19_Matematicas_III.pdf.

Ramírez, et al., (2000) Geometría y Trigonometría. 24 de febrero de 2019, Geometría y Trigonometría. DGETA Sonora: https://www.guao.org/sites/default/files/biblioteca/Geometr%C3%ADa%20y%20Trigonometr%C3%ADa.pdf.

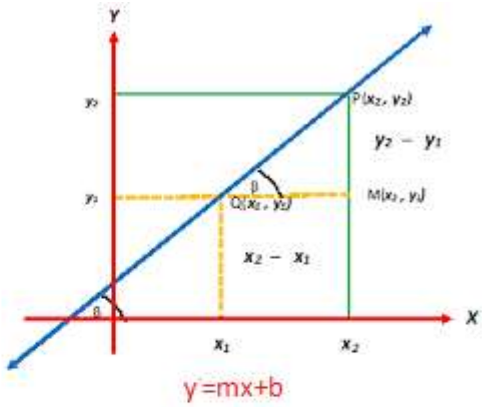
<table>
<tr><td>UNIDAD 2.</td><td rowspan="2">MATEMÁTICAS III.</td></tr>
<tr><td>Elementos Básicos de Geometría Analítica</td></tr>
<tr><td colspan="2">Propósitos:
Al finalizar el alumno:
Será capaz de manejar algebraicamente algunos conceptos básicos de la geometría euclidiana y algunos lugares geométricos con la finalidad de introducir el método analítico. Tiempo: 10 horas.</td></tr>
</table>

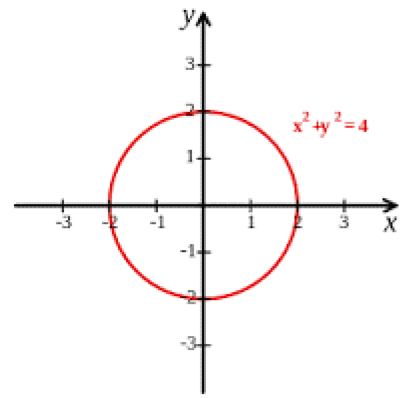
1. Presentación de la Unidad 2.

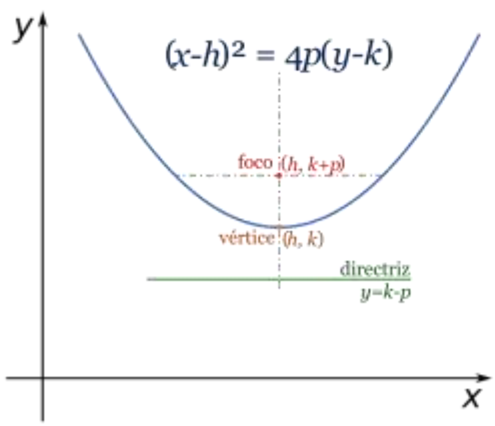
En esta unidad se mostrará un enfoque general del método de la Geometría Analítica, ya que manejaremos de manera algebraica algunos conceptos básicos de la geometría euclidiana y algunos lugares geométricos con la finalidad de introducir el método analítico.
Recuerda que la palabra geometría es de origen griego, y proviene de las raíces geo (tierra) y metrón (medir).
René Descartes realiza una de las mayores aportaciones a la Geometría analítica relacionando el Álgebra y la Geometría plana, Descartes introduce el concepto de sistema coordenado en 1637 donde es posible obtener correspondencia uno a uno entre puntos y números reales, esto nos permite aplicar los métodos de análisis a la Geometría, de ahí el nombre de Geometría analítica.
La geometría analítica nos permite representar figuras geométricas mediante fórmulas del tipo f(x,y) = 0, donde f representa una función u otro tipo de expresión matemática. Por ejemplo, las rectas que fueron estudiadas en Matemáticas 1 pueden expresarse como ecuaciones polinómicas de grado 1 (y=mx + b); las circunferencias y el resto de cónicas como ecuaciones polinómicas de grado 2, por ejemplo la circunferencia de centro (7,-6) y radio r=4 queda representada por la ecuación: $(x-7)^2+(x+6)^2=16$.

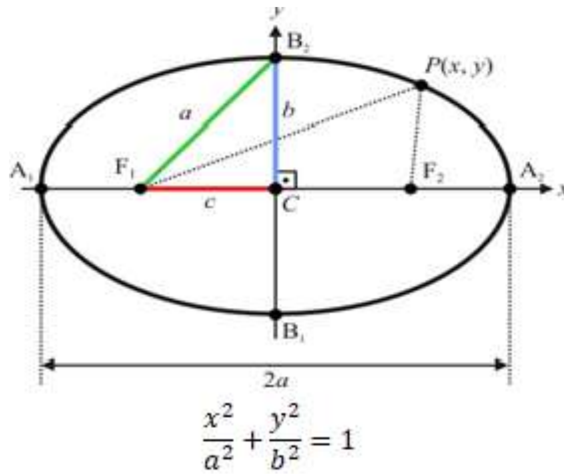
Un lugar geométrico es el conjunto de puntos (x, y) en el plano que cumplen con una misma propiedad o condición geométrica. Dicha condición es representada mediante una ecuación de la forma f (x, y) = 0. El conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen tal ecuación recibe el nombre de gráfica o lugar geométrico de la ecuación.

De acuerdo con lo anterior, las siguientes figuras representan Lugares Geométricos.









Por lo tanto, el estudiante comenzará a resolver ejercicios o problemas donde deberá dada la ecuación interpretarla geométricamente (construcción de gráfica), o dada la figura geométrica o la condición o condiciones que debe cumplir los puntos de esta, determinar su ecuación.

Durante el desarrollo de la unidad se pueden ir presentando los siguientes problemas de aprendizaje:

- Deficiente conocimiento del sistema de coordenadas cartesiano
- Deficiente manejo de las operaciones aritméticas básicas en particular con los números racionales representados en su forma fraccionaria.
- Desarrollar un binomio al cuadrado como producto notable o como el producto de dos polinomios.
- La traducción de lenguaje algebraico a lenguaje común y viceversa.

Para que el alumno supere estas dificultades proponemos lo siguiente:

- Aplicar una evaluación diagnóstica al inicio de la unidad de aprendizaje.

- Dejar actividades de forma paralela al curso, en base a las deficiencias detectadas en la evaluación diagnóstica.
- Desarrollar las hojas de trabajo de la secuencia didáctica sobre los temas en donde tienen mayor problema los alumnos y que se encuentran en esta unidad.
- Invitarlos a participar en el Programa Institucional de Asesorías (PIA).

Es importante dejar de tarea a los estudiantes una investigación sobre la historia de la Geometría Analítica, para que se motiven a estudiar esta y las siguientes unidades y puedan ver la utilidad que tiene la Geometría Analítica en su entorno.

2. Actividades de Enseñanza Aprendizaje.

El estudiante deberá comprender y aplicar algebraicamente algunos conceptos de la geometría euclidiana y algunos lugares geométricos con la finalidad de empezar a trabajar con el método analítico a partir del desarrollo de las siguientes secuencias didácticas:

- Reafirmará el conocimiento y aplicación de los sistemas de coordenadas rectangulares a través de problemas de su entorno, que le permitirán comprender la importancia de contar con un sistema de referencia.
- Comprenderá la noción de segmento rectilíneo en el plano cartesiano, sus condiciones necesarias y suficientes para determinar dicho segmento.
- Deducirá la fórmula para determinar la longitud de un segmento rectilíneo utilizando los conocimientos adquiridos en Matemáticas II.
- Comprenderá el concepto de ángulo de inclinación y pendiente a través de diversas actividades para que el alumno relacione ambos conceptos y que comprenda que la inclinación de un segmento puede darse a través de su ángulo de inclinación o su pendiente.
- Deduce la fórmula que proporciona el ángulo de inclinación a partir de los conocimientos adquiridos en la primera unidad para definir la pendiente como la tangente del ángulo de inclinación.
- Localiza un segmento rectilíneo dadas las condiciones necesarias y suficientes como su longitud e inclinación.
- Deducirá a partir de que el profesor obtenga la fórmula de división de un segmento, puntos especiales de un segmento y punto que divide el segmento en una razón dada.
- Comprende la noción de lugar geométrico en el plano cartesiano, además de obtener la expresión algebraica y gráfica de este.

3. Conceptos Clave.

Lugar Geométrico, plano cartesiano, segmento rectilíneo, longitud de un segmento, ángulo de inclinación, pendiente, puntos especiales de un segmento, punto que divide al segmento en una razón dada, punto medio.

4. Puesta en Escena de los Aprendizajes a Desarrollar.

Aprendizajes. Realizar las Secuencias didácticas, hojas de trabajo, Proyectos de trabajo y en función de ello: • El punto en el plano cartesiano: El alumno: representa la ubicación de un punto en el plano utilizando un sistema de referencia cartesiano y viceversa. • Segmento rectilíneo en el plano cartesiano: El alumno: Localiza un segmento en el plano cartesiano y proporciona la información suficiente para que otro alumno lo pueda hacer. • Obtención analítica de los elementos asociados a un segmento en el plano cartesiano El alumno: Deduce la fórmula para determinar la longitud de un segmento, dados sus puntos extremos y la aplica en diferentes situaciones. • Comprende el concepto de ángulo de inclinación de un segmento.	• Calcula el ángulo de inclinación a partir de las coordenadas de los extremos de un segmento. • Localiza un segmento dadas condiciones necesarias y suficientes, distintas a su determinación por sus puntos extremos. • Localiza los puntos de división de un segmento. • Obtiene la expresión algebraica y la gráfica de un lugar geométrico.

Secuencia Didáctica 1. Plano Cartesiano.

Aprendizaje: El punto en el plano cartesiano:

El alumno representa la ubicación de un punto en el plano utilizando un sistema de referencia cartesiano y viceversa.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR

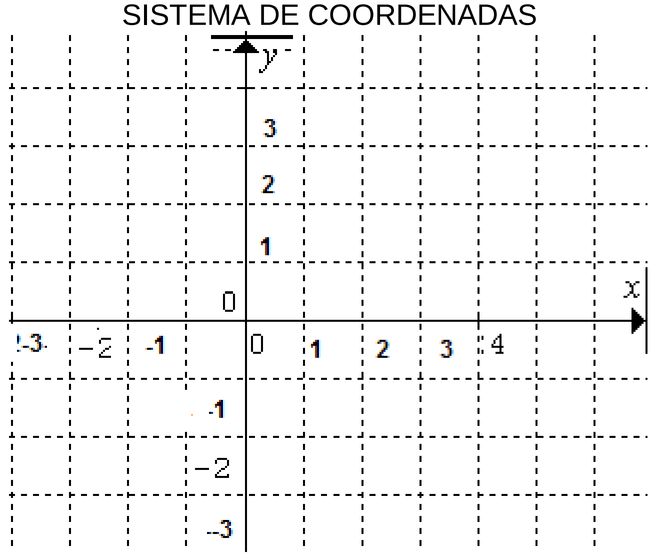
Conceptuales:	• Identifica los elementos que forman un plano cartesiano.
Procedimentales:	• Aprende a localizar puntos en un sistema de coordenadas rectangulares.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Muestra tolerancia. • Participa en el trabajo.

Fase de Inicio

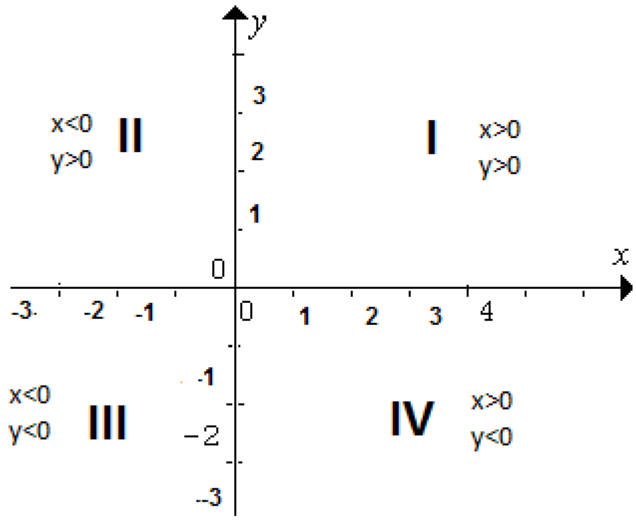
Los estudiantes de manera individual leerán lo siguiente:

Para localizar un punto en el plano es conveniente construir un sistema a partir de un punto fijo llamado origen, para que se pueda medir la distancia horizontal y vertical de un punto deseado. Se traza una recta real horizontal y una vertical que intersecan en este punto fijo que llamamos origen. Estas rectas reales se dividen en intervalos regulares de tal manera que se pueden numerar hacia la derecha (números reales positivos) o a la izquierda (números reales negativos), hacia arriba (números reales positivos) y abajo (números reales negativos), donde el origen es el cero. De esta manera se construye lo que se conoce como sistema de coordenadas cartesianas.

SISTEMA DE COORDENADAS



La recta horizontal recibe el nombre eje de las abscisas y se representa por x, y la recta vertical recibe el nombre eje de las ordenadas que se representa por y. Estas dos rectas determinan al plano cartesiano, el cual está dividido en cuatro cuadrantes.



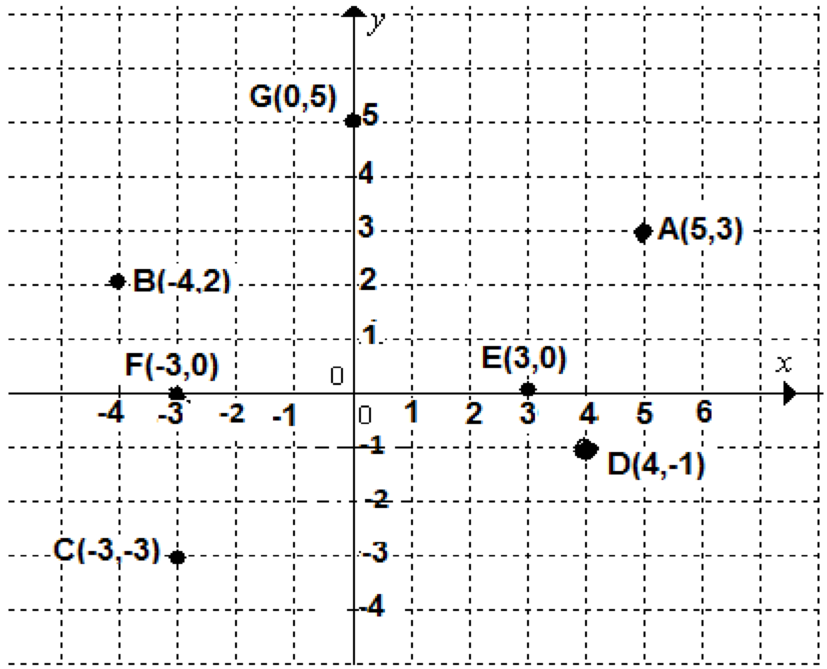
Sistema coordenado bidimensional rectangular o Plano Cartesiano

Pares de ordenadas o coordenadas de un punto.

Al punto P en el plano cartesiano le corresponden dos coordenadas, la primera indica la distancia horizontal y la segunda la distancia vertical con las que se ubicara el punto, primero localizamos la distancia en eje **x** para seguir con la distancia en eje y, a cada punto le corresponde un par ordenado (x, y) y cada par ordenado (x, y) le corresponde solamente un punto en el plano.

Fase de Desarrollo.

Área	Abscisa	Ordenada	Ejemplos
Cuadrante I	+	+	(5, 3)
Cuadrante II	-	+	(-4, 2)
Cuadrante III	-	-	(-3, -3)
Cuadrante IV	+	-	(4, -1)
Puntos ubicados sobre el eje x	Cualquier valor	0	(3,0) o (-3,0) (4,0) o (-4,0)
Puntos ubicados sobre el eje y	0	Cualquier valor	(0, 5) o (0, -5) (0,10) o (0,-10)



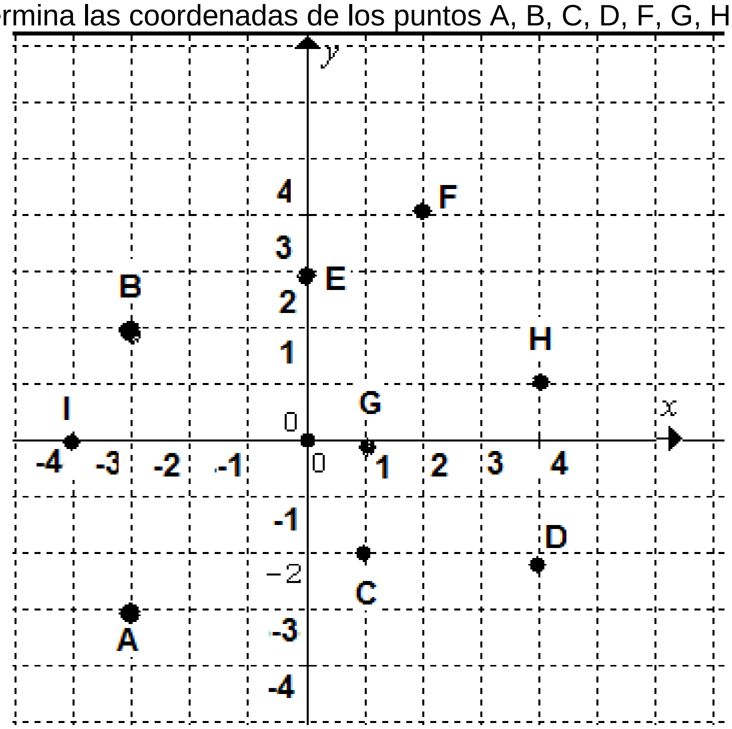
El sistema coordenado rectangular en el plano establece una correspondencia biunívoca entre cada punto del plano y un par ordenado de números reales.

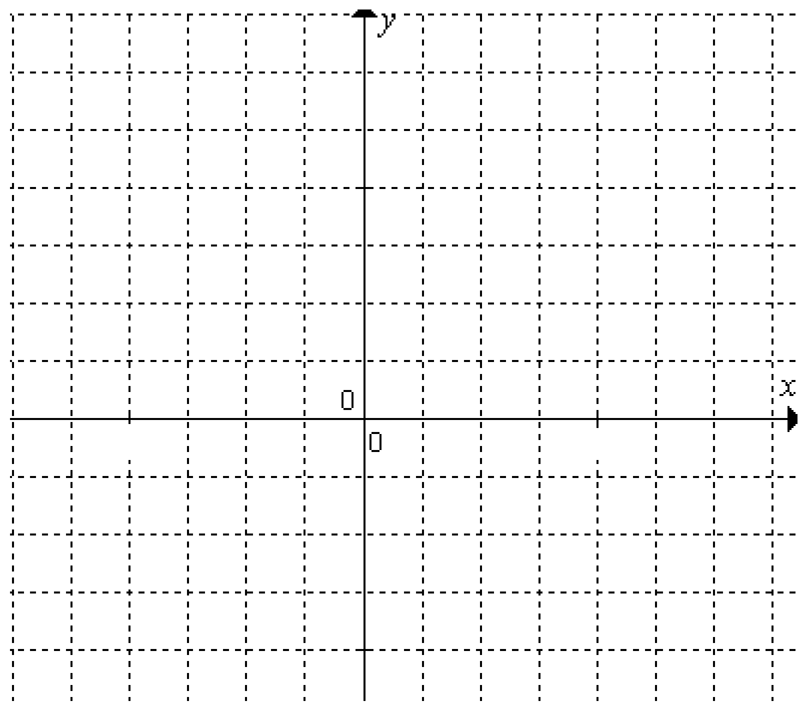
Fase de Desarrollo.

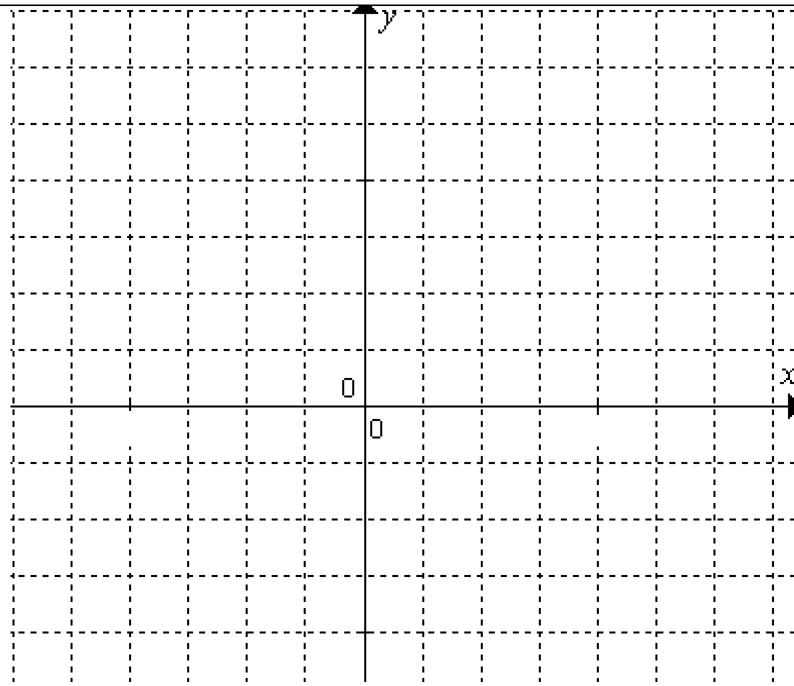
Hoja de trabajo 1.

1.Resolver los ejercicios en forma colaborativa, en equipos y/ o individual en el salón de clases:

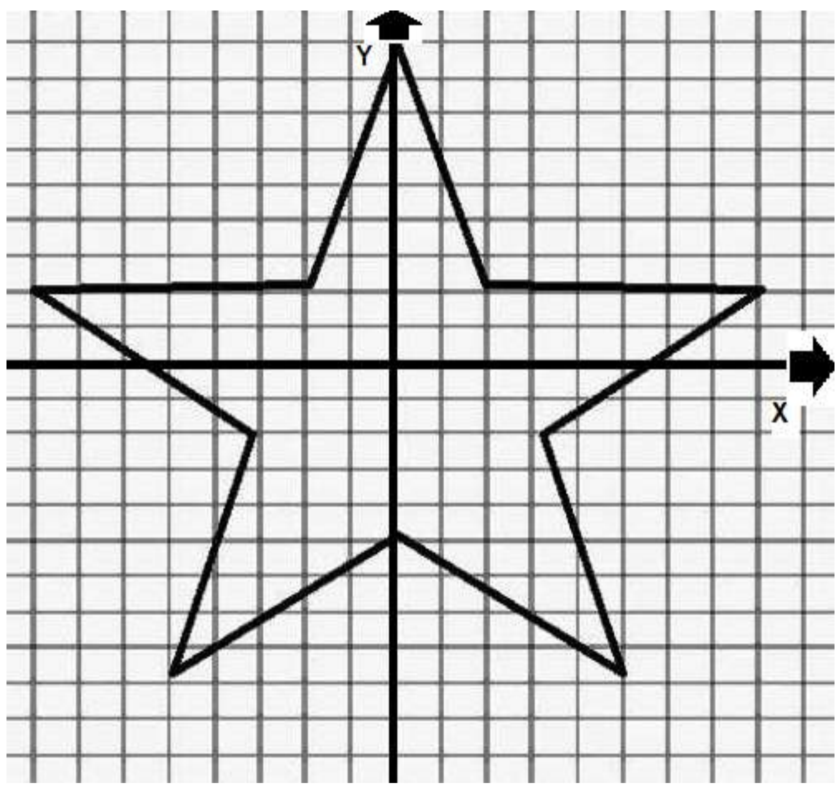
1) Determina las coordenadas de los puntos A, B, C, D, F, G, H, I.



	2)Ubica en un plano cartesiano los siguientes puntos: A (-2, 3) B (2, -3) C (2, 3) D (-2, -3) E (0, 5) F (5,0) G (4, 4) H (-4, -4) 
Fase de cierre.	**Hoja de trabajo 2.** Resolver lo siguiente de manera individual y compartiendo los resultados con sus compañeros. 1. El sistema de referencia que hemos trabajado se llama: ____________. 2. Las dos rectas perpendiculares que utilizamos en el sistema de referencia, la recta horizontal se llama:___________ y la recta vertical se llama:________________________________. 3.Cómo se llama el punto donde se cortan las rectas perpendiculares: 4 .Cada punto está determinado por un_________, la distancia al eje x se le llama, y la distancia al eje y se le llama ___________________. **5.** Cuantos cuadrantes forman los ejes: ______________________. **6.** Indica a que cuadrante pertenece cada par ordenado (x,y): (3,5):______________________ (-2,-4):_______________________. (-3,8): ____________________ (6,-4): ______________________. 7. Ubica en el plano cartesiano los siguientes puntos recordando que dos puntos determinan un único segmento de recta. A (3,1), B (5,1), C (5,3), D (4,4), E (3,3), F (2,3), G (2,2), H (2,4), I (3,5), J (3,6), K (2,5), L (1,6), M (1,5), unir punto M unir con punto E



8. Encuentra las coordenadas de cada vértice en la figura, recordando que dos puntos determinan un único segmento de recta:



Comparar los resultados de manera grupal.

Secuencia Didáctica 2. Segmento Rectilíneo en el Plano Cartesiano.

Aprendizaje:

El alumno localiza un segmento en el plano cartesiano y proporciona la información suficiente para que otro alumno lo pueda hacer.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR

Conceptuales:	• Comprende las condiciones necesarias y suficientes para definir y/o determinar un segmento en el plano.
Procedimentales:	• Construye segmentos a partir de dos puntos dados.
Actitudinales:	• Valora el procedimiento geométrico para obtener segmentos de recta.

Fase de Inicio.

De los conceptos más utilizados en Geometría analítica es el de segmento rectilíneo, con origen de la palabra: *segmentum* de aquí se puede decir que es una parte de la recta que está delimitada por dos puntos, siempre se le relaciona con la longitud de dicho segmento que es la distancia entre los dos puntos, por ejemplo, entre los puntos A y B y se representa como |AB| o d_{AB}.

Tenemos tres formas de caracterizar el segmento de recta, por los extremos que forman, por su longitud y uno de los puntos que lo forma, y por último por un punto y el ángulo de inclinación o la pendiente que lo determina (o su prolongación) con el eje x.

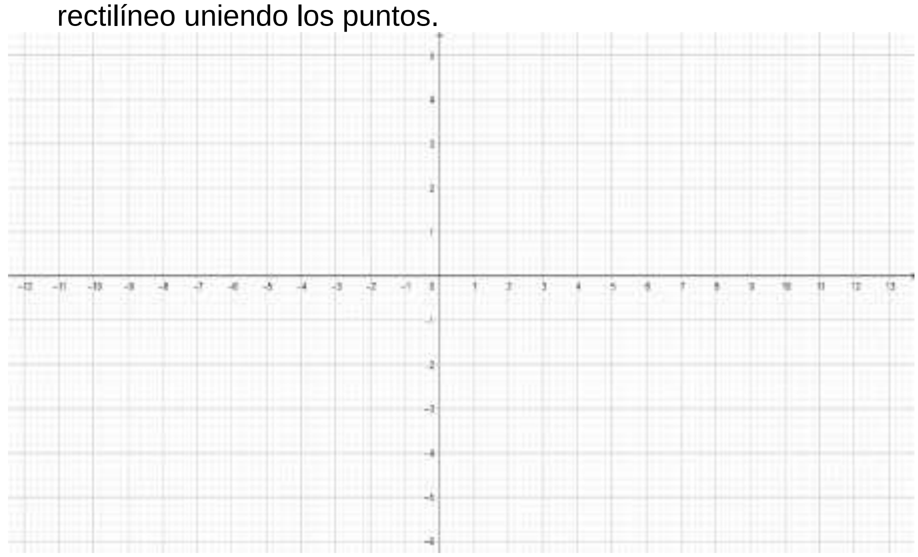
Tomando como base la anterior secuencia 1. Plano cartesiano, empezaremos a trabajar.

Fase de Desarrollo.

Hoja de trabajo 3.

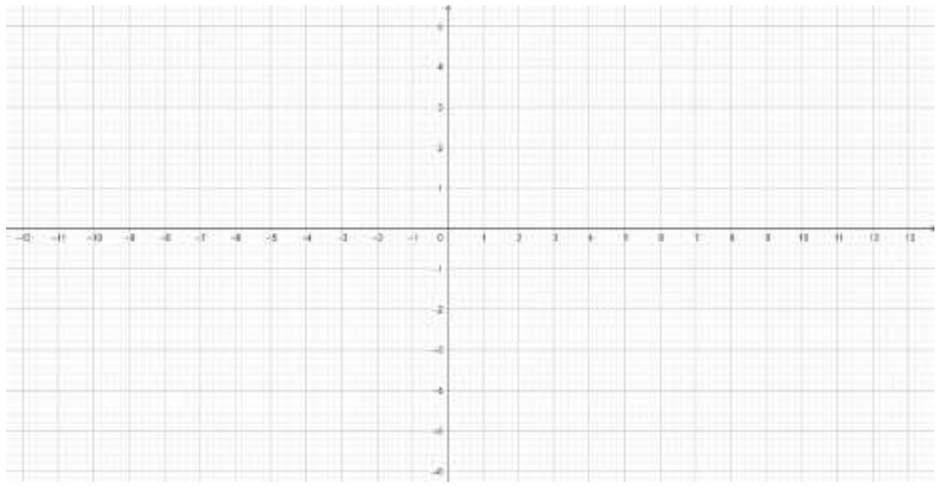
Empecemos por dos puntos que conforman el segmento rectilíneo.

1. Punto inicial A(3, 3) y el punto final B(6,-2) , grafica el segmento rectilíneo uniendo los puntos.

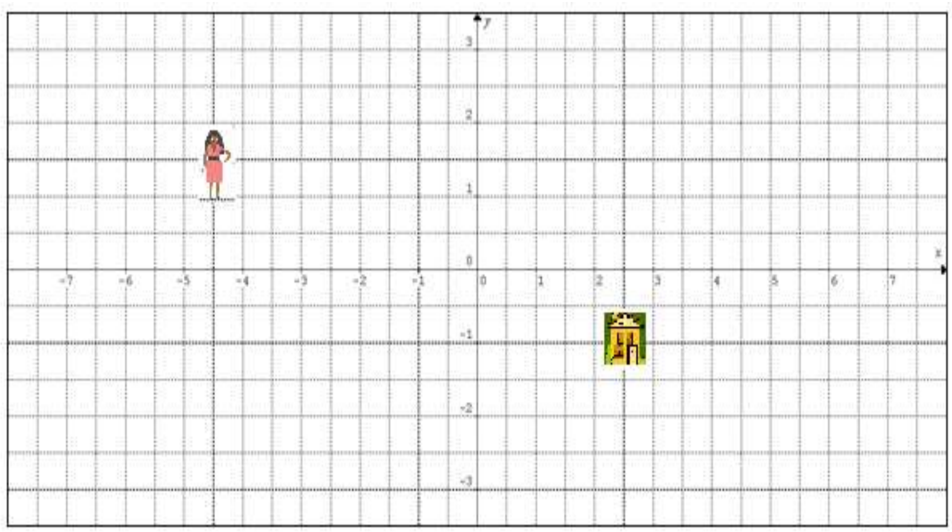


2. Punto inicial A(-2, 3) y el punto final B(-2,-2), grafica el segmento rectilíneo uniendo los puntos.

De acuerdo con la figura siguiente determina las coordenadas del punto que representa la figura de la mujer y de la figura de la casa (toma como referencia).



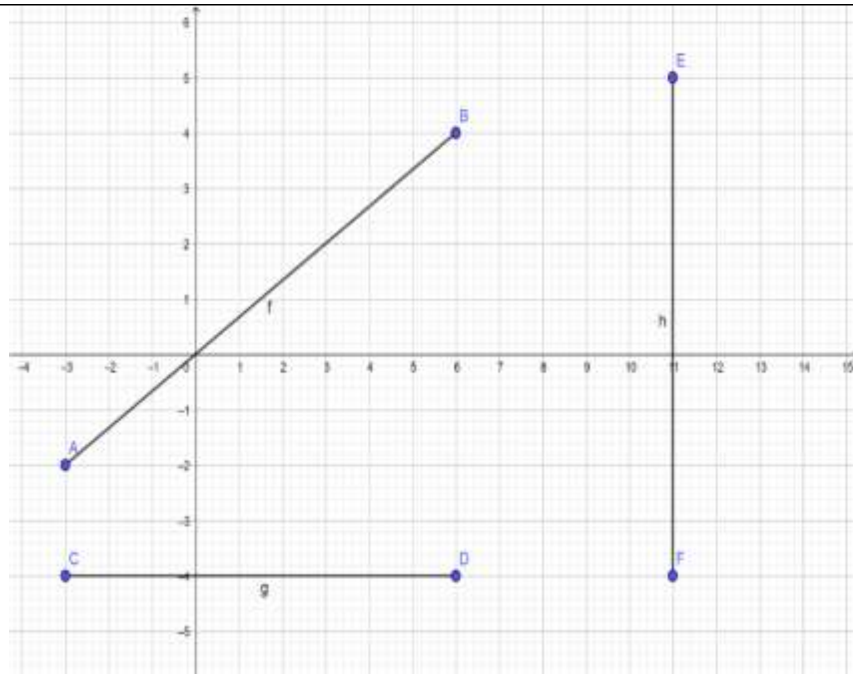
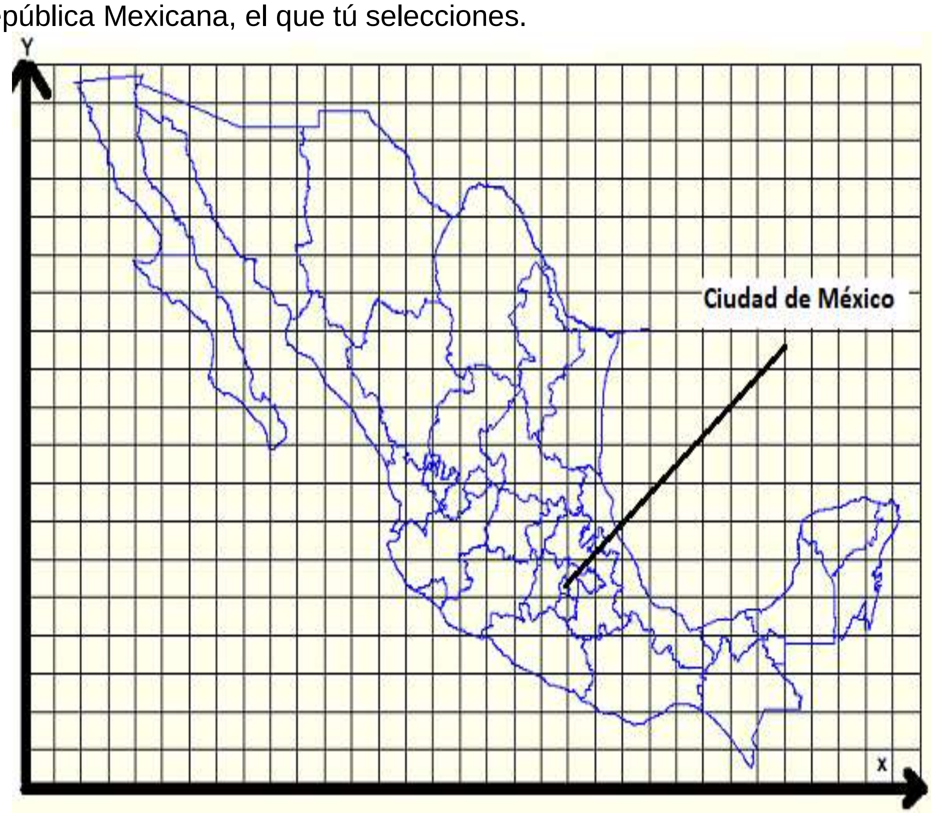
3. De acuerdo con la figura siguiente determina las coordenadas del punto que representa la figura de la mujer y de la figura de la casa (toma como referencia el centro de las figuras para calcular las coordenadas de cada uno de ellos) y traza el segmento rectilíneo entre las dos.



Las coordenadas de la mujer son (___,____)

Las coordenadas de la casa son (___,____)

4. A partir del siguiente sistema de coordenadas cartesianas en el cual hay tres segmentos rectilíneos menciona el punto inicial y el final de cada uno de ellos.

	
Fase de Cierre.	**Hoja de trabajo 4.** A partir del mapa de la República Mexicana, calcula las coordenadas de la Ciudad de México como punto de inicio y selecciona puntos que pertenezcan a tres diferentes estados de la república, utilízalos como puntos finales de cada segmento de recta, traza los segmentos y obtén las coordenadas del punto final, que representa un Estado de la República Mexicana, el que tú selecciones. 

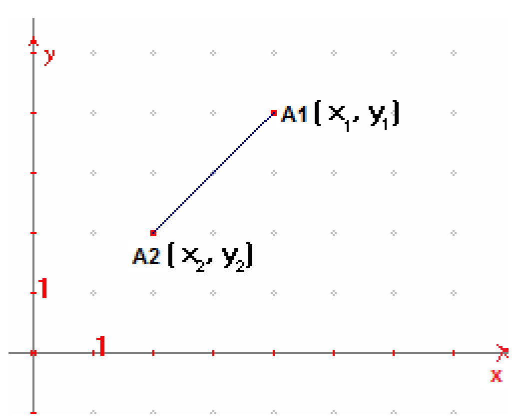
	Define con tus palabras que es un segmento rectilíneo: ____. Qué otras aplicaciones crees que puedan tener los segmentos rectilíneos: ____ ______________. Cómo se relaciona el anterior aprendizaje (secuencia 1) con lo que aprendiste en esta secuencia:__________________________________ ____ _________.

Secuencia didáctica 3. Obtención Analítica de los Elementos Asociados a un Segmento en el Plano Cartesiano.

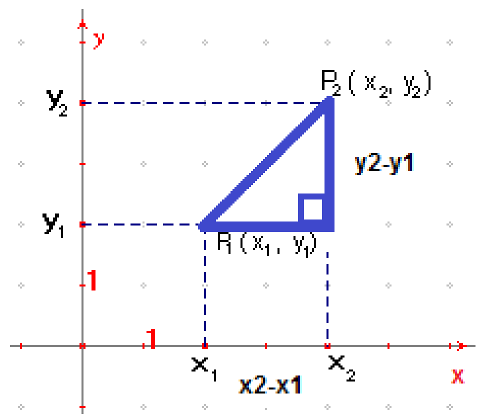
Aprendizaje:

El alumno deduce la fórmula para determinar la longitud de un segmento, dados sus puntos extremos y la aplica en diferentes situaciones.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Comprende las condiciones necesarias para definir y/o determinar un segmento en el plano.
Procedimentales:	• Determina la distancia que hay entre dos punto en el plano, así como su perímetro.
Actitudinales:	• Valora el procedimiento analítico para obtener la distancia entre dos puntos.

Fase de Inicio.	En este nuevo aprendizaje seguiremos utilizando lo que aprendiste sobre sistema de coordenadas cartesiano ya que seguimos graficando en él y añadiremos la noción que tienes de segmento rectilíneo para obtener su longitud. La longitud de un segmento de recta es la distancia entre los puntos que lo determinan. *Distancia entre dos puntos.* Dado un segmento de recta formado por A_1 y A_2 

Para obtener una expresión que de manera general proporcione la distancia entre los puntos $A_1(x_1, y_1)$ y $A_2(x_2, y_2)$, formamos el triángulo rectángulo siguiente:



Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$c^2 = a^2 + b^2$
donde
c: hipotenusa
a y b: catetos

Sustituyendo los valores de $a = x_2 - x_1$, $b = y_2 - y_1$ y c la distancia de A_1 a A_2, aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$(dA_1A_2)^2 = (x_2\text{-}x_1)^2 + (\underline{\qquad\qquad})^2.$$

Resolviendo:

$$dA_1A_2 = \sqrt{(\underline{\qquad\quad})^2 + (\underline{\qquad\quad})^2}$$

Fórmula para calcular la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano.

Condiciones que satisfacen la distancia entre dos puntos:

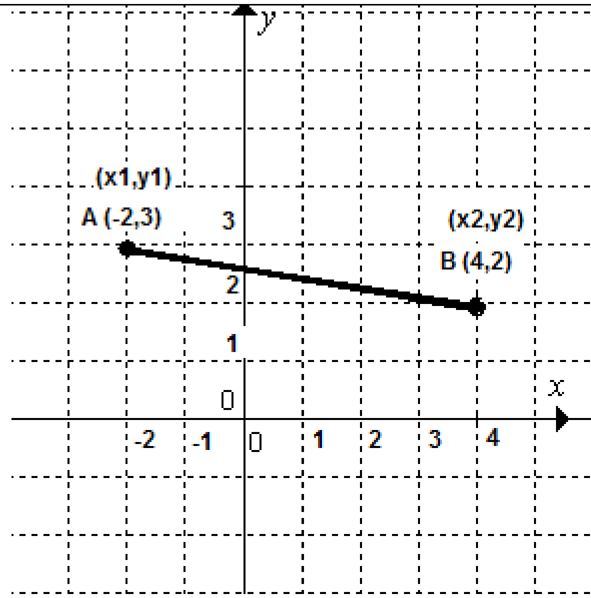
- La distancia entre dos puntos del plano cartesiano siempre es un número no negativo.
- La distancia de un punto así mismo siempre es igual a cero.
- La distancia del punto A al punto B es igual a la distancia del punto B al punto A.

Fase de Desarrollo.

Hoja de trabajo 5

Resolver el siguiente ejercicio:
Calcular la distancia entre los puntos A (-2,3) y B (4,2)

<table>
<tr>
<td></td>
<td>



La distancia del punto A al punto B es:

dAB=$\sqrt{(4-(-2)\quad)^2+(\_\_\_\_\_-\_\_\_\_\_)^2}$ =$\sqrt{(4+2)^2+(\_\_\_)^2}$ = $\sqrt{(6)^2+1}=\sqrt{\_\_\_\_\_+\_\_\_\_\_}=\sqrt{37}$

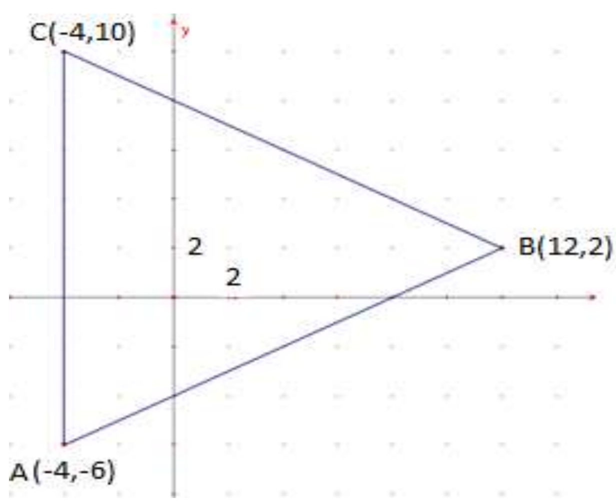
</td>
</tr>
<tr>
<td>

Fase de Cierre.

</td>
<td>

Hoja de trabajo 6.

Ejemplo: Calcula el perímetro del triángulo con vértices A(-4,-6), B(12,2), C(-4,10).



</td>
</tr>
</table>

El perímetro de cualquier triángulo es P = L+L+L, donde L representa la longitud de cada lado del triángulo.

$$dAB = \sqrt{(\_\_\_\_\_\_)^2 + (\_\_\_\_\_\_\_)^2}$$

$$d\,AB = \sqrt{(16)^2 + (\_\_\_\_)^2}$$

$$d\,AB = \sqrt{\_\_\_\_ + 64}$$

$$d\,AB = 4\sqrt{5}$$

$$dBC = \sqrt{(\_\_\_\_\_\_)^2 + (\_\_\_\_\_\_\_)^2}$$

$$d\,BC = \sqrt{(16)^2 + (\_\_\_\_)^2}$$

$$d\,BC = \sqrt{\_\_\_\_ + 64}$$

$$d\,BC = 4\sqrt{5}$$

$$dAB = \sqrt{(\_\_\_\_\_\_)^2 + (\_\_\_\_\_\_\_)^2}$$

$$d\,CA = \sqrt{(\_\_\_\_)^2 + 16^2}$$

$$d\,CA = \sqrt{\_\_\_\_ + 256}$$

$$d\,CA = 16$$

Por lo que tenemos que sustituir los valores encontrados en la fórmula de perímetro del triángulo y como resultado tenemos:
P = _____+_____+___ = 33.88 cm.**,** las longitudes de los lados indican también que es un triángulo Isósceles.
Obtén el área del mismo triángulo, recuerda de Matemáticas II, la fórmula de Herón de Alejandría.
Define con tus palabras que es longitud de un segmento: ____.
Qué otras aplicaciones crees que pueda tener la longitud de un segmento:

____
Cómo se relaciona los anteriores aprendizajes (secuencias 1 y 2) con lo que aprendiste en esta secuencia 3: ________________________ ____ .

Cuando nos desplazamos a algún sitio como el cine, la escuela, el mercado, siempre hay un punto de inicio y punto final, logras identificarlos, podrías calcular alguna longitud de segmento rectilíneo relacionado estos sitios, en el caso hipotético que el desplazamiento lo pudiéramos realizar en línea recta.

Secuencia didáctica 4. Ángulo de Inclinación y Pendiente.

Aprendizajes.

Comprende el concepto de ángulo de inclinación de un segmento.
Calcula el ángulo de inclinación a partir de las coordenadas de los extremos de un segmento.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Aplica la definición de pendiente para determinar el ángulo de inclinación de un segmento de recta. • Determina la pendiente de un segmento de recta a partir de las coordenadas de sus extremos.
Procedimentales:	• Aprende los procedimientos para deducir la pendiente y ángulo de inclinación de un segmento. • Aprende los procedimientos para definir cuando la pendiente de un segmento es positiva, negativa, infinita o nula.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Muestra tolerancia. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

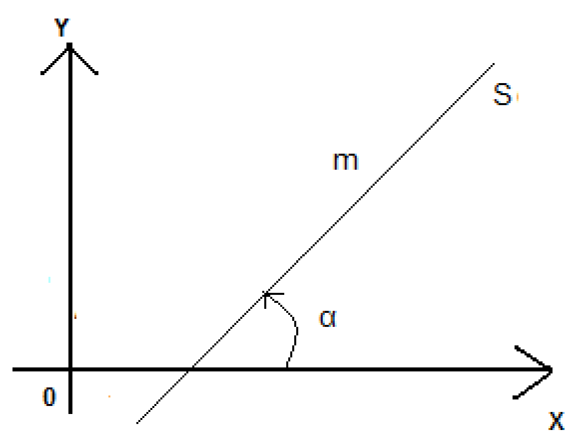
Fase de Inicio.

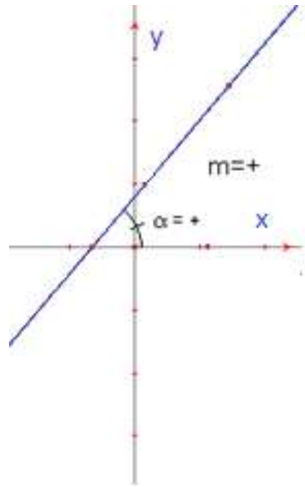
Seguimos trabajando en el plano cartesiano, con segmento de rectilíneo, su longitud, además de recordar la primera unidad de matemáticas uno, Trigonometría que nos será de utilidad para trabajar estos nuevos aprendizajes.

El ángulo de inclinación α, es el que se forma con una recta" S" y el eje "x" medido en dirección positiva del mismo eje (en sentido contrario a las manecillas del reloj).

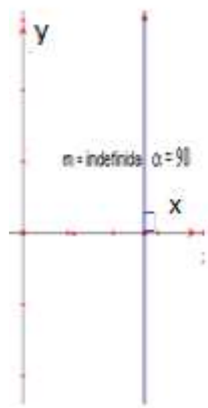
$$0 \leq \propto < 180°$$

La pendiente de la recta "S", se define como el valor de su tangente: m=tangente α. Por lo tanto: $\propto = \mathbf{arctan}(\boldsymbol{m})$.



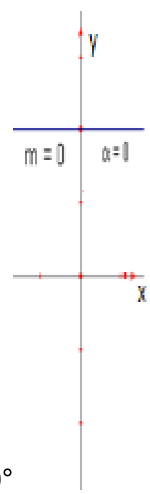
<table>
<tr>
<td></td>
<td>


Pendiente positiva
0°≤α<90°



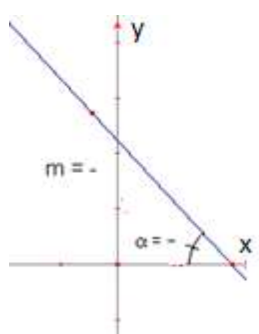
α=90°

Pendiente indefinida



α=0°

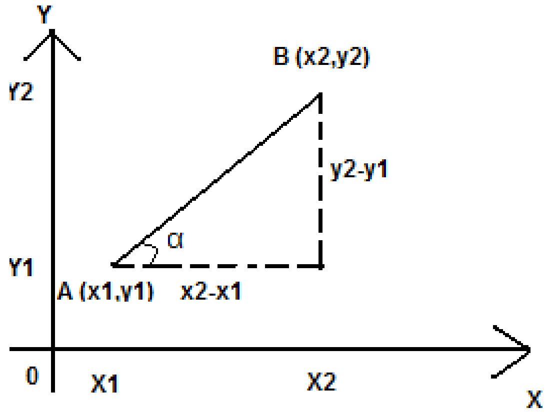
Pendiente nula.



Pendiente negativa
90°≤α<180°
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

Partimos nuevamente de un segmento de recta AB y formamos el triángulo rectángulo siguiente:



Para obtener la pendiente de un segmento de recta AB
Recordando la Tangente α = $\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$
En este caso Tangente de α= $\frac{y_2-y_1}{\_\_\_\_}$

Por tanto, si tenemos dos puntos que forman un segmento de recta A (x_1, y_1) y B (x_2,y_2) obtenemos m= $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ siempre que $x_2 \neq x_1$.

Si $x_1 = x_2$ la pendiente del segmento de recta no está definida, porque el denominador es igual a cero.

El ángulo de inclinación del segmento de recta AB con extremos en los puntos A (x1, y1) y B (x2, y2), es el menor ángulo positivo que forma con el eje X.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Fase de Desarrollo.</td>
<td>

Hoja de trabajo 7.

Si la pendiente m=1.3
Cuál es el valor del ángulo de inclinación α: _____________

Si el ángulo de inclinación es 55°
Cuál es el valor de la pendiente m: _______________

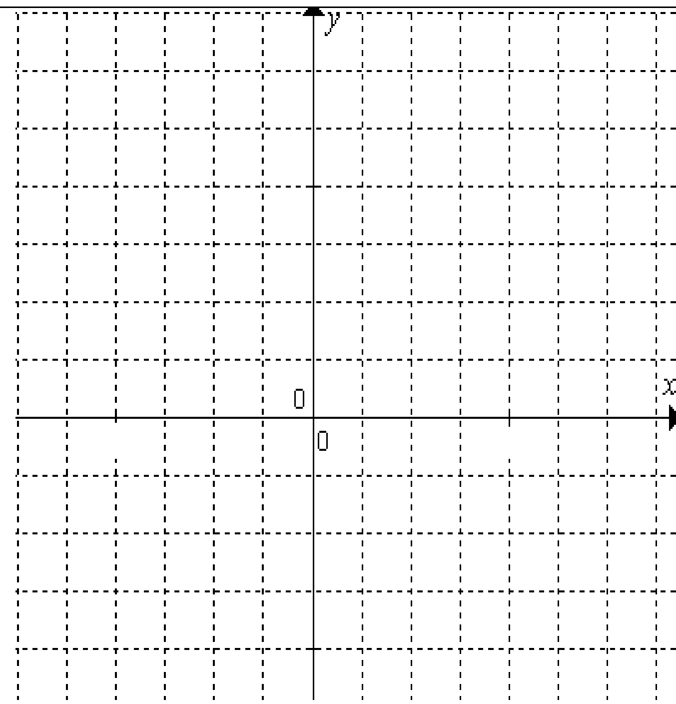
Si tenemos el punto A(-3,2) y B(-5,-6) que forman un segmento rectilíneo, calcular la pendiente y el ángulo de inclinación de dicho segmento

m= $\frac{(-6-\_\_)}{(\_\ -\ \ )}$

α=$tg^{-1}($ $)$

Realiza la gráfica del segmento de recta

</td>
</tr>
</table>

	
Fase de Cierre.	**Hoja de Trabajo 8.** Define con tus palabras que es ángulo de inclinación: ____. Define con tus palabras que es pendiente: ____. Qué otras aplicaciones crees que pueda tener ya sea él ángulo de inclinación o el concepto de pendiente en tu entorno: ____. Cómo se relaciona los anteriores aprendizajes (secuencias 1, 2, 3), además de la unidad uno de Matemáticas III Trigonometría, con lo que aprendiste en esta secuencia 3:____.

Secuencia didáctica 5. Continuación.

Aprendizaje:

Localiza un segmento dadas condiciones necesarias y suficientes, distintas a su determinación por sus puntos extremos.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR

Conceptuales:

- Aplica la definición de pendiente para determinar el ángulo de inclinación de un segmento de recta.
- Determina la pendiente de un segmento de recta a partir de las coordenadas de sus extremos.

Procedimentales:

- Aprende los procedimientos para deducir la pendiente y ángulo de inclinación de un segmento.
- Aprende los procedimientos para definir cuando la pendiente de un segmento es positiva, negativa, infinita o nula.
- Manejo del programa GeoGebra.

Actitudinales:

- Formación de una actitud positiva en el Manejo del programa GeoGebra.
- Participa en el trabajo.
- Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

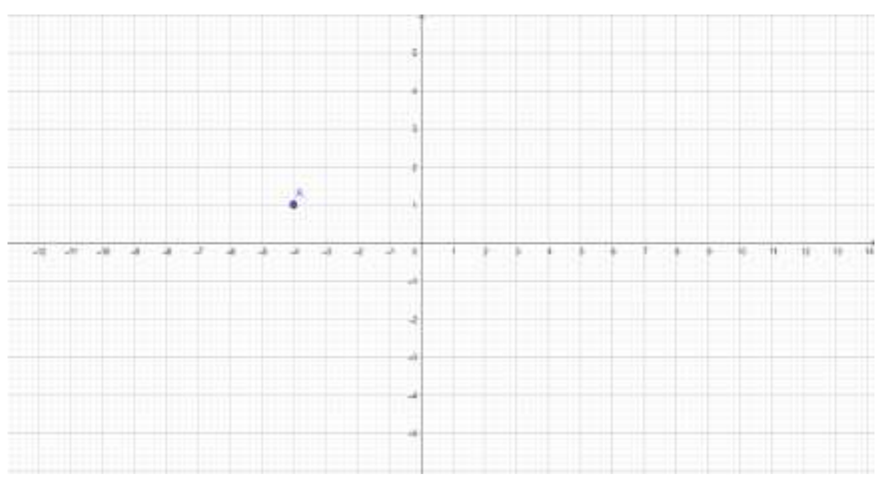
Fase de Inicio.

Ahora relacionemos lo aprendido en las anteriores secuencias.
En la secuencia número 2 identificamos los segmentos rectilíneos a través de 2 puntos inicial y final, ahora trabajaremos identificando el segmento rectilíneo a través de su distancia y su ángulo de inclinación o pendiente.

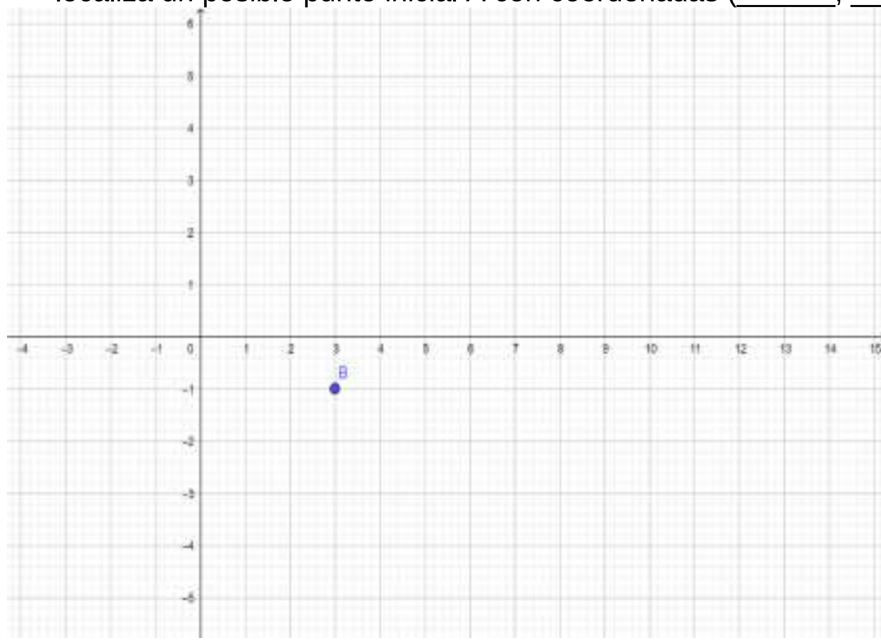
Fase de Desarrollo.

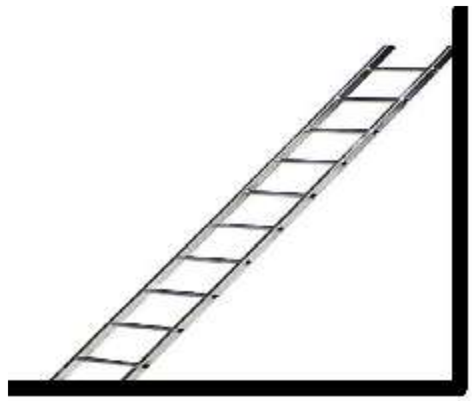
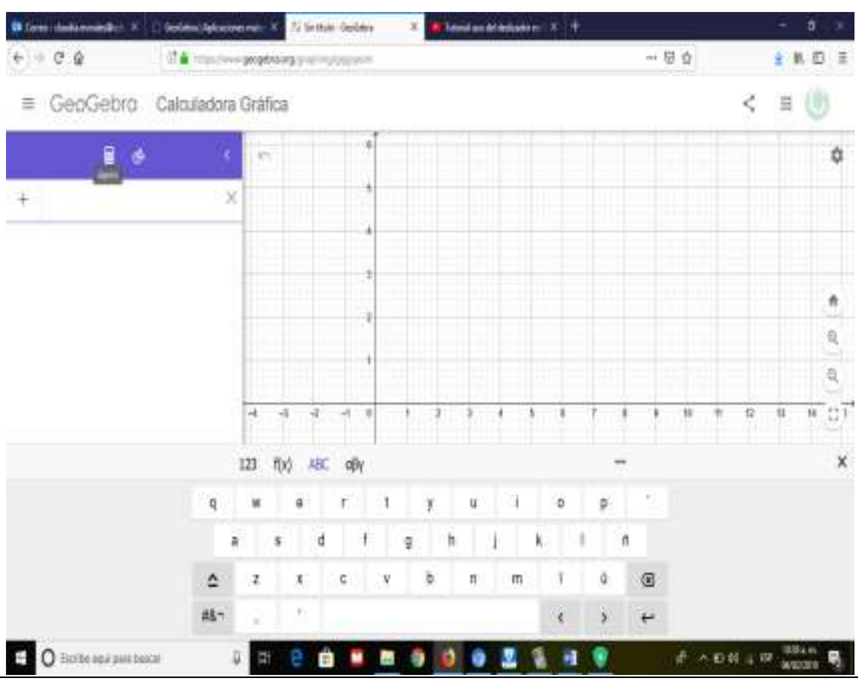
Hoja de trabajo 9.

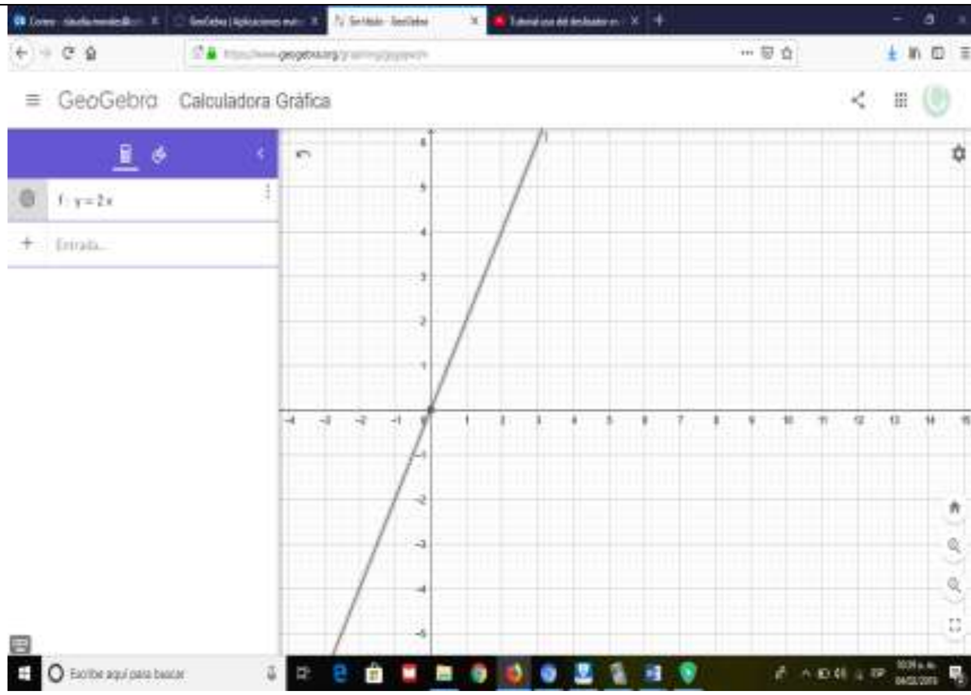
1. A partir del sistema de coordenadas cartesiano y el punto A (__ , __) encuentra el segmento de rectilíneo que tiene como punto final B que tienen una distancia con el punto A de 4 unidades y es paralelo con el eje x

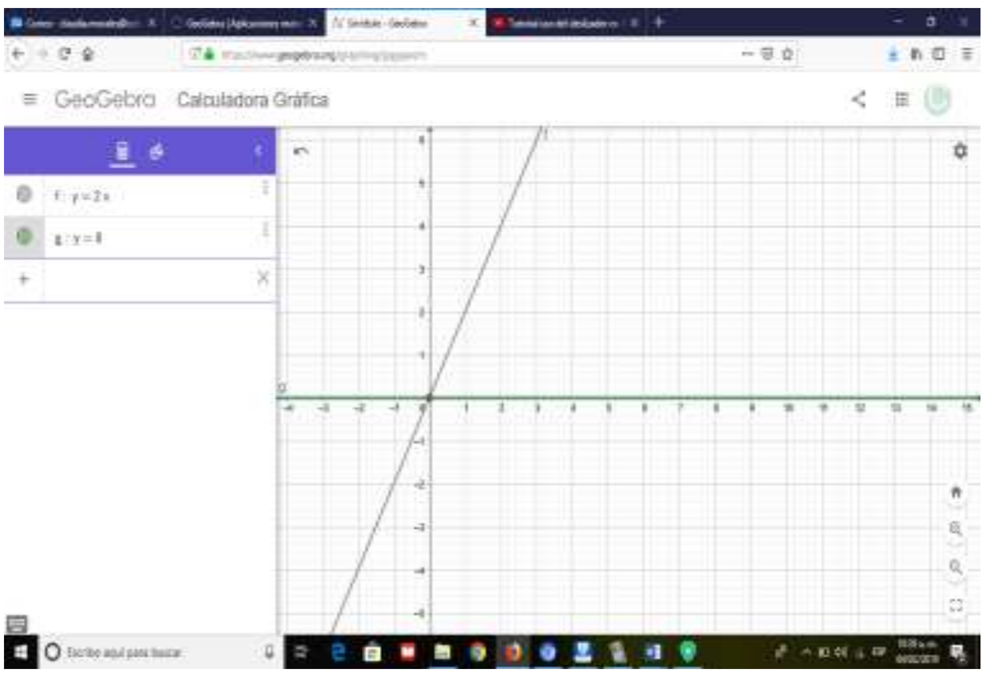


Las coordenadas de algunos posibles puntos B serían (____, _____) y (____, _____).
Ahora en base al punto A requerimos un segmento de recta con distancia de 3 unidades, pero paralelo al eje “y”.
Las coordenadas de los posibles puntos B serían (____, _____) y (____, _____)
Localiza las coordenadas de otros puntos finales B que no sean ni paralelos para el eje x ni eje y: B (___, ___) B (___, ___) B (___, ___)

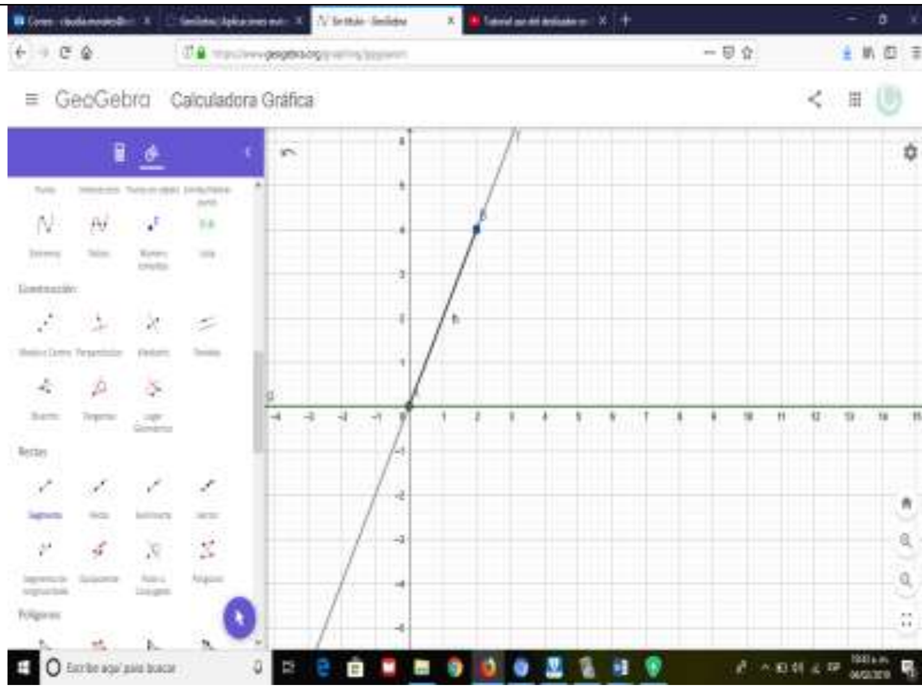
	2. Si tenemos un punto final B (3, -1), y un ángulo de inclinación de 45° localiza un posible punto inicial A con coordenadas (______, _____).  Otro posible punto inicial sería A(___, ___) Otro posible punto inicial sería A(___, ___) Otro posible punto inicial sería A(___, ___) Otro posible punto inicial sería A(___, ___) Explica porque puedes encontrar varios puntos iniciales: ____. Un segmento rectilíneo cuya pendiente es -3 pasa por el punto C(2,7) y por los puntos A y B , si la Ordenada de A es 3 y la de la abscisa de B es 6. ¿Cuál es la abscisa de A y cuál es la ordenada de B? Recordando que m= $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ Tenemos: $$m = \frac{7-3}{2-x_1} = -3$$ Despejamos: $$7-3 = -3(2- \quad)$$ Realizamos las operaciones y despejamos: $- = x_1$ Por lo tanto el punto A tiene como coordenadas (____, 3) Para el punto B Tenemos: $$m = \frac{7-y_1}{2-6} = -3$$ desarrollando $7 - y_1 = 12$ Realizamos las operaciones y despejamos: $\quad = y_1$ Por tanto, el punto A tiene como coordenadas (6, ____). Demuestra que las coordenadas tanto de A como de B son las correctas.

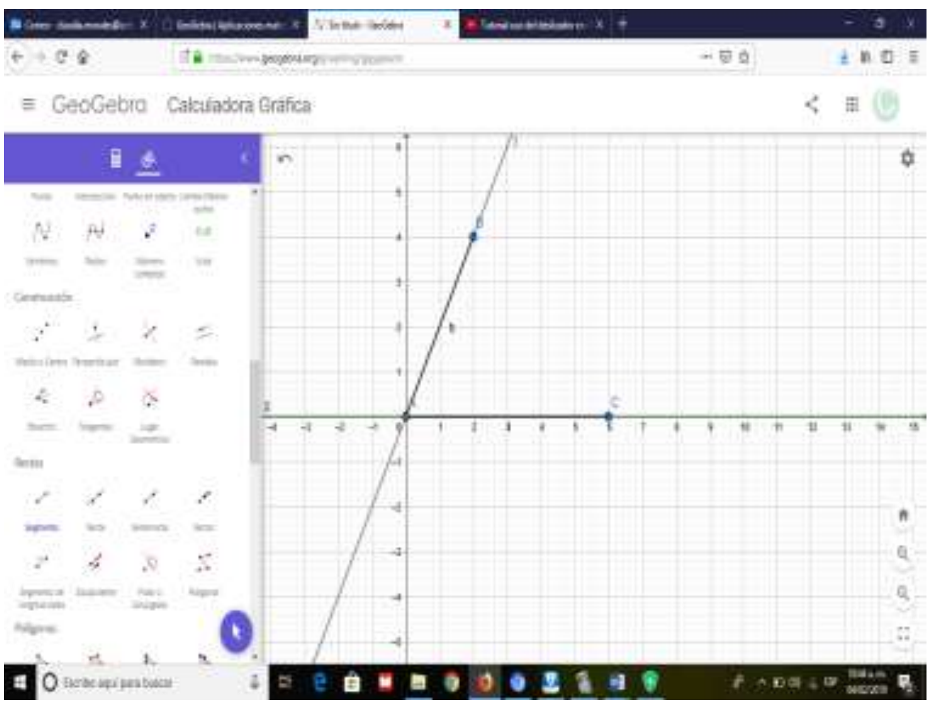
Fase de Cierre.	Hoja de trabajo 10.
	Actividad 1. Se apoya una escalera en una pared quedando un extremo a 3 metros del piso, tiene una pendiente de $\frac{3}{5}$ respecto al piso, qué coordenadas tienen el punto inicial de la escalera, sabiendo que el final tiene como coordenadas (0,3).  Menciona si has logrado los aprendizajes y que tan fácil o difícil fue desarrollar esta secuencia: ____ ____. Que puedes hacer para mejorar: ______________________________ ____. **GeoGebra** 1. En la vista algebraica en GeoGebra, en el campo entrada escribimos la ecuación de una recta (ejemplo y=2x) 2. Después en el siguiente campo de entrada que aparece, escribimos la siguiente ecuación de recta y=0. 



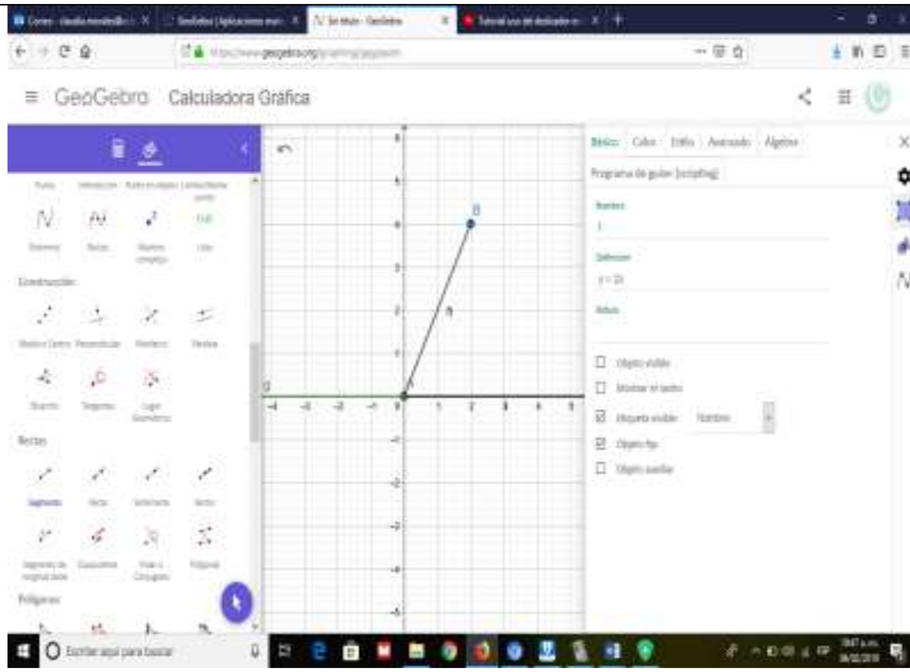


3. En la vista gráfica utilizamos la herramienta de segmento rectilíneo que se encuentra en el menú de GeoGebra (rectas) y marcamos un segmento en la recta y=2x seleccionando dos puntos de esa recta y de manera similar en y=0, del tamaño que tu gustes. Es importante que uno de los puntos coincida en las dos rectas, como se muestra en las figuras siguientes.



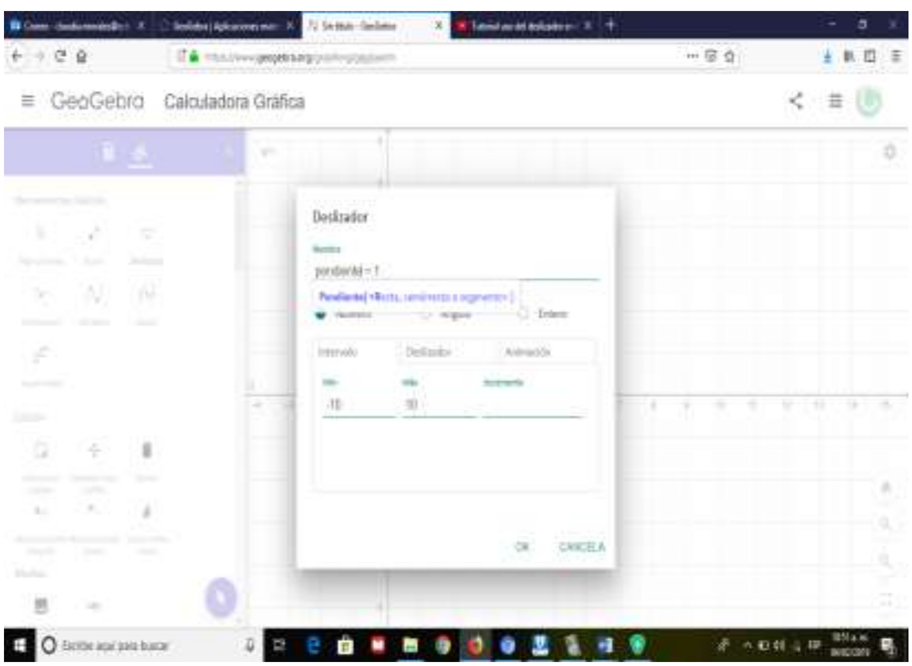


4. Luego nos colocamos en la recta, cuidando no seleccionar donde estipulamos el segmento rectilíneo y damos botón derecho para que aparezca configuración y en el menú de básico quitamos la selección de objeto visible. (ya no se puede observar la recta, sólo se observa el segmento rectilíneo).

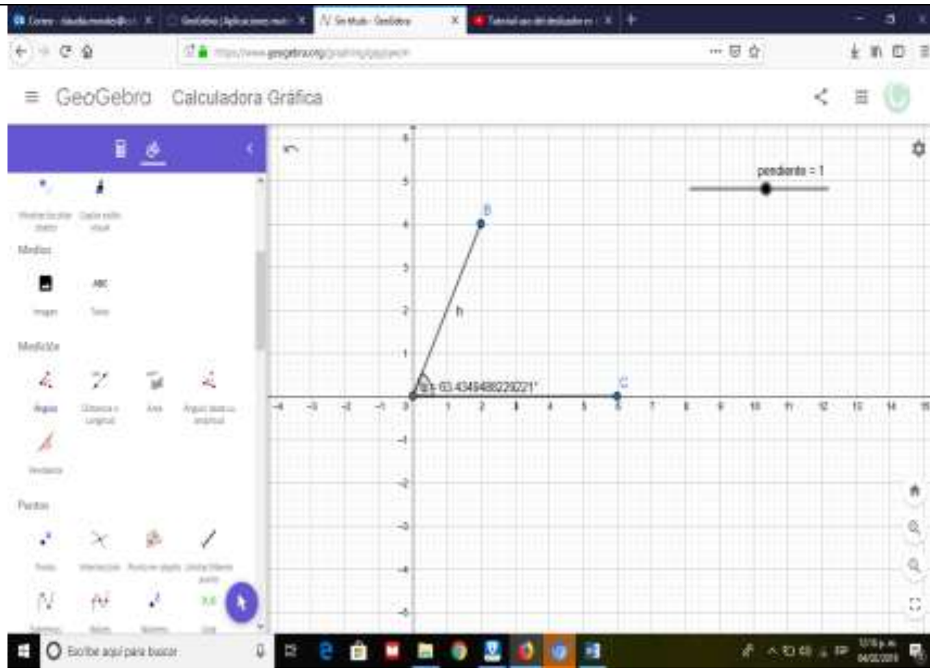


Realizamos lo mismo en la recta y=0

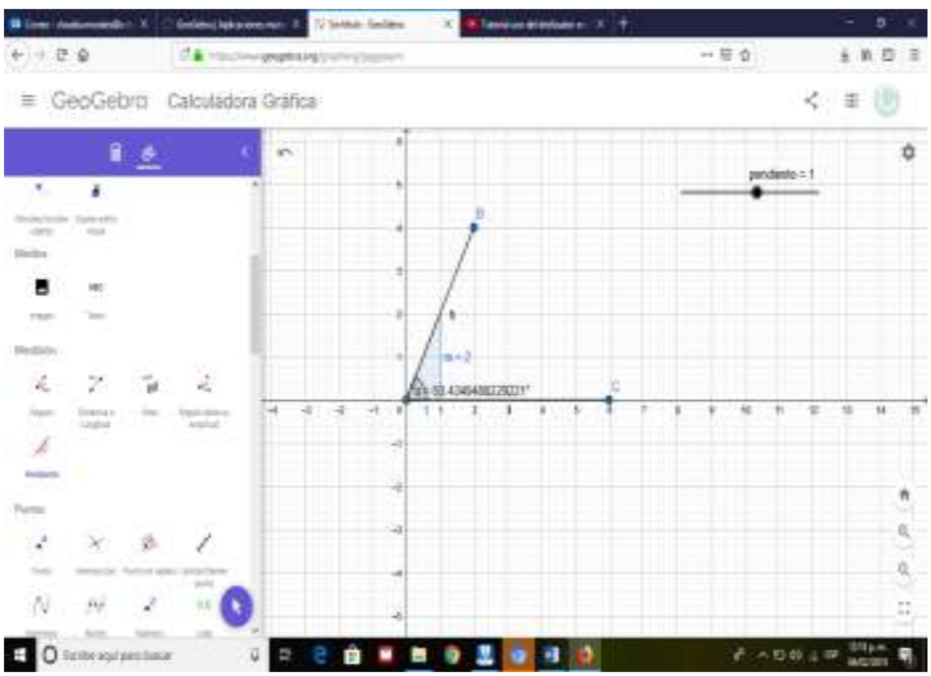
5. Creamos un deslizador auxiliándonos del menú herramientas básicas, seleccionamos deslizadores, seleccionar un punto del plano cartesiano, aparece una pantalla donde puedes modificar el nombre del deslizador, así como sus valores máximo y mínimo, cambia el nombre del deslizador ahora será pendiente y los valores van de -10 a 10.



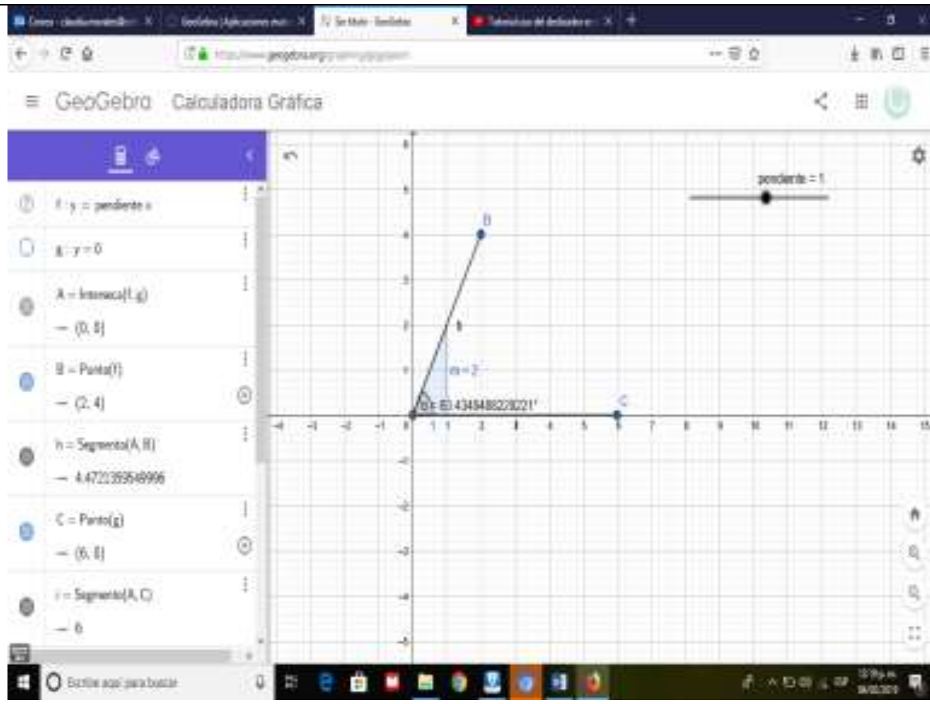
6. Ahora con las herramientas medición seleccionemos ángulo y selecciona los tres puntos en este orden C, A, B



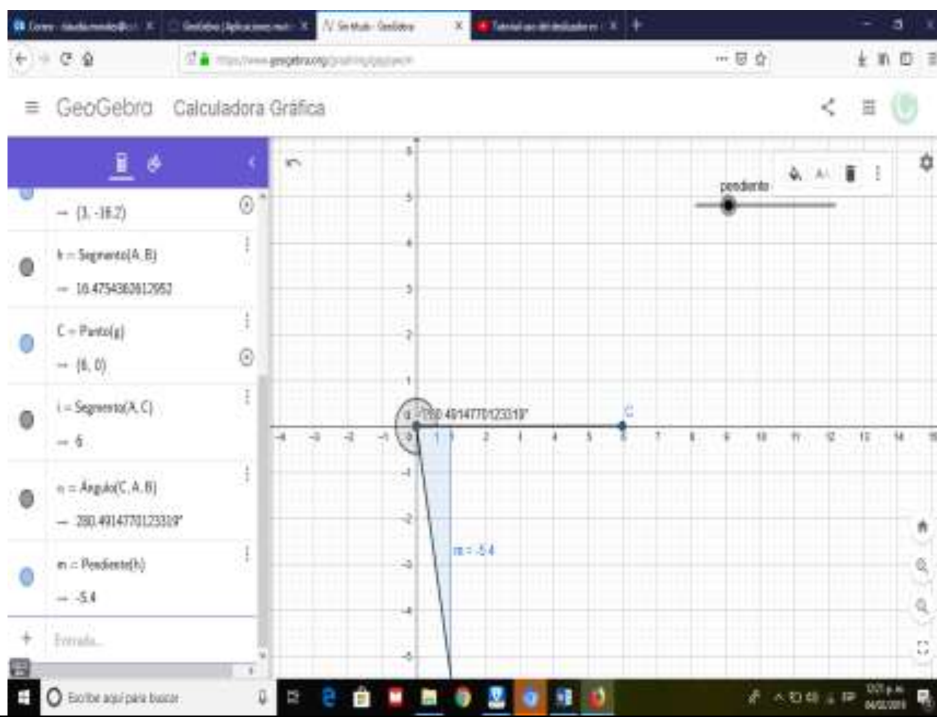
7. Con el mismo submenú de medición selecciona pendiente y toma como referencia la recta formada por los puntos A y B.

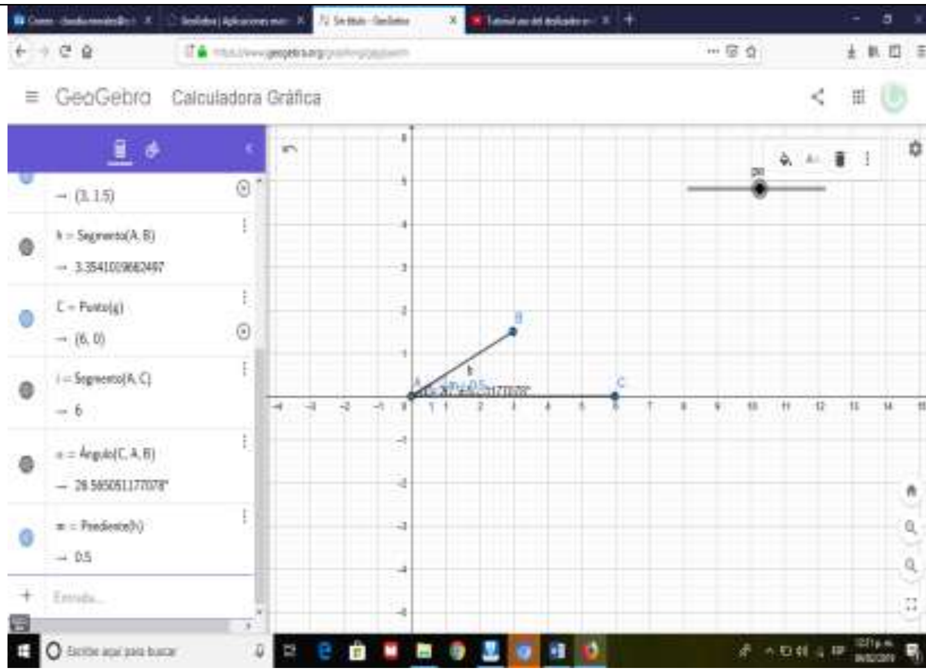


8. Busca en la vista algebraica tu primera construcción que fue y=2x y cambia el coeficiente dos por la palabra pendiente.



Con esta última instrucción relacionamos el deslizador con nuestra construcción, puedes verificarlo mueve el deslizador y verás cómo se mueve la construcción.





Ahora sí:

9. Comprueba a través de las fórmulas que dedujiste que los resultados coincidan con los que te arroja GeoGebra.

10. Mueve el deslizador de tal manera que el ángulo de inclinación aumente o disminuya y sigue realizando las comprobaciones.

Secuencia didáctica 6. División de un Segmento Rectilíneo.

Aprendizaje.

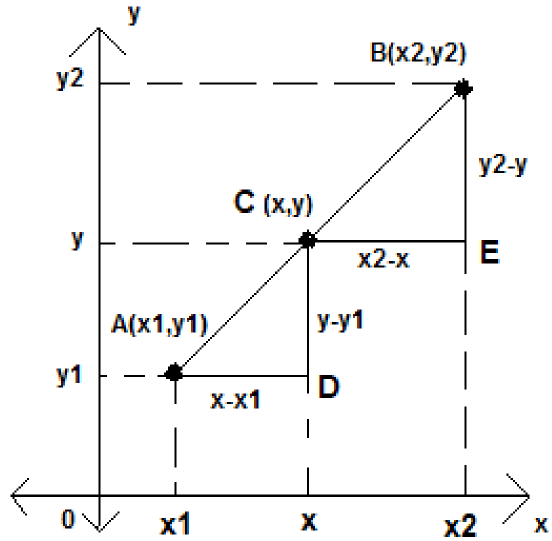
- Localiza los puntos de división de un segmento.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Aplica en la resolución de problemas los conceptos de división de un segmento y punto medio.
Procedimentales:	• Resuelve problemas de aplicación con división de un segmento.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

<table>
<tr>
<td>Fase de Inicio.</td>
<td>

División de un segmento de recta.

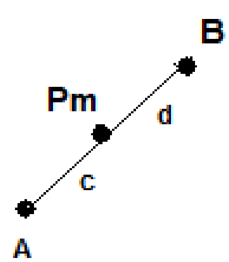
Se tienen el segmento rectilíneo determinado por A(x_1, y_1) y B (x_2, y_2), dividido por el punto $C(x,y)$.



De los triángulos semejantes $\wedge$ ADC $\wedge$ CEB tenemos $\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=r$, por lo que $r=\frac{x-x_1}{x_2-x}$ y $r=\frac{y-y_1}{y_2-y}$ despejando tanto a x como a y:

$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$, $r\neq -1$ y $y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$, $r\neq -1$ donde x y y son las coordenadas del punto $C(x,y)$ que divide al segmento rectilíneo AB en una razón r.

Tenemos un caso particular para obtener el punto medio P_m (X_m ,Y_m) y esta es la expresión que se utilizará.



ya que $r=1$.

$$x_m=\frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{y} \quad y_m=\frac{y_1+y_2}{2}$$

</td>
</tr>
</table>

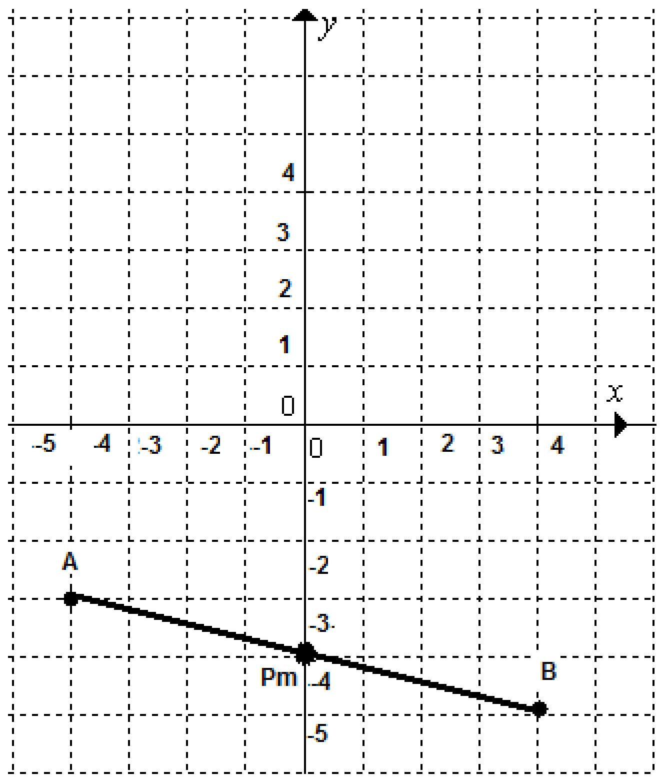
Fase de Desarrollo.

Hoja de trabajo 11.

1. Ubique las coordenadas del punto medio del segmento rectilíneo con extremos en los puntos A (-4, -3) y B (4, -5).

$x_m = \frac{\quad +4}{2} = \frac{\quad}{2} = \qquad y_m = \frac{\quad +(-5)}{2} = \frac{-3-5}{2} = \frac{\quad}{2} \quad = -4$

por lo que el punto medio es P=(,-4).



2. Ubique las coordenadas de los puntos que trisecan al segmento de rectilíneo con extremos en los puntos A (-7, 3) y B (5, 5)

Las razones a utilizar son: r=_–__, ____

$$x = \frac{-7+(r)5}{1+r} = \frac{-7+\frac{\quad}{}}{\frac{\quad}{}} = \frac{\frac{-14}{2}+\frac{5}{2}}{\frac{\quad}{}} = \frac{\frac{\quad}{}}{\frac{3}{2}} = \frac{\quad}{} = -3$$

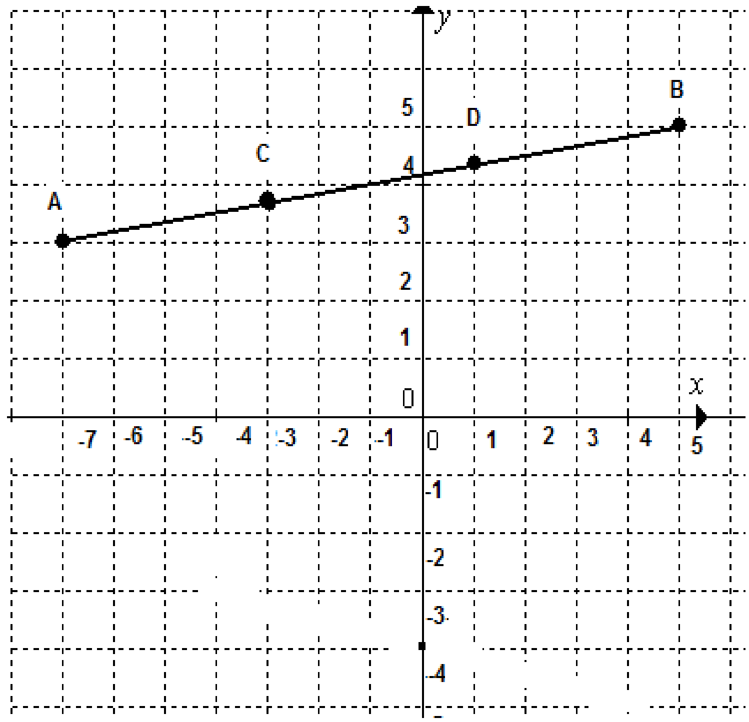
$$y = \frac{3+(r)5}{1+r} = \frac{\frac{6}{2}+\frac{\quad}{}}{\frac{\quad}{}} = \frac{\frac{\quad}{}}{\frac{3}{2}} = \frac{\quad}{} = \frac{11}{3}$$

Primer punto que divide el segmento C (-3, $\frac{11}{3}$)

$$x = \frac{-7+(r)5}{1+r} = \frac{-7+\quad}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y = \frac{3+(r)5}{1+r} = \frac{3+\quad}{3} = \frac{13}{3}$$

Segundo punto D (1, $\frac{13}{3}$)



3. El segmento rectilíneo con extremos en A (1,6) y B (3,10) contiene al punto C($\frac{5}{4}$,$\frac{13}{2}$), ¿ en qué razón lo divide?

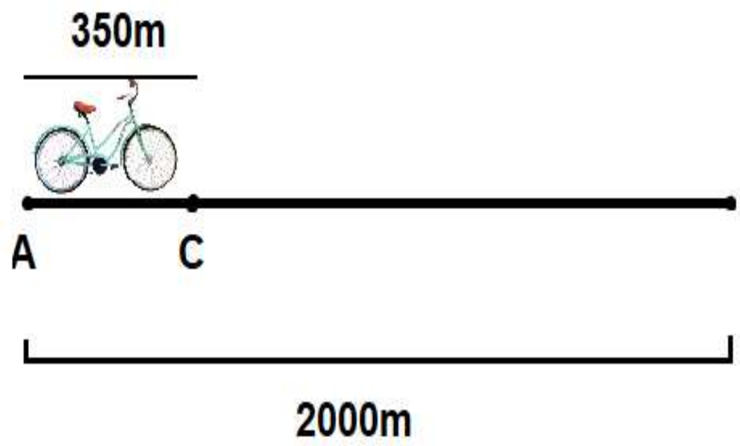
$\frac{5}{4} = \frac{1+r3}{1+r}$; $5(1+r) = 4(1+3r)$; $5+5r = 4+12r$;$1 = 7r; r = \frac{1}{7}$ por lo que el segmento se deberá dividir en 1+7 =8 partes.

4. El segmento rectilíneo AB tiene como extremo a A (-4,4) y punto medio Pm (2,2) encontrar el otro extremo

$$2 = \frac{-4+x_2}{\_\_\_}; 4 = -4 + x_2 ; \_\_\_\_ = x_2$$

$$2 = \frac{4+y_2}{\_\_\_}; 4 = 4 + y_2; \quad \_\_\_\_\_ = y_2$$

Por lo que el punto B es (_____ , ______)

Fase de Cierre.	**Hoja de trabajo 12.** En una pista de 2 kilómetro, un ciclista sale del punto inicial A y ha recorrido 350 metros Punto C. ¿En qué razón divide C a la pista, si tienen que llegar al final de ella?  Define con tus palabras que entiendes por división de un segmento rectilíneo: ____. Qué otras aplicaciones crees que pueda tener este aprendizaje en tu entorno: ____. Cuál fue el papel de las anteriores secuencias para poder comprender el aprendizaje relacionado con división de un segmento de rectilíneo: ____

Secuencia Didáctica 7. Lugar Geométrico.

Aprendizaje: Obtiene la expresión algebraica y la gráfica de un lugar geométrico.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Aplica la definición de lugar geométrico para diferentes curvas.
Procedimentales:	• Aprende los procedimientos para deducir un lugar geométrico. • Manejo del programa GeoGebra.
Actitudinales:	• Formación de una actitud positiva en el Manejo del programa GeoGebra. • Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Muestra tolerancia. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Fase de Inicio.

Un lugar geométrico es el conjunto de puntos (x, y) en el plano que cumplen con una misma propiedad o condición geométrica. Dicha condición es representada mediante una ecuación de la forma f (x, y) = 0. El conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen tal ecuación recibe el nombre de gráfica de la ecuación; o bien, su lugar geométrico. Un lugar geométrico puede cumplir con una o más condiciones a la vez.

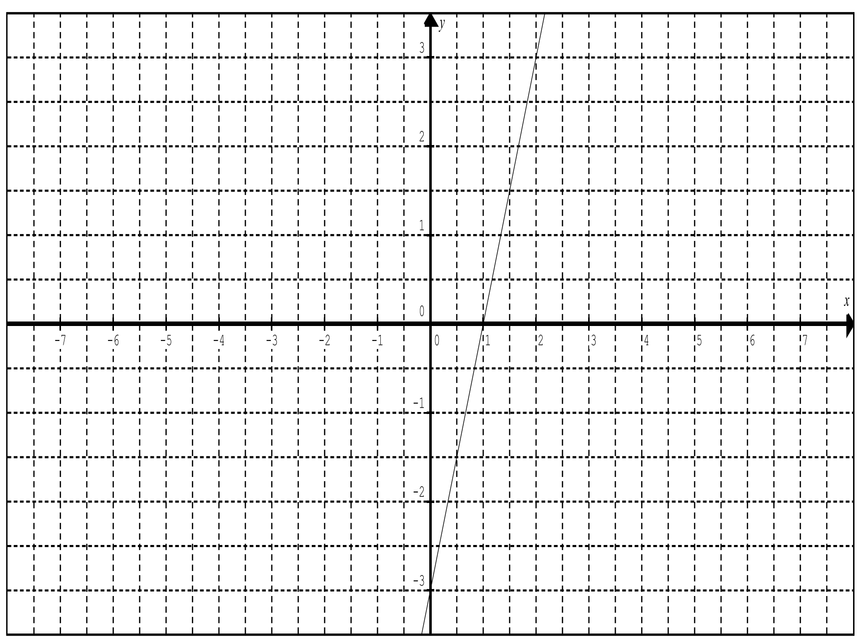
Por ejemplo:

1. La ordenada es el triple de la abscisa menos tres unidades, la ecuación satisface la condición es:

y= 3x-3, que de tus clases de matemáticas uno recordaras que se trata gráficamente de una recta.

Recuerda

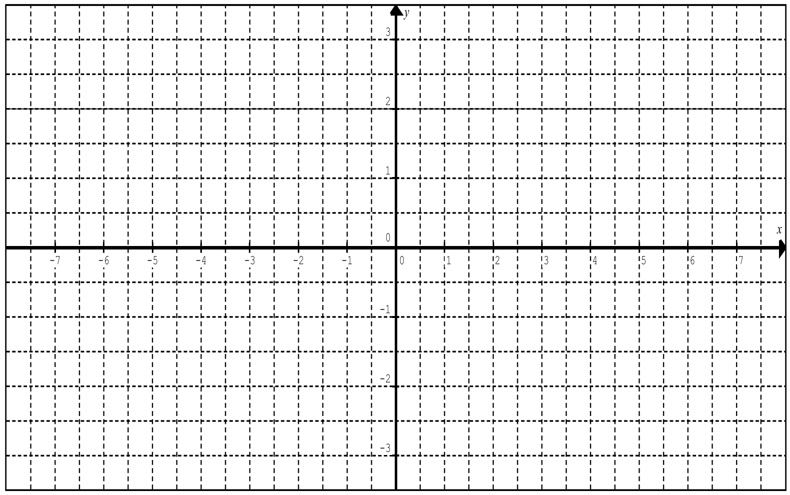
x	y=3x-3	y	(x,y)
-2	y=3(-2)-3	-9	(-2,-9)
-1	y=3(-1)-3	-6	(-1,-6)
0	y=3(0)-3	-3	(0,-3)
1	y=3(1)-3	0	(1,0)
2	y=3(2)-3	3	(2,3)



<table>
<tr>
<td>Fase de Desarrollo.</td>
<td>

Hoja de trabajo 13.

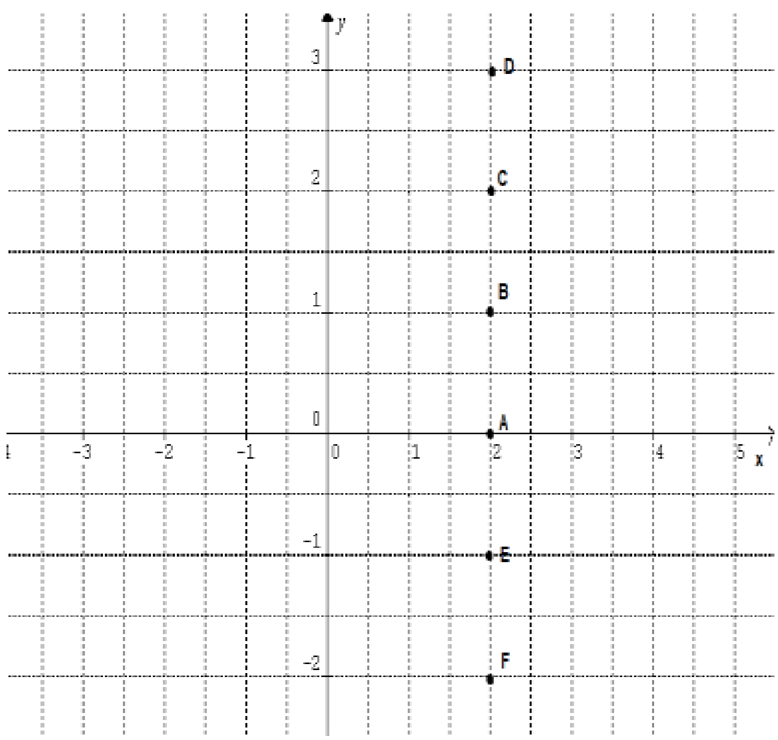
2. Todos los puntos del plano que están a 2 unidades arriba del eje x, gráficamente tendríamos



Tenemos una recta paralela al eje de la x, esto implicaría que su ecuación sería: y=2, puesto que siempre su ordenada será 2, sea cual sea su abscisa.
Esto lo podemos redactar de la siguiente forma:
El lugar geométrico de todos los puntos que están dos unidades arriba del eje x es: y=2.

</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>

A partir de la siguiente figura, escribe la distancia de los puntos A, B, C, D, E y F al eje y.



</td>
</tr>
</table>

Distancia del punto A al eje y es: _____________.
Distancia del punto B al eje y es: _____________.
Distancia del punto C al eje y es: _____________.
Distancia del punto D al eje y es: _____________.
Distancia del punto E al eje y es: _____________.
Distancia del punto F al eje y es: _____________.

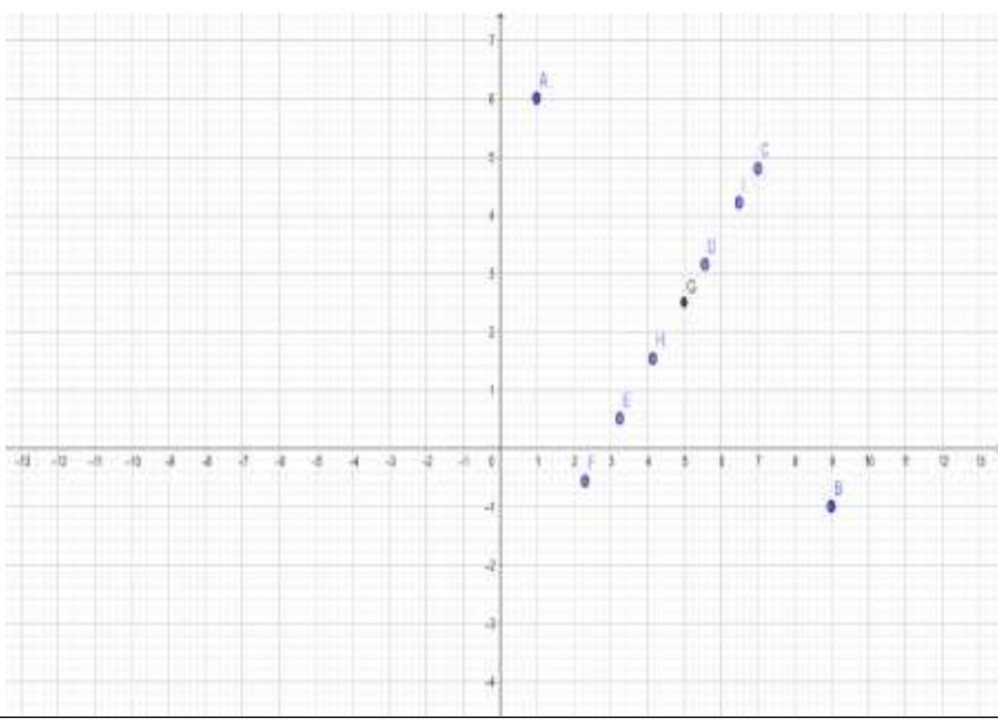
En la siguiente figura, una recta pasa por los puntos anteriores y si tomas cuatro puntos diferentes de A, B, C, D, F, E de la recta ¿cuál será su distancia con el eje y? ______________.

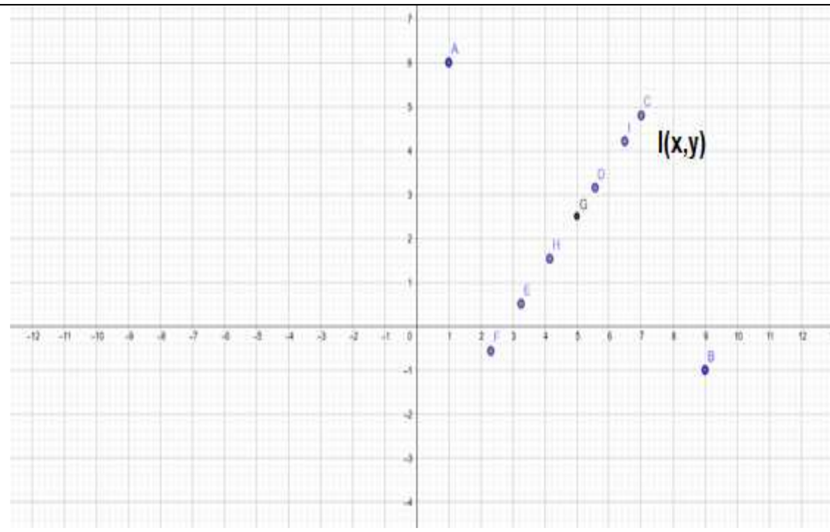
En general la distancia de todos los puntos que pertenecen a la recta respecto al eje y es:
____.

La abscisa de todos los puntos es x=2.
Entonces la ecuación del lugar geométrico es: _____________________.

3. Determinar la ecuación del lugar geométrico definido por todos los puntos del plano que están a la misma distancia de los puntos A(1,6) y B (9,-1).

Localizamos el primer punto que debe estar a la misma distancia de A y de B, que es el punto medio, luego al tanteo colocamos otros que estén a la misma distancia de A y B.





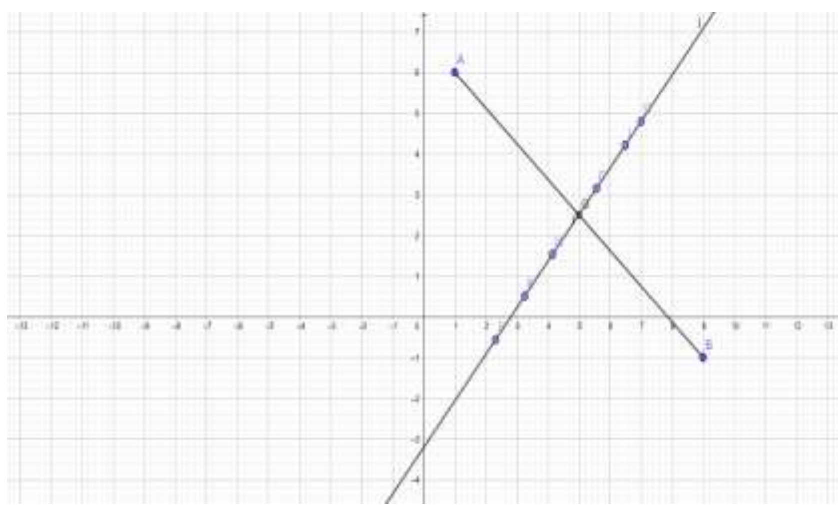
Tomamos un punto en este caso I (x,y) y calculamos la distancia del punto A al punto I y la del punto B al punto I, cómo deben ser las mismas igualamos:

$\sqrt{(x-1)^2+(y-6)^2}=\sqrt{(x-9)^2+\left(y-(-1)\right)^2}$

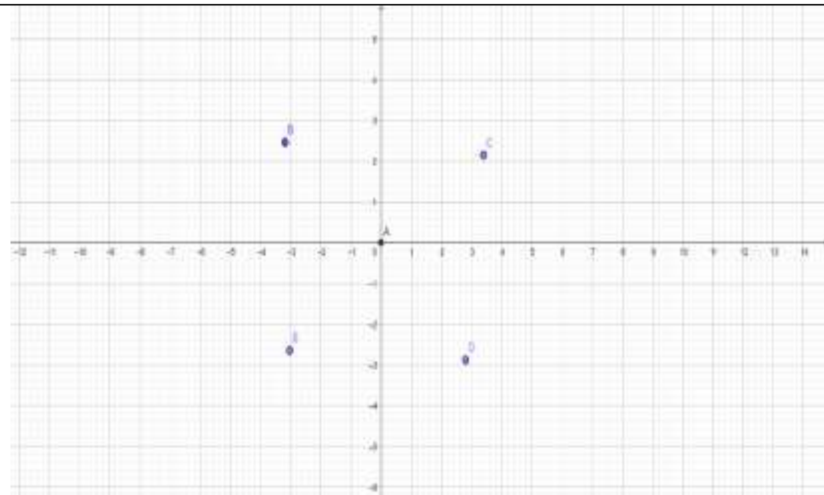
Elevando al cuadrado ambos lados
$(x-1)^2+(y-6)^2=(x-9)^2+(y+1)^2$

Desarrollando los cuadrados:
$(x^2-\_\_\_+\_\_)+(\_\_\_-\_\_\_+\_\_\_\_)$
$=(\_\_\_-\_\_\_\_\_+\_\_\_\_)+(y^2+\_\_\_\_\_+\_\_\_)$

Agrupando términos e igualando a cero tenemos: $16x-14y-45=0$, que representa el lugar geométrico de la línea recta, llamada mediatriz del segmento AB.



4. En la siguiente figura, ¿cuál es la distancia de loa puntos A, B, C, y D al origen del Plano Cartesiano?



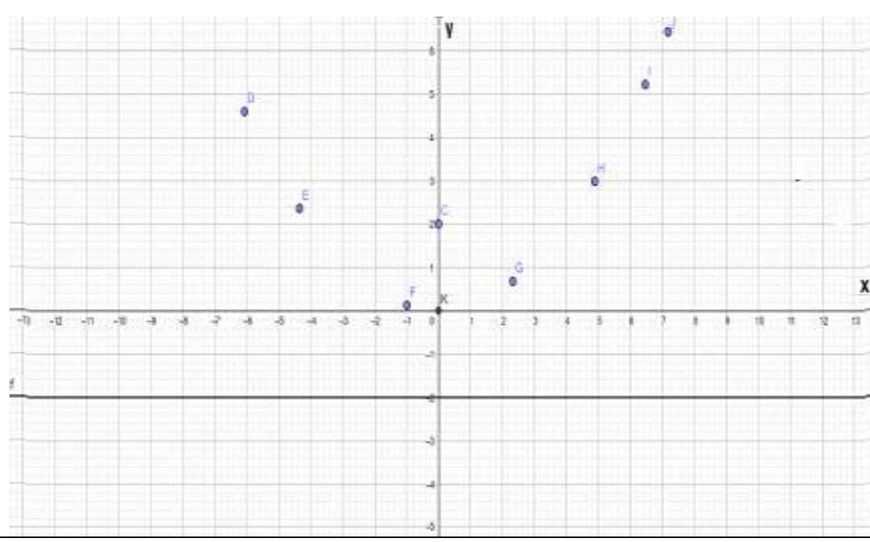
¿Cuál es la distancia de B al origen?:_________.
¿Cuál es la distancia de C al origen?:_________.
¿Cuál es la distancia de D al origen?:_________.
¿Cuál es la distancia de E al origen?:_________.

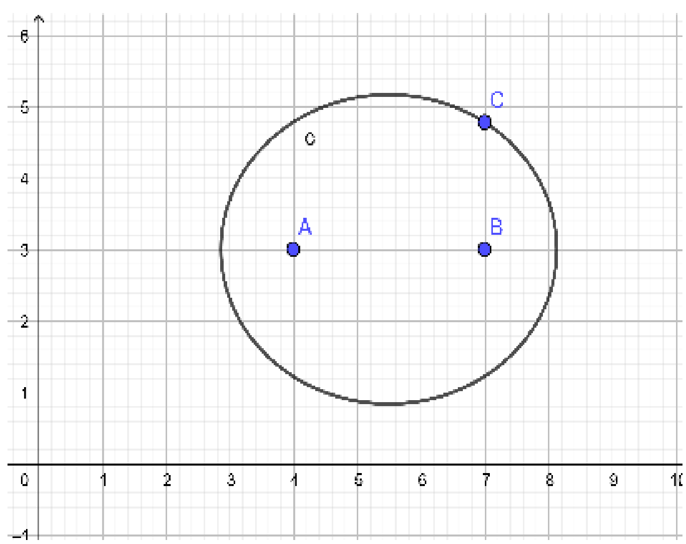
En la figura marca 4 puntos que estén a la misma distancia, ¿al unirlos qué figura se forma?
___________________.

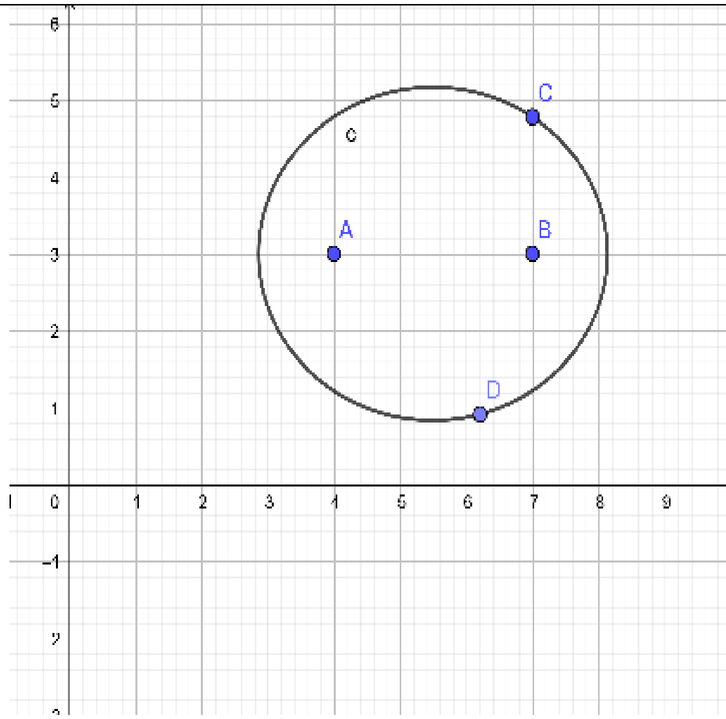
Usando la fórmula de distancia entre dos puntos, escribe cómo quedaría en este caso: ____.

La ecuación del lugar geométrico de todos los puntos en el plano que están a 4 unidades del origen es: _________________y representa a una:
_________________________.

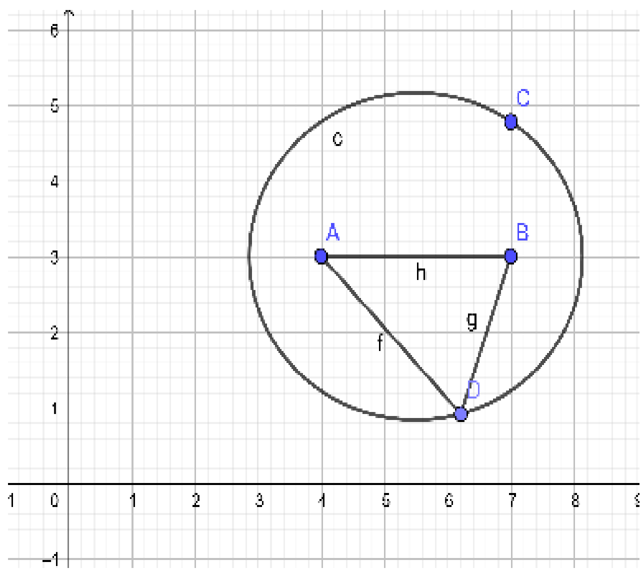
5. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos de un mismo plano que están a la misma distancia (equidistan) del punto C(0,2) y de la recta y=-2.



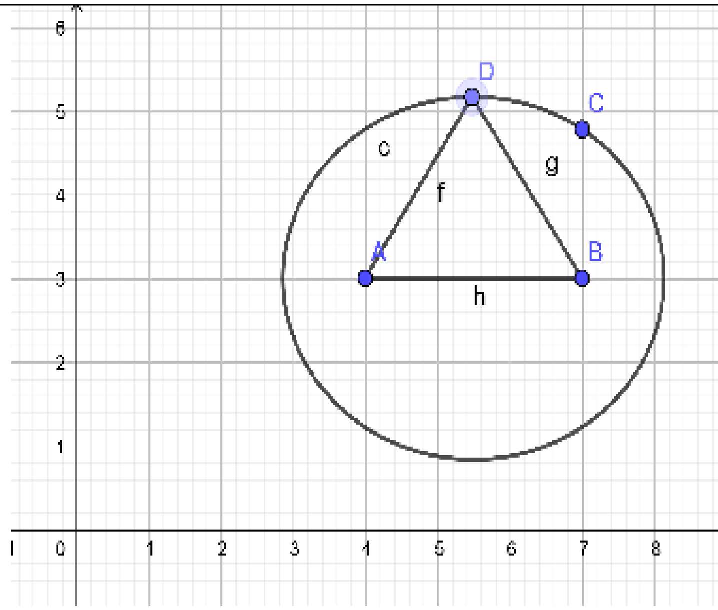
	El punto k queda a la misma distancia del punto y de la recta, al tanteo se colocan 7 puntos que están a la misma distancia de la recta y=-2 y a C(0,2). Elige un punto que consideres que cumple con la condición, por ejemplo G(x,y) y como equidista de C, usando la fórmula de la distancia , escribe la distancia del punto C al punto G: ________________________________. Observa la figura y cuál es la distancia de G(x,y) a la recta y=- 2: ____. Cómo las distancias son iguales, la esto se puede escribir como: ____. Elevando al cuadrado ambos lados, desarrollando el cuadrado y simplificando tenemos: ____. El lugar geométrico pedido es: ___________________________________.
Fase de Cierre.	**Hoja de trabajo 14.** Qué entiendes por lugar geométrico: ____. Cómo te apoyaron las anteriores secuencias para lograr comprender el concepto de lugar geométrico: ____ **GeoGebra** Trabajemos comprobando las condiciones del lugar geométrico de la Elipse. El lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano siempre es igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos. 1. Construye una elipse en GeoGebra en el menú puedes observar Que necesitas tres puntos para fijar ésta.  2. Selecciona un punto D que pertenezca a la elipse.



3. Construye segmentos rectilíneos AD, BD y AB.



4. En la parte izquierda de la pantalla tienes la vista algebraica. Verifica las longitudes de los segmentos para que verifiques las condiciones del lugar geométrico. En este caso d_{ab} =3, d_{AD}=3.04, d_{BD}=2.23.
La suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano siempre es igual a una constante d_{AD}= 3.04 + d_{BD}=2.23 =5.27, mayor que la distancia entre los dos puntos 5.27>3 si movemos el punto D con la opción elige y mueve.



Volvemos a revisar la vista algebraica
Tenemos:
d_{ab} =3, d_{AD}=2.62, d_{BD}=2.65
La suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano siempre es igual a una constante d_{AD}=2.62+ d_{BD}=2.65=5.27
Que coincide con la anterior constante por lo tanto cumple también mayor que la distancia entre los dos puntos 5.27>3
Sigue moviendo el punto D y comprueba las condiciones que nos dan el lugar geométrico de la Elipse.

Secuencia didáctica 8. Evaluación Diagnóstica.		
Fase de Inicio.	Aplicación. Desarrolla los siguientes productos:	
	$(4x-y)(5x-2y)=$	$(x-4y)(y+2x)=$
	$\left(2x+\frac{4}{3}\right)^2=$	$\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=$
	$(6x-7)^2=$	$\left(\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}\right)^2=$
	Contesta lo siguiente:	
	Si los catetos de un triángulo rectángulo miden respectivamente 4 y 5 unidades cuánto mide la hipotenusa: ____________________.	Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 15 unidades y uno de sus catetos 8 unidades, cuánto mide el segundo cateto: ___________.

	Trigonometría.	
	Cuál es el valor de la tangente de 30°:_____________. Cuál es el valor del ángulo β si: a) su tangente es 0.451, b) si su tangente es igual a 0, c) si su tangente es igual a: -1.58.	
	Completar el trinomio cuadrado perfecto.	
	$y^2 - 4y$	$x^2 + 5x$
	$3x^2 + 9x$	$4y^2 - 6y$
Fase de Desarrollo.	Revisión por todo el grupo del examen diagnóstico	
Fase de Cierre.	Trabajo de las dificultades detectadas en el salón de clases con los alumnos y profesor Desarrollar el producto (x-3)(x+4). $(x-3)(x+4)= x^2$ $(x-3)(x+4)= x^2 + 4x$ $(x-3)(x+4)= x^2 + 4x -3x$ $(x-3)(x+4)= x^2 + 4x -3x -12$ **Términos semejantes** $(x-3)(x+4)= x^2 + 4x -3x -12$ **Finalmente:** $(x-3)(x+4)= x^2 + x -12$ Realiza los siguientes productos:	

a) (5x-3) (x+1) =
b) (x-6) (4y-2) =
c) (3y+2) (5z-1) =
d) (3z+3) (2z-4) =

Binomio cuadrado:

$(x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3)$

$(x - 3)(x - 3) = x^2$

$(x - 3)(x - 3) = x^2 \; -3x$

$(x - 3)(x - 3) = x^2 \; -3x \; -3x$

$(x - 3)(x - 3) = x^2 \; -3x \; -3x \; +9$

Términos semejantes

$(x - 3)(x - 3) = x^2 \; -3x \; -3x$

Finalmente:

$(x - 3)(x - 3) = x^2 \; -6x \; +9$

a) $(y+3)^2 =$
b) $(2x+3)^2 =$
c) $(3x-2)^2 =$

Resuelve completando el trinomio cuadrado perfecto:

$a)\; x^2 - 8x = 9$

$x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 9 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$

$(x-4)^2 = 9+16$

$(x-4)^2 - 25 = 0$

$b)\ \sqrt{(x-4)^2} = \sqrt{25}$

$(x-4) = \pm 5$

$x_1 = 5 + 4 = 9$

$x_2 = -5 + 4 = -1$

$c)\ 5x^2 + 4x - 21 = 0$

$x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{21}{5} = 0$

$x^2 + \frac{4}{5}x + \left(\frac{4}{10}\right)^2 = \frac{21}{5} + \left(\frac{4}{10}\right)^2$

$\left(x + \frac{4}{10}\right)^2 = \frac{21}{5} + \frac{16}{100}$

$\left(x + \frac{4}{10}\right)^2 = \frac{21}{5} + \frac{4}{25}$

$\left(x + \frac{4}{10}\right)^2 - 1 = 0;\ \sqrt{\left(x + \frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{1}\ ;\ x = -\frac{2}{5} \pm 1\ ;$

Repasar el teorema de Pitágoras y concepto de semejanza.
Menciona el teorema de Pitágoras:________________________________

____.

Menciona los criterios de Semejanza de triángulos:

____.

____.___

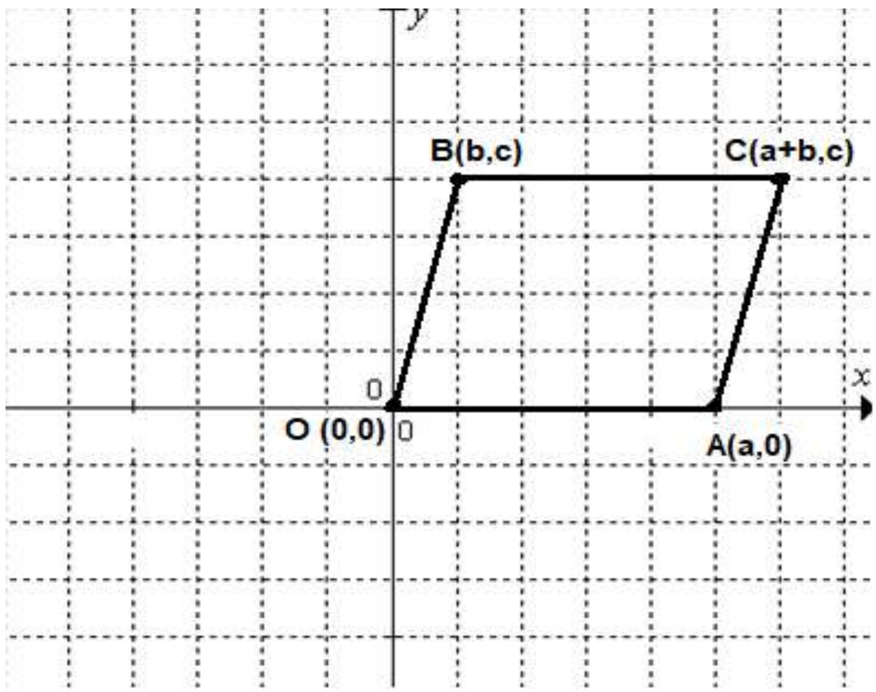
____.

5. Proyecto de Trabajo.

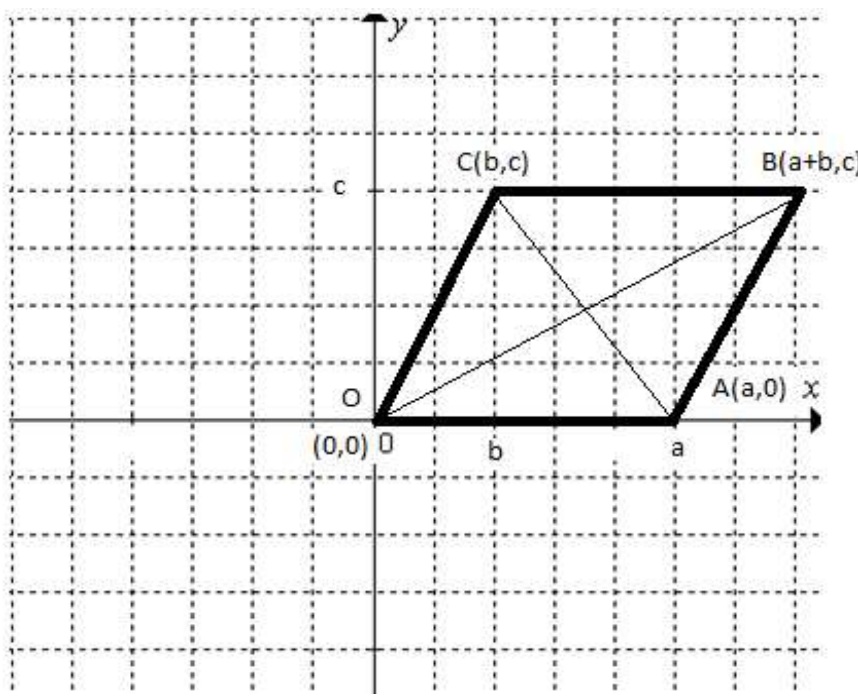
En esta sección los alumnos en equipos de tres integrantes podrán realizar las demostraciones de varios teoremas de la Geometría elemental, por los métodos de Geometría Analítica, para esto debemos utilizar el Plano Cartesiano, construir una figura en él, de tal manera que las coordenadas de los puntos de la figura faciliten lo más posible los cálculos algebraicos, es importante utilizar letras en lugar de números, para generalizar la demostración y evitar particularizar.

1. Demostrar que las rectas que unen los puntos medios de los lados de un de los lados sucesivos de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo

Colocamos el cuadrilátero en un plano cartesiano y uno de los vértices en el origen (0,0).



2. Demostrar analíticamente que, si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares entre sí, el paralelogramo es un rombo.



6. Materiales de Apoyo.

Secuencia 2. Segmento rectilíneo en el plano cartesiano.

1. Dos vértices de un cuadrado son (2,2) y (2, 4). ¿Cuáles son los otros pares posibles de vértices?
2. Un circunferencia con centro C(-2 , 6) pasa por el punto A(1 , 3). Encuentra las coordenadas del otro extremo B, para que AB sea un diámetro

Secuencia 3. Obtención analítica de los elementos asociados a un segmento en el plano cartesiano. Longitud de un segmento.

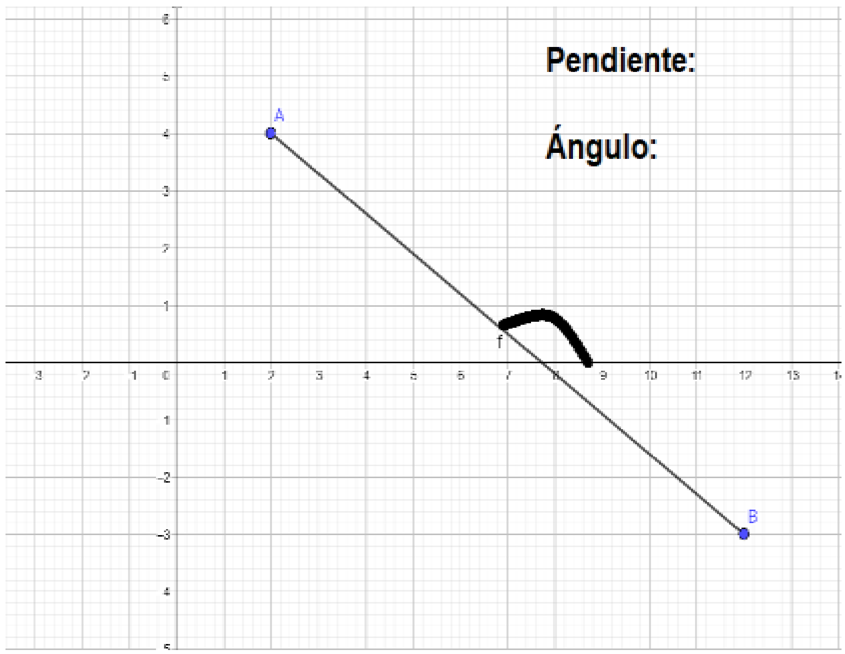
3. Determine la longitud del segmento rectilíneo con extremos en:

- A (2,3) y B (-2,-5)
- A (-4,6) y B (2,7)
- A (-1,3) y B (5,-1)
- A (7,9) y B (-8, 3)
- A (0,3) y B (5,0)

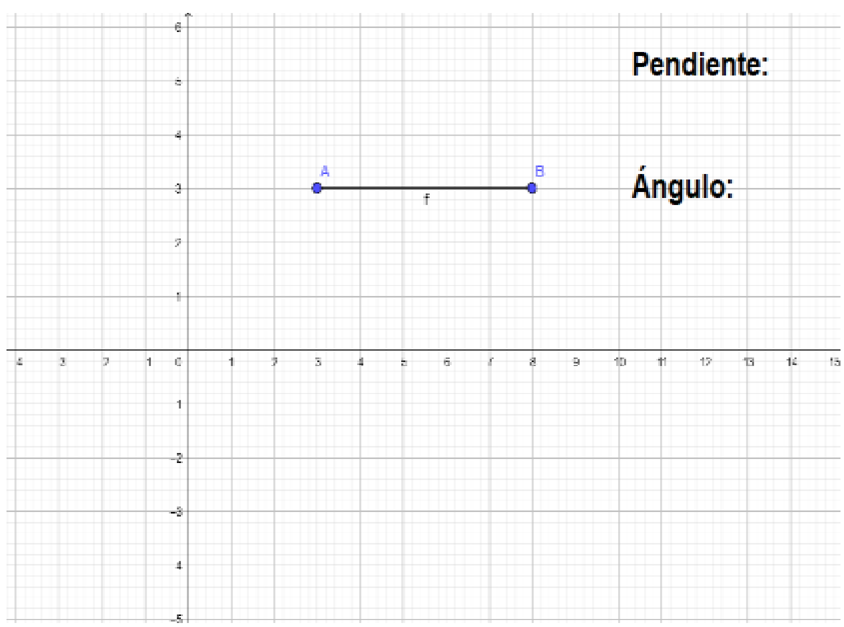
Secuencia 4. Ángulo de inclinación y pendiente.

4. Determina la pendiente del segmente de recta cuyo ángulo es de 160°.
5. Determina la pendiente del segmente de recta cuyo ángulo es de 120°.
6. Determina el ángulo de inclinación del segmento de recta cuya pendiente es 3.
7. Determina el ángulo de inclinación del segmento de recta cuya pendiente es 1.5.
8. Determina el ángulo de inclinación del segmento de recta cuya pendiente es -2.
9. Determina el ángulo de inclinación del segmento de recta cuya pendiente es $\frac{-3}{2}$.
10. Determina el ángulo de inclinación del segmento de recta cuya pendiente es 3.
11. Determina el ángulo de inclinación del segmento de recta cuya pendiente es $\frac{4}{5}$.
12. Encuentra la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos A(-3,5) y B(7, 6).

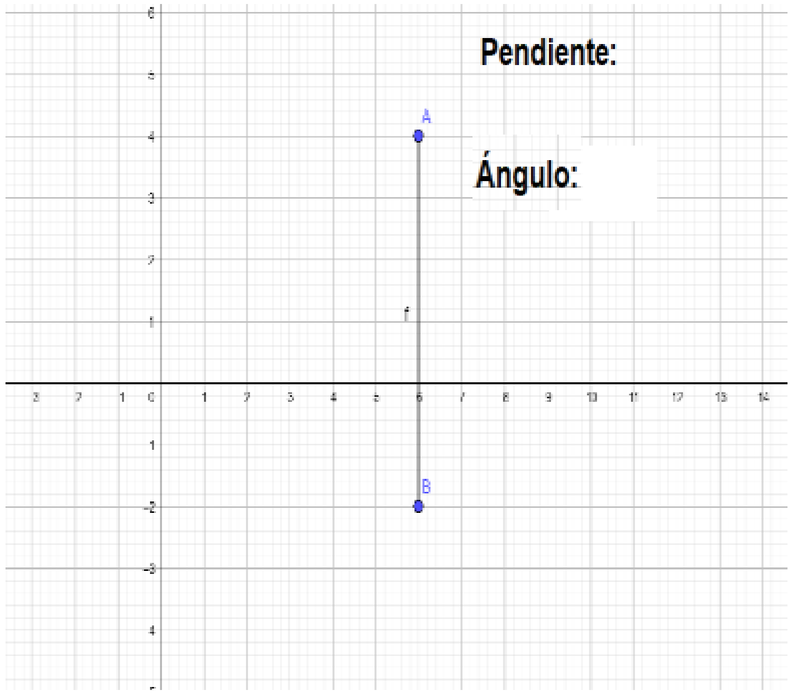
13. Determina la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos A(4,-6) y B(1, -3).
14. Determina la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos A(0, 5) y B(0, 10).
15. Determina la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos A(-3,0) y B(7, 0).
16. Determina:



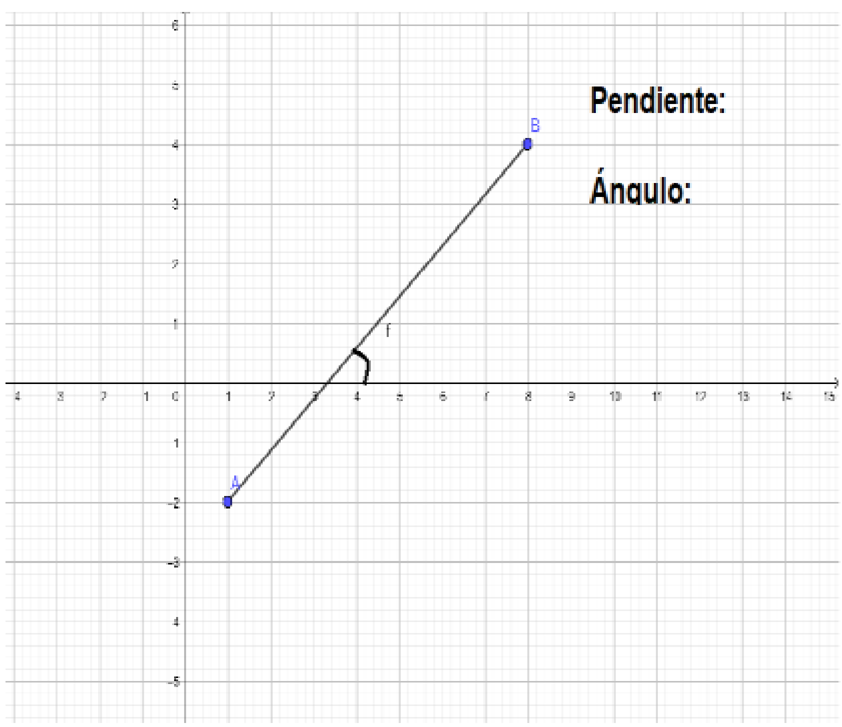
17. Determina:



18. Determina:



19. Determina:



20. Si la pendiente de la recta AB es -3/2 y las coordenadas de A son (-3,6), encuentra el valor de y si B(8, y).

21. La pendiente del segmento AB es 1/4. Si A(3,-3) y B(x,5), encuentra el valor de “x”.
22. ¿Cuánto mide el ángulo de inclinación del segmento que tiene por extremos los puntos A (-1,-4) y B(-5,3)?
23. ¿Cuánto mide los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son A(2,6), B(-3,-1) y C(4,-5)?

Secuencia 5. Localiza un segmento dadas condiciones necesarias y suficientes distintas a su determinación por puntos extremos.

24. Un segmento rectilíneo vertical tiene uno de sus extremos en A (5,5) y mide 6 unidades, determinar las coordenadas de los otros extremos posibles.
25. Un segmento rectilíneo horizontal tiene uno de sus extremos en A(1,2) y mide 4 unidades, determinar las coordenadas de los otros extremos posibles.

Secuencia 6. División de un segmento.

26. Encuentra las coordenadas de puntos medios de los lados del siguiente triángulo A(3,2), B(-1,-4) y C(5,1).
27. Si las coordenadas del punto medio del segmento AB son M (2 ,-1), donde las coordenadas de B son (-3,3). Encuentra las coordenadas del punto A.
28. Si las coordenadas del punto medio del segmento AB, son M(6,1), donde las coordenadas de A (2,5). Encuentre las coordenadas del punto B.
29. Los extremos de un segmento son los puntos A(-1,-3) y B(2,4), encuentra las coordenadas del punto C que dividen segmento AB en la razón $r = \frac{1}{3}$.
30. El punto A(-2,5) es un extremo del segmento AB, encuentra las coordenadas del extremo B, si el punto C(3,-2) divide al segmento AB en la razón $r = \frac{1}{4}$.
31. Si A(-4,2) y B(4,6) son los puntos extremos del segmento AB, la razón r en el punto C(2,5) divide al segmento es:

Secuencia 7. Lugar geométrico.

Determina el lugar geométrico de:

32. Todos los puntos que están a 5 unidades del origen.
33. Todos los puntos que está en a 10 unidades del origen.

34. Todos los puntos que están las 7 unidades del punto A(2,1).
35. Todos los puntos que están a 9 unidades del punto A(2,0).
36. Todos los puntos que están a la misma distancia del punto A(5,0) y del eje y.
37. Todos los puntos que equidistan del punto C(0,3) y de la recta x=5.
38. Todos los puntos que equidistan del punto C(4,0) y de la recta y=2.

Secuencia 8. Dificultades (Antecedentes).

39. Resolver:

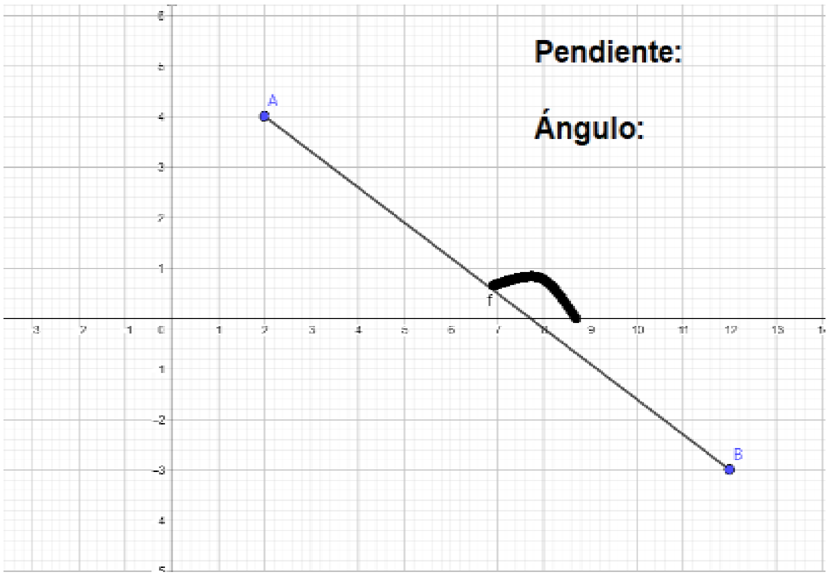
a) (4x+2)(3x-1)=
b) (2x-3)(x-5)=
c) $(7x-5)^2$=
d) $(7x-5)^2$=
e) $(7x-5)^2$=

40. Completar el trinomio cuadrado perfecto
    a. $y^2-3y=$
    b. $5x^2-4x=$

6. Examen de autoevaluación.

1. Determine la longitud del segmento rectilíneo con extremos en: A (-2,-3) y B (2,5).
2. Determina el ángulo de inclinación del segmento de recta cuya pendiente es 2.5.
3. Un circunferencia con centro C (-1, 6) pasa por el punto A(2 , 3). Encuentra las coordenadas del otro extremo B, para que AB sea un diámetro.

4. La pendiente del segmento AB es 1/4. Si A (4,-3) y B(x,5), encuentra el valor de "x".
5. Determina la pendiente y el ángulo de inclinación de la siguiente figura.



Respuestas a los ejercicios.

1.	(4,2), (4,4) y (0,2),(0,4)
2.	(-5,9)
3.	a)$\sqrt{80}$, b) $\sqrt{37}$, c) $\sqrt{52}$, d) $\sqrt{261}$,e) $\sqrt{34}$
4.	m=-0.36397
5.	m=-1.73205
6.	α =71.565°
7.	α =56.3099°
8.	α =-63.4349°
9.	α =-56.3099°
10.	α =-71.56°
11.	α =38.6598°
12.	m=$\frac{1}{10}$, 5.71059°
13.	m=1, -45°

14.	m= indeterminada, 90°
15.	m=0, 0°
16.	m=$\frac{-7}{10}$, -34.99°
17.	m=0, α =0°
18.	m= indeterminada, α =90°
19.	m=$\frac{6}{7}$, α =40.60°
20.	y=$\frac{-21}{2}$
21.	X=35
22.	α =119.744°
23.	45.84°, 84.20°, 49.95°
24.	(5,11) y (5,-1)
25.	(5,2) y (-3,2)
26.	AB punto medio (1,-1) CA punto medio $\left(4,\frac{3}{2}\right)$ BC punto medio $\left(2,\frac{-3}{2}\right)$
27.	A (7,-5)
28.	B (10,3)
29.	C$\left(\frac{-1}{4},\frac{-5}{4}\right)$
30.	B$\left(\frac{17}{4},\frac{-15}{4}\right)$
31.	r= 3
32.	$x^2+y^2=25$
33.	$x^2+y^2=100$
34.	$(x-2)^2+(y-1)^2=49$
35.	$(x-2)^2+y^2=81$

36.	$y^2 - 12x + 36 = 0$
37.	$y^2 - 6x + 12x - 27 = 0$
38.	$x^2 - 8x - 4y + 20 = 0$
39.	$12x^2 + 2x - 2$ $2x^2 - 13x + 15$ $49x^2 - 70x + 25$ $36x^2 + 48x + 16$ $4x^2 - 4x + 1$
40.	$\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ $\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{25}$

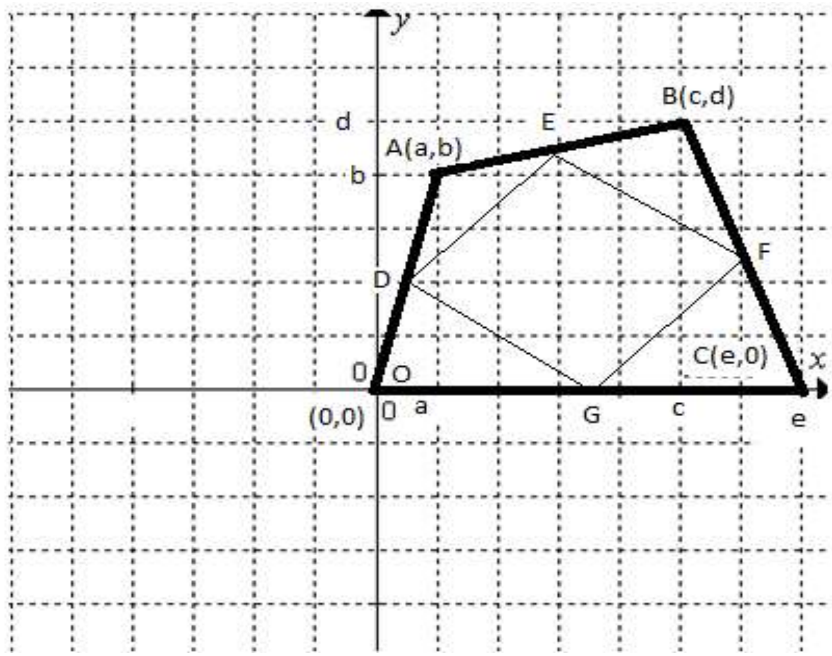
- **Respuesta al examen de autoevaluación.**

1.	$\sqrt{80}$
2.	68.198°
3.	(-4,9)
4.	x=36
5.	$m = \frac{-7}{10}$, α=-34.99°

- **Respuesta a los ejercicios de proyecto de trabajo.**

Demostrar Analíticamente que:

1. Demostrar que las rectas que unen los puntos medios de los lados de un de los lados sucesivos de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo



Las coordenadas de los puntos medios son:

D: $\left(\frac{0+a}{2}, \frac{0+b}{2}\right), o\ sea\ \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

E: $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$

F: $\left(\frac{c+e}{2}, \frac{d+0}{2}\right), o\ sea\ \left(\frac{c+e}{2}, \frac{d}{2}\right)$

G: $\left(\frac{0+e}{2}, \frac{0+0}{2}\right), o\ sea\ \left(\frac{e}{2}, 0\right)$

Obteniendo las pendientes

Pendiente de DE=$\frac{\frac{b}{2}-\frac{b+d}{2}}{\frac{a}{2}-\frac{a+c}{2}} = \frac{d}{c}$;

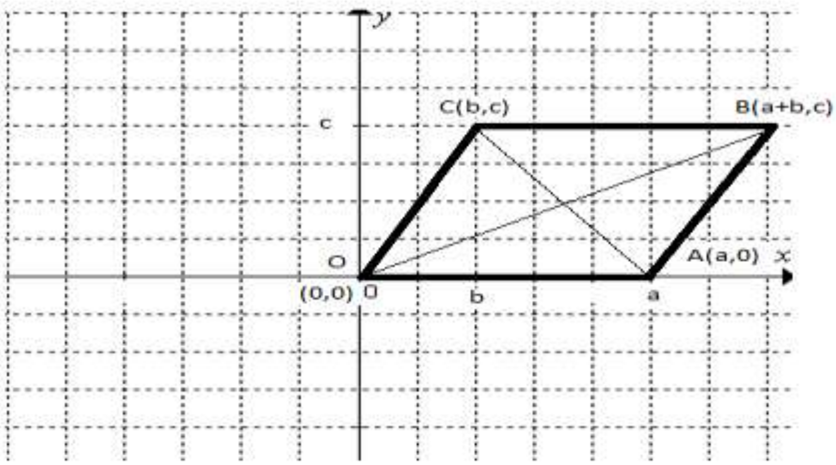
Pendiente de EF=$\frac{\frac{b+d}{2}-\frac{d}{2}}{\frac{a+c}{2}-\frac{a+e}{2}} = \frac{b}{a-e}$;

Pendiente de FG=$\frac{\frac{d}{2}-0}{\frac{c+e}{2}-\frac{e}{2}} = \frac{d}{c}$;

Pendiente de GD=$\frac{\frac{b}{2}-0}{\frac{a}{2}-\frac{e}{2}} = \frac{b}{a-e}$,

Como podemos observar son idénticas las pendientes DE y FG, estos lados son paralelos, análogamente los lados EF y DG son paralelos. Recordando tus clases de matemáticas 2, la figura DEFG es un paralelogramo.

2. Demostrar que sí, las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares entre sí, el paralelogramo es un rombo.



Si las diagonales OB y AC son perpendiculares entre sí, cumplen con que sus pendientes m1 para OB y m2 para AC: (m1)(m2)=-1.
En nuestro caso:

$$\left(\frac{c}{a+b}\right)\left(\frac{c}{b-a}\right)=-1$$

De donde:
$c^2=a^2-b^2$, y $\quad a=\sqrt{b^2+c^2}$
a es la longitud del lado OA y $\sqrt{b^2+c^2}$ es la longitud del lado OC. Por ser iguales dos lados adyacentes de OABC el paralelogramo es un rombo. Recuerda matemáticas 2, para las dos demostraciones.

7. Bibliografía Básica.

Gómez, P. (2016). *Matemáticas 3*. México: CCH Oriente. UNAM.
Mejía, M. et al. (2011). *Guía para el Profesor de Matemáticas III.* Colegio de Ciencias y Humanidades, Plantel Oriente.
Lehmann, Ch. (1980). *Geometría Analítica.* Editorial Limusa.
[3]Taylor, W. (2009). *Geometría Analítica Bidimensional.* México: Limusa.

Bibliografía Virtual. Sitios consultados:

http://dcb.fi-c.unam.mx/CoordinacionesAcademicas/Matematicas/CapsulasAntecedentes/lugargeometrico.pdf

[3] Los problemas como su solución se obtuvieron de: Lehmann, Ch. (1980). *Geometría Analítica.* Editorial Limusa.

UNIDAD 3. La Recta y su Ecuación Cartesiana	MATEMÁTICAS III.

Propósito:
Al finalizar el alumno:
Será capaz de obtener la ecuación cartesiana de la recta, dados diversos elementos definitorios. Resolverá problemas geométricos en diversos contextos, a fin de que se avance en la comprensión del método analítico. **Tiempo: 20 horas.**

1. Presentación de la Unidad 3.

En esta unidad estudiaremos a la línea recta, que es un lugar geométrico, que es muy útil, por ejemplo, nos ayuda a estudiar la variación directamente proporcional, así como la variación lineal, estudiaremos las diversas ecuaciones de una recta, y las diferentes posiciones relativas de un par de rectas.
La imagen de la derecha nos muestra primero un resorte en reposo y mediante una regleta podemos determinar su longitud, en la imagen de la derecha se ha colocado un peso y el resorte se estira proporcionalmente al peso colocado y la función que describe el fenómeno es de la forma. $F(x) = K * x$.

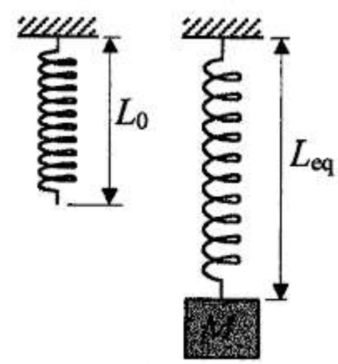
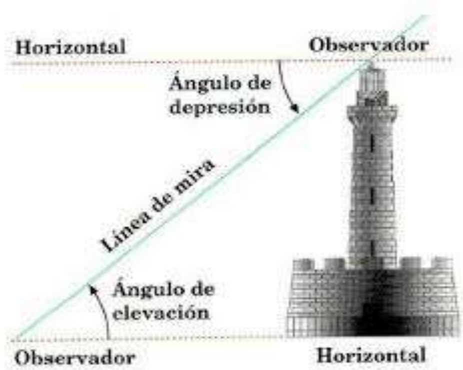


Imagen. Resorte

Misma que podemos relacionar con la ecuación de la recta de la forma. $y = K * x$, la línea recta también tiene aplicaciones en la trigonometría (a), ya que dependiendo del observador y usando como base una recta horizontal se determina el ángulo de elevación o depresión de la línea de mira (o visión), que es una línea recta. También podemos observar su uso en la construcción de casas, ya que el albañil usa el nivel para poner los ladrillos horizontales (b). El uso de la plomada para construir una pared vertical (c), mientras que en la construcción de una escalera, también hay rectas inclinadas (d). La posición relativa de dos líneas de ladrillos ilustra el concepto de rectas paralelas. La dirección de la pared respecto al piso ilustra el concepto de rectas perpendiculares y la escalera de una recta oblicua.

(a) Ángulo de depresión.



(b) Construcción de un muro.

(c) Uso de la plomada.

(d) Construcción de una escalera.

La ecuación de la recta también aparece en problemas como el siguiente. A Patricia le llego la factura del gas y quiere revisar, como lo hace habitualmente, el cálculo del importe que debe pagar. Observando los importes anteriores sabe que le cobran un cargo fijo de \$ 9.60[4] además de \$ 0.14 por cada metro cúbico de gas consumido. Estos valores incluyen IVA.
Por lo que el pago depende de los metros cúbicos de gas que consumió y se puede describir por medio de una función lineal de la forma, $f(x) = 9.6 + 0.14x$, que tiene asociada la ecuación lineal: $y = 9.6 + 0.14x$.

Los problemas que se pueden presentar durante el desarrollo de la unidad son los siguientes:

- Despeje de una variable de una ecuación.
- Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Tabulación y graficación de una ecuación.
- Sacar la inversa de la tangente para ángulos entre 90° y 180°.
- Obtener el inverso multiplicativo de una fracción.

[4] Mismo que varía dependiendo la zona.

Ya que durante el desarrollo de la unidad, hay que tener presente lo que se trabajó en la unidad anterior, a saber el concepto de pendiente, los lugares geométricos, distancia entre dos puntos entre otros, así que se propone el siguiente examen de diagnóstico como introducción de esa unidad, con la finalidad de ir paleando las deficiencias de los alumnos a lo largo del desarrollo de esta unidad didáctica.

Evaluación Diagnóstica.

1. De la siguiente ecuación $2x + 3y - 7 = 0$, despeja la variable y.
2. Encuentra el punto de intersección de las siguientes rectas cuyas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} 5x + 4y &= -7 \\ -3x + 2y &= 13 \end{aligned}$$

3. Despeja y de la siguiente ecuación $3x + 4y + 6 = 0$, completa la siguiente tabla de valores y localiza los puntos obtenidos en el plano de coordenadas e indica de qué tipo de curva es.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y									

4. Encuentra $\tan^{-1}(\alpha)$ para los ángulos mostrados en la siguiente tabla.

α	45°	60°	120°	135°
$\tan^{-1}(\alpha)$				

5. Obtén el inverso multiplicativo de las fracciones indicadas en la siguiente tabla.

$\frac{3}{5}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{3}{7}$

El examen debe ser resuelto en el pizarrón por los alumnos en clase después de haberles dado 30 minutos para resolverlo, para que corrijan sus errores.

2. Estrategias Didácticas.

Los diversas actividades de la unidad 3, se presentaran utilizando *secuencias didácticas*, con el propósito de posibilitar un mejor aprendizaje, o sea, un aprendizaje que fuese adquiriendo un significado propio en los procesos prácticos cercanos a los estudiantes, con vistas a alcanzar los objetivos actitudinales, conceptuales y procedimentales expuestos en cada secuencia didáctica, específicamente, aquellos que atañen a esta unidad temática. Al respecto, cabe señalar que los estudiantes tienen mejor comprensión cuando los contenidos se tratan en *su contexto* y, más todavía, si ese aprendizaje es significativo [Ausubel. D. et al., 1983]. Por ello, en el diseño de las experiencias didácticas aquí expuestas, se tuvo que permitir una relación intencionada (no arbitraria) y sustancial (no al pie de la letra) con los conocimientos e ideas del alumno, pues el individuo debe desarrollar una serie de estrategias que le permitan adquirir un conocimiento, colocarlo en su lenguaje y saber manejarlo cuando sea necesario. La eficiencia de este aprendizaje, si es que se puede hablar de algo así, se encuentra en función de su *significatividad*, no de las técnicas memorísticas, lo cual es acorde con las ideas sobre el aprendizaje bajo un enfoque constructivista. Por ello es que sustentamos esta propuesta en las perspectivas del aprendizaje constructivista y colaborativo, así como en el empleo de la computadora como herramienta para lograr aprendizajes significativos.

La forma más práctica para llevar a cabo esta unidad didáctica, es a través de secuencias didácticas en el caso que nos ocupa, a saber, el aprender y enseñar matemáticas, es a través de estas como el estudiante adquiere de forma significativa el aprendizaje que le toca. Por sí solas, las secuencias didácticas no constituyen todo el trabajo, sino que están enmarcadas dentro de la organización, contexto y recursos empleados para su efectivo uso en el aprendizaje.

3. Actividades de Enseñanza Aprendizaje.

Los propósitos de esta unidad didáctica, es ir reafirmando el conocimiento del método de la Geometría Analítica, al obtener la ecuación de una recta y avanzar en la solución analítica de problemas que involucren relaciones entre las figuras rectilíneas estudiadas en Geometría Euclidiana. Para realizar esto, el alumno deberá ir desarrollando de las siguientes estrategias didácticas.

- Explorará, en una situación o problema donde los estudiantes volteen a su entorno y distingan fenómenos lineales en diferentes ramas de la ciencia (fenómenos físicos como la ley de Hooke, Ohm, entre otras, el cambio de divisas o la conversión de unidades de °C a °F y viceversa, etcétera), que dé lugar a una ecuación lineal, valores, condiciones, relaciones y comportamientos, a través de tablas, diagramas, etcétera, que le permitan obtener información del problema, como un paso previo a establecer la representación algebraica.

- Diferenciará dos tipos de variación fundamentales (lineal y cuadrática).
- Obtendrá el modelo de la *ecuación lineal* en una situación dada.
- Diferenciará entre una ecuación lineal y una función lineal.
- Dará significado al papel que juega los parámetros $m\ y\ b,$ en la forma reducida $y = mx + b$.
- Dará significado al papel que juega los parámetros $A, B\ y\ C,$ en la forma general $Ax + By + C = 0$.
- Dará significado al papel que juega los parámetros $a\ y\ \ b,$ en la forma simétrica $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.
- Determinará cundo dos rectas son paralelas y/o perpendiculares a través de las expresiones: $m_1 = m_2$ y $m_1 * m_2 = -1,$ respectivamente.
- Resolverá problemas sencillos del mundo físico: Ley de Hooke, de televisión, puentes colgantes, antenas de satélite, arcos de puentes, micrófonos reflectores, recolectores de calor solar, etcétera, e interpretará el comportamiento de la gráfica dentro del contexto de una situación dada.

Además también se puede establecer la ecuación de una recta, atendiendo algunos otros ejemplos de la matemática, como se exponen en la puesta en escena de los aprendizajes a desarrollar.

4. Conceptos Clave.

Lugar Geométrico, pendiente, parámetros, paralela, perpendicular, ordenada y abscisa al origen, puntos colineales.

5. Puesta en Escena de los Aprendizajes por Desarrollar.

Aprendizajes. Al realizar las secuencias didácticas expuestas en este apartado y los proyectos de trabajo, el alumno:

- Describe a la recta como un lugar geométrico, identificando los elementos que la definen.
- Entiende a la pendiente de una recta, como una invariante.
- Obtiene la ecuación de una recta, dadas dos condiciones.
- Determina el ángulo que se forma cuando dos rectas se cortan, en términos de sus pendientes.
- Determina cuando dos rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos, a partir de sus ecuaciones.
- Dada la ecuación de una recta el alumno es capaz de encontrar las ecuaciones de rectas paralelas y/o perpendiculares a ella.
- Identifica y transita en las diferentes formas la ecuación de la recta (ordinaria o canónica, general y simétrica.
- Resuelve problemas de corte euclidiano usando geometría analítica.

Secuencia Didáctica 1. Problemas Introductorios a la Recta y su Ecuación Cartesiana. Parte 1.

Aprendizaje. Dada una ecuación lineal con dos variables, la identifica con una línea recta y viceversa.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Reconozca distintas formas de representación de la recta a través de un problema en contexto.
Procedimentales:	• A partir de un problema pueda determinar alguna de las formas de la recta para su estudio. • Transite a otras formas de la recta.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Participa en el trabajo.

Fase de Inicio.	**Problema 1.** Se tiene un tinaco con capacidad de 500 litros, que tiene 100 litros de agua, el cual se llena con una bomba que proporciona 40 litros por minuto, con esta información realiza las siguientes actividades.
Fase de Desarrollo.	1. Completa la siguiente tabla para conocer la cantidad de agua en el tinaco en los tiempos indicados. (tabla abajo)

Tiempo en Minutos (x)	Volumen de agua en litros (y)
0	
1	
2	
3	
4	
5	

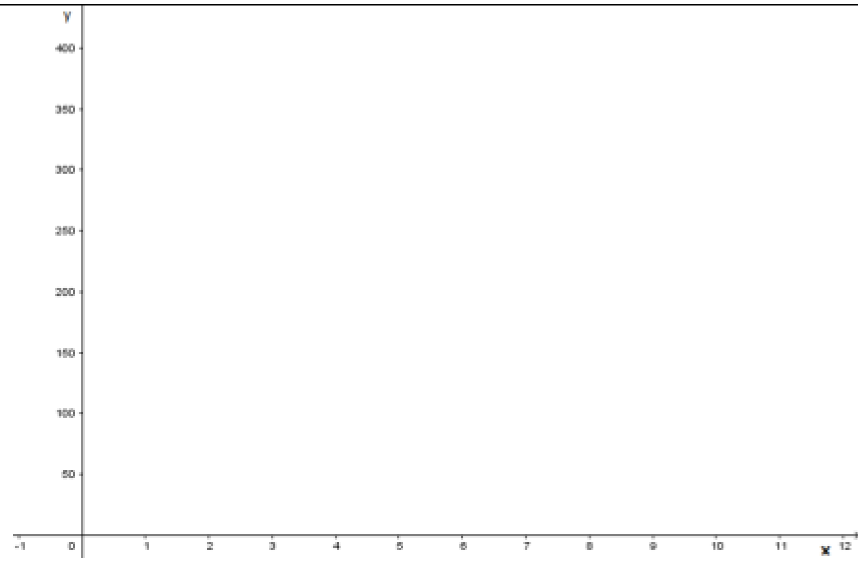
2. ¿Cuáles son las variables del problema? ___________________________.

3. Escribe la expresión que permite calcular la cantidad de agua en el tinaco después de x minutos: ____ ¿El exponente de cada una de las variables es? _______________________.

4. Considerando el exponente de las variables la expresión algebraica que representa el problema es:___________________________________.

5. Calcula el tiempo que tarda el tinaco en llenarse:_________________ ____.

6. Grafica los puntos obtenidos en el siguiente sistema de coordenadas, considera el tiempo que tarda en llenarse el tinaco para completar los puntos que falten.

	
Fase de Cierre.	Escribe las ecuaciones que utilizaste para resolver los problemas anteriores: a) ____________________________. b) ____________________________. El grado de los exponentes de las variables en ambas ecuaciones es: ______________________. De acuerdo a esto ambas ecuaciones son: ____.

Secuencia Didáctica 2. Problemas Introductorios a la Recta y su Ecuación Cartesiana. Parte 2.

Aprendizaje. Dada una ecuación lineal con dos variables, la identifica con una línea recta y viceversa.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Identifica como recta a una ecuación de primer grado con una o dos variables y viceversa.
Procedimentales:	• A partir de un problema pueda determinar alguna de las formas de la recta para su estudio. • Transite a otras formas de la recta.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Fase de Inicio.	**Problema 2.** Consideremos la siguiente ecuación: $2x - y + 4 = 0$.
Fase de Desarrollo.	Indica cuántas variables tiene la ecuación: _____________, ¿Cuáles son? ______________________. El grado de la ecuación de acuerdo a los exponentes de las variables

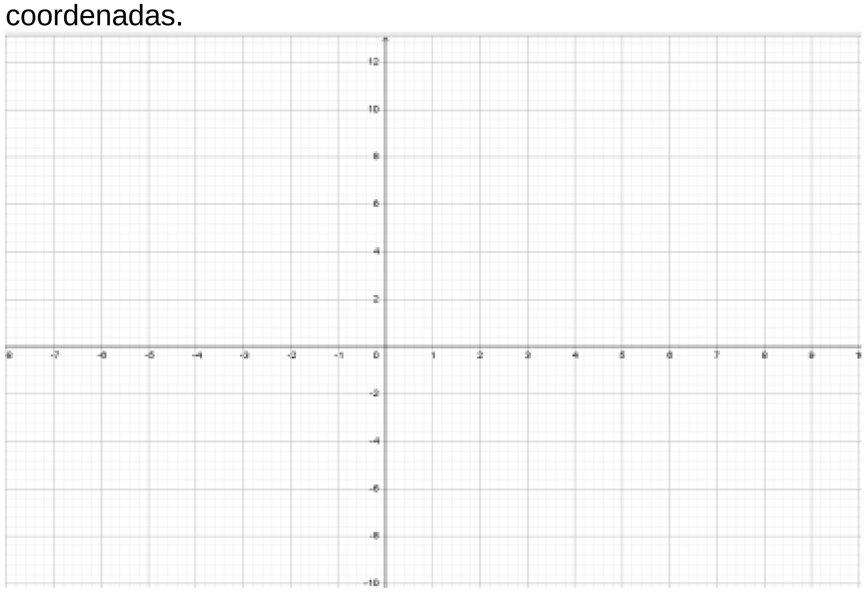
es: ___________________.

Para trazar la gráfica de la ecuación despeja la variable y = __________.

Observa, que al despejar la variable y, sus valores dependen de los valores que tome la variable x, considerando esto completa la siguiente tabla de valores.

x	y
-5	
-4	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	
5	

Localiza los puntos de la tabla anterior en el siguiente sistema de coordenadas.



Fase de Cierre.

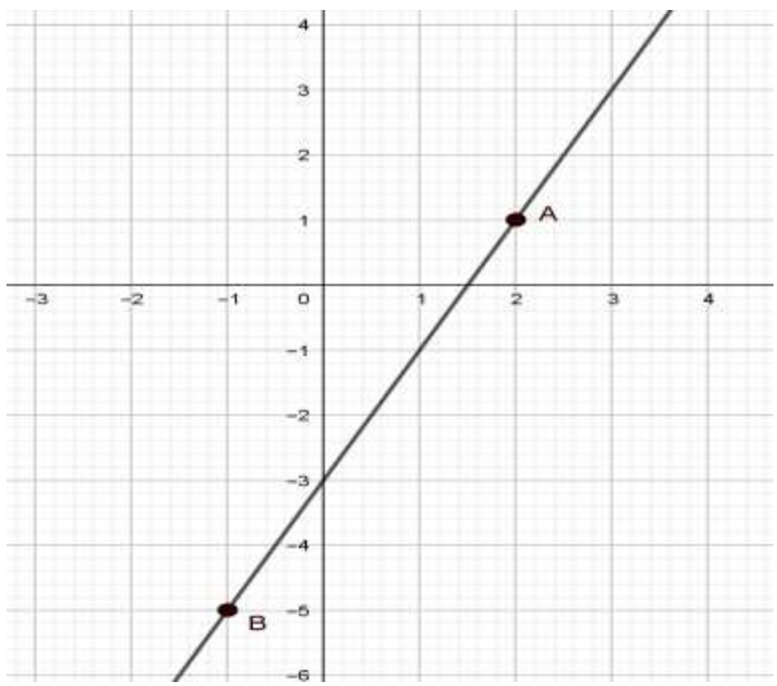
La gráfica que se obtiene es una: _________________________

Recuerda que una función lineal, es de la forma, $f(x) = mx + b$.
Y que su gráfica es una recta. A la gráfica le podemos asociar la ecuación $y = mx + b$, como veremos en el siguiente problema.

Secuencia Didáctica 3. Problemas Introductorios a la Recta y su Ecuación Cartesiana. Parte 3.

Aprendizaje. Dada una ecuación lineal con dos variables, la identifica con una línea recta y viceversa.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Identifica como recta a una ecuación de primer grado con una o dos variables y viceversa.
Procedimentales:	• A partir de un problema pueda determinar alguna de las formas de la recta para su estudio. • Transite a otras formas de la recta.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Fase de Inicio.	**Problema 3.** Considera la gráfica de la recta que se muestra en la siguiente figura. 
Fase de Desarrollo.	Observa que la gráfica pasa por los puntos A (2, 1) y B (-1, -5), como puedes observar es una recta cuya ecuación es de la forma $y = mx + b$, de manera que constituyendo las coordenadas de cada punto en dicha ecuación tenemos el siguiente sistema lineal de dos ecuaciones. $1 = 2m + b$ ec.1 $-5 = -m + b$ ec.2

	Si restas las ecuaciones obtienes, $6 = 3m$, de donde m = ______________. Sustituyendo $m = 2$ en la ecuación 1 tenemos 1 = 2(2) + b, de donde b = ________________. Y la ecuación de la recta es: _______________________________ Comprueba que las coordenadas de los puntos A (1, -1) y (0, -3) que pertenecen a la gráfica satisfacen su ecuación.
Fase de Cierre.	Ejercicios: 1. Encuentra la gráfica de la ecuación 3x – 5y + 10 = 0, e indica que tipo de curva es: 2. Encuentra la gráfica de la recta que pasa por los puntos S (-2, -5) y E(1, -2), luego comprueba que los puntos M(-4, -7) y C(5, 2) están sobre la gráfica y satisfacen la ecuación encontrada.

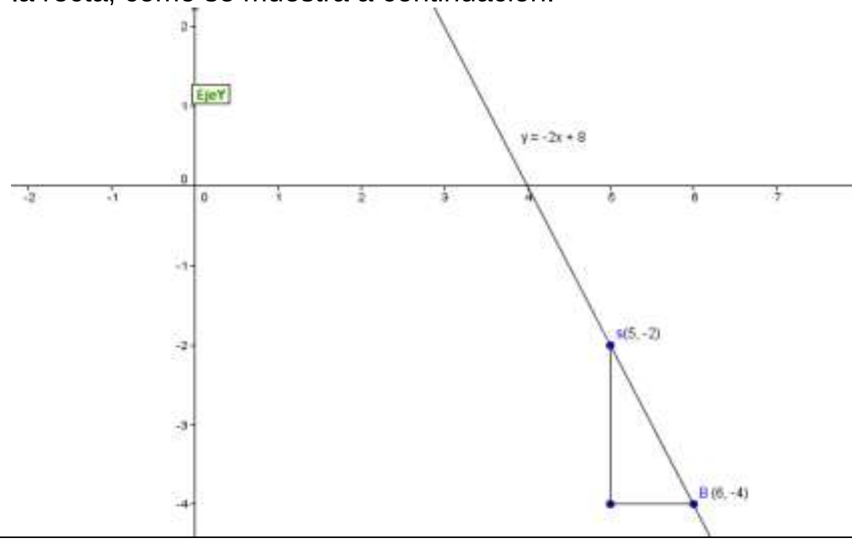
Secuencia Didáctica 4. La Recta y su Ecuación Cartesiana (forma punto-pendiente).

Aprendizaje. Encuentra la ecuación de la recta dados sus distintos elementos que la definen.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Reconoce distintas formas de la recta (forma punto-pendiente).
Procedimentales:	• A partir de un problema pueda determinar alguna de las formas de la recta para su estudio. • Transite a otras formas de la recta.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Fase de Inicio.	Observación: La ecuación de una recta conocidos las coordenadas de un punto por donde pasa A(x_1 , y_1) y su pendiente m, es: $y – y_1 = m (x – x_1)$. **Problema 1.** Encuentra la ecuación y la gráfica de la recta que pasa por el punto S(5, -2) si su pendiente es m= -2.
Fase de Desarrollo.	Como la recta pasa por el punto S, x_1 =5, y_1= -2 y su pendiente es m=-2, sustituyendo valores en la ecuación. y - ____= - 2 (x- ___) y + 2 = -2x + _____ De donde, y = -2x + 8, la ecuación de la recta es, y = -2x + 8 La pendiente la podemos interpretar como. Incremento de y -2 y = = Incremento de x 1 Para hacer la gráfica primero se localiza el punto S (5, -2) y a partir de

el medimos dos unidades hacia abajo y una a la derecha, el punto localizado pertenece a la recta, por los dos puntos localizados se traza la recta, como se muestra a continuación.



Fase de Cierre.

Ejercicios. En cada caso encuentra la gráfica y la ecuación de la recta conocidas, las coordenadas de un punto por donde y su pendiente.

M(-3, -1), m= - 0.5	C(-5, 2), m = 2	S (7, -1), m = -3	E (6, 1), m = 3/4

Secuencia didáctica 5. La Recta y su Ecuación Cartesiana (forma cartesiana).

Aprendizaje. Encuentra la ecuación de la recta dados sus distintos elementos que la definen.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Reconoce distintas formas de la recta (forma cartesiana o ecuación de la recta que pasa por dos puntos).
Procedimentales:	• A partir de un problema pueda determinar alguna de las formas de la recta para su estudio. • Transite a otras formas de la recta.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Fase de Inicio.

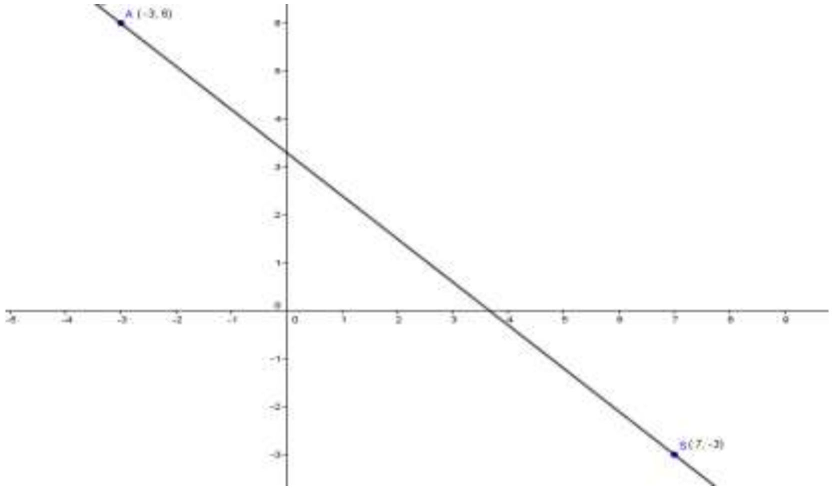
Observación: La ecuación de una recta que pasa por los puntos C (x_1 , y_1) y S(x_2, y_2) es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Problema 2. Encuentra la ecuación y la gráfica de la recta que pasa por los puntos S(7, -3) y A(-3, 6).

Fase de Desarrollo.

Para trazar la gráfica de la recta, primero localiza los puntos en el plano de coordenadas y luego traza la recta que pasa por ellos como se muestra a continuación.



Haciendo x_1=-3, y_1=6, x_2=7, y_2= -3 y sustituyendo valores en la fórmula y haciendo operaciones.

$$y-(\quad\quad)=\left[\frac{(\quad\quad)-6}{7-(\quad\;)}\right]\;[x-(\quad\quad\quad)]$$

$$y-6=\left[\frac{-9}{7-(\quad\;)}\right](x+3)$$

$$y-6=-\frac{9}{10}(x+3)$$

$$y-6=-\frac{9}{10}x-\left[\frac{\quad}{\quad}\right]$$

$$y=-\frac{9}{10}x-\frac{27}{10}+(\quad\quad)$$

$\boldsymbol{y=-\frac{9}{10}x+\frac{33}{10}}$, esta es la ecuación pendiente-ordenada al origen de la recta.

m es la pendiente, ¿Cuál es su valor?_________¿Qué significa?_________.
b es la ordenada al origen, ¿Cuál es su valor?_______¿qué significa?_____
____.

Fase de Cierre.

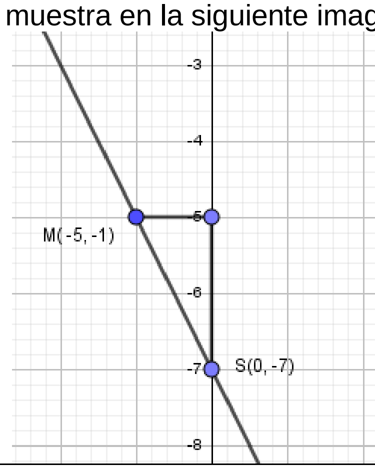
Ejercicios. En cada caso encuentra la gráfica y la ecuación de la recta.

M(3, -1), S(-2, 1)	C(-5, 2), A(4, 7)	S (7, -1), M (-2,2)	E (6, 1), D(-3,-4)

Secuencia didáctica 6. La Recta y su Ecuación Cartesiana (forma pendiente-ordenada al origen).

Aprendizaje. Encuentra la ecuación de la recta dados sus distintos elementos que la definen.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Reconoce distintas formas de la recta (forma pendiente-ordenada al origen).
Procedimentales:	• A partir de un problema pueda determinar alguna de las formas de la recta para su estudio. • Transite a otras formas de la recta.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Fase de Inicio.	Observación: La ecuación de la recta conocida su pendiente m y su ordenada al origen b es: $y = mx + b$ **Problema 3.** Encuentra la gráfica y la ecuación de la recta con m= -2 y ordenada al origen b = - 7.
Fase de Desarrollo.	Sustituyendo m = -2 y b= -7 en la ecuación, y = mx + b. y = ___x + ___ La ordenada al origen es el punto donde la recta corta al eje de las______________ Recordando que la pendiente se puede interpretar como. $m = \dfrac{\text{Incremento de y}}{\text{incremento de x}} = \dfrac{2}{-1} = -2$ A partir del punto S(0, 7) que es donde la recta corta al eje de las ordenadas, nos desplazamos dos unidades hacia arriba y una unidad hacia la izquierda, para llegar al punto M de coordenadas, M(___,___) que también pertenece a la recta, así que la gráfica de la recta pasa por los puntos S y M como se muestra en la siguiente imagen. 

Fase de Cierre.	**Ejercicios.** En cada caso encuentra la ecuación y la gráfica de la recta. m = -1, b = 4 | m = 0.5 , b = 3 | m = -0.75, b = -9 | m = 2, b = -4 **Ejercicios.** a. La ecuación de una recta es -4x + 2y -10 = 0, lleva la ecuación a la forma pendiente ordenada al origen y traza su gráfica. b. Una recta pasas por los puntos S(-1, 2) y M(3, 6) encuentra la ecuación de la recta en su forma pendiente ordenada al origen y traza su gráfica.

m = -1, b = 4	m = 0.5 , b = 3	m = -0.75, b = -9	m = 2, b = -4

Secuencia didáctica 7. La Recta y su Ecuación Cartesiana (recta horizontal).

Aprendizaje. Encuentra la ecuación de la recta dados sus distintos elementos que la definen.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR

Conceptuales:
- Reconoce una recta horizontal.

Procedimentales:
- A partir de un problema pueda definir a una recta como una constante de la forma $y = c$.

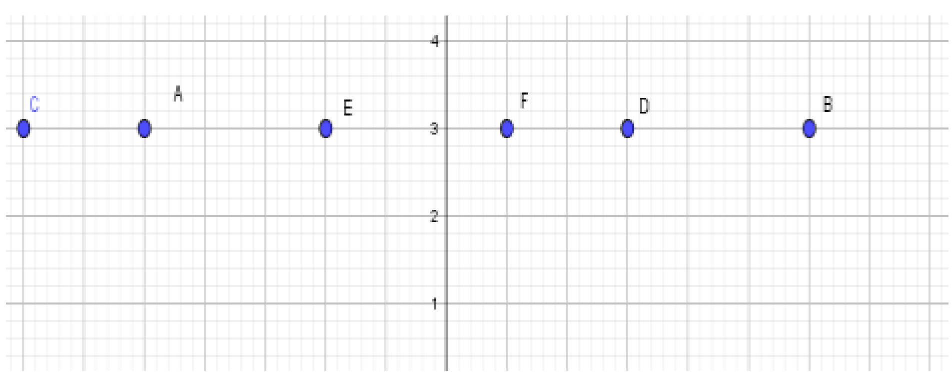
Actitudinales:
- Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros.
- Participa en el trabajo.
- Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

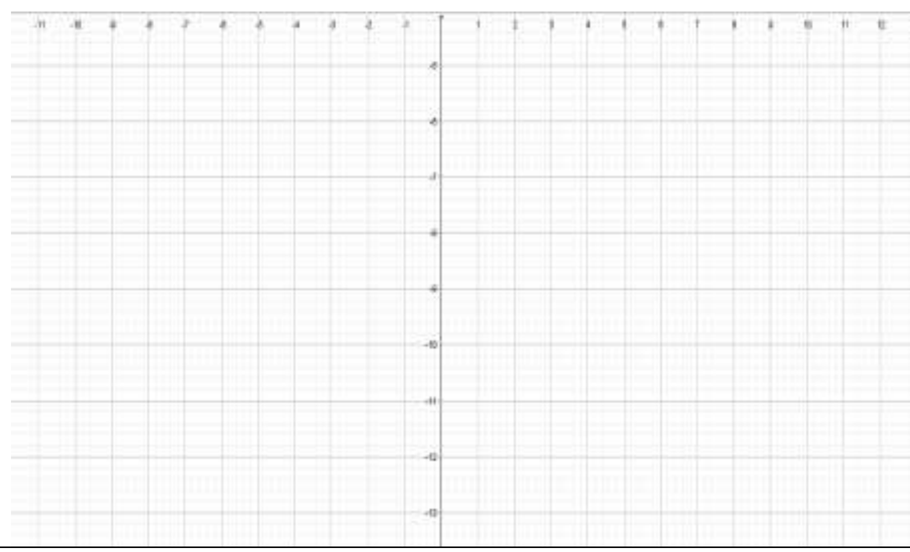
Fase de Inicio.

Observación: La ecuación de una recta horizontal es.

$$y = constante.$$

Problema 4. La siguiente gráfica corresponde a la recta $y = 3$.

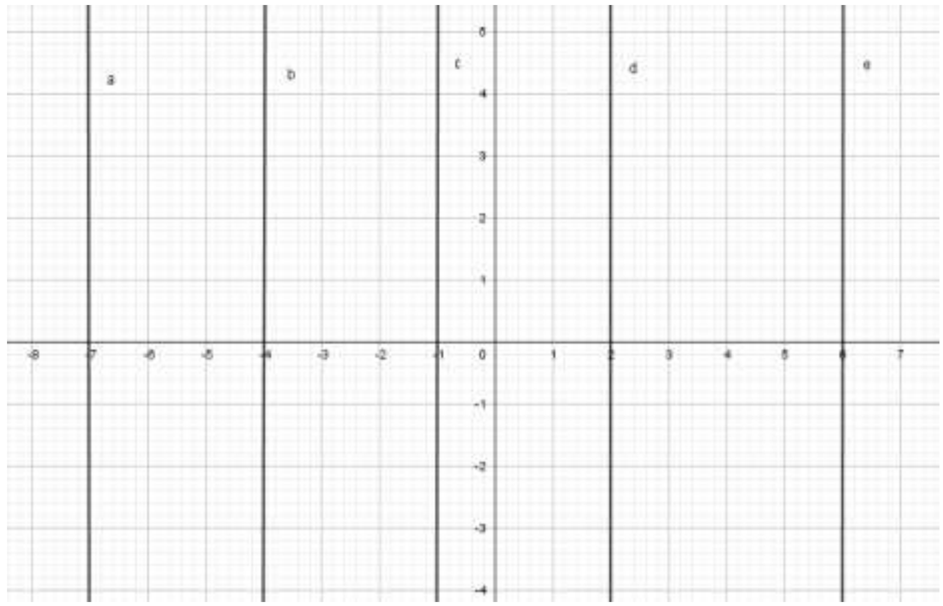


Fase de Desarrollo:	1. Escribe las coordenadas de los puntos indicados: A =(__, __), B =(__, __), C =(__, __), D =(__, __) E =(__, __), F =(__, __). 2. ¿Qué tienen en común las coordenadas de todos los puntos?__________ ____. 3. Localiza otros cuatro puntos sobre la gráfica de la recta y escribe sus coordenadas. ______,______,______,______. 4. Sí comparas las coordenadas de los puntos que localizaste, con los anteriores, ¿siguen teniendo en común lo que observaste? ____________.
Fase de Cierre.	**Ejercicios.** Si las coordenadas de un punto que pertenecen a la gráfica de una horizontal son, A(9, -11), escribe las coordenadas de otros dos puntos que estén sobre la gráfica de la recta. B(__,__), G(__,__). Escribe la ecuación de la recta: ____________________________. Traza la gráfica de la recta en el siguiente sistema de coordenadas. 

Secuencia didáctica 8. La recta y su Ecuación Cartesiana (recta vertical).

Aprendizaje. Encuentra la ecuación de la recta dados sus distintos elementos que la definen.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Reconoce una recta vertical.
Procedimentales:	• A partir de un problema pueda definir a una recta como una constante de la forma x=c.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Fase de Inicio.	Observación: La ecuación de una recta vertical es. $$x = constante.$$ Problema 5. A continuación se presentan las gráficas de cinco rectas verticales. 
Fase de Desarrollo.	Escribe la ecuación de cada una de las rectas. a: __________, b:_________, c:___________, d:__________, e:_____________. Todos los puntos en la gráfica de la recta a, ¿Qué tienen en común? ____. Si ahora nos fijamos en los puntos de la recta d, ¿qué tienen en común? ____. ¿Qué tienen en común los puntos sobre la recta? _________________.
Fase de Cierre.	**Ejercicios.** a. Escribe la ecuación de una recta que este a 5 unidades de la distancia del eje de las ordenadas. ______________________, ¿cuántos casos se pueden tener? b. Escribe las coordenadas del punto donde la recta y= 7, corta el eje de las ordenadas. ________________________________. c. ¿Qué ángulo de inclinación forma una recta vertical con el eje de las abscisas? ________________________. d. ¿Qué ángulo de inclinación forma una recta horizontal con el eje de las abscisas? _______________________. e. Encuentra el punto de intersección de las rectas, x=5, y 2x-3y+6=0. f. Encuentra el punto de intersección de las rectas, y=-3, y -3x-5y-12=0. g. El punto de intersección de las rectas, y=5, y x = -3.

Secuencia Didáctica 9. La Recta y su Ecuación Cartesiana (otras formas de la recta). Parte1.

Aprendizaje. Reconoce las distintas formas de representación algebraica de la recta e identificará cuál de ellas conviene usar, dependiendo de las condiciones del problema.

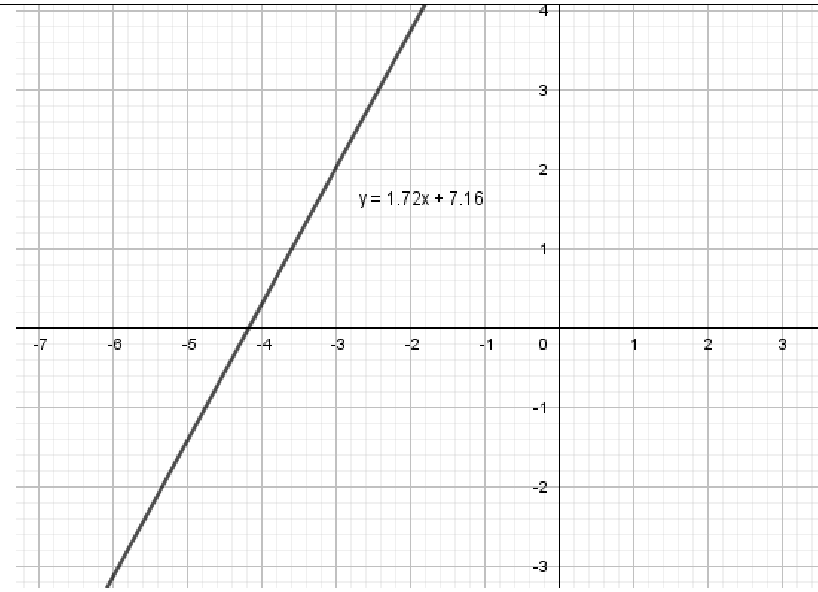
APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR

Conceptuales:
- Reconoce distintas formas de la recta (forma pendiente-ordenada al origen, cartesiana y punto-pendiente).

Procedimentales:
- A partir de un problema pueda determinar la forma más conveniente de la recta.
- Transite a otras formas de la recta.

Actitudinales:
- Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros.
- Participa en el trabajo.
- Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Fase de Inicio.	Observación: Las ecuaciones de la recta que conocemos hasta ahora son: Pendiente ordenada al origen: $y = mx + b$. Que pasa por dos puntos: $y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$. Punto – pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$. **Problema 1**: Encuentra la ecuación y la gráfica de la recta que pasa por el punto S(-3, 2) y cuyo ángulo de inclinación es de 60°.
Fase de Desarrollo.	Recuerde que *m = tan(α),* donde α es el ángulo de inclinación. Con la calculadora encuentra *tan(60°)* con una aproximación de 2 decimales. *m = tan(60°) =*____________. Los datos que tenemos son: m = 1.72, x_1 = -3, y_1 = 2. ¿Qué ecuación nos conviene usar? a) $y = mx + b$ b) $y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$ c) $y - y_1 = m(x - x_1)$. Sustituyendo valores en la ecuación c). y - ____=_____(x-(-3)). y – 2 = 1.72 x + _____. y = 1.72x + 7.16 Es la ecuación de la recta. Si la igualamos a cero la ecuación recibe el nombre de *ecuación general* de la recta. 0 = 1.72 x -y + 7.16 La gráfica se muestra a continuación.



Fase de Cierre.	**Ejercicios.** 1. Encuentra la ecuación y la gráfica de la recta que pasa por el punto dado y cuyo ángulo de inclinación es α. • A(7,-3) y α=30° • B(9,6) y α=70° • C(-4,-3) y α=120° • D(-5,-7) y α=100° • E(2,-8) y α=50° • F(10,15) y α=45° • G(-4,-12) y α=150° • H(-5,4) y α=130°

Secuencia Didáctica 10. Continuación. Parte 2.

Aprendizaje. Reconoce las distintas formas de representación algebraica de la recta e identificará cuál de ellas conviene usar, dependiendo de las condiciones del problema.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Reconoce distintas formas de la recta (forma pendiente-ordenada al origen, cartesiana y punto-pendiente).
Procedimentales:	• A partir de un problema pueda determinar la forma más conveniente de la recta. • Transite a otras formas de la recta.

Actitudinales:

- Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros.
- Participa en el trabajo.
- Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Fase de Inicio.

Problema 2: Una recta corta al eje de las abscisas en 2, y al eje de las ordenadas en -4. Encuentra la gráfica y la ecuación en su forma general de la recta.

Fase de Desarrollo.

Encuentra la gráfica y la ecuación en su forma general de la recta.
Las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje y, son S(0,___).
Las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje x, son M(___,0).

¿Qué ecuación nos conviene usar?

a) $y = mx + b$ b) $y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$ c) $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Haciendo x_1= 0, y_1=-4, x_2=2, y_2= 0 y sustituyendo valores en la fórmula del inciso (b) y haciendo operaciones.

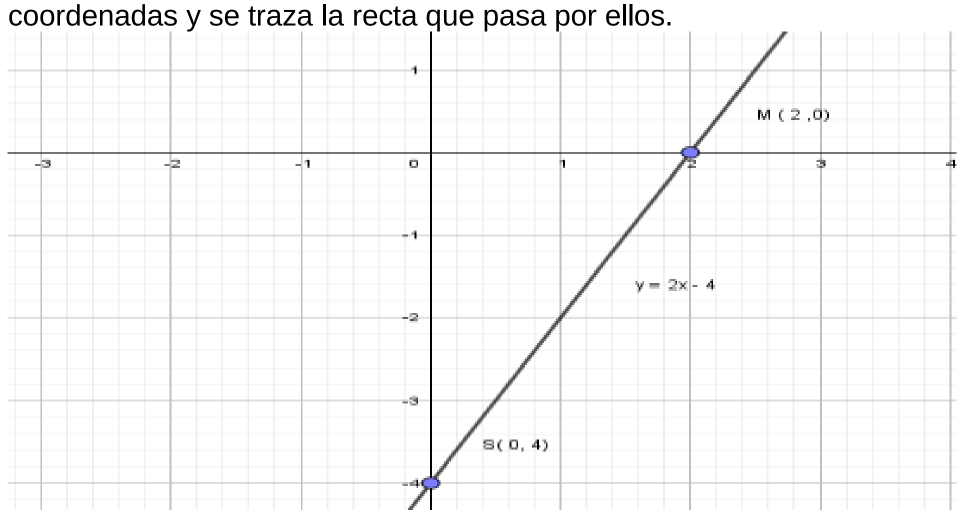
$$y - \_\_\_\_ = \frac{0 - \_\_\_\_}{\_\_\_\_ - 0}(x - 0)$$

$$y + 4 = \left(\frac{0 + 4}{2 - 0}\right)(x - 0)$$

$$y + 4 = \_\_\_\_(x)$$

$$0 = 2x - \_\_\_\_ - \_\_\_\_$$

Para hacer la gráfica localizamos los puntos S y M en el plano de coordenadas y se traza la recta que pasa por ellos.



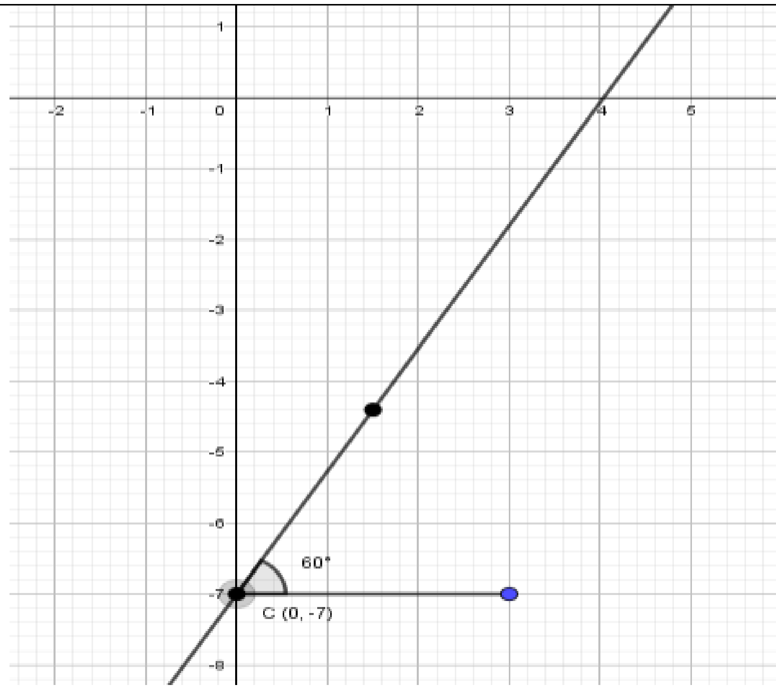
Fase de Cierre.	**Ejercicios.** 1. Encuentra la ecuación y la gráfica de la recta cuya pendiente es m= -3, y corta el eje de las ordenadas en 4. 2. Encuentra la ecuación y la gráfica de la recta que pasa por el punto M(-5,-2) y corta el eje de las abscisas en 8. 3. Encuentra la ecuación y la gráfica de la recta que corta el eje de las ordenadas en -5 y pasa por el punto de intersección de las rectas x +y -6 = 0 y 2x + y +4 = 0

Secuencia didáctica 11. Continuación. Parte 3.

Aprendizaje. Reconoce las distintas formas de representación algebraica de la recta e identificará cuál de ellas conviene usar, dependiendo de las condiciones del problema.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Reconoce distintas formas de la recta (forma pendiente-ordenada al origen, cartesiana y punto-pendiente).
Procedimentales:	• A partir de un problema pueda determinar la forma más conveniente de la recta. • Transite a otras formas de la recta.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

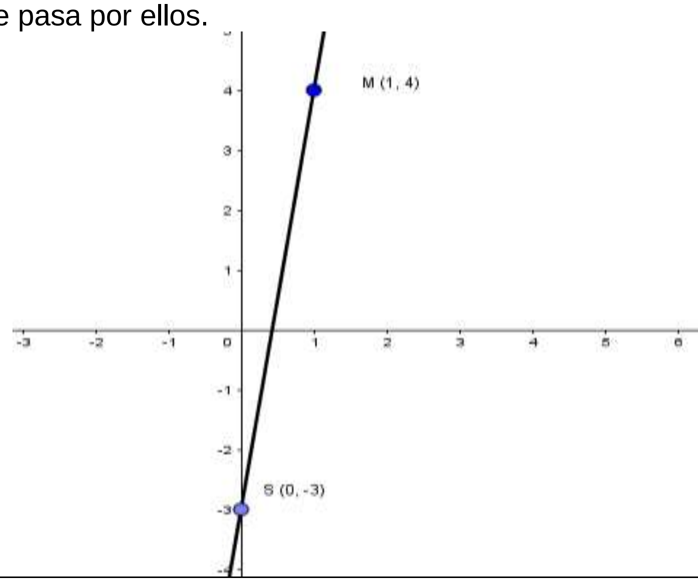
Fase de Inicio.	**Problema 3**: Encuentra la gráfica, la ecuación y el ángulo de inclinación de la recta cuya pendiente es $m = \sqrt{3}$ y corta el eje de las ordenadas en -7.
Fase de Desarrollo.	Para encontrar el ángulo de inclinación usa la función de tu calculadora. $\tan^{-1}\left(\sqrt{-3}\right) =$ ______. Las coordenadas del punto C donde la recta corta al eje y son, C (___ , ___). ¿Qué ecuación nos conviene usar? a) $y = mx + b$ b) $y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$ c) $y - y_1 = m(x - x_1)$. Sustituyendo $m = \sqrt{3}, y\ b = -7$ en la ecuación $y = mx + b$, la ecuación de la recta es: $y =$ ___$x +$ ____ Para trazar la ecuación de la recta localiza el punto donde la recta corta el eje de las ordenadas, C(0,7), a partir de él, traza un segmento horizontal y sobre este segmento y tomando el punto C como vértice traza un ángulo de 60°.

	
Fase de Cierre.	Ejercicios. 1. Encuentra la gráfica, el ángulo de inclinación y la ecuación de la recta cuya pendiente $m = \frac{3}{4}$, y corta al eje de las abscisas en -6. 2. Encuentra la gráfica, la ecuación y las coordenadas donde la recta corta al eje de las x, si su pendiente es $m = -2$ y pasa por el punto M (1,1). 3. Encuentra la ecuación, la gráfica y las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje de las ordenadas, si el ángulo de inclinación es de 45° y pasa por el punto S (-1, -1).

Secuencia didáctica 12. Continuación. Parte 4.

Aprendizaje: Reconoce las distintas formas de representación algebraica de la recta e identificará cuál de ellas conviene usar, dependiendo de las condiciones del problema.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Reconoce distintas formas de la recta (forma pendiente-ordenada al origen, cartesiana y punto-pendiente).
Procedimentales:	• A partir de un problema pueda determinar la forma más conveniente de la recta. • Transite a otras formas de la recta.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Fase de Inicio.	**Problema 4**. Encuentra la ecuación general y la gráfica de la recta que pasa por el punto de corte de la recta 2y – 4x + 6 = 0 con el eje de las ordenadas y el punto M(1, 4).
Fase de Desarrollo.	Para encontrar las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje de las ordenadas, hacemos $x = 0$, y despejamos la variable y. $2y - 4\,(\_\_\_) + 6 = 0$ $2y - \_\_\_ + 6 = 0$ $2y = -6$ $y = \_\_\_.$ Las coordenadas del punto S de intersección con el eje de las ordenadas son, S(___, ___). Los datos que tenemos son M (1, 4) y S(0, -3). ¿Qué ecuación nos conviene usar? a) $y = mx + b$ b) $y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$ c) $y - y_1 = m(x - x_1)$. Haciendo $x_1 = 1$, $y_1 = 4$, $x_2 = 0$, $y_2 = -3$ y sustituyendo valores en la ecuación. $$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$ $$y - \_\_\_\_ = \left(\frac{(-3) - \_\_\_\_}{\_\_\_\_ - 1}\right)(x - 1)$$ $$y - 4 = 7(x - 1)$$ $$y - 4 = 7x - \_\_\_\_$$ $$0 = 7x - y - 3$$ Se localizan los puntos M y S en el plano de coordenadas y se traza la recta que pasa por ellos. 

Fase de Cierre.	**Ejercicios.** a) Encuentra la gráfica, la ecuación general y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos M(3, 5) y S(5, 9). b) Encuentra la gráfica y la ecuación pendiente ordenada al origen de la recta que pasa por el punto C(-4, -2) y su ángulo de inclinación es de 135°.

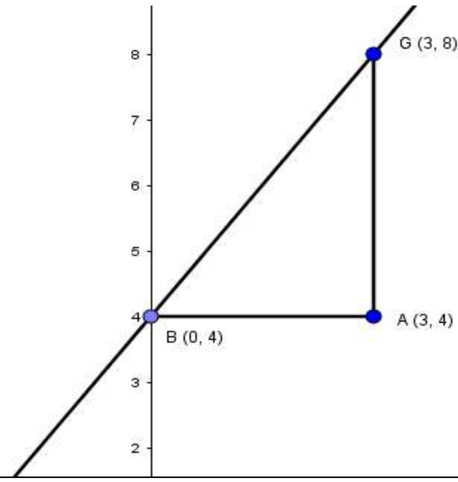
Secuencia Didáctica 13. La Recta y su Ecuación Cartesiana (forma general).

Aprendizaje. A partir de la ecuación general de una recta, encuentra los elementos que definen su posición y traza su gráfica.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR

Conceptuales:	• Reconoce distintas formas de la recta, en particular la forma general.
Procedimentales:	• A partir de un problema pueda determinar la forma más conveniente de la recta.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Fase de Inicio.	**Problema 1**. Encuentra la gráfica y el ángulo de inclinación de la recta cuya ecuación es 4x – 3y +12 = 0.
Fase de Desarrollo.	Representando la ecuación como, $ax + by + c = 0$. Al despejar y de esta ecuación, $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. En esta forma, comparando con la forma ordinaria: $y = mx + b$, $m = -\frac{a}{\mathrm{b}}$ es la pendiente de la recta. $b = -\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}}$ es la ordenada al origen. En la ecuación dada: $a = 4, b = -3$ y $c = 12$, así que. $m = -\frac{4}{-3} = \frac{4}{3}$. Y el ángulo de inclinación es. $\alpha = tan^{-1}(4/3) = 53° 7'$ La ordenada al origen es. $b = -\frac{12}{-3} = 4$ Para encontrar la gráfica localizamos el punto donde la recta corta el eje de las ordenadas, B = (0, 4). A partir del punto B, como $tan(\alpha) = \frac{4}{3}$ donde α es el ángulo de inclinación, trazamos un segmento horizontal de 4 unidades, y al final de dicho segmento trazamos un segmento vertical de 3 unidades, el punto que determina el final del segmento es otro punto G de la recta, así que trazamos la recta que pasa por los puntos B y G.

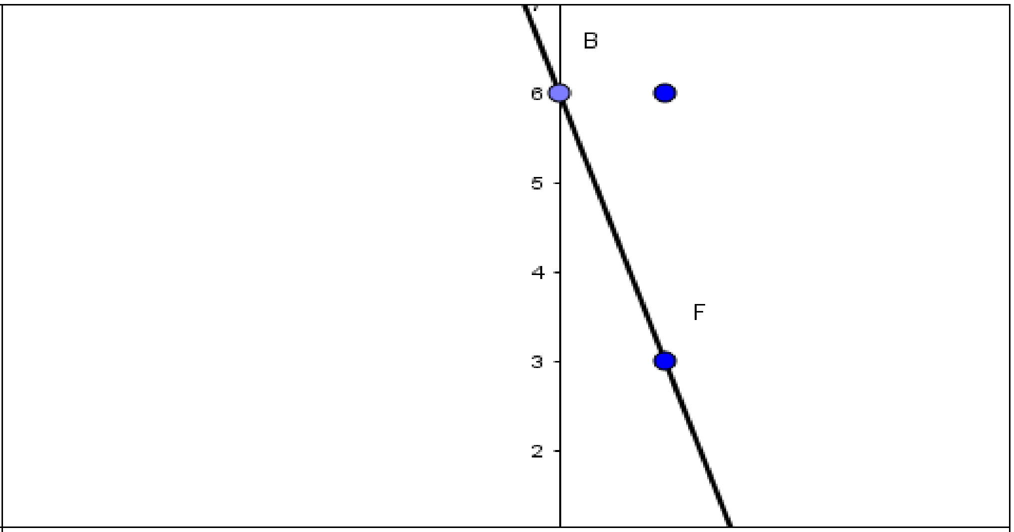
	
Fase de Cierre.	**Ejercicios.** 1. Encuentra los puntos de intersección de la recta con los ejes de coordenadas, la gráfica y el ángulo de inclinación de la recta cuya ecuación es 2x + 5y -7 = 0. 2. Encuentra la gráfica y la ecuación pendiente ordenada al origen de la recta cuya ecuación es -3y + 5x – 9 = 0.

Secuencia didáctica 14. La Recta y su Ecuación Cartesiana (en distintas formas dadas).

Aprendizaje. A partir de la ecuación general y/o ordinaria de una recta, encuentra los elementos que definen su posición y traza su gráfica.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Reconoce distintas formas de la recta para dar solución al problema dado.
Procedimentales:	• A partir de un problema pueda determinar la forma más conveniente de la recta, para determinar algunos elementos.
Actitudinales:	• Reconoce la importancia de GeoGebra en la construcción del conocimiento. • Valore la herramienta computacional como auxiliar en la visualización y comprensión de los diferentes elementos de una recta. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Fase de Inicio.	**Problema 2**. Encuentra la gráfica de la recta cuya ecuación es, y = -3x + 6, y su ángulo de inclinación.
Fase de Desarrollo.	La ordenada al origen de la recta es 6, y las coordenadas del punto donde la recta corta el eje de las ordenadas es B (0, 6). Para trazar la gráfica usamos la pendiente de la recta que es : $m = tan(\alpha) = -3 = \frac{-3}{1}$. Así que el punto B se traza un segmento horizontal de longitud 1, y al final del mismo se traza un segmento vertical de longitud -3, el final de dicho segmento representa otro punto F por donde pasa la recta. Se traza la recta que pasa por los puntos B y F.

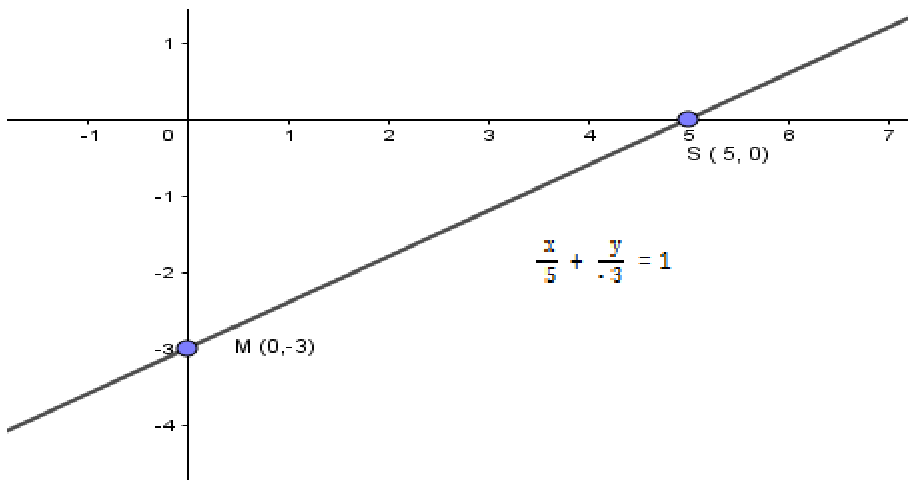
	
Fase de Cierre.	**Ejercicios.** 1. Encuentra la gráfica de la recta y las coordenadas de los puntos de intersección de la recta con los ejes de coordenadas, si su ecuación es: -2x + 5y -10 = 0. 2. Encuentra la gráfica, el ángulo de inclinación de la recta y su ordenada al origen si la ecuación de la recta es, y – 7 = 3(x - 2).

Secuencia Didáctica 15. La Recta y su Ecuación Cartesiana (forma simétrica). Parte 1.

Aprendizaje. A partir de la ecuación general y/o ordinaria de una recta, encuentra los elementos que definen su posición y traza su gráfica.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Reconoce distintas formas de la recta, en particular la forma simétrica.
Procedimentales:	• A partir de un problema pueda determinar la forma más conveniente de la recta, para determinar algunos elementos.
Actitudinales:	• Reconoce la importancia de GeoGebra en la construcción del conocimiento. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

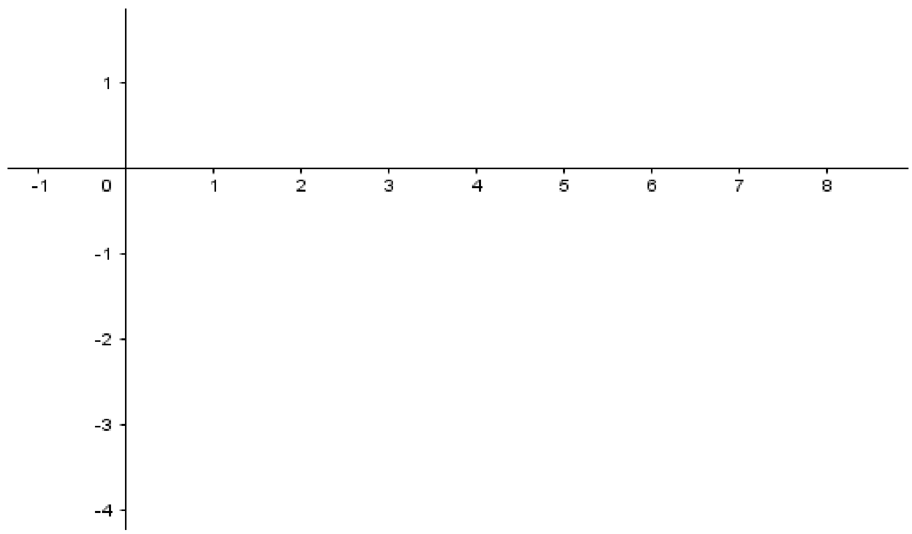
Fase de inicio.	**Problema 3**. Encuentra el ángulo de inclinación, la gráfica y la ordenada al origen de la recta cuya ecuación es, $\frac{x}{5}+\frac{y}{-3}=1$.
Fase de Desarrollo.	La ecuación en esta forma es la ecuación simétrica de la recta. Haciendo $y = 0$ en la ecuación de la recta, tenemos $\frac{x}{5}=1$ de donde $x = 5$ y la recta corta el eje x en el punto S (5, 0). Haciendo $x = 0$, nos da y = ____, así que el punto donde la recta corta al eje de las ordenadas es M (0, -3) y la ordenada al origen es ______. Para obtener la pendiente de la recta podemos despejar y de la ecuación.

	$\frac{y}{-3} = 1 - \frac{}{}$ Multiplicando la ecuación por -3. $y = (-3) - \frac{}{5}x$ La pendiente de la recta es $m =$ _______. Y el ángulo de inclinación de la recta es $\alpha = tan^{-1}(\frac{3}{5}) = 30° 57'$ Propon otra forma de encontrar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta. La gráfica de la recta pasa por los puntos S y M. 
Fase de Cierre.	**Ejercicios.** 1. Encuentra la gráfica de la recta y las coordenadas de los puntos de intersección de la recta con los ejes de coordenadas, si su ecuación es: -2x + 5y -10 = 0. 2. Encuentra la gráfica, el ángulo de inclinación de la recta y su ordenada al origen si la ecuación de la recta es, y – 7 = 3(x - 2).

Secuencia Didáctica 16. La Recta y su Ecuación Cartesiana (forma simétrica). Parte 2.

Aprendizaje. A partir de la ecuación general y/o ordinaria de una recta, encuentra los elementos que definen su posición y traza su gráfica.

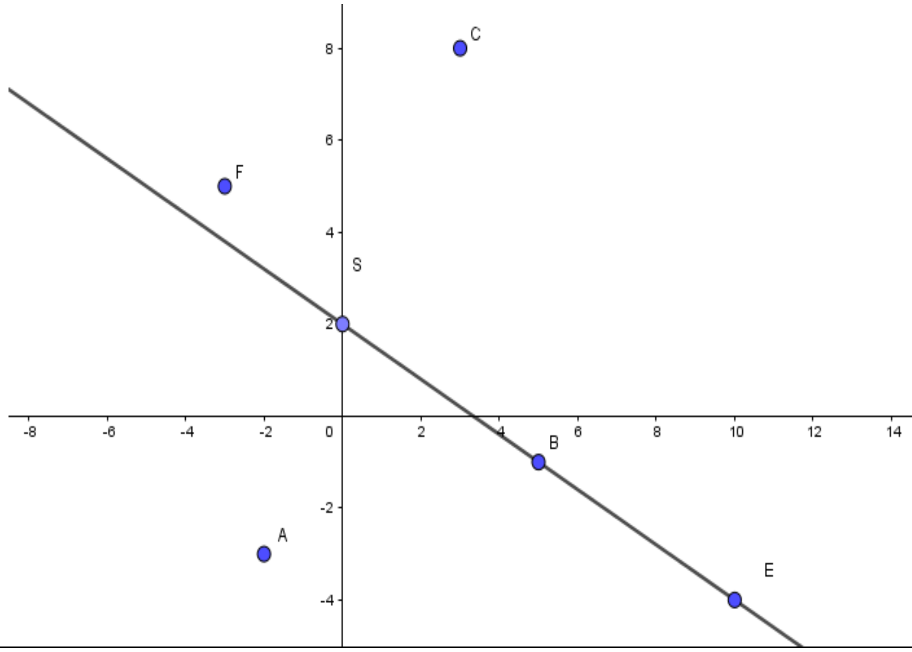
APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Reconoce distintas formas de la recta, en particular la forma simétrica.
Procedimentales:	• A partir de un problema pueda determinar la forma más conveniente de la recta, para determinar algunos elementos.
Actitudinales:	• Reconoce la importancia de GeoGebra en la construcción del conocimiento. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Fase de Inicio.	**Problema 4**. Encuentra la gráfica de la recta cuya ecuación es: $\frac{x}{7} - \frac{y}{4} = 1.$
Fase de Desarrollo.	La ecuación en esta forma es la ecuación simétrica de la recta. Haciendo $y = 0$, el valor de x es, _______. Haciendo $x = 0$, el valor de y es, _______. Y la recta pasa por los puntos, S(7, __) y M(___, -4). Traza en el siguiente plano de coordenadas la gráfica de la recta. 
Fase de Cierre.	**Ejercicios.** 1. Encuentra la gráfica y la ordenada al origen de la recta cuya ecuación es: $x = 4$. 2. Encuentra la gráfica y el ángulo de inclinación de la recta cuya ecuación es: $y = -1$. 3. Encuentra la gráfica y los puntos de intersección con los ejes de la recta cuya ecuación es: -5x -7y + 12 = 0.

Secuencia Didáctica 17. La Recta y su Ecuación Cartesiana (puntos sobre y fuera de la recta).

Aprendizaje. Dadas la ecuación de la recta y las coordenadas de un punto, decide sin recurrir a la gráfica, si éste pertenece o no a la recta.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Reconoce puntos sobre y fuera de la recta, de forma algebraica y gráfica.
Procedimentales:	• A partir de un problema pueda determinar la forma más conveniente de la recta, para determinar algunos elementos.
Actitudinales:	• Reconoce la importancia de GeoGebra en la construcción del conocimiento. • Participa en el trabajo.

Fase de Inicio.	**Problema 1**. Consideremos la recta cuya ecuación es 3x + 5y -10 = 0, y los puntos A (-2, -3), B(5, -1), C(3, 8), E (10, -4), F(-3, 5) y S(0, 2) que se muestran en la siguiente gráfica. 
Fase de Desarrollo.	De acuerdo con la gráfica ¿qué puntos pertenecen a la gráfica? ______, _____, ______, ______, _____, _____, ______. ¿Qué puntos no pertenecen a la gráfica? ______, ______, _____, ______, ______, ______,_______. Para decidir si un punto pertenece o no a una recta, sin recurrir a la gráfica vamos a sustituir las coordenadas del punto en la ecuación para ver si la satisface o no. Para el punto F(-3, 5) tenemos. 3x + 5y -10 = 0 3(___) + 5(___) – 10 = 0 -9 + ____ - 10 = 0 16 – 10 = 0 6 = 0, como puedes ver, las coordenadas del punto A, no satisfacen la ecuación de la recta, y en la gráfica el punto F ___________________________.
Fase de Cierre.	**Ejercicios.** 1. Consideremos la recta cuya ecuación es 2x - 3y + 6 = 0, y los puntos A(1, 4), B(6, 6), C(4, 2), D(2, 5), E(1, 1) y F(0, 2). Determina si los puntos pertenecen o no a la recta. 2. Consideremos la recta cuya ecuación es -x + 3y + 9 = 0, y los puntos A(0, -3), B(9, 0), C(15, 2), R(8, -2), S(5, 2) y T(12, -1). Determina si los puntos pertenece o no a la recta.

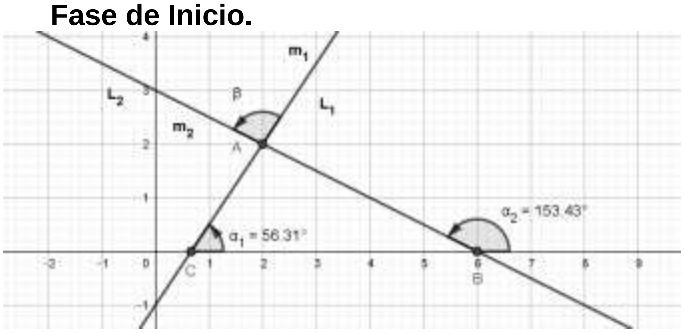
Secuencia didáctica 18. Ángulo entre dos rectas que se cortan, y la condición de perpendicularidad o paralelismo entre dos rectas.

Aprendizajes. Los estudiantes resolverán la hoja de trabajo 1 para calcular en ángulo entre dos rectas.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Reconoce el ángulo que se forma cuando dos rectas se intersectan en un punto. • Aplica en la resolución de problemas el ángulo formado por dos rectas.
Procedimentales:	• A partir de un problema puede determinar el ángulo de intersección entre dos rectas.
Actitudinales:	• Reconoce la importancia de GeoGebra en la construcción del conocimiento. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Hoja de trabajo 1. Dos rectas L_1 y L_2 que se intersecta, formando un ángulo $\boldsymbol{\beta}$ como se muestra en las figuras.

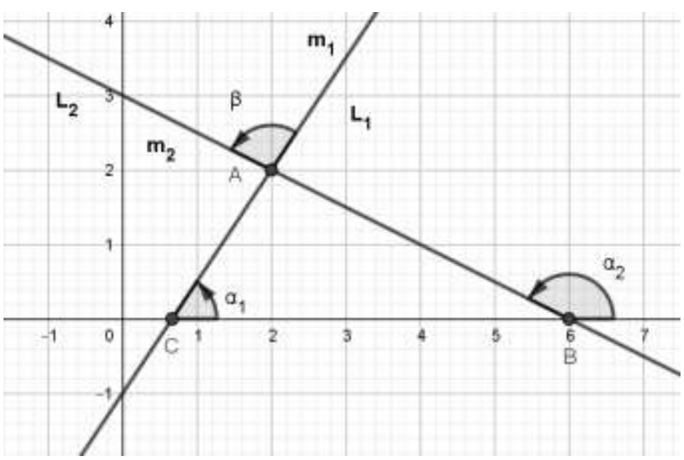
Fase de Inicio.



De la figura se tiene que $\alpha_2 = 153.43° \; y \; \alpha_1 = 56.31°$

Encuentra:

a) m_1
b) m_2
c) $\beta =$ ángulo entre las rectas
d) $\tan\beta =$



Ahora el objetivo es encontrar el ángulo β en términos de las pendientes m_1 y m_2 de las rectas L_1 y L_2 respectivamente, recordando que $\boldsymbol{tan\,\alpha_1 = m_1}$ y $\boldsymbol{tan\,\alpha_2 = m_2}$.

Utilizaremos los resultados:

1. Todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores, no adyacente a él.
2. La identidad trigonométrica de la tangente para la diferencia de dos ángulos.

En la figura se muestra cada uno de los elementos involucrados, por ejemplo el sentido del ángulo, $\beta,$ que se forma entre las rectas, partiendo de L_1 a L_2, en sentido contrario a las manecillas del reloj.

De la figura y del resultado (1) se tiene que $\alpha_2 = \beta + \alpha_1$ por lo tanto $\beta = \alpha_2 - \alpha_1$ entonces al aplicar la tangente y el resultado (2) se tiene:

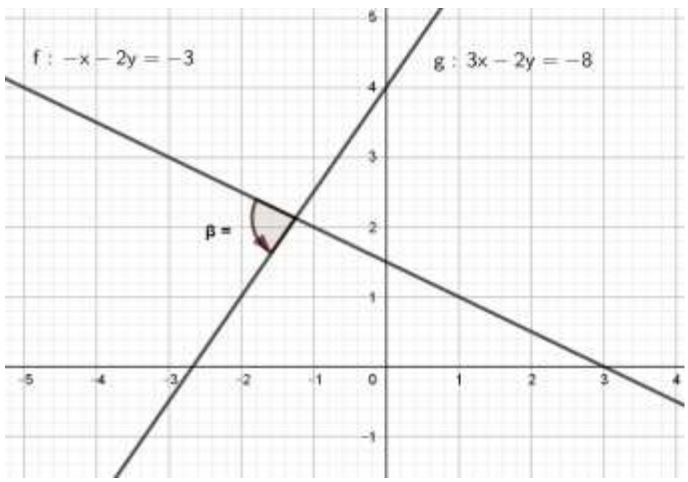
$$\tan\beta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_1 \tan\alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 * m_2} \quad \text{con} \quad m_1 * m_2 \neq -1$$

Por lo tanto $\tan\beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 * m_2}$ con $m_1 * m_2 \neq -1$, esto indica que las rectas no deben ser perpendiculares, porque la $\tan 90°$ no está definida.

Fase de Desarrollo.

Ejemplo 1. Indicar el ángulo entre las rectas, la pendiente de las rectas o bien la posición relativa que tienen entre sí apoyándote en la figura.

L_1: -2x – 4y +6 =0 y L_2: 3x -2x +8 =0, su interpretación gráfica es:



Entonces calculemos el ángulo entre las rectas, que están expresadas en su forma general A x + B y + C= 0, ¿cuál es la pendiente de cada recta? $m_1 = \text{—} = \text{—}$ y $m_2 = \text{—} = \text{—}$, otra forma es escribir la ecuación como y = mx + b para encontrar la pendiente, hazlo para verificar tu resultado anterior.

Ahora sustituye en la expresión $\tan\beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 * m_2} = \text{———} = \text{——} = 8$

Usa tu calculadora para obtener el valor del ángulo β, como $\beta = tan^{-1}(8) =$

Ejemplo 2. Si el ángulo entre las rectas L_1 y L_2 es de 45° y la pendiente m_1 de la recta L_1 es 3 encuentra la pendiente m_2 de la recta L_2.

Proceso. Sustituye los datos en la expresión $\tan\beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 * m_2}$ por lo tanto _____ = $\frac{m_2 - 3}{1 + 3 * m_2}$ implica $1(1 + 3 * m_2) = m_2 - 3$ por lo que m_2= _____, de lo cual $\boldsymbol{tan\,\alpha_2} = \mathbf{-2}$ de donde el ángulo de inclinación es $\boldsymbol{\alpha_2} =$ ____

La condición de perpendicular o paralelismo de dos rectas

Sabemos que dos rectas **L_1 y L_2:**

- Son paralelas, $L_1 \parallel L_2$, si y solo si sus pendientes son iguales, $m_1 = m_2$.
- Son perpendiculares, $L_1 \perp L_2$ si y solo si el producto de ellas es -1, es decir, $m_1 * m_2 = -1$, sus pendientes son los inversos multiplicativos con signo contrario.

Ejemplo 3. Indicar si las rectas son paralelas, oblicuas o perpendiculares.

Las rectas son L_1: 5x + 4y -10 = 0 y L_2: -4x +5y +8 =0

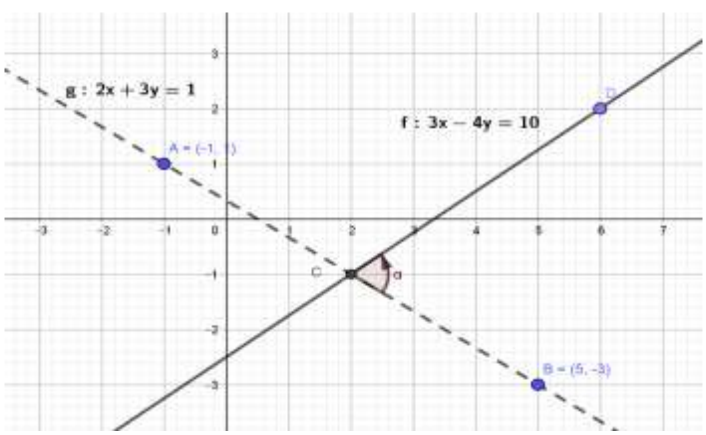
Proceso. Observa los coeficientes de las variables de ambas rectas.
La pendiente de L_1 es $m_1 =$ ____ y la pendiente de L_2 es $m_2 =$ ____.
Las pendientes son reciprocas pero una positiva y la otra negativa, por lo tanto las rectas son _______________ o el producto de ellas es _____, por lo que su ángulo de intersección entre ellas es de _____, este resultado se puede obtener a partir de los coeficientes de las variables de las rectas, están invertidos pero el signo de uno de los coeficiente es negativo, verifícalo y apréndelo para hacer uso de él.

Ejemplo 4. Indica la posición relativa (paralelas, perpendiculares o cualquier otra situación) de las rectas proporcionadas.

L_1: -3x + 2y -5 = 0 y L_2: 6x -4y -10 =0

Proceso. Observa los coeficientes de las variables o las rectas, son equivalentes salvo por una constante.
La pendiente de L_1 es $m_1 =$ ____ y la pendiente de L_2 es $m_2 =$ ____.
Las pendientes son __________ por lo tanto las rectas son _______________, este resultado se debe a los coeficientes de las variables de una recta son múltiplos de los coeficientes de las variables de la otra recta, apréndelo y haz uso de él.

Ejemplo 5. Indica la posición relativa (paralelas, perpendiculares o secantes) bajo la situación propuesta.
La recta L_1 pasa por los puntos A(-1,1) y B(5, -3) y la recta de L_2 es 3x – 4y -10 = 0. Apóyate en la figura.



La pendiente de L_1 es $m_1 =$ ____ y la pendiente de L_2 es $m_2 =$ ____. Las pendientes no son iguales, ni su producto es igual a -1, es decir, no son perpendiculares, entonces calcula el valor del ángulo, α, intersección de las rectas, $\alpha =$ _____. Una pregunta adicional ¿El punto D(6, 2) satisface a la ecuación de la recta, es decir, está en la recta L_2? _________ ¿por qué?____.

Fase de Cierre.

Ejercicios.

En cada caso indica la posición relativa de las rectas y en caso de que se intersecten encuentra el ángulo entre ellas y las coordenadas del punto de intersección, puedes apoyarte con software GeoGebra para verificar tu proceso algebraico, escríbelo en hojas para entregarlas.

1. La recta L_1 pasa por los puntos M(0,3) y N(-4, 0), y L_2: 3x-5y- 2=0.
2. La recta L_1 tiene por ordenada al origen b = -7 y su pendiente m_1 = -2, y la recta L_2 su ecuación es –x + y – 8 = 0.
3. L_1: $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \mathbf{1}$ y L_2: -2 x -3 y – 7 = 0
4. L_1: $y = -4x + 2$ y L_2: 3 x = - 2 y – 6
5. L_1: $y = x - 11$ y L_2: 0 = - 5 x + 7 y – 6
6. Encuentra los ángulos interiores del triángulo ΔABC cuyos vértices son: A(1, 3), B(4, 5) y C(6, -2).

Secuencia didáctica 19. Distancia de un Punto a una Recta.

Aprendizaje. En esta secuencia los estudiantes resolverán la hoja de trabajo 2 para calcular y aplicar la fórmula de la distancia de un punto a una recta en problemas de corte euclidiano.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Reconoce la perpendicularidad que hay entre una recta y un punto, cuando se determina su distancia. • Aplica en la resolución de problemas la distancia de un punto a una recta.
Procedimentales:	• A partir de un problema puede determinar la distancia de un punto a una recta.
Actitudinales:	• Reconoce la importancia de GeoGebra en la construcción del conocimiento. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Hoja de trabajo 2. Distancia de un punto a una recta en el plano. Interpretación geométrica de sus parámetros.

Fase de Inicio.

Para encontrar la distancia de un punto P(x_1 , y_1) a la recta L_1: A x + B y + C =0 aplicamos la fórmula:

$$d_{PL_1} = \frac{|A\,x_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

También se puede usar la fórmula:

$$d_{PL_1} = \frac{A\,x_1 + By_1 + C}{sgnCont(C)\sqrt{A^2 + B^2}} \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$d_{PL_1} = \frac{A\,x_1 + By_1}{sgn(B)\sqrt{A^2 + B^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2')$$

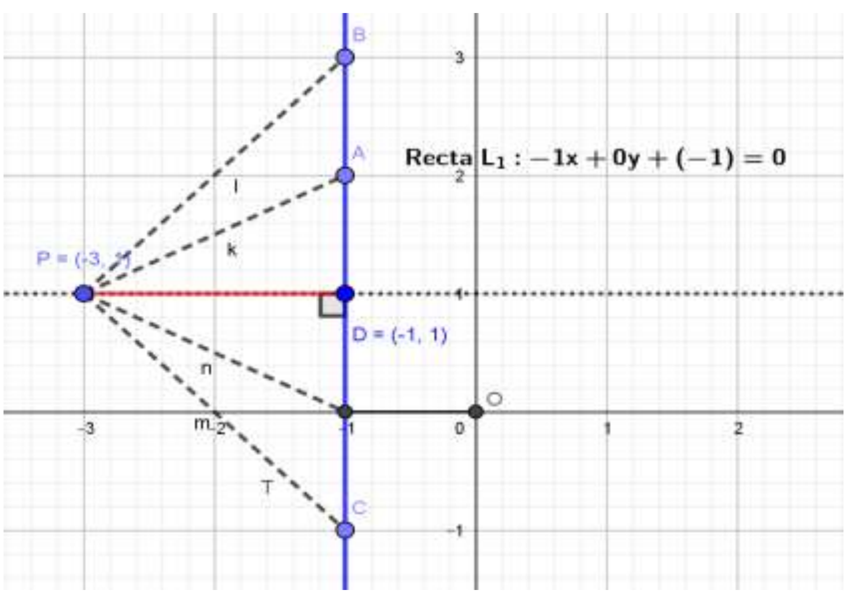
Donde sgnCont(C) es el signo contrario de C y sgn(B) es el signo de B cuando el término en C es cero.

Análisis de casos particulares, de la distancia del punto P a la recta L_1, en donde la distancia es la longitud de la perpendicular del punto P a la recta L_1, es decir, es la mínima distancia de P a la recta.

Fase de Desarrollo.

El proceso se facilita involucrando los elementos en la gráfica con el apoyo del software de GeoGebra e induciendo al estudiante para que conteste varias cuestiones.

Caso I. Cuando la recta es paralela al eje y como se muestra a continuación:

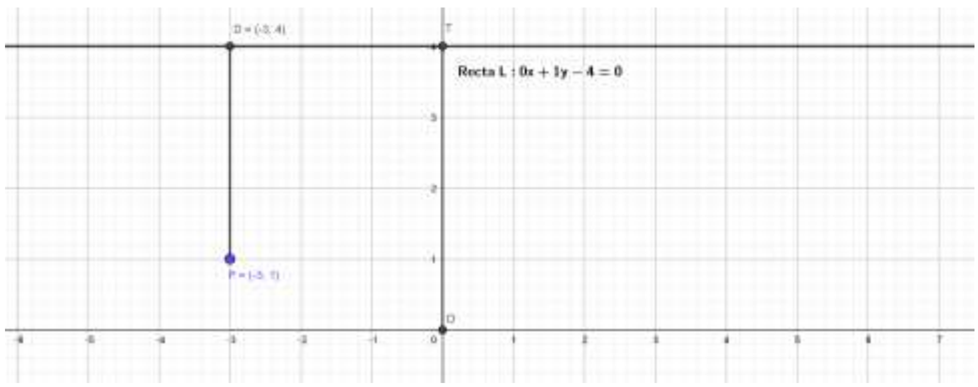


Se puede observar en la gráfica que la distancia del P a la recta L_1, es la longitud de la perpendicular que es igual a 2 unidades, que es la **mínima distancia**, si aplicamos la formula (2) se tiene:

$$d_{PL_1} = \frac{A\,x_1 + By_1 + C}{sgnCont(C)\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{(-1)(-3) - 1}{+\sqrt{(-1)^2 + (0)^2}} = \frac{2}{1} = 2$$

la distancia es igual a 2, positiva, lo cual **significa que el origen, O, y el punto P están en lados opuestos con respecto a la recta**.

Caso II. Cuando la recta es paralela al eje x como se muestra a continuación.

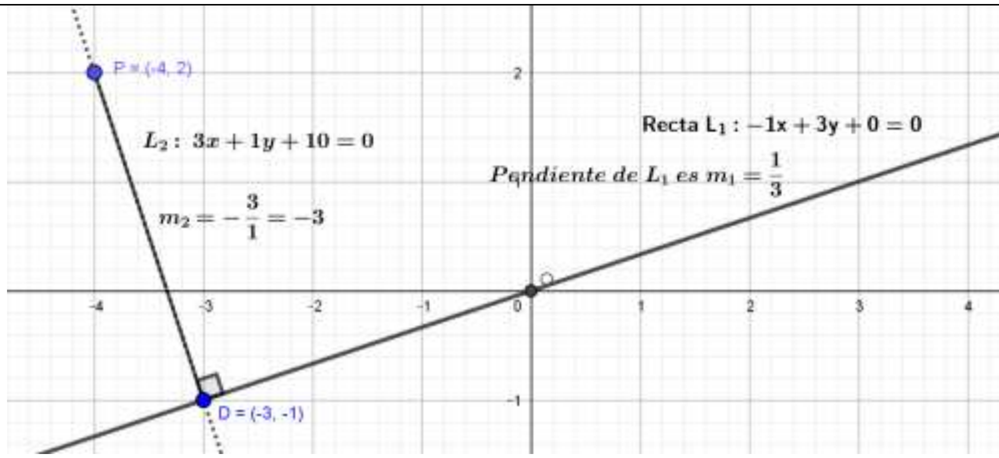


Se puede observar en la gráfica que la distancia del P a la recta L_1 es 3 y aplicando la formula (1) se tiene:
$d_{PL_1} = \frac{|A\,x_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|0(-3)\,+1\,(\,1)-4|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|-3|}{1} = -(-3) = 3,$ donde se ha utilizado la definición de valor absoluto, y el resultado es el mismo. Sin embargo al utilizar la fórmula (2) se tiene:

$$d_{PL_1} = \frac{A\,x_1 + By_1 + C}{sgnCont(C)\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{0(-3) + 1(1) - 4}{+\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{-3}{1} = -3$$

El resultado es -3, difiere del anterior en el signo negativo, la interpretación es que **el origen y el punto P están del mismo lado de la recta**. Debido a ésta situación se acostumbra a utilizar la fórmula (1).

Caso III. Cuando la recta es oblicua y pasa por el origen, como se muestra a continuación.



Con el apoyo de la figura, para calcular la distancia de P a la recta L_1, basta con encontrar las coordenadas del punto D que está en la recta y aplicar la distancia entre los puntos, P y D, para ello: Supongamos que conocemos el punto P(-4, 2) y la recta L_1: -1x + 3y = 0, verifica y contesta:

1. ¿La pendiente de la recta L_1 es? m_1 =
2. Si L_2 es la recta que pasa por P, las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares. entonces ¿La pendiente de la recta L_2 es? m_2 =
3. Como la recta L_2 pasa por P(-4, 2) y tiene pendiente m_2 = - 3 entonces ¿cuál es la ecuación de la recta L_2? L_2: ________________________
4. De las ecuaciones obtenidas, resuelve el sistema:

$$\begin{array}{llll} -1\,x & +\ 3\,y & = 0 \ldots\ldots\ldots (1) \\ \ \ 3\,x & +\ 1\,y & = -10 \ldots\ldots (2) \end{array}$$

   La solución son las coordenadas del punto D ¿Cuáles son? D(_ , __).
5. Tenemos P(-4, 2) y D(-3, -1) entonces su distancia es:

   $d_{PD} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$ ______ , que es la distancia del punto P a la recta L_1, $d_{PL} = \sqrt{10} \approx 3.16$

Proceso alternativo. Si aplicamos la formula (2’) con la modificación de tomar el signo de B entonces la distancia del punto P(- 4, 2) a la recta L_1: -1x + 3y + 0 = 0 es:

$$d_{PL_1} = \frac{A\,x_1 + By_1 + C}{sgn(B)\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{-1\,(-4) + 3\,(2) + 0}{+\sqrt{(-1)^2 + (3)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} * \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{10\sqrt{10}}{10} =$$

$$d_{PL_1} = \sqrt{10} \approx 3.16$$

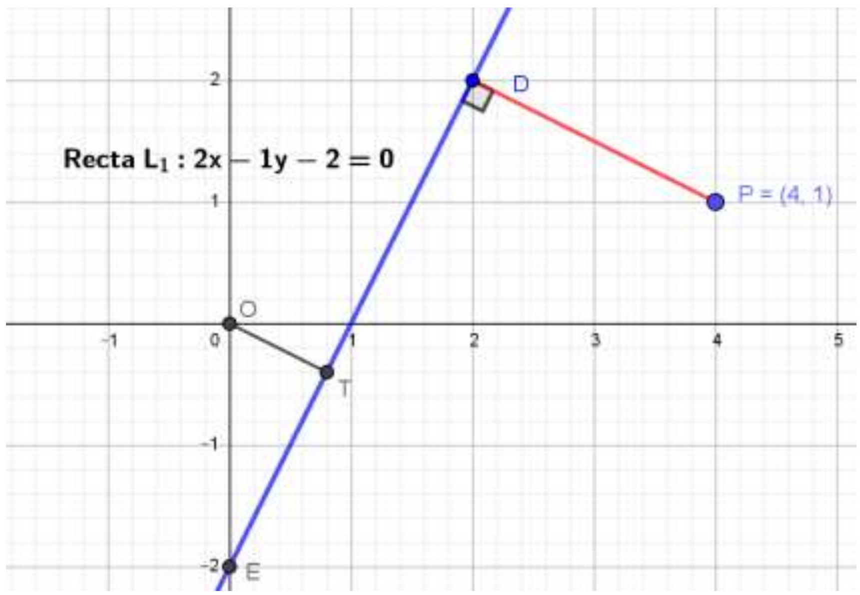
Los resultados son los mismos pero los procesos son distintos entonces se puede utilizar cualquier método.

Observación 1. Al aplicar la formula (2') la **distancia es positiva, la interpretación es porque el punto P está por arriba de la recta L_1.**

Esto se puede ver con las coordenadas del punto P(-4, 2) y para la abscisa x = - 4 del punto P, el valor que se encuentra para ***y*** de la recta L_1 es igual a ***y***$= -\frac{4}{3}$ que es menor que el valor de la ordenada, ***y*** = 2 del punto P, vea la figura anterior.

Observación 2. Consideramos que la distancia será negativa, cuando el punto P está por debajo de la recta, ésta pasa por el origen.

Caso IV. Cuando la recta es oblicua y no pasa por el origen.



En la gráfica se puede ubicar el punto (2, 1) y utilizando el teorema de Pitágoras se puede encontrar que la distancia de P a la recta L_1 es $\sqrt{5} \approx 2.23$.

Por la fórmula (1) la distancia del punto P(4,1) y la recta L_1: 2 x - 1 y - 2 = 0 es:

$$d_{PL_1} = \frac{|A\,x_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2\,(4) - 1(1) - 2|}{\sqrt{(2)^2 + \ (-1)^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} * \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$d_{PL_1} = \sqrt{5} \approx 2.23$$

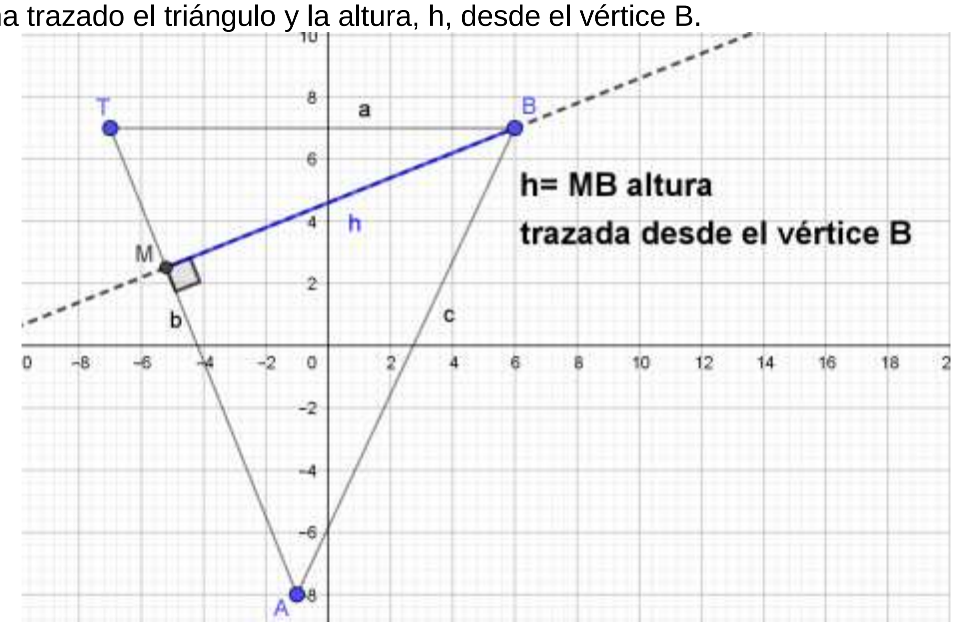
Y por la fórmula (2) $d_{PL_1} = \frac{2\,(4) - 1(1) - 2}{+\sqrt{(2)^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \approx +2.23$ **la distancia es positiva, su interpretación es que el punto P y el origen, O, están en lados opuestos a la recta L_1.**

Conclusiones.

1. La distancia es positiva, cuando el origen O y el punto P están en lados opuestos de la recta. Y es negativa, cuando el origen O y el punto P están del mismo lado de la recta.
2. Si la recta pasa por el origen entonces: a) La distancia es positiva cuando el punto P está arriba de la recta. b) La distancia es negativa cuando el P está por debajo de la recta.
3. La distancia se puede calcular con la fórmula (1) para facilitar todos los procesos.
4. Con el proceso del caso III se puede hacer la demostración de las fórmulas (1) o (2).

   Nota: La demostración de la fórmula se puede encontrar en el libro de Geometría Analítica, Filloy, E. Hitt, F. Iberoamericana. Y Lehmann.

Problema 1. Calcular el área del triángulo ΔABC cuyos vértices son A(-1, -8), B(6, 7) y T(-7, 7).
Sea ha trazado el triángulo y la altura, h, desde el vértice B.



Para encontrar el área, $A = \frac{b*h}{2}$, contesta:

1. Si la base, b, es AT entonces la distancia es: AT = es decir b =
2. Se necesita encontrar la altura desde el vértice B a la base AT, es necesario calcular primeramente la pendiente: $m_{AT} = -$ —

Al sustituir la pendiente y el punto A en la ecuación punto pendiente se obtiene la ecuación, que pasa por A y T:
5 x + 2 y + 21 = 0……..recta L, verifícala.

Aplicando la fórmula (1) la altura es $d_{BL} = \frac{|A\,x_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|5(6)+2(7)+21|}{\sqrt{(5)^2+(2)^2}} =$

$= \frac{65}{\sqrt{29}} \approx 12.07$ es decir, h= 12.07

3. Por lo tanto el área es $A = \frac{b*h}{2} = \frac{16.15(12.07)}{2} = 97.46$ unidades cuadradas.

Fase de Cierre.

Ejercicios. En cada caso encuentra la distancia del punto a la recta dada o la distancia entre las rectas paralelas, interpreta el signo de la distancia, puedes realizar la gráfica de ejercicio apoyándote de GeoGebra, pero realiza tu proceso.

1. A(5, -1) y la recta L_1: 5x – 2y + 6 = 0.
2. E(-3, 9) y la recta L_1: – 7x + 5y – 7 = 0.
3. L_1 paralela a L_2, donde L_1: $-4x + 6y - 12 = 0$ y L_2: $7x - 6y + 23 = 0$.
4. L_1 paralela a L_2, donde L_1: $2x - 4y + 10 = 0$ y L_2: $-4x + 8y - 36 = 0$.
5. Del triángulo anterior calcular el área cuya altura es considerada o trazada a partir del vértice B.

Actividad extra-clase.

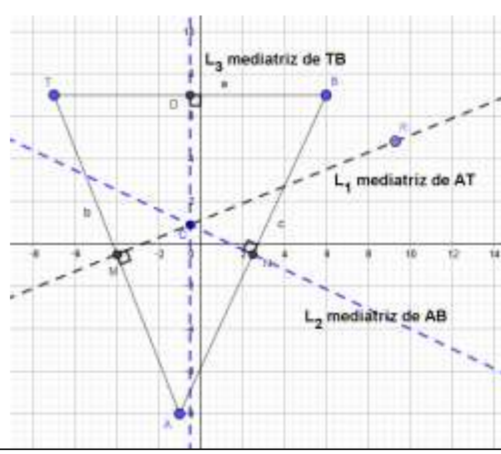
El alumno realizará la siguiente hoja de trabajo, tomando como referencia la hoja de trabajo 2.

Hoja de trabajo 3. Ecuaciones de rectas notables.

Aprendizajes comprueba algunas situaciones que involucran rectas, que fueron estudiadas en la geometría Euclidiana.

Inicio de la secuencia.

Problema 1. Encontrar el punto de intersección de las mediatrices del triángulo ΔABC cuyos vértices son A(-1, -8), B(6, 7) y T(-7, 7).
Se ha trazado el triángulo y las mediatrices.



A continuación se encontrara el punto de intersección de las mediatrices para ello contesta:

1. ¿Qué es la mediatriz? ____.
2. ¿Las coordenadas de los puntos medios de cada lado son? Del lado AT es M(,), del lado AB es N(,) y del lado TB es D(,), localízalos en el dibujo anterior.
3. Si la pendiente de AT es $m_{AT} = -\frac{5}{2}$ ¿la pendiente de L$_1$, la mediatriz, es? $m_1 = \frac{\quad}{\quad}$

   Al sustituir $m_1 = \frac{2}{5}$ y M(-4 ,$-\frac{1}{2}$) en la ecuación punto pendiente se obtiene:

   $y + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}(x + 4)$ verifícala, que se puede escribir como

   $-4x + 10x = 11 \dots\dots\dots(1)$ Ecuación de L$_1$, mediatriz de AT.
4. De manera análoga encuentra la mediatriz de AB.

   Si la mediatriz de AB la llamamos L$_2$ se tiene que:

   $7x + 15y = 10 \dots\dots\dots(2)$ Ecuación de L$_2$, mediatriz de AB, verifícala.
5. Si a la mediatriz de TB, es L$_3$, a partir de la figura se tiene

   $x = -\frac{1}{2} \dots\dots.(3)$ Ecuación de L$_3$, mediatriz de TB, verifícala.
6. Con las ecuaciones de las mediatrices se tiene el sistema, de tres ecuaciones con dos incógnitas:

$$
\begin{aligned}
-4x + 10y &= 11 \dots\dots(1)\\
7x + 15y &= 10 \dots\dots.(2)\\
x &= -\frac{1}{2} \dots.\dots(3)
\end{aligned}
$$

Para resolverlo basta solo considerar un par de las ecuaciones, por ejemplo (1) y (2), y el punto de intersección es $C(-\frac{1}{2}, \frac{9}{10})$, trabaja con las ecuaciones (1) y (3) y encuentra otra vez el punto C, apóyate en la figura de arriba.

Otra forma de encontrar la ecuación de la mediatriz es utilizando la definición de que cualquier punto de la mediatriz equidista de los extremos del segmento dado. Como un caso particular en la situación anterior el punto $C(-\frac{1}{2}, \frac{9}{10})$ está en la mediatriz por lo tanto cumple $d_{CT} = d_{CT}$ verifícalo.

Problema 2. Si el punto R(x, y) está en la misma mediatriz, L$_1$, de AT de la figura anterior entonces equidista de los extremos, A y T, encuentra su ecuación.

Sugerencias.

1. Considera las distancias $d_{RT} = d_{RT}$
2. Eleva al cuadrado.
3. Desarrolla los binomios.
4. Simplifica la ecuación.

   La ecuación que obtendrás es – 4x + 10y – 11 = 0 verifícala, es la misma que se obtuvo anteriormente.

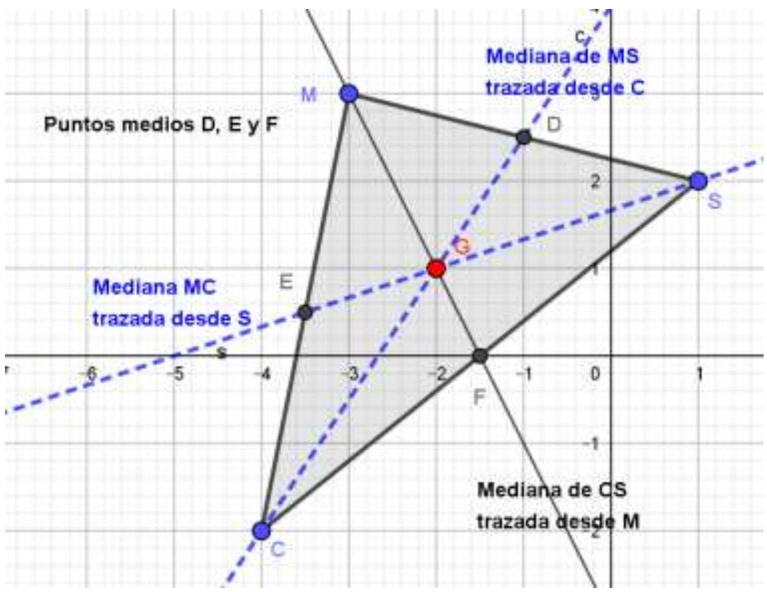
Problema 3. Procede de la misma forma para encontrar las otras dos mediatrices.

Ejercicios.

1. A partir del triángulo anterior escribe la definición de:
   a) La mediana del lado AT:
   b) La altura trazada desde el vértice T.
   c) La bisectriz del ángulo que está en el vértice B

2. Utiliza GeoGebra en el triángulo y traza:
   a) Las medianas de cada lado.
   b) Las alturas trazadas desde cada uno de los vértices.
   c) Las bisectrices de ángulo.

Problema 4. Encontrar el punto de intersección de las medianas del triángulo cuyos vértices son S(1, 2), M(-3, 3) y C(- 4, - 2).
Se ha trazado el triángulo con las mediatrices y su punto de intersección.



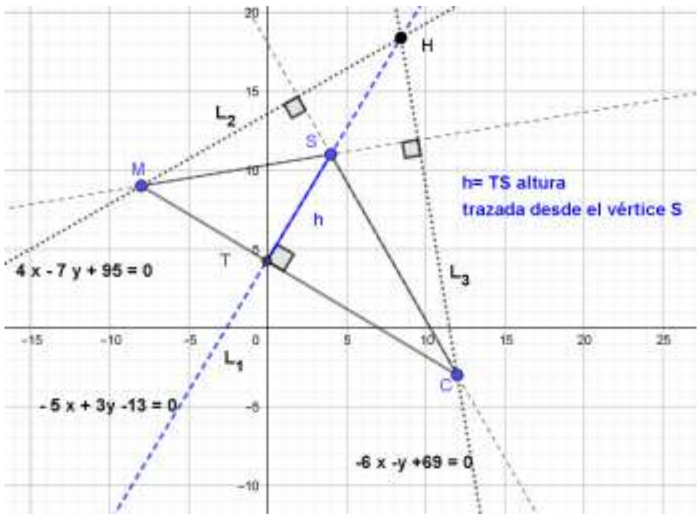
La mediana al lado MC:
Las coordenadas del punto E medio del lado MC son E(___, ____)
La ecuación de la mediana que pasa por los puntos S(1, 2) y E(-3.5, 0.5) es:____________________ .

La mediana al lado SM:
Las coordenadas del punto D medio del lado MS son D(___, ____)
La ecuación de la mediana que pasa por los puntos C(-4, -2) y D(-1, 2.5) es:____________________.

Por lo tanto el punto de intersección, G, de las de las dos medianas anteriores es G(-2, 1), verifícalo resolviendo el sistema
$-x + 3y = 5$ es la mediana del lado MC trazada desde el vértice S.
$-3x + 2y = 8$ es la mediana del lado MS trazada desde el vértice C.

Encuentra la ecuación de la mediana al lado SC y comprueba que el punto $G(-2,\ 1)$ satisface dicha ecuación, la cual es: _____________________________.

Problema 4. Encuentra el punto de intersección, H, de las alturas trazadas desde los vértices del triángulo a sus lados donde los vértices son M(-8, 9), C(12, -3) y S(4, 11). Con GeoGebra sea trazado el triángulo ΔMCSy las alturas con la finalidad de apoyarnos en ella.



Altura L_1 al lado MC

La pendiente del lado MC es $m = -\frac{3}{5}$ y por ser perpendiculares entonces la pendiente de L_1 es $m_{L1} = \frac{5}{3}$, como la altura pasa por S(4, 11), la ecuación es: $-5\,x + 3y - 13 = 0$.

Altura L_2 al lado CS

La pendiente del lado CS es $m =$ y por ser perpendiculares entonces la pendiente de L_2 es $m_{L2} =$, como la altura pasa por M(-8, 9), la ecuación es:

Altura L_3 al lado SM

La pendiente del lado CS es $m =$ y por ser perpendiculares entonces la pendiente de L_3 es $m_{L3} =$, como la altura pasa por C(12, -3), la ecuación es:

Las coordenadas del punto H de intersección de las alturas se obtienen al resolver el sistema:

- 4x + 7y – 95 = 0

-5x + 3y -13 = 0

Por lo tanto las coordenadas son H(,).

6. Fase de Cierre. Proyectos de Trabajo.

En esta sección se exponen los proyectos que los estudiantes, organizados en equipos de tres, tendrán que realizar a lo largo de esta unidad didáctica. Estos proyectos pretenden orientar al estudiante para que construya algunos de los significados más importantes a los que remite la ecuación cartesiana de la recta en el mundo físico. Bajo esta orientación, se plantean diferentes problemas que pueden modelarse con una ecuación lineal.

Estos proyectos les son planteados a los estudiantes en cualquier lugar (fase) de esta unidad didáctica y su evaluación se hará al final de la unidad didáctica con la exposición del mismo por equipo, a sus demás compañeros. El proyecto será supervisado todo el tiempo por el profesor, con lo que tendrá la oportunidad de ir viendo el avance de sus estudiantes a lo largo del desarrollo de esta unidad didáctica.

1. **Proyecto 1. Relación entre temperatura del aire y altitud:** la relación entre la temperatura del aire**,** $T(en\ °F)$ y la altura $h(en\ pies\ snm)$, es aproximadamente lineal para $0 \leq h \leq 20{,}000$. Si la temperatura al nivel citado es $60°F$, un aumento de 5000 pies hace que la temperatura ambiente baje en unos $18°F$.
   a) Expresar T en términos de h, y graficar $h\ vs T$ en un sistema de coordenadas.
   b) Calcular la temperatura aproximada del aire a una altitud de 15,000 pies.
   c) Calcular la altitud aproximada a la cual la temperatura es $0°F$.

   Solución: ***a) T=a*h + b, donde a y b son constantes, h=altitud y T= Temperatura.***

   b) T=6°K.

   c) h=16.67 pies.

2. **Proyecto 2.** En 1990, la producción automotriz en la VW produjo 1,135,000 autos y en el año 2000 produjo 1,825,000. Suponiendo un comportamiento constante cada año.
   a. ¿Cuál fue la tasa promedio de producción anual?
   b. ¿Construye un modelo lineal para la producción de *"y"* vehículos cada año *"x"*?
   c. ¿Cuánto autos se produjeron en 1996?

   Solución: a. **69,000 autos anuales** ***b. y = 69,000x-136,175,000*** ***c. 1,549,000 autos.***

3. Proyecto 3. Considera el cuadrilátero con vértices *A(-6,1), B(-3,-5), C(2,-2) y D(3,3).*

a. Encuentra los puntos medios de *AB* y *CD* y la ecuación de la recta que los une.
b. Encuentra los puntos medios de *AD* y *BC* y la ecuación de la recta que los une.
c. Encuentra el punto de intersección de las rectas que obtuviste en los incisos anteriores.
d. Encuentra los puntos medios de las diagonales *AC* y *BD* y la ecuación de la recta que los une.
e. Prueba que el punto obtenido en el inciso (c) está sobre la recta que obtuviste en (d).

Solución: a. $\boldsymbol{M}\left(-\frac{9}{2},-2\right), \boldsymbol{N}\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right), \boldsymbol{y}=\frac{5}{14}\boldsymbol{x}-\frac{11}{28}.$

b. $\boldsymbol{P}\left(-\frac{3}{2},2\right), \boldsymbol{Q}\left(-\frac{1}{2},-\frac{7}{2}\right), \boldsymbol{y}=-\frac{11}{2}\boldsymbol{x}-\frac{25}{4}.$

c. $\boldsymbol{R}\left(-1,-\frac{3}{4}\right).$ d. $\boldsymbol{S}\left(-2,-\frac{1}{2}\right), \boldsymbol{T}(0,-1), \boldsymbol{y}=-\frac{1}{4}\boldsymbol{x}-1.$

e. $\boldsymbol{R}\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$ ***está en la recta*** $\boldsymbol{y}=-\frac{1}{4}\boldsymbol{x}-1.$

4. Proyecto 4. Peso de una ballena jorobada: el peso esperado, W, en toneladas, de una ballena jorobada, se puede aproximar a partir de su longitud L, en pies, mediante la fórmula $W=1.70L-42.8$, para $30\leq L\leq 50$.

a. Estime el peso de una ballena jorobada de 40 pies.
b. Si el error en la estimación de la longitud puede ser hasta de 2 pies, ¿cuál es el error correspondiente de la estimación del peso?

Solución: ***a. 25.2 toneladas.*** ***b. Hasta 3.4 toneladas.***

5. Proyecto 5. Visita. El CCH Oriente organiza un paseo a las grutas de Cacahuamilpa. Al hacer el análisis del costo, se determina que si asisten 30 alumnos, el costo que debe cubrir cada uno debe ser de $80.00. Si van 40 alumnos entonces el costo será $75.00 por alumno. Si suponemos que la ecuación de demanda es lineal.

a. ¿Cuál sería el costo que debe cubrir cada persona si asisten 90 alumnos?
b. ¿Cuál sería el costo que debe cubrir cada persona si asisten 100 alumnos?
c. ¿Cuál sería el costo que debe cubrir cada persona si asisten 120 alumnos?
d. ¿Cuál es la fórmula que comprueba dicha situación?

Solución: a. $50.00 b. $45.00 c. $$35.00 d. $\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+95.}$

7. Materiales de Apoyo.

Unidad 3. La Recta y su Ecuación Cartesiana.

- ***Sección 1.*** **En cada caso encuentra lo que se te pide de acuerdo con los datos en cada pregunta.**

1. Determina la inclinación de una recta cuya pendiente es $\frac{3}{2}$.

a. 48.5° b. 56.3° c. 62.5° d. 50.7°

2. Determina la inclinación de la recta $y = -x + 7$.

a. 135° b. 145° c. 140° d. 130°

3. Determina la pendiente de una recta cuyo ángulo de inclinación es de 150°.

a. -0.648 b. -0.726 c. -0.500 d. -0.577

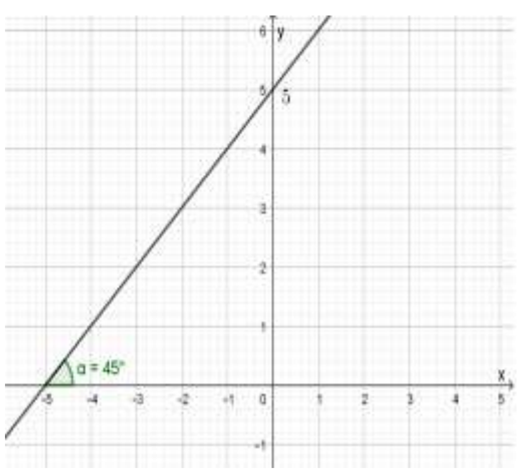
4. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-4,5)$ y cuya pendiente es 2.

a. $y = 2x - 9$ b. $y = 2x + 15$ c. $y = 2x + 13$ d. $y = 2x - 5$

5. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-3,0)\ y\ B(1,2)$.

a. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ b. $y = 2x + 5$ c. $y = \frac{1}{2}x + 1$ d. $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

6. Determina la ecuación de la recta de la figura siguiente.



a. $y = -x + 5$

b. $y = x - 5$

c. $y = x + 5$

d. $y = \frac{1}{2}x + 5$

7. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2,-5)$ y que es paralela a la recta $y = -4x + 11$.

a. $y = -4x + 7$ b. $y = -4x + 13$ c. $y = -4x + 3$ d. $y = -4x + 5$

8. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-3,2)$ y que es perpendicular a la recta $y = -\frac{1}{5}x - 2$.

a. $y = -5x + 6$ b. $y = -5x + 19$ c. $y = -5x + 13$ d. $y = 5x + 17$

9. Determina la ecuación de la recta cuyo valor de la pendiente es -4 y cuya ordenada en el origen es 6.

a. $y = 6x - 4$ b. $y = -6x + 4$ c. $y = -4x + 6$ d. $y = 4x - 6$

10. Determina la forma simétrica de la ecuación de la recta $y = 3x - 12$.

a. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ b. $\frac{x}{4} - \frac{y}{12} = 1$ c. $\frac{x}{12} - \frac{y}{4} = 1$ d. $\frac{x}{5} - \frac{y}{12} = 1$

Aplicación. Una computadora tiene 10 años de uso y su valor actual es de \$23,000, pero hace 4 años su valor era de \$41,400. Si el valor de la computadora varía linealmente con el tiempo, determina: recta que pasa por el punto $P(-4,5)$ y cuya pendiente es 2.

Nota: Considerando el valor (v) del sistema y (t) el tiempo.

11. La ecuación que expresa el valor del sistema en términos del tiempo transcurrido.

a. $v = 4600t - 79000$ b. $v = -4600t + 69000$
c. $v = -4600t + 80000$ d. $v = 4600t + 90000$

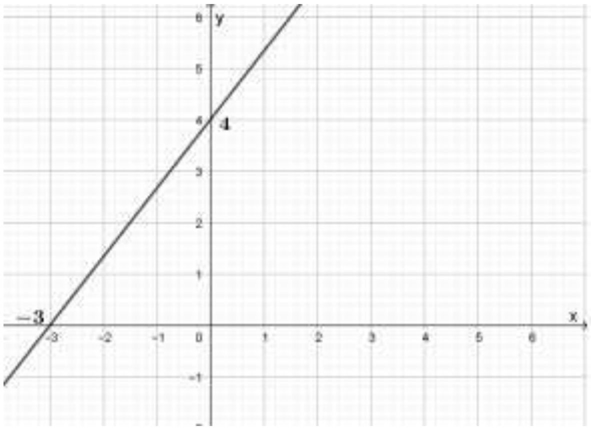
12. ¿Cuál fue el valor del sistema cuando era nuevo?

a. \$79,000 b. \$80,000 c. \$90,000 d. \$69,000

Tabla de respuestas de la sección 1.						
1. b	2. a	3. d	4. c	5. a	6. c	7. c
8. d	9. c	10. b	11. b	12. d		

- ***Sección 2.* En cada caso apóyate de la gráfica (figura) para determinar lo que se te pide.**

13. Determina la forma general de la ecuación de la recta de la figura siguiente.



a. $4x + 3y + 12 = 0$

b. $4x + 3y - 12 = 0$

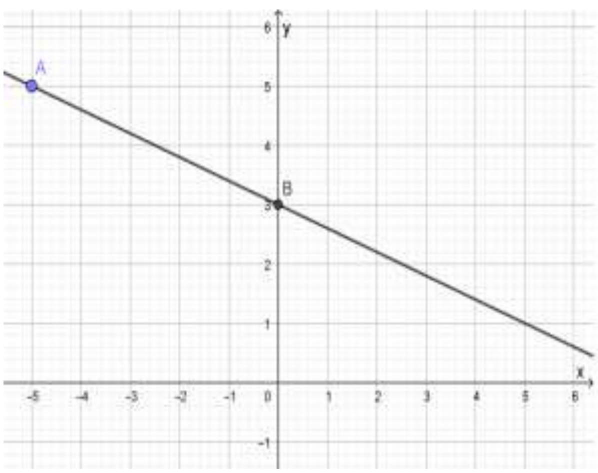
c. $4x - 3y - 12 = 0$

d. $4x - 3y + 12 = 0$

14. La distancia dirigida del origen a la recta $5x - 12y + 26 = 0$.

a. 2 b. -2 c. 3 d. -3

15. Determina la ecuación de la recta de la siguiente figura.



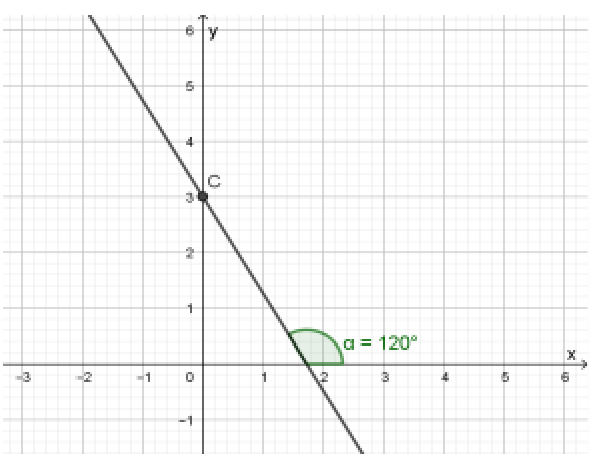
a. $y = \frac{2}{5}x + 3$

b. $y = \frac{2}{5}x - 3$

c. $y = -\frac{2}{5}x + 3$

d. $y = -\frac{2}{5}x - 3$

16. Determina la ecuación de la recta de la siguiente figura.



a. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 3$

b. $y = -\sqrt{3}\,x + 3$

c. $y = \sqrt{3}\,x + 3$

d. $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3$

17. Determina si las rectas $y_1 = 4x + 5$ y $y_2 = \frac{1}{4}x - 3$ son paralelas, perpendiculares o se cortan oblicuamente.

a. Paralelas. b. Perpendiculares. c. Oblicuas.

18. Determina el punto de intersección de las rectas: $y = x + 1$, $y = -\frac{5}{2}x + 8$.

a. $(-3,2)$ b. $(-2,-3)$ c. $(3,2)$ d. $(2,3)$

19. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-3,5)$ y es perpendicular a la recta $y = 3x + 8$.

a. $y = -\frac{1}{3}x + 4$ b. $y = -3x - 4$ c. $y = -\frac{1}{4}x + 4$ d. $y = -4x - 3$

20. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3,-2)$ y es paralela a la recta $2x + 5y + 1 = 0$.

a. $y = -\frac{1}{5}x - \frac{6}{5}$ b. $y = -\frac{1}{3}x - 4$ c. $y = -\frac{2}{5}x - \frac{4}{5}$ d. $y = -\frac{1}{4}x - 3$

Aplicación: Desde un globo aerostático, se lanza verticalmente hacia abajo un bulto de arena con una velocidad de 2 m/seg.

Nota: Magnitudes que cambian uniformemente: $v = 9.8t + (velicidad\ del\ objeto)$.

21. Calcula la velocidad del bulto a los 3.5 segundos.

a. $v = 36.3\ \frac{m}{s}$. b. $v = 42\ .2\ \frac{m}{s}$. c. $v = 46.5\ \frac{m}{s}$. d. $v = 30.7\ \frac{m}{s}$.

22. ¿A los cuántos segundos la velocidad del bulto es de 46.1 m/s?

a. $t = 6.5\ seg.$ b. $t = 5.5\ seg.$ c. $t = 3.5\ seg.$ d. $t = 4.5\ seg.$

Tabla de respuestas de la sección 2.						
13. d	14. b	15. c	16. b	17. c	18. d	19. a
20. c	21. a	22. d				

- ***Sección 3.*** **En cada caso apóyate de la gráfica (figura) para determinar lo que se te pide.**

23. Determina las ecuaciones de las rectas que satisfacen las condiciones siguientes:

		Solución
a)	Pasa por (0,2), $m = 3$.	$3x - y + 2 = 0$
b)	Pasa por (0,4), $m = \frac{1}{3}$.	$x - 3y + 12 = 0$
c)	Pasa por (0,-1), $m = 0$.	$y + 1 = 0$
	Pasa por los puntos:	
d)	$\mathrm{A}(2, -3)$y $\mathrm{B}(4,2)$.	$5x - 2y - 16 = 0$
e)	$\mathrm{A}(5, -3)$ y $\mathrm{B}(5,2)$.	$x - 5 = 0$

24. En el triángulo de vértices $A(-5,6), B(-1,-4)\ y\ C(3,2)$. Determina las ecuaciones de las medianas y el punto de intersección de las mismas.

Solución: $7x + 6y - 1 = 0; x + 1 = 0; x - 6y + 9 = 0$. $P_{Intersección}\left(-1, \frac{4}{3}\right)$.

25. Determina el área y la longitud de la altura trazada desde el vértice *A* al lado *BC* de los triángulos cuyos vértices son:

$A(-3,3), B(5,5), C(2,-4)$	***Solución:*** $\boldsymbol{Altura} = \frac{\mathbf{11\sqrt{10}}}{\mathbf{5}}$, $\boldsymbol{Área} = \mathbf{33u^2}$.
$A(5,6), B(1,-4), C(-4,0)$	***Solución:*** $\boldsymbol{Altura} = \frac{\mathbf{66\sqrt{41}}}{\mathbf{41}}$, $\boldsymbol{Área} = \mathbf{33u^2}$.

26. Transforma las siguientes ecuaciones a la forma simétrica y trazar la gráfica de cada una de las ecuaciones.

Ecuación General	Ecuación simétrica
a. $-5x + 4y = -20$	$\frac{x}{4} + \frac{y}{-5} = 1$
b. $-8x + 3y = -12$	$\frac{x}{1.5} + \frac{y}{-4} = 1$
c. $5x + 3y = -10$	$\frac{x}{-2} + \frac{y}{-10/3} = 1$

- ***Sección 4.*** **Proyectos de trabajo: Problemas de aplicación de la línea recta.**

Consideremos aquí lo aprendido en las secciones anteriores y lo realizado a lo largo de esta unidad en el salón de clases, resuelve lo siguiente.

Problema 1. La población de Tlaxcala era alrededor de 25, 000 en 1970 y de 42, 000 en 1980. Suponiendo un crecimiento lineal, estima la población para los siguientes años.

a) 1965 $\rightarrow$16,500 Hab. b) 1977 $\rightarrow$36,900 Hab. c) 1995 $\rightarrow$70,000 Hab.

Solución.

Si el año de 1970 es considerado como inicial, es decir, como el año cero, 0, y si además la población se expresa en miles, entonces el punto (0, 25) indica que es el año cero, 1970, hay una población de 25, 000 habitantes, de manera similar ocurre para el punto (10, 42), indica que después de 10 años, 1980, hay una población de 42, 000 habitantes. Como se ha supuesto que el comportamiento es lineal entonces la ecuación es:

$$17x - 10y = -250$$

La cual se puede escribir como: $y = 1.7x + 25$ donde x es el año e y son habitantes.

Problema 2. En 1950 la esperanza de vida para los hombres era de 65 años. En 1970 era de 68 años, Suponiendo que la esperanza de vida es lineal ¿cuál fue la esperanza de vida durante los siguientes años? **Solución:** $y = \frac{3}{20}x + 65$.

a) 1960. Para este año han pasado 10 años a partir de 1950, por lo tanto x = 10 entonces y = 66.5 años es la esperanza de vida.
b) 1990. Para este año han pasado 40 años a partir de 1950, por lo tanto x = 40 entonces y = 71 años es la esperanza de vida.

Solución.

Si el año de 1950 es considerado como inicial, es decir, como el año cero, 0, entonces el punto (0, 65) indica que es el año cero, 1950, la esperanza de vida es 65 años, de manera similar ocurre para el punto (20, 68), indica que después de 20 años, 1970, la esperanza de vida es 68 años. Como se ha supuesto que el comportamiento es lineal entonces la ecuación es:

$$3x - 20y = -13003$$

La cual se puede escribir como: $y = \frac{3}{20}x + 65$ donde x es el año, e y *es la esperanza de vida*.

Problema 3. Si con un peso de 400 gramos suspendido en el extremo de un resorte, este se estira 25mm, mientras que con un peso de 300 gramos se alarga 18.75 mm y si tiene un comportamiento lineal.

a) ¿Cuánto estirará el resorte con un peso de 150 gramos?
   $y = \frac{625}{10{,}000}(150) = 9.375,$ por lo tanto $y = 9.375\ mm$.

b) Si el resorte se estira 30 mm ¿Qué peso se ha suspendido en extremo del resorte? $30 = \frac{625}{10{,}000}x$ implica que $\frac{30(10\ 000)}{625} = x$ por lo tanto $x = 480\ gramos$.

Solución. Considerando que los puntos son (400, 25) y (300, 18.75) entonces la ecuación es: $6.25x - 100y = 0$ la cual se puede escribir como: $y = \frac{625}{10{,}000}\, x$ donde x esta en gramos e y en mm.

Problema 4. Un comerciante puede vender 20 rasuradoras eléctricas al día precio de $250 cada una, pero puede vender 30 si les fija un precio de $200 a cada rasuradora eléctrica. Determinar la ecuación de demanda, suponiendo que el comportamiento es lineal.

Solución. Los puntos son $(20{,}250)\ y\ (30{,}200)$ entonces su ecuación de demanda es: $y = -5\, x + 350$.

Problema 5. El gobierno de la ciudad tiene un presupuesto de $200 millones de capital para el gasto sobre el transporte e intenta utilizarlo para construir metros subterráneos o carreteras. Cuesta $2.5 millones por milla para construir carreteras y $4 millones por millas para construir los subterráneos. Encontrar la relación entre el número de millas de carretera y de subterráneo que puede construir para utilizar por completo el presupuesto disponible. Interprete la pendiente de la relación que se obtiene.

Solución. Considerando la información se tiene que:

$2.5x =$ Costo de construir x millas de carretera.

$4y =$ Costo de construir y millas de subterráneo entonces el costo presupuestado es de 200 millones por lo tanto: $2.5x + 4y = 200$.

La cual se puede escribir como: $y = -\frac{5}{8}\, x + 50$

Donde la pendiente es $-\frac{5}{8}$, la cual expresa que la construcción de cada milla adicional de la carretera será a un costo de $\frac{5}{8}$ de millas de construcción de subterráneo.

Problema 6. A una compañía le cuesta $ 75 producir 10 unidades de cierto artículo al día y $120 producir 25 unidades del mismo artículo al día.

a) Determine la ecuación de costos, suponiendo que es lineal.
b) ¿Cuál es el costo de producir 20 artículos al día?
c) ¿Cuál es el costo variable y el costo fijo por artículo?

Solución. Si consideramos que:

$x =$ Es el número de unidades.

$y =$ Costo.

Si formamos las parejas: (10,75) y (25, 120).

Entonces la ecuación es de la forma: $-3x + y = 45$.

a) La ecuación de costos es $y = 3x + 45$.

b) El costo de producir 20 artículos por día es de $105.

c) El costo fijo es de 45 y el costo variable es de $3x$.

Problema 7. La compañía de mudanzas Ramírez cobra $70 por transportar cierta maquina por 15 millas y $100 por transportar la misma máquina por 25 millas.

a) Determine la relación entre la tarifa total y la distancia recorrida, suponiendo que es lineal.
b) ¿Cuál es la tarifa mínima por transportar esta máquina?
c) ¿Cuál es la cuota por cada milla que la máquina es transportada?

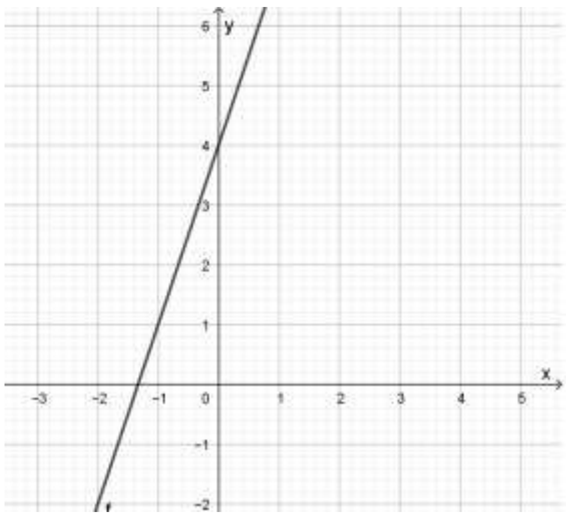
Solución. Los puntos son (15, 70) y (25, 100) entonces.

a) $y = 3x + 25$.
b) Costo fijo $25.
c) Si $x = 1$ millas entonces $y = 3(1) + 25 = 28$, por lo tanto $y = 28$.

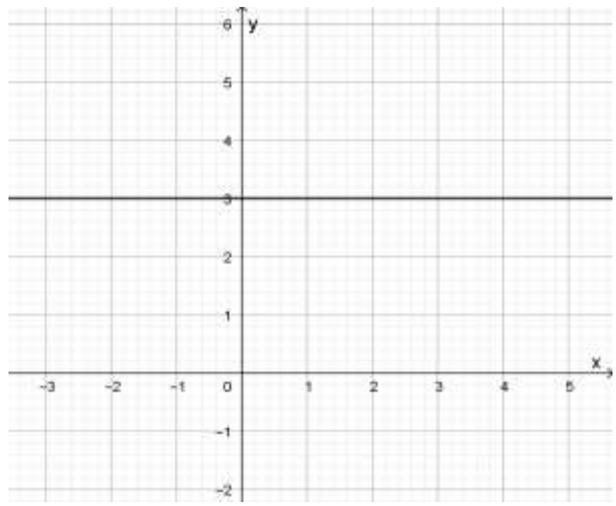
8. Autoevaluación.

1. Con las gráficas expuestas abajo, contesta las siguientes preguntas

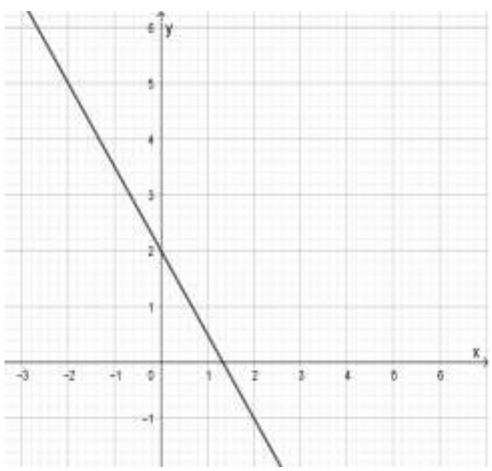
a.



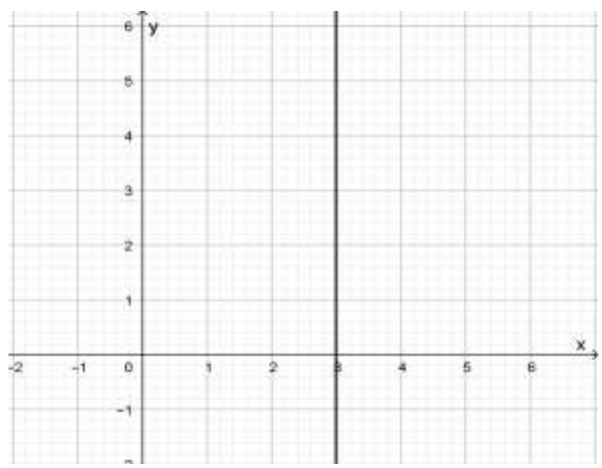
b.



c.



d.



i. ¿Cuál de las rectas tiene pendiente positiva?_________.
ii. ¿Cuál de las rectas tiene pendiente cero?____________.
iii. ¿Cuál de las rectas tiene pendiente negativa?_________.
iv. ¿Cuál de las rectas tiene inclinación de 90°?__________.
v. ¿El ángulo de inclinación de qué recta es un ángulo agudo?_______.
vi. ¿El ángulo de inclinación de qué recta es un ángulo obtuso?_______.

2. Determina la pendiente de una recta cuyo ángulo de inclinación es de 60°

a. 1.732 b. 1.50 c. 1.46 d. 2.1

3. Determina la inclinación de la recta $y = \frac{2}{5}x + 4$.

a. 25.4° b. 19.5° c. 24.5° d. 21.8°

4. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-3{,}25)\ y\ Q(2,-10)$.

a. $y = 7x - 9$ b. $y = -7x - 5$ c. $y = -7x - 4$ d. $y = -7x + 4$

5. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-3,-2)$ y cuyo valor de la pendiente es $-\frac{2}{3}$. Escribe la ecuación en la forma pendiente-ordenada en el origen.

a. $y = -\frac{2}{3}x - 4$ b. $y = -\frac{2}{3}x + 4$ c. $y = \frac{2}{3}x - 4$ d. $y = -\frac{2}{3}x + 5$

6. Determina la ordenada en el origen de la recta que pasa por los puntos $A(-4{,}5)$ y $B(2,-7)$.

a. 2 b. -2 c. 3 d. -3

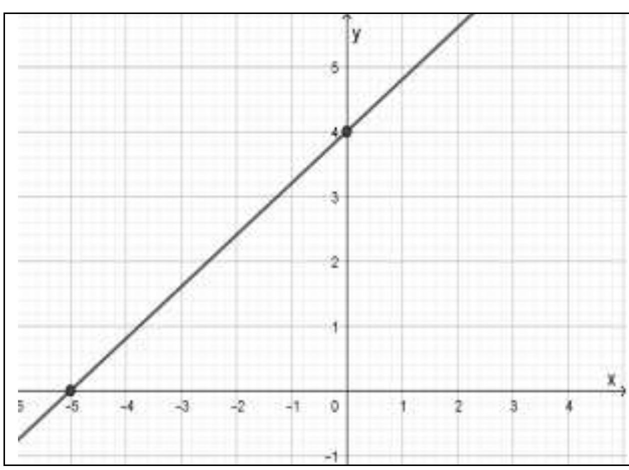
7. Determina el punto en el que la recta que pasa por el punto $A(2{,}5)$ y cuya pendiente es 3 corta al eje y.

a. $(0{,}1)$ b. $(1{,}0)$ c. $(0,-1)$ d. $(-1{,}0)$

8. Determina la ecuación de la recta cuyo valor de la pendiente es -4 y cuya ordenada en el origen es 6.

a. $y = -4x + 6$ b. $y = -6x + 4$ c. $y = 6x - 4$ d. $y = 4x - 6$

9. Determina la ecuación de la recta de la siguiente figura.



a. $y = \frac{4}{5}x - 5$
b. $y = \frac{4}{5}x - 4$
c. $y = \frac{4}{5}x + 5$
d. $y = \frac{4}{5}x + 4$

10. Determina la forma simétrica de la ecuación de la recta cuya abscisa y ordenada en el origen son 5 y -3respectivamente.

a. $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$ b. $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ c. $-\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ d. $\frac{x}{5}-\frac{y}{3}=1$

11. Determina la forma general de la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(5,-8)$ y cuya pendiente es igual a $-\frac{3}{7}$.

a. $3x-7y-41=0$ b. $-3x+7y+4=0$ c. $3x+7y+41=0$ d. $3x-7y+41=0$

12. Determina si las rectas $r_1: y=-\frac{1}{4}x-1 \;\; y \;\; r_2: y=4x+7$ son paralelas, perpendiculares o se corta oblicuamente.

a. Son paralelas. b. Son perpendiculares. c. Se cortan oblicuamente.

13. La forma pendiente-ordenada en el origen de la recta que pasa por el punto $B(-4,-6)$ y que es perpendicular a la recta $y=-\frac{1}{2}x+8$.

a. $y=2x-2$ b. $y=2x+2$ c. $y=2x-5$ d. $y=2x+5$

14. Determina la forma general de la recta que pasa por el punto $A(-3,1)$ y que es perpendicular a la recta $5x+7y-10=0$.

a. $7x-5y+26=0$ b. $7x+5y+16=0$ c. $7x-5y-16=0$ d. $7x+5y-26=0$

15. Determina la distancia dirigida que hay del punto P$(-2,-3)$ a la recta $8x+15y-24=0$.

a. 5 b. -5 c. 4 d. -4

16. La recta L_1 pasa por los puntos $A(0,5) y \, B(-2,7)$, mientras que la recta L_2 pasa por los puntos $C(1,4) y \, D(4,-8)$. Determina la medida del ángulo obtuso comprendido entre ellas.

a. 153.03° b. 135.05° c. 149.04° d. 140.02°

17. Determina la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos $A(7,4) \; y \; B(-1,-2)$. $8x+15y-24=0$.

a. $4x+3y-15=0$ b. $4x-3y+15=0$ c. $4x-5y+10=0$ d. $5x+4y-10=0$

Aplicación. Contesta las preguntas 18 a 20 con base en la información siguiente. Un equipo de ultrasonido móvil, tiene 56 meses de uso. En un laboratorio te informan que su valor comercial actual es de $37,600, pero hace 14 meses era de $43,200. Si el valor del equipo decrece linealmente con el tiempo.

18. ¿Cuál fue el valor del equipo de ultrasonido cuando era nuevo?

a. $60,000 b. $48,900 c. $37,600 d. $42,500

19. ¿Cuánto se deprecia el equipo mensualmente?

a. $200 b. $400 c. $450 d. 350

20. ¿A los Cuántos meses de uso el equipo ya no tendrá valor comercial?

a. 140 b. 200 c. 160 d. 150

Tabla de respuestas de la Autoevaluación.						
1.	i. a	ii. b	iii. c	iv. d	v. a	vi. c
2. a	3. d	4. d	5. a	6. d	7. c	8. a
9. d	10. d	11. c	12. b	13. b	14. a	15. b
16. c	17. a	18. a	19. b	20. d		

9. Bibliografía Básica.

Bosco, H., M.D. (2003). *Selección de lecturas Didáctica general I.* Facultad de Filosofía y Letras, Mayo.

Cuellar, J.A. (2012). *Matemáticas III.* México: Mc. Graw-Hill.

Mejía, M. *et al.* (2011). *Guía para el Profesor de Matemáticas III.* Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Oriente.

Swokowsky, E. W. y Cole, J. A. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: International Thomson Editores.

Bibliografía Virtual. Sitios consultados.

Se sugiere explorar los sitios electrónicos siguientes.

http://dgb.unam.mx/

http://www.fciencias.unam.mx/servicios/biblioteca/electrónicos

http://phet.colorado.edu/en/simulation/projectile-motion.

UNAM-Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades

Programas de estudio

https://www.cch.unam.mx/programasestudio

Programa de Estudio. Área de Matemáticas I-IV. (2016). Semestres: I a IV. CCH-UNAM.

UNIDAD 4. La Parábola y su Ecuación Cartesiana	MATEMÁTICAS III.
Propósitos: Al finalizar el alumno: Será capaz de obtener la ecuación de una parábola a partir de su definición (foco y directriz) o de elementos necesarios y suficientes. Identificará sus elementos a partir de la ecuación. Resolverá problemas que involucren a la parábola y sus propiedades. **Tiempo: 15 horas.**	

1. **Presentación de la Unidad 4.**

Los matemáticos griegos sabían que cuando un cono o cilindro se corta por un plano se forma una curva llamada sección cónica, lo único que hay que hacer es ir variando el plano. Para nuestro caso si el plano de corte es paralelo a una generatriz (lado del cono), formamos una parábola como se muestra en la figura 1.

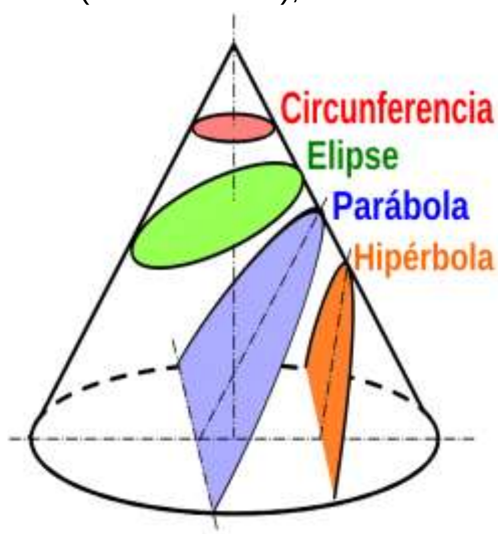
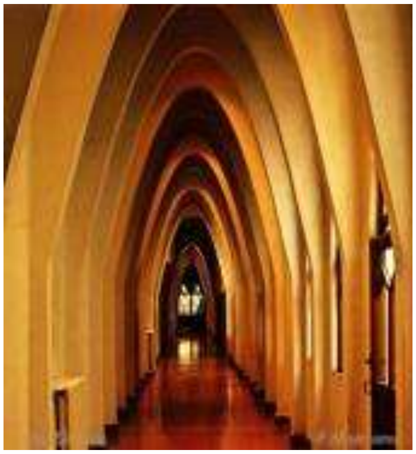


Figura 1. Las Secciones Cónicas

Las **aplicaciones de la parábola en la vida cotidiana** son múltiples. Desde el uso que le dan las antenas satelitales y radiotelescopios para concentrar las señales hasta el uso que le dan los faros de los automóviles al enviar haces de luz paralelos.

Otras aplicaciones de la parábola son: antenas parabólicas, satélites, los chorros de agua, cocinas solares, faros de vehículos y micrófonos parabólicos, puentes colgantes, trayectoria de objetos celestes, deportes, iluminación, entre otras.

De acuerdo con lo anterior, las siguientes figuras ilustran algunos ejemplos antes mencionados: El Palacio de las Teresianas (Gaudí), la fuente de la Diana Cazadora, el arcoíris y un puente colgante. Todos ellos basados en formas parabólicas.



A partir de esto, el estudiante comenzará a ir precisándole un sentido matemático a "lo parabólico", a través del recorrido que haga de las partes expuestas en esta unidad de aprendizaje.
Durante el desarrollo de la unidad se pueden ir presentando los siguientes problemas de aprendizaje:

- Deficiente manejo de las operaciones aritméticas básicas en particular con los números racionales representados en su forma fraccionaria.
- Obtener las ecuaciones de las rectas horizontales y verticales, así como su gráfica.
- Obtener la distancia de un punto a una recta, en particular si la recta es horizontal o vertical.
- Desarrollar un binomio al cuadrado como producto notable o como el producto de dos polinomios.
- Completar un trinomio cuadrado perfecto para pasar de la forma general de una parábola a la ordinaria.
- La solución de sistemas no lineales.
- La traducción de lenguaje algebraico a lenguaje común y viceversa.

Para que el alumno supere estas dificultades proponemos lo siguiente:

- Aplicar una evaluación diagnóstica al inicio de la unidad de aprendizaje.
- Dejar actividades de forma paralela al curso, en base a las deficiencias detectadas en la evaluación diagnóstica.
- Invitarlos a participar en el Programa Institucional de Asesorías (PIA).
- Uso de algunas direcciones electrónicas como: PhET de la Universidad de Colorado en Boulder crea simulaciones interactivas gratuitas de matemáticas y ciencias. Las simulaciones de PhET se basan en investigación educativa extensiva e involucran a los estudiantes mediante un ambiente intuitivo y similar a un juego, en donde aprenden explorando y descubriendo.
  http://phet.colorado.edu/en/simulation/projectile-motion *para lanzar un proyectil, el equipo determina las condiciones del lanzamiento: ángulo de inclinación, resistencia o no del aire, etcétera.*

También será necesario dejar de tarea a los estudiantes sobre la historia de las secciones cónicas, en particular sobre personajes de la antigüedad como: Apolonio de Perga, Euclides, Descartes, Galileo, Newton y Menecmo.

2. Estrategias Didácticas.

Las diversas actividades de la unidad 4, se presentaran utilizando *secuencias didácticas*, con el propósito de posibilitar un mejor aprendizaje, o sea, un aprendizaje que fuese adquiriendo un significado propio en los procesos prácticos cercanos a los estudiantes, con vistas a alcanzar los objetivos actitudinales, conceptuales y procedimentales del área de matemáticas del CCH y, específicamente, aquellos que atañen a esta unidad temática. Al respecto, cabe señalar que los estudiantes tienen mejor comprensión cuando los contenidos se tratan en *su contexto* y, más todavía, si ese aprendizaje es significativo [Ausubel. D. et al., 1983]. Por ello, en el diseño de las experiencias didácticas aquí expuestas, se tuvo que permitir una relación intencionada (no arbitraria) y sustancial (no al pie de la letra) con los conocimientos e ideas del alumno, pues el individuo debe desarrollar una serie de estrategias que le permitan adquirir un conocimiento, colocarlo en su lenguaje y saber manejarlo cuando sea necesario. La eficiencia de este aprendizaje, si es que se puede hablar de algo así, se encuentra en función de su *significatividad*, no de las técnicas memorísticas, lo cual es acorde con las ideas sobre el aprendizaje bajo un enfoque constructivista. Por ello es que sustentamos esta propuesta en las perspectivas del aprendizaje constructivista y colaborativo, así como en el empleo de la computadora como herramienta para lograr aprendizajes significativos. La forma más práctica que utilizaremos para la realización de las secuencias didácticas en el caso que nos ocupa, a saber, el aprender y enseñar matemáticas, es a través de *hojas de* *trabajo*. Por sí solas, las hojas de trabajo no constituyen una secuencia didáctica, sino que están enmarcadas dentro de la organización, contexto y recursos empleados para su efectivo uso en el aprendizaje.

3. Actividades de Enseñanza Aprendizaje.

El estudiante deberá construir la noción de lo parabólico a partir del desarrollo de las siguientes estrategias didácticas.

- Explorará, en una situación o problema donde los estudiantes volteen a su entorno y distingan formas parabólicas (anuncios, fuentes, movimientos parabólicos, etcétera), que dé lugar a una función cuadrática, valores, condiciones, relaciones y comportamientos, a través de tablas, diagramas, etc. que le permitan obtener información del problema, como un paso previo a establecer la representación algebraica.
- Diferenciará dos tipos de variación fundamentales (lineal y cuadrática).
- Obtendrá el modelo de la ecuación cuadrática de una situación dada.
- Diferenciará entre una ecuación cuadrática y una función cuadrática.
- Dará significado al papel que juega el parámetro p en el comportamiento de una parábola con vértice en el origen y fuera de él.
- En el modelo $y^2 = \pm 4px,$ analizará el impacto del parámetro $p,$ y deducirá la orientación de la parábola, según el parámetro si es mayor o menor que cero.
- En el modelo $x^2 = \pm 4py,$ analizará el impacto del parámetro $p,$ y deducirá la orientación de la parábola, según el parámetro si es mayor o menor que cero.
- En el modelo $(y-k)^2 = \pm 4p(x-h),$ interpretará el papel de los parámetros $h, k \; y \; p$.
- En el modelo $(x-h)^2 = \pm 4p(y-k),$ interpretará el papel de los parámetros $h, k \; y \; p$.
- Integrará a su lenguaje términos como concavidad, vértice, traslación, cuerda, eje de simetría, entre otros.
- Expresará una ecuación cuadrática escrita en la forma general $y^2 + Dx + Ey + F = 0,$ a la forma ordinaria $(y-k)^2 = \pm 4p(x-h)$, y podrá describirla a partir del análisis de sus parámetros.
- Expresará una ecuación cuadrática escrita en la forma general $x^2 + Dx + Ey + F = 0,$ a la forma ordinaria $(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$, y podrá describirla a partir del análisis de sus parámetros.
- Resolverá problemas sencillos del mundo físico: antenas de televisión, puentes colgantes, antenas de satélite, arcos de puentes, micrófonos reflectores, recolectores de calor solar, etcétera, e interpretará el comportamiento de la gráfica dentro del contexto de una situación dada.

4. Conceptos Clave.

Lugar Geométrico, eje de simetría, lado recto, directriz, cuerda, excentricidad, cuerda focal, parámetro, vértice.

5. Puesta en Escena de los Aprendizajes por Desarrollar.

Aprendizajes. Al realizar las hojas de trabajo 1 a la 11 y los proyectos de trabajo, el alumno:

- Identifica lo parabólico en su entorno.
- Identifica los elementos que definen la parábola.
- Reconoce la simetría de esta curva.
- Obtiene por inducción la definición de la parábola como lugar geométrico.
- Deduce la ecuación de la parábola con vértice en el origen y de forma análoga la de vértice fuera del origen.
- Determina los elementos de una parábola a partir de su ecuación cartesiana.
- Grafica parábolas dadas sus ecuaciones cartesianas y viceversa.
- Transforma la ecuación general a la ordinaria para encontrar sus elementos.
- Resuelve problemas que involucren la intersección de una recta con una parábola y entre parábolas.
- Resuelve problemas de aplicación.

5.1. Fase de Inicio: preconcepciones de los alumnos (de lo parabólico) y elementos básicos de álgebra.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Comprende lo parabólico en su entorno a través de la fase de inicio, utilizando diferentes registros: aritméticos, algebraicos y geométricos.
Procedimentales:	• Aprende los procedimientos para determinar si una imagen o figura representa un fenómeno parabólico. • Aprende procedimientos para la solución de ecuaciones de segundo grado.
Actitudinales:	• Reflexiona sobre el uso de software especializado para el desarrollo de la unidad, en particular GeoGebra. • Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos. • Valora la formación de una actitud positiva hacia las matemáticas.

En esta fase se investigan las preconcepciones (nociones, ideas, creencias, prejuicios) que los estudiantes tienen por “Lo parabólico”. Esta fase consta de tres partes, descritas en las tres primeras secuencias didácticas.

<table>
<tr><td>LO PARABÓLICO.</td><td>Lo Parabólico en tu Entorno.</td></tr>
<tr><td>FASE DE INICIO.</td><td>El desarrollo de esta fase se lleva a cabo con las siguientes actividades.

<u>Secuencia Didáctica 1.</u>
El desarrollo de esta unidad didáctica comienza al realizarse el nodo "Lo parabólico en tu entorno", cuyos principales objetivos, es que los estudiantes volteen a su entorno y distingan formas parabólicas (anuncios, fuentes, movimientos parabólicos, etc.), por lo que para esta sesión deberán haber realizado previamente las siguientes actividades (extra-clase).

• Los estudiantes (de manera individual) recolectarán imágenes, videos, etcétera, de formas parabólicas en su entorno.

• Realizarán una exploración en Internet para bajar imágenes, videos, etcétera, de formas parabólicas en la arquitectura, en la ingeniería civil, en la pintura, etcétera. “Las cuales se depositaran en el documento titulado: Lo Parabólico en tu Entorno-Imágenes”. En donde el alumno completará las columnas tituladas: imagen, nombre del archivo y cita de la imagen.

Estas imágenes, videos, etc., acerca de "lo parabólico" serán exhibidas en el aula de medios, pues con la computadora es más fácil destacar "lo parabólico" en donde ellos lo hayan encontrado. El profesor, en este caso, irá destacando "lo parabólico" en la fase de desarrollo. Cabe destacar que los estudiantes no sólo participarán con sus ideas, comentarios, etc., sino que deberán ir realizando la hoja de trabajo 1 conforme se desarrolla este análisis.

Más aún, en esta hoja de trabajo, los estudiantes harán uso del software GeoGebra, con el que establecerán fácilmente las representaciones geométricas y aritméticas de un fenómeno parabólico, verbigracia, las parábolas de un arcoíris, de un puente colgante, el lanzamiento de un proyectil, etcétera.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Secuencia Didáctica 2.</u>

Una vez hecho lo anterior, el profesor les pide a los alumnos que contesten un examen diagnóstico (ver hoja de trabajo 2), cuyo propósito es detectar los prejuicios, ideas, etc., que giren en torno al término "lo parabólico", además de que le permitan al profesor tener una idea general de los pre-requisitos matemáticos que se cree son necesarios para el desarrollo de esta unidad didáctica.

Hojas de trabajo para la fase de inicio.

Las hojas de trabajo correspondientes a las secuencias didácticas mencionadas son las siguientes.</td></tr>
</table>

FASE DE INICIO
LO PARABÓLICO
EN TU ENTORNO

Hoja de trabajo 1. Las parábolas de un arcoíris.

En esta hoja de trabajo observarás matemáticamente un arcoíris (ver figura 2), o el Oceanográfico de Valencia (ver figura 3) empleando para ello la interfaz algebro-geométrica GeoGebra.

Figura 2. Arcoíris. Nayarit (Tepic).

Figura 3. Oceanográfico (Valencia) España.

Inserción de la imagen en GeoGebra.

Para insertar una imagen en la interfaz geométrica de GeoGebra puedes hacer lo siguiente.

1. Abre el ícono  "imagen", que está en el menú de elementos geométricos como se muestra en la siguiente figura.

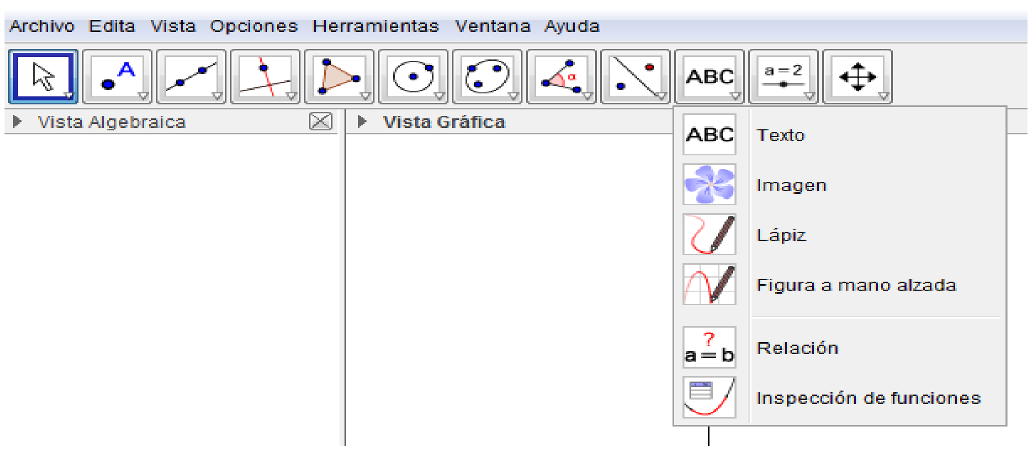


Figura 4. Comando para insertar una imagen en la interfaz geométrica de GeoGebra.

2. Con el puntero (la flecha) acomoda la imagen en la interfaz geométrica. Y oculta los puntos A y B de la figura, con los que tendrías que renombrar los puntos sobre la figura 5.

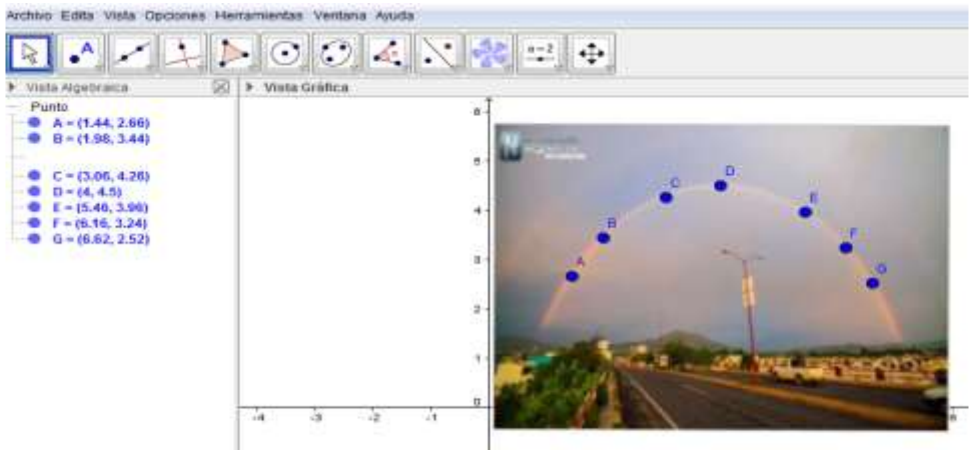


Figura 5. Arcoíris. Nayarit (Tepic).

- **Recolección de datos.**

3. Ahora observaremos matemáticamente la forma del arcoíris y, para ello, colocaremos siete puntos sobre la imagen del arcoíris completando la siguiente tabla.

Punto	*Abscisa (x)*	*Ordenada (y)*
A	*1.44*	*2.66*
B	*1.98*	*3.44*
C	*3.06*	*4.26*
D	*4*	*4.5*
E	*5.46*	*3.96*
F	*6.16*	*3.24*
G	*6.62*	*2.52*

Dependiendo de la ubicación de la figura 5, en la vista gráfica y la colocación de los puntos, estos variaran conforme a lo expuesto en la figura 5.

- **Ajuste de datos a una curva con la hoja de cálculo Excel.**

4. Abre la hoja de cálculo Excel y copia estos siete datos (respetando las columnas).

5. Copia estos datos en una tabla de Excel y haz lo siguiente.

   a. Con el comando de graficación "XY Dispersión", marca los pares de datos como puntos de un plano cartesiano.
   b. Ahora ajusta tus datos a una curva de la mejor manera posible (Excel realiza el ajuste de puntos por el método de mínimos cuadrados[5]). Para ello selecciona uno

[5] Este método lo puedes consultar en la Internet o en la siguiente referencia bibliográfica.
Oda, N.B. (2014). *Introducción al análisis Gráfico de Datos Experimentales, Serie Propedéutica.* Facultad de Ciencias, UNAM, México.

de los puntos y elige el comando "Agregar línea de tendencia", seleccionando la curva que creas que pasa lo más cercanamente por todos tus puntos. Marca las opciones "Presentar ecuación en el gráfico" y "Presentar el valor R cuadrado en el gráfico" y escribe estos valores conforme al Gráfico 1.

función (ecuación): $\boldsymbol{y = -0.2847x^2 + 2.2726x + 0.0013}$

El valor de R^2 es un indicador numérico de qué tan bien se ajusta la curva a tus datos y éste se interpreta como sigue: entre más cercano a 1 sea este valor mejor es el ajuste. En nuestro caso: $\boldsymbol{R^2 = 0.9968}$.

c. Para contestar el inciso (b), traza la gráfica utilizando Excel. Como se muestra en el Gráfico 1.

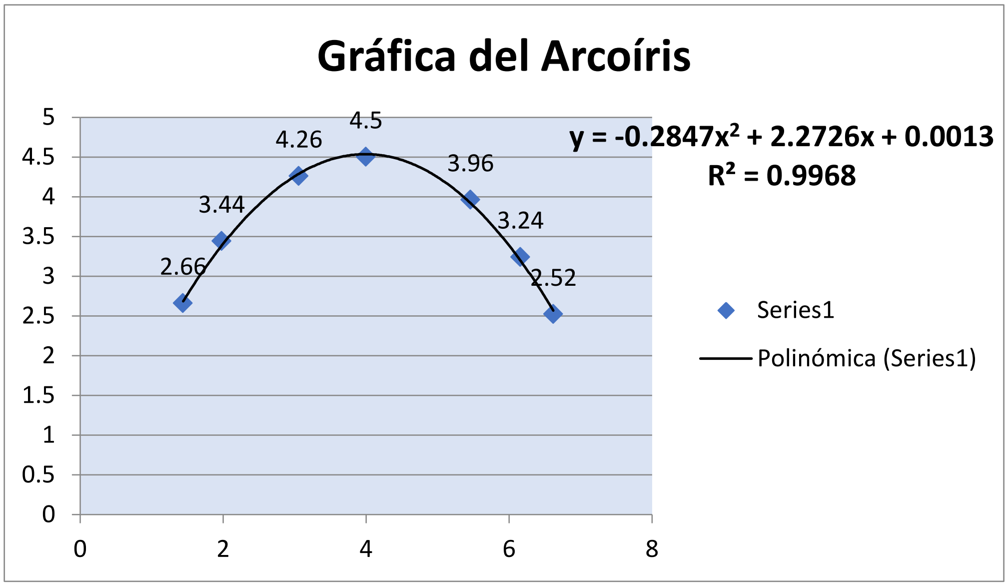


Gráfico 1. Gráfica del Arcoíris de la figura 2.

Conclusiones de la Hoja de Trabajo 1.

Ejercicio extra-clase 1.

6. Determina el modelo *algebraico y geométrico* de la otra curva de la figura 3. Oceanográfico (Valencia) España, o de alguna otra figura que hayas recolectado[6]. Responde las siguientes preguntas. Procede de la misma forma como se realizó con la figura 2.

   a. Ecuación de la línea: y = ______________________________. R^2 ____________.
   b. ¿Con la ayuda de GeoGebra indica cuál es el punto más alto ubicado en la figura?
   c. Para contestar los incisos (a) y (b), traza la gráfica utilizando Excel y con GeoGebra inserta el archivo en donde está la imagen de la figura 3.

FASE DE INICIO.	**Hoja de trabajo 2. Diagnóstico de pre-concepciones acerca de lo parabólico.**

El siguiente conjunto de preguntas permite ubicar las ideas previas de cada estudiante en torno a lo parabólico. Esta se puede realizar de dos maneras posibles, a saber, como examen diagnóstico respondido por cada uno de los estudiantes o, también a manera de entrevista individual, conducida por el profesor. Con el siguiente cuestionario se pretende tener una idea general acerca de los antecedentes inmediatos que requieres para desarrollar la Unidad 4 de Matemáticas III. Es importante destacar que con las respuestas que proporciones podre darme una idea para colaborar en tu aprendizaje de esta unidad.

1. Determina, con un (SI) o un (NO), cuáles de los siguientes *eventos* son *parabólicos*.

   a. El cambio de divisas. (___)
   b. La trayectoria de una pelota de béisbol. (___)
   c. El lanzamiento de un proyectil. (___)
   d. La repetición de las estaciones del año. (___)
   e. El chorro de una fuente. (___)
   f. La variación de la distancia con respecto al tiempo de un móvil a velocidad constante. (___)

2. Encuentra en cada caso el punto o puntos de intersección de los siguientes sistemas.

$x^2 + 4x - y - 5 = 0$ $6x - y - 2 = 0$	$y^2 - x + 9y - 25 = 0$ $x - 6y - 15$
$P_1($ $);$ $P_2($ $)$	$P_1($ $);$ $P_2($ $)$

[6] Cf. Anexo 3, titulado: Lo Parabólico en tu Entorno-Imágenes.

<table>
<tr><td>3. Determina las raíces de la siguiente ecuación cuadrática, por el método de completar cuadrados.</td><td>4. Encuentra la distancia del punto $P(x_1, y_1)$ y la recta $Ax + By + C = 0$.

a) P(4,-5) a la recta $y = 3$.
b) P(-3,4) a la recta $x = -1$</td></tr>
<tr><td>$x^2 + 2x = 35$</td><td>$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$</td></tr>
<tr><td>x_1 = _________.

x_2 = _________.</td><td>d = _________.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Desarrolla las siguientes expresiones:

$(x - 3y)^2 =$

$(2xy + 4xy^2)^2 =$</td></tr>
<tr><td colspan="2">ECUACIÓN DE UN LUGAR GEOMÉTRICO.

6. Determina la ecuación de la recta:
a) Situada 3 unidades a la derecha del eje y.
b) Situada 5 unidades por debajo del eje x.
c) Paralela al eje y y a 7 unidades del punto $P(-2,2)$.
d) Situada 8 unidades a la izquierda de la recta $x = -2$.</td></tr>
</table>

<u>Secuencia Didáctica 3.</u> **Elementos y Técnicas Algebraicas Básicas de Expresiones Cuadráticas.**

Con esta secuencia se pretende recordar y/o establecer los hechos básicos de álgebra que los estudiantes requerirán para el desarrollo de esta unidad didáctica. Para ello, los estudiantes junto con el profesor desarrollarán las siguientes hojas de trabajo.

FASE DE INICIO. LA PARÁBOLA.	Hoja de trabajo 3. Factorización de una ecuación de segundo grado.

Una ecuación de segundo grado con una incógnita se expresa de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0$$

Donde $a, b\ y\ c$ son constantes y x es la incógnita que tiene a 2 como su mayor exponente; ax^2 es el término cuadrático, bx es el término de primer grado lineal y c es el término independiente o constante.

1. Resuelve la ecuación: $x^2 + 9x + 18 = 0$. Consideremos aquí que como el coeficiente del término cuadrático es 1, entonces su factorización se reduce al producto de dos binomios: $(x + 3)(x + 6) = 0$, por lo que sus raíces serán: $x_1 = -3\ \ y\ \ x_2 = -6$.

2. Resuelve los siguientes ejercicios por factorización con ayuda de tu profesor:

$$a)\ x^2 + 7x + 12 = 0$$
$$b)\ x^2 - 12x + 35 = 0$$
$$c)\ 2x^2 - 6x + 9 = 0$$

Actividad extra-clase.

3. Resuelve los siguientes ejercicios.

1) $x^2 + 13x + 36 = 0$ 4) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$

2) $6x^2 - 7x - 3 = 0$ 5) $20x^2 + x - 1 = 0$

3) $x^2 - 14x + 49 = 0$

FASE DE INICIO. LA PARÁBOLA.	Hoja de trabajo 4. Completar cuadrados de una ecuación de segundo grado del tipo: $\boldsymbol{x^2 + bx + c = 0}$.

1) Resuelve los siguientes ejercicios completando el binomio formado con la parte literal a un trinomio cuadrado perfecto, con ayuda de tu profesor.

$$a)\ x^2 + 4x + 4 = 0$$
$$b)\ x^2 - 8x + 16 = 0$$
$$c)\ x^2 + 10x + 25 = 0$$

Actividad extra-clase.

2) Resuelve los siguientes ejercicios:

1) $x^2 - 12x + 36 = 0$ 3) $x^2 + 7x + 12 = 0$

2) $x^2 + 5x - 14 = 0$ 4) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

Finalmente en esta secuencia los estudiantes resolverán la siguiente hoja de trabajo cuyo propósito es la identificación de una ecuación de segundo grado así como su solución por la fórmula general.

FASE DE INICIO. LA PARÁBOLA.	**Hoja de trabajo 5. Resolución de ecuación de segundo por medio de la fórmula general:** $\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$.

1) Resuelve los siguientes ejercicios utilizando la fórmula general:

$a)\ x^2+7x+10=0$ $\quad b)\ x^2-2x+1=0$ $\quad c)\ 2x^2+7x+6=0$

Actividad extra-clase.

2) Resolver las siguientes ecuaciones por fórmula general.

1) $x^2-x-20=0$ $\quad$ 4) $x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}=0$

2) $x^2+11x+24=0$ $\quad$ 5) $8x^2-14x-1$

3) $x^2+7x+10=0$

5.2. Fase de Desarrollo. (Información e introducción de conceptos: interpretación geométrica de la parábola).

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Identifica los elementos que definen a la parábola a través de las diferentes construcciones expuestas en la fase de desarrollo, así como con su interpretación algebraica y geométrica.
Procedimentales:	• Aprende los procedimientos para transformar la ecuación general a la ordinaria y viceversa. • Aprende a manejar de forma eficiente el software GeoGebra.
Actitudinales:	• Reflexiona sobre el uso de software especializado para el desarrollo de la unidad, en particular GeoGebra. • Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Comenzaremos esta fase con la interpretación geométrica de la parábola a través de la secuencia didáctica 4.

Secuencia Didáctica 4.

Para comenzar esta fase, los estudiantes construirán y caracterizarán los elementos básicos de una parábola, para esto, los estudiantes en equipo eligen "**una"** de las siguientes construcciones y la llevan a cabo en el aula de medios, con el auxilio del profesor (ver *hoja de trabajo 6*). Las construcciones restantes las realizarán los estudiantes (individualmente o en equipo) como actividades extra-clase.

FASE DE DESARROLLO.	**Hoja de trabajo 6. La parábola como lugar geométrico: construcción virtual, con regla y compás y con dobleces de una parábola. Caracterización de sus elementos geométricos básicos**

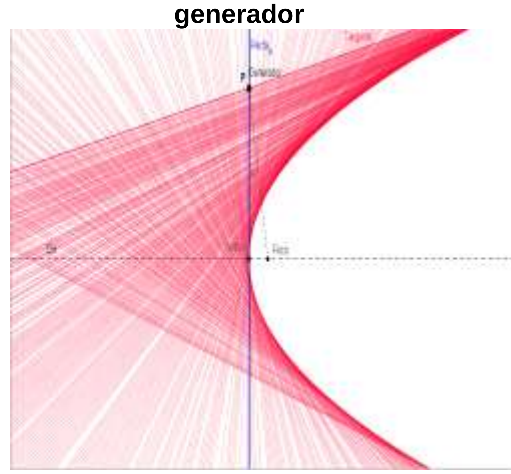
Definición: La parábola es el lugar del plano de todos los puntos que equidistan de un punto llamado foco y de una recta llamada directriz.

A. Construcción de la parábola con GeoGebra.

1) realiza la construcción, de la figura 6, utilizando el protocolo de construcción de GeoGebra.

Protocolo de Construcción de GeoGebra.

Figura 6. Construcción de la parábola a través de sus rectas tangentes, utilizando un punto P generador



Paso	Nombre	Definición
i	Punto A	*Punto auxiliar para construir la recta "a".*
ii	Recta “a”	*Recta que pasa por el punto A.*
iii	Punto Foco	*Punto fuera de la recta "a" y que será el foco de la parábola.*
iv	*Recta Eje de Simetría*	*Recta que pasa por el Foco y que es perpendicular a la recta "a".*
v	*Punto Vértice*	*Vértice de la parábola y que es el punto de intersección de la recta "a" con el Eje de Simetría.*
vi	*Punto Generador*	*Punto (móvil) colocado sobre la recta a".*
vii	*Segmento c*	*Segmento [Foco, Generador].*
viii	*Recta Tangente*	*Recta que pasa por el punto Generador y es perpendicular al segmento "c".*

Una vez hecha la construcción, realiza lo expuesto en las preguntas 1 a 3.

1. Selecciona la recta "tangente" y marca el comando "Activa rastro".
2. Selecciona el punto "Generador" y muévelo.
3. Describe lo que obtuviste: ____ .

2) Elementos de una parábola.

Los elementos básicos de una parábola conforme a la figura 6, son:

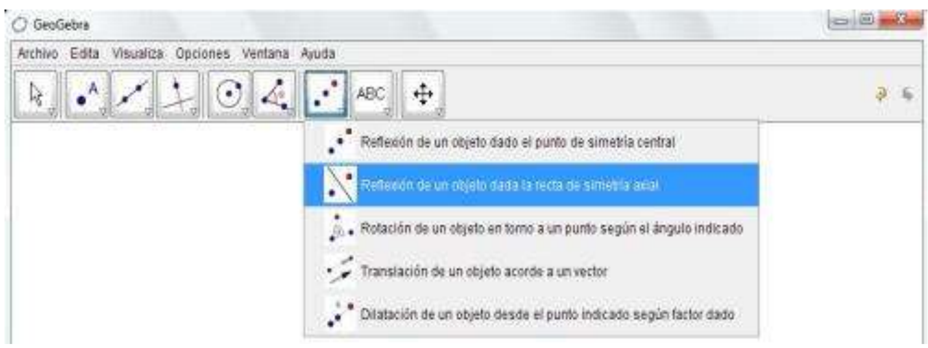
• Foco.	• Vértice.	• Eje de simetría.	• Lado recto.
• Directriz.	• Cuerda	• Cuerda focal	• Parámetro p.

Con la construcción que acabas de realizar ya determinaste el foco de tu parábola. Ahora, para obtener los demás elementos haz lo siguiente.

4. Eje de simetría: por el foco traza la recta perpendicular a la recta "a". Renombra como "EjeSimetría" a la recta así obtenida.
5. Vértice: es el punto de intersección entre el "EjeSimetría" y la recta "a".

6. Directriz: es a recta paralela a la recta "a" que está del "otro lado" del foco y a una distancia igual a la que está el foco de la recta "a". Una manera sencilla de trazarla es la siguiente.

   a. Marca el punto simétrico al foco con respecto a la recta "a". Para ello usa el comando "Reflexión de un objeto, dada la recta…" (renombra este punto como "F_1"):



   b. Levanta la perpendicular al eje de simetría por el punto "F_1". Esta recta es la directriz de tu parábola. Renómbrala como "Directriz".

7. Parámetro p: este número es la distancia que hay del foco al vértice, o de la directriz al vértice (¿por qué?), por lo que para determinar su valor sólo tenemos que trazar el segmento que va del foco al vértice. Hazlo y escribe su valor: p = _________.

8. Lado recto (*latus rectum*): este es el segmento (y su longitud) de la parte de la recta perpendicular al eje de simetría de la parábola que está "dentro" de la parábola, de manera que para trazarlo puedes hacer lo siguiente:

   a. levanta la perpendicular al eje de simetría de forma que pase por el foco;
   b. marca los puntos de intersección de esta perpendicular con la parábola;
   c. finalmente, traza el segmento que une a esos puntos de intersección.

Escribe el valor del lado recto: Lado recto = _________.

B. Construcción de una parábola con regla y compás a través de su definición.

1) Material:

- Hoja de papel tamaño carta (u oficio).
- Regla (de preferencia sin graduación).
- Compás.
- Lápiz y goma.

2) Instrucciones de Construcción de una parábola con regla y compás.

Para construir este lugar geométrico con regla y compás haz lo siguiente en tu hoja de dibujo.

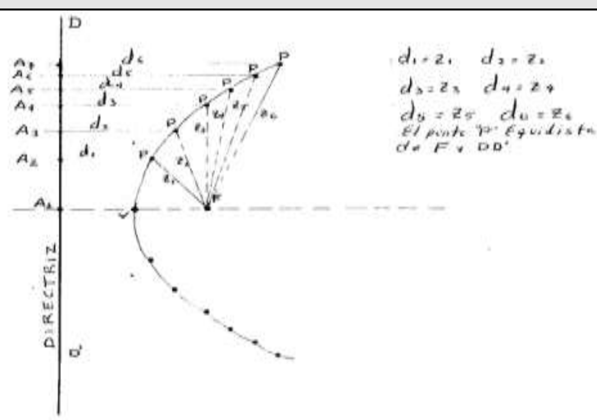
a) Traza un punto (F) y luego una recta (directriz) -vertical, horizontal u oblicua- a la derecha.
b) Traza una recta perpendicular por el punto F y la recta. El punto de intersección entre la perpendicular y la directriz es A_1.
c) Localiza el punto medio del segmento A_1F y asígnale la letra “V”, este será el primer punto de la parábola llamado vértice.
d) Para obtener más puntos de la parábola bastará con trazar rectas paralelas a la directriz hacia la derecha o izquierda del punto “V”, según sea el caso, tantas como puntos queramos de este lugar geométrico.
e) Sobre la directriz arriba o abajo del punto A_1 marca cinco puntos (o más) asígnales las letras A_2, A_3, A_4, A_5, A_6.
f) Con el compás toma la distancia que hay de cada uno de estos puntos localizados en la directriz a cada una de las paralelas (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5).
g) Con centro en F y radio d_1 trace un arco de circunferencia, que corte a la primera paralela arriba y abajo estos puntos son simétricos a la perpendicular,
h) Análogamente con centro en F y radios respectivos Fd_2, Fd_3, Fd_4, Fd_5, trace arcos de circunferencia, que vayan cortando a las siguientes paralelas, las intersecciones que se vayan obteniendo son puntos del lugar geométrico, márcalos u únelos con una curva suave.

***3)* Describe lo que obtuviste:**

4) Elementos de una parábola.

Los elementos básicos de una parábola conforme a la construcción anterior son:

Construcción de la parábola con regla y compás



C. Instrucciones de Construcción de una parábola por medio de dobleces en una hoja de papel blanca tamaño carta.

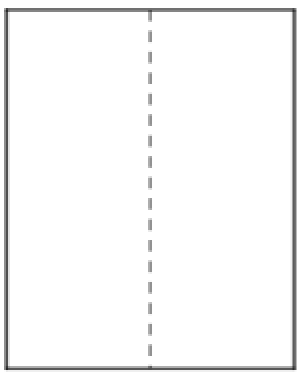
1. Material:

- Hoja de papel cebolla.
- Regla de preferencia sin graduación, para remarcar cada dobles,
- Lápiz y goma.

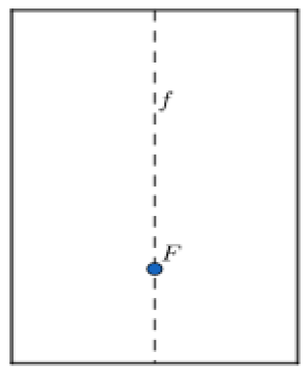
2. Instrucciones de Construcción con dobleces.

Para construir este lugar geométrico con dobleces haz lo siguiente en tu hoja de papel cebolla.

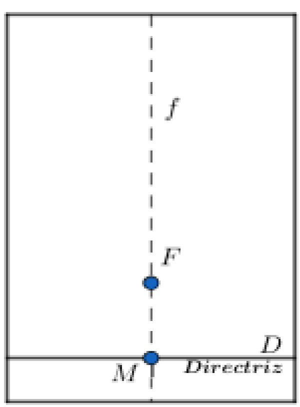
1. Dobla tu hoja a la mitad longitudinalmente de manera que se marque un doblez y puntéala con la regla y un lápiz como se muestra en la siguiente figura.



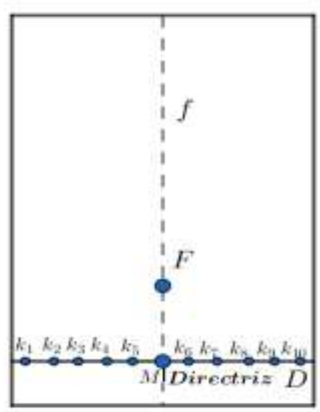
2. El segmento marcado (punteado) sobre la hoja se llama Eje Focal de la parábola y lo simbolizamos con la letra f, marca un punto sobre el eje focal como se muestra en la siguiente figura y asígnale la letra F, el punto recibe el nombre de Foco de la parábola.



3. Realiza un doblez debajo del punto *F* perpendicular al doblez anterior, el punto de intersección de estos dos dobleces será el punto *M.*



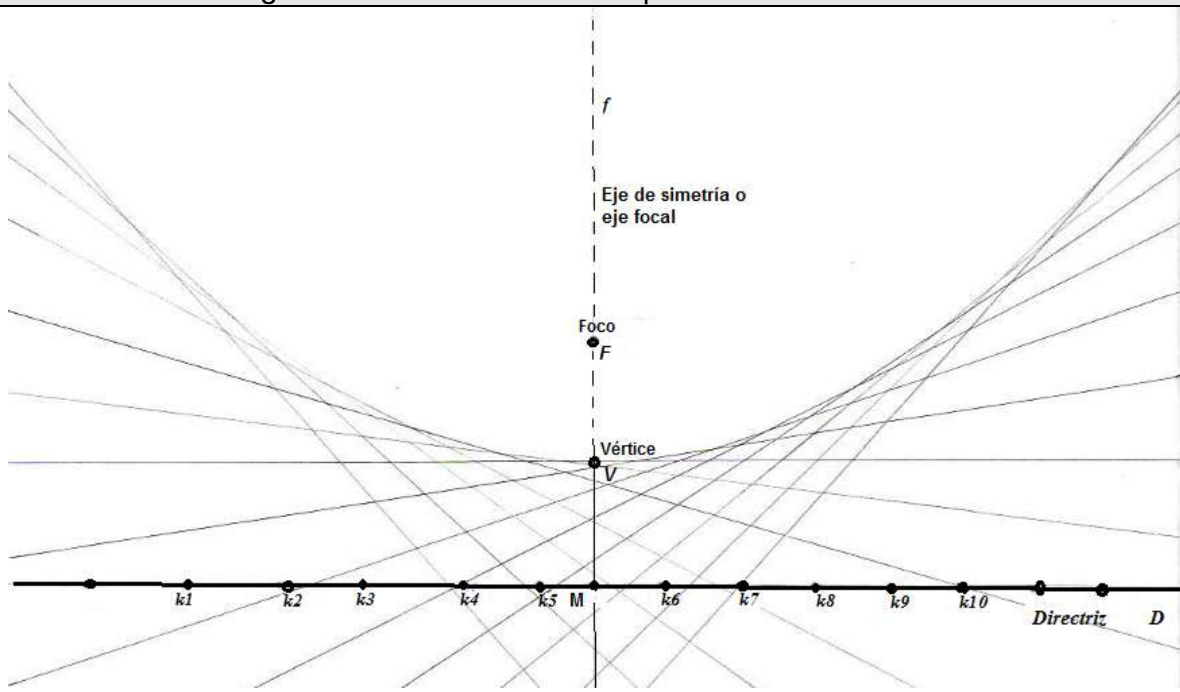
4. Ahora marca varios puntos sobre la directriz, a la izquierda y a la derecha del punto *M*, localiza los puntos k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8, k_9, k_{10}…k_n, la distancia entre ellos no necesariamente tiene que ser la misma.



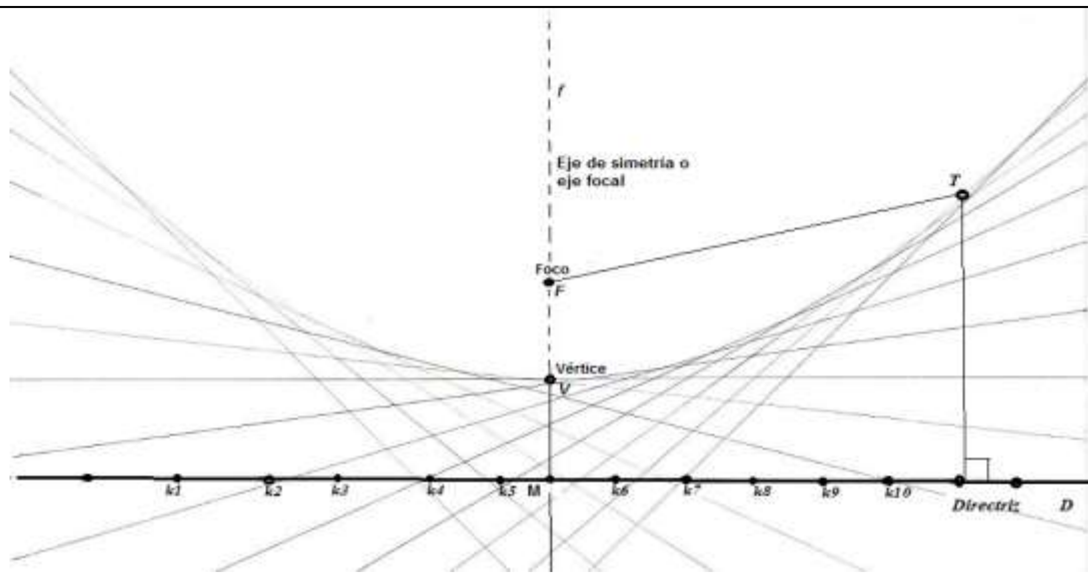
5. Haz coincidir cada uno **de** los *puntos* k_1, k_2, k_3,….k_n, con el punto *F*, y traza un doblez en cada una de estas coincidencias hasta terminar con el último punto k_n.

6. Después de repetir el procedimiento anterior, para cada uno de los puntos marcados sobre la directriz se obtiene una figura parecida a la siguiente.

Figura 7. Construcción de la parábola con dobleces



7. Para encontrar la propiedad que cumplen todos los puntos de la parábola, localiza un punto *T* sobre la curva que se formó en la figura 6 y mide las siguientes distancias, la distancia del punto *F* al punto *T*, y la distancia del punto *T* a la directriz de la parábola como se muestra a continuación

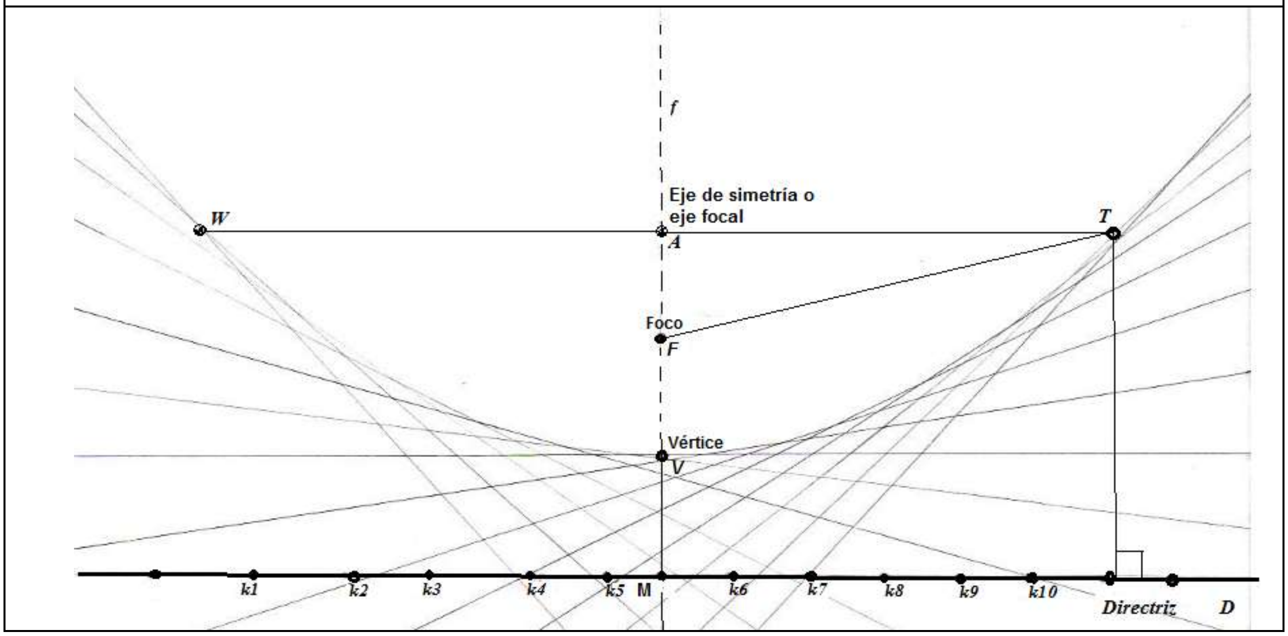


La distancia del punto *T* a la directriz se mide trazando con una escuadra un segmento perpendicular a la directriz desde el punto *T*.

¿Cómo son las distancias entre sí? ______________________ .
Toma otros puntos sobre la parábola i mide nuevamente las dos distancias indicadas y compáralas entre sí, ¿cómo son las distancias entre sí? ___________________.

3) En base a lo observado escribe una definición aproximada de lo que es una parábola.

8. Considera un punto *W* sobre la parábola y traza un segmento que sea perpendicular al eje focal de manera que termine sobre la parábola del otro lado del eje, y sea *A* el punto de intersección del segmento con el eje focal y T el extremo del segmento que está sobre la parábola, como se muestra a continuación.

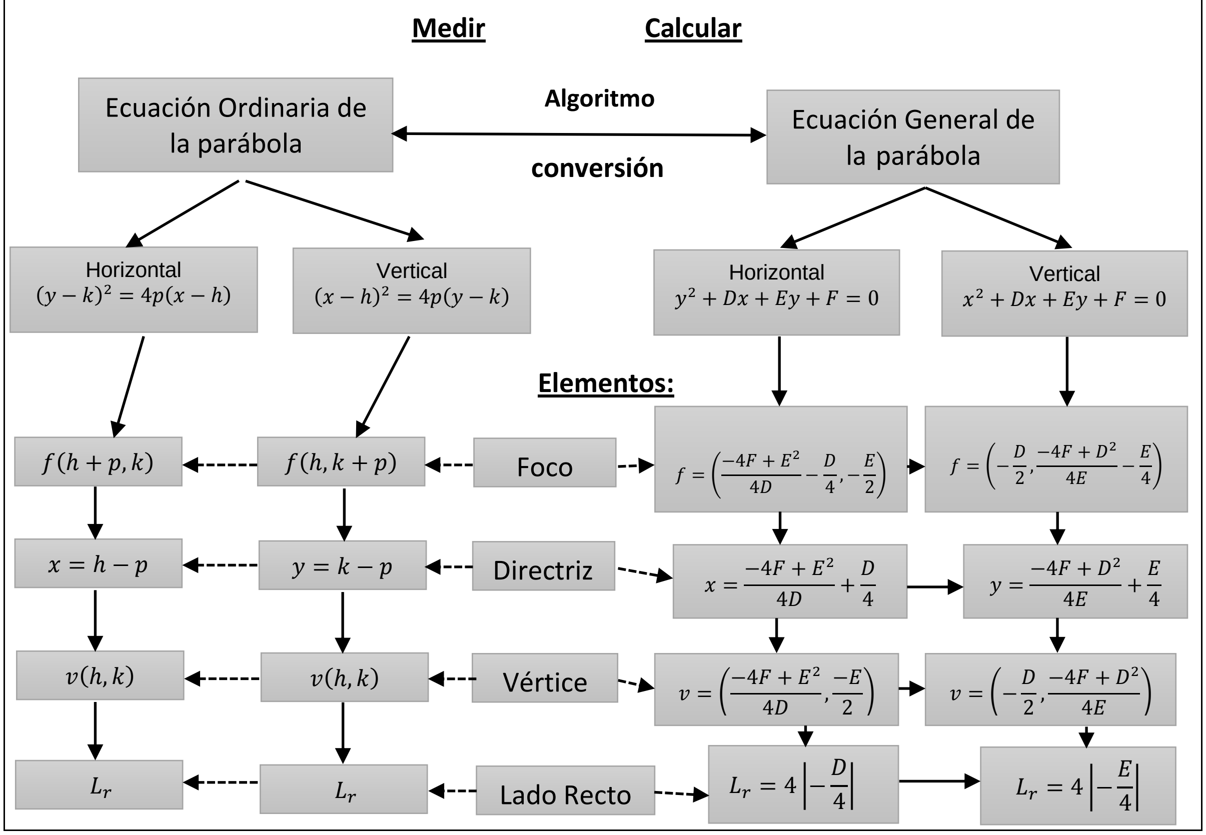


¿Cómo son las longitudes de los segmentos WA y AT entre sí? ______________ .
Toma otros puntos sobre la parábola y repite el procedimiento anterior y compara las longitudes de los segmentos obtenidos, ¿es el eje focal, eje de simetría de la parábola de la parábola? _______________, ¿tiene otro eje de simetría la parábola? ______________ .

5.3. Fase de desarrollo. Interpretación Algebraica.

Comenzaremos esta fase con la interpretación algebraica organizada de acuerdo con el siguiente mapa conceptual. Para continuar con la descripción de las secuencias didácticas 5, 6, 7 y los proyectos de trabajo expuestos en la secuencia didáctica 8.

Mapa conceptual. 1. Interpretación Algebraica de una Parábola.



Secuencia Didáctica 5. Ecuación Canónica de la Parábola con Centro en el Origen.

En esta secuencia los estudiantes resolverán las hojas de trabajo 7 y 8 cuya finalidad es identificar las ecuaciones canónicas horizontal y vertical de la parábola con vértice en el origen. Así como también reconocer las fórmulas para encontrar los elementos de la parábola.

Hoja de trabajo 7. Parábolas horizontales con vértice en el origen. Interpretación geométrica de sus parámetros.
Considerando la hoja de trabajo 6, y la figura 8, podemos determinar analíticamente la ecuación canónica de la parábola, para ello llevamos la construcción al sistema de coordenadas y recordamos las fórmulas para obtener la distancia entre dos puntos y la distancia de un punto a una recta. La distancia del punto *P* al punto *F* se calculara con la expresión: $$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$ mientras que la distancia del punto *P* al punto *A* con la expresión:

$$d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \quad (2)$$

Considerando el punto al punto $P(x_2, y_2)$ y al punto $F(x_1, y_1)$, y aplicando (1), obtenemos:

$$d_1 = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}$$

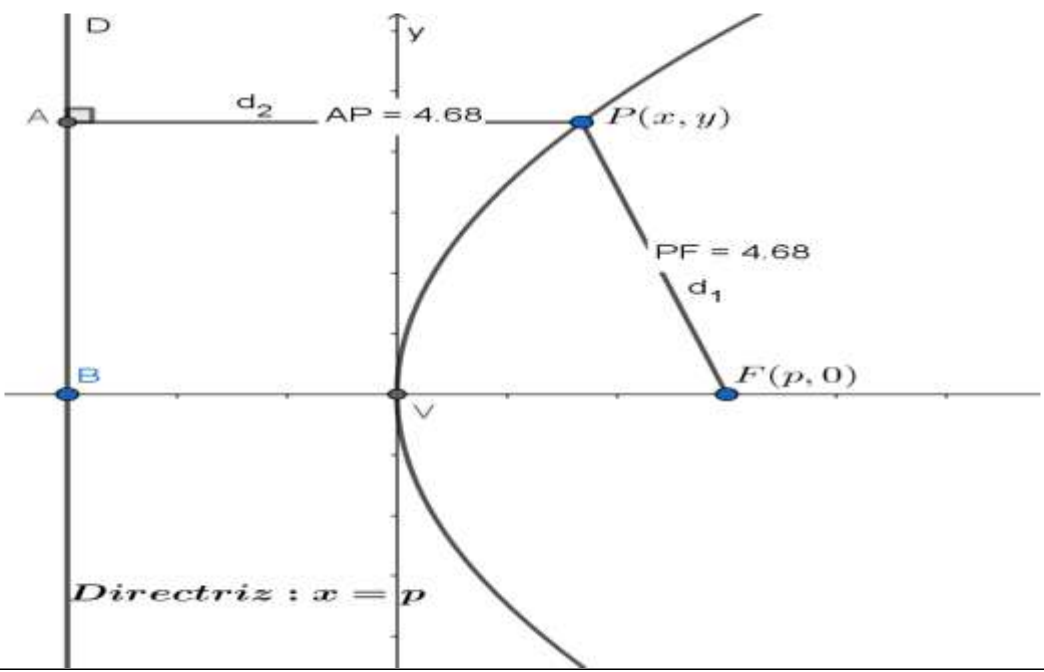
Considerando ahora al punto $P(x_1, y_1)$ y la recta $x - p = 0$, aplicando (2) obtenemos:

$$d_2 = \frac{|1(x) + 0(y) - p|}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2}} = x - p$$

Haciendo $d_1 = d_2$, obtenemos la expresión:

$$y^2 = 4px \ldots\ldots (3)$$

Figura 8. Ecuación canónica de la parábola con vértice en el origen



Las principales características geométricas de una parábola es el punto llamado *foco* y la recta llamada *directriz*. En el caso de una parábola *horizontal* con vértice en el origen estas características tienen las siguientes fórmulas:

Parábola Horizontal

$y^2 = 4px$	$(p, 0)$	$x = -p$	$LR = \|4p\|$
$Ecuación$	$Foco$	$Directriz$	$Lado\ recto$

I. Trazado de una parábola horizontal.

1. Con GeoGebra traza una familia de parábolas horizontales con vértice en el origen. Para ello edita lo siguiente.

   a) $p = 1$
   b) $y^2 = 4px$

2. Haz variar el parámetro p y describe lo que observas.

II. ¿Qué posición tiene la parábola cuando:

a) $p > 0$? b) $p < 0$? c) $p = 0$?

III. De acuerdo a los elementos dados encontrar la ecuación que satisface la condición dada.

3. Determina el foco y la directriz de las siguientes parábolas horizontales:

a) $y^2 - 16x = 0$ c) $y^2 + 28x = 0$

b) $y^2 - 12x = 0$ d) $y^2 + 8x = 0$

Ahora traza estas parábolas en GeoGebra y comprueba tus resultados.

4. Dado el vértice y el foco, hallar la ecuación de la parábola así como de sus otros elementos.

a) $V(0,0)\ F(3,0)$ c) $V(0,0)\ F(-4,0)$

b) $V(0,0)\ F(5,0)$ d) $V(0,0) F(-6,0)$

En GeoGebra, marca el vértice y el foco. Ahora traza la directriz y, con el foco, empleando el comando $Parábola\,[foco\,,\ directriz]$, traza la parábola. Comprueba tus resultados.

5. Marca el vértice y la ecuación de la directriz, y encuentra la ecuación canónica de la parábola.

a) $V(0,0),\ x - 7 = 0$ c) $V(0,0),\ x - \frac{1}{2} = 0$

b) $V(0,0),\ x + 5 = 0$ d) $V(0,0),\ x + 3 = 0$

En GeoGebra, marca el vértice y traza la directriz, utiliza el comando de “simetría central”, encuentra el foco, y empleando el comando $Parábola\,[foco\,,\ directriz]$, traza la parábola. Comprueba tus resultados.

Hoja de trabajo 8. Parábolas verticales con vértice en el origen. Interpretación geométrica de sus parámetros.

Características geométricas de una parábola vertical con vértice en el origen.

Las principales características geométricas de una parábola es el punto llamado *foco* y la recta llamada *directriz*. En el caso de una parábola vertical con vértice en el origen estas características tienen las siguientes fórmulas:

Parábola Vertical			
$x^2 = 4py$	$(0,p)$	$y = -p$	$LR = \|4p\|$
$Ecuación$	$Foco$	$Directriz$	$Lado\ recto$

I. Trazado de una parábola vertical.

1. Con GeoGebra traza una familia de parábolas verticales *con vértice en el origen.* Para ello edita lo siguiente.

a) $p = 1$ b) $x^2 = 4px$

2. Haz variar el parámetro p y describe lo que observas.

II. ¿Qué posición tiene la parábola cuando:

a) $p > 0$? b) $p < 0$? c) $p = 0$?

III. De acuerdo a los elementos dados encontrar la ecuación que satisface la condición dada.

3. Determina el foco y la directriz de las siguientes parábolas verticales:

a) $x^2 - 12y = 0$ c) $x^2 + 2y = 0$
b) $x^2 + 8y = 0$ d) $x^2 - 20y = 0$

Ahora traza estas parábolas en GeoGebra y comprueba tus resultados.

4. Dado el vértice y el foco, hallar la ecuación de la parábola así como de sus otros elementos.

a) $V(0,0)\ F(0,6)$ c) $V(0,0)\ F(0,-3)$
b) $V(0,0)\ F(0,5)$ d) $V(0,0) F(0,-6)$

En GeoGebra, marca el vértice y el foco. Ahora traza la directriz y, con el foco, empleando el comando $Parábola\,[foco\,,\ directriz]$, traza la parábola. Comprueba tus resultados.

5. Marca el vértice y la ecuación de la directriz, y encuentra la ecuación canónica de la parábola.

a) $V(0,0),\ y - 6 = 0$ c) $V(0,0),\ y - \frac{4}{3} = 0$
b) $V(0,0),\ y + 5 = 0$ d) $V(0,0),\ y + 3 = 0$

En GeoGebra, marca el vértice y traza la directriz, utiliza el comando de “simetría central”, encuentra el foco, y empleando el comando $Parábola\,[foco\,,\ directriz]$, traza la parábola. Comprueba tus resultados.

Secuencia Didáctica 6. Ecuación Ordinaria de la Parábola con Centro Fuera del Origen.

En esta secuencia los estudiantes resolverán las hojas de trabajo 9 y 10 cuya finalidad es identificar la ecuación horizontal y vertical de la parábola con vértice en cualquier punto del plano. Así como también conocer las fórmulas para encontrar los elementos de la parábola como son el Foco, el Vértice y la Ecuación de la Directriz.

Hoja de trabajo 9. Parábola horizontal con vértice en cualquier punto en el plano. Interpretación geométrica de sus parámetros.

Características geométricas de una parábola horizontal con vértice en cualquier punto del plano.

Las principales características geométricas de una parábola es el punto llamado *foco* y la recta llamada *directriz*. En el caso de una parábola horizontal con vértice fuera del origen estas características tienen las siguientes fórmulas:

Parábola Horizontal			
$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	$(h+p,k)$	$x = h-p$	$LR = \lvert 4p \rvert$
$Ecuación$	$Foco$	$Directriz$	$Lado\ recto$

I. Trazado de una parábola Horizontal.

1. Con GeoGebra traza una familia de parábolas horizontales *con vértice en cualquier punto del plano.* Para ello edita lo siguiente.

   a) $p = 1 \quad h = 1 \quad k = 1$
   b) $(y-k)^2 = 4p(x-h)$
   c) Haz variar los parámetros h, k, p y describe lo que observas.

II. ¿Cuál es el significado geométrico de los parámetros h, k, p?

III. De acuerdo a los elementos dados encontrar la ecuación que satisface la condición dada.

2. Determina las coordenadas del vértice y el foco, la ecuación de la directriz y el lado recto de las siguientes parábolas horizontales.

   a) $y^2 - 14y - 24x + 25 = 0$ c) $y^2 - 4y - 8x - 12 = 0$
   b) $y^2 + 6y + 4x - 27 = 0$ d) $y^2 - 6y - 12x + 21 = 0$

   Ahora traza estas parábolas en GeoGebra y comprueba tus resultados.

3. Dado el vértice y el foco, hallar la ecuación de la parábola así como de sus otros elementos.

   a) $V(2,5)\ F(3,5)$ c) $V(2,3)\ F(5,3)$
   b) $V(3,2)\ F(5,2)$ d) $V(5,4) F(3,4)$

   En GeoGebra, marca el vértice y el foco. Ahora traza la directriz y, con el foco, empleando el comando $Parábola\,[foco\ ,\ directriz]$, traza la parábola. Comprueba tus resultados.

4. Dado el vértice y la ecuación de la directriz, encuentra la ecuación ordinaria de la parábola.

   a) $V(-3,2),\ x-1=0$ c) $V(3,1),\ x+1=0$
   b) $V(5,4),\ x-7=0$ d) $V(2,5),\ x+4=0$

   En GeoGebra, marca el vértice y traza la directriz, utiliza el comando de "simetría central", encuentra el foco, y empleando el comando $Parábola\,[foco\ ,\ directriz]$, traza la parábola. Comprueba tus resultados.

Actividad extra-clase.

El alumno realizará la siguiente hoja de trabajo, tomando como referencia la hoja de trabajo 9.

Hoja de trabajo 10. Parábola vertical con vértice en cualquier punto en el plano. Interpretación geométrica de sus parámetros.

Características geométricas de una parábola vertical con vértice en cualquier punto del plano.
Las principales características geométricas de una parábola es el punto llamado *foco* y la recta llamada *directriz*. En el caso de una parábola vertical con vértice fuera del origen estas características tienen las siguientes fórmulas:

Parábola Vertical			
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	$(h, k+p)$	$y = k-p$	$LR = \lvert 4p \rvert$
$Ecuación$	$Foco$	$Directriz$	$Lado\ recto$

I. Trazado de una parábola Vertical.

1. Con GeoGebra traza una familia de parábolas verticales *con vértice en cualquier punto del plano.* Para ello edita lo siguiente.
   a) $p = 1 \quad h = 1 \quad k = 1$
   b) $(x-h)^2 = 4p(y-k)$
   c) Haz variar los parámetros h, k, p y describe lo que observas.

II. ¿Cuál es el significado geométrico de los parámetros h, k, p?
III. De acuerdo a los elementos dados encontrar la ecuación que satisface la condición dada.

2. Determina las coordenadas del vértice y el foco, la ecuación de la directriz y el lado recto de las siguientes parábolas horizontales.
   a) $x^2 + 8x - 8y + 24 = 0$ c) $x^2 - 6x - 12y + 38 = 0$
   b) $x^2 - 6x - 12y - 15 = 0$ d) $x^2 - 8x + 5y + 4 = 0$
   Ahora traza estas parábolas en GeoGebra y comprueba tus resultados.

3. Dado el vértice y el foco, hallar la ecuación de la parábola así como de sus otros elementos.
   a) $V(-1,4)\ F(-1,0)$ c) $V(-5,8)\ F(-5,5)$
   b) $V(-3,-5)\ F(-3,-2)$ d) $V(3,-1) F(3,1)$
   En GeoGebra, marca el vértice y el foco. Ahora traza la directriz y, con el foco, empleando el comando $Parábola\,[foco\,,\ directriz]$, traza la parábola. Comprueba tus resultados.

4. Dado el vértice y la ecuación de la directriz, encuentra la ecuación ordinaria de la parábola.
   a) $V(3,2),\ y+1=0$ c) $V\left(3,\frac{5}{3}\right),\ y-2=0$
   b) $V(3,-1),\ y-2=0$ d) $V(3,1),\ y-3=0$
   En GeoGebra, marca el vértice y traza la directriz, utiliza el comando de “simetría central”, encuentra el foco, y empleando el comando $Parábola\,[foco\,,\ directriz]$, traza la parábola. Comprueba tus resultados.

Secuencia Didáctica 7. Tránsito de la Ecuación General a la Ordinaria de una Parábola.

En esta secuencia didáctica el alumno transita de la ecuación general de la parábola a la ecuación ordinaria, para ello requiere aplicar lo expuesto en la hoja de trabajo 4 y resolver la hoja de trabajo 11.

Hoja de trabajo 11. Tránsito de la ecuación general de la parábola a la ecuación ordinaria aplicando el método de completar cuadrados.

I. Ecuación ordinaria de la parábola.

Eje paralelo al eje de las abscisas.	Eje paralelo al eje de las ordenadas.
$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

1. Completa el procedimiento para determinar la ecuación ordinaria de la parábola que tiene como ecuación general:

$$y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$$

a) Ordena la ecuación de tal forma que los términos que no contienen a "*y*", se encuentren en el segundo miembro.
   $y^2 - 4y =$ _______.

b) $y^2 - 4y +$____$= 8x - 28 +$___ Completando el trinomio cuadrado en "*y*".

c) $(y -$ __ $)^2 = 8x - 24$ Factorizando el trinomio y simplificando el segundo miembro.

d) $(y - 2)^2 = 8\ (x -$ __$)$ Factorizando el segundo miembro para obtener la ecuación ordinaria: _________________________.

e) La parábola tiene su eje de simetría paralelo al eje de coordenadas ________________.

f) El vértice tiene coordenadas (,)

g) El valor del parámetro *p* es __________

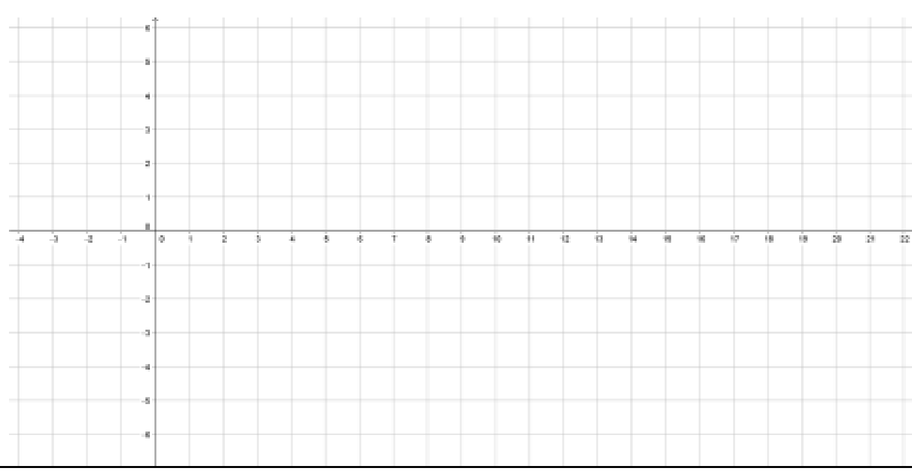
h) Las coordenadas del foco son:__________

i) La longitud del lado recto es_____________

j) La ecuación de la directriz es_____________

k) La ecuación del eje de simetría es_________

l) Traza la gráfica en el siguiente plano cartesiano.



2. Completar el procedimiento para determinar la ecuación ordinaria de la parábola que tiene como ecuación general: $y^2 - 6y + 8x + 17 = 0$.

a) Ordena la ecuación de tal forma que los términos que no contienen a "*y*", se encuentren en el segundo miembro.

$y^2 - \_\_ = -8x - \_\_\_$.

b) $y^2 - 6y + \_\_\_\_ = -8x - 17 + \_\_\_$ Completando el trinomio cuadrado en "*y*".

c) $(y - \_\_)^2 = -8x - \_\_\_$ Factorizando el trinomio y simplificando el segundo miembro.

d) $(y - 3)^2 = -8\ (x + \_\_)$ Factorizando el segundo miembro para obtener la ecuación ordinaria: _________________________.

e) La parábola tiene su eje de simetría paralelo al eje de coordenadas ________________.

f) El vértice tiene coordenadas (,)

g) El valor del parámetro *p* es __________

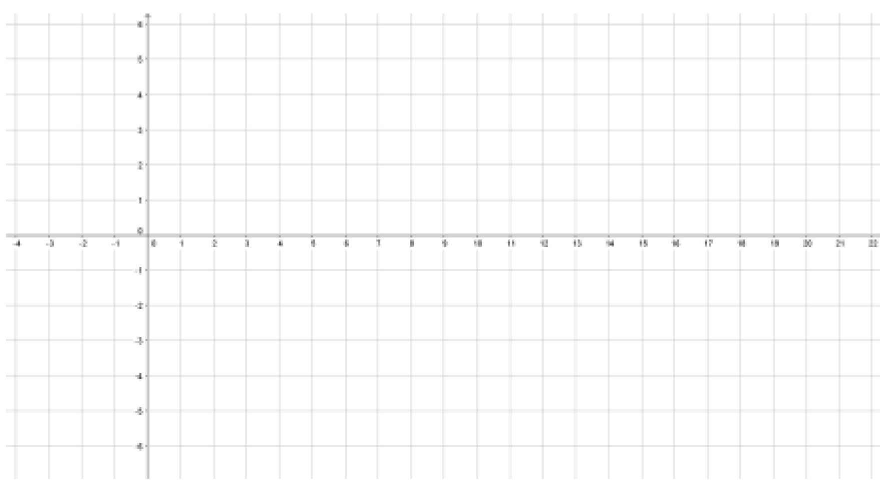
h) Las coordenadas del foco son:__________

i) La longitud del lado recto es_____________

j) La ecuación de la directriz es_____________

k) La ecuación del eje de simetría es_________

l) Traza la gráfica en el siguiente plano cartesiano.



3. Completar el procedimiento para determinar la ecuación ordinaria de la parábola que tiene como ecuación general:

$$x^2 + 16x - 20y - 136 = 0$$

a) Ordena la ecuación de tal forma que los términos que no contienen a "*x*", se encuentren en el segundo miembro.

$x^2 + 16x = \_\_\_\_\_\_\_\_$.

b) $x^2 + 16x + \_\_\_ = 20y + 136 + \_\_\_$ Completando el trinomio cuadrado en "*x*".

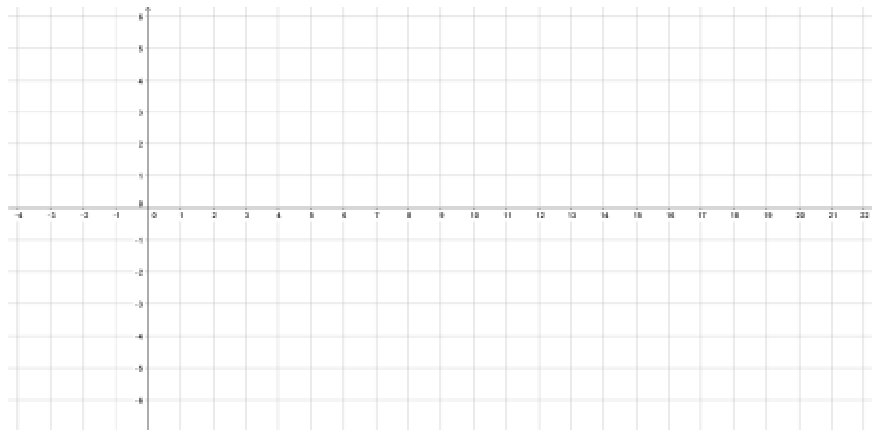
c) $(x + \_\_)^2 = 20y + \_\_\_$ Factorizando el trinomio y simplificando el segundo miembro.

d) $(x + 8)^2 = 20\ (y + \_\_)$ Factorizando el segundo miembro para obtener la ecuación ordinaria. ____________________________.

e) La parábola tiene su eje de simetría paralelo al eje de coordenadas ________________.

f) El vértice tiene coordenadas (,)

g) El valor del parámetro *p* es __________
h) Las coordenadas del foco son:__________
i) La longitud del lado recto es_____________
j) La ecuación de la directriz es_____________
k) La ecuación del eje de simetría es_________
l) Traza la gráfica en el siguiente plano cartesiano.

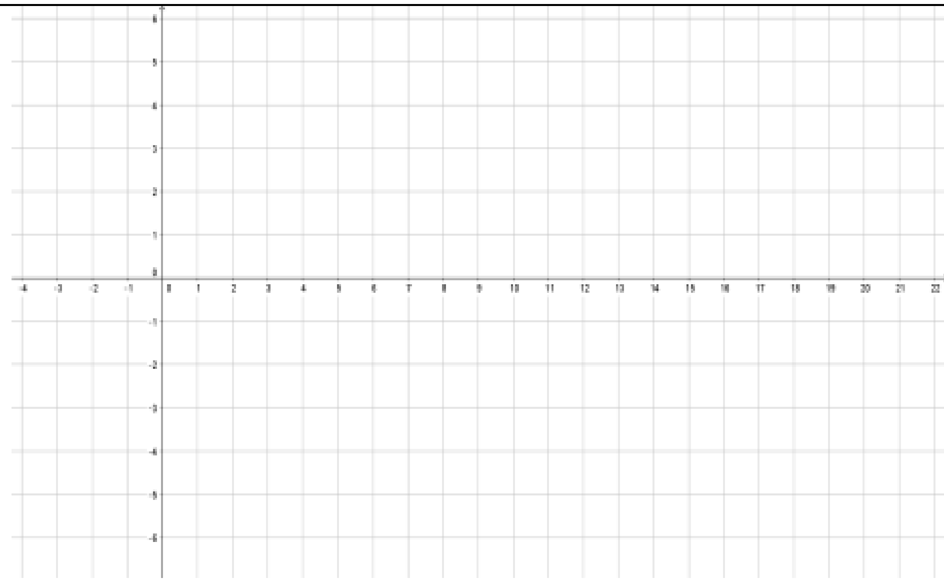


4. Completar el procedimiento para determinar la ecuación ordinaria de la parábola que tiene como ecuación general:

$$x^2 - 4x + 2y + 10 = 0$$

a) Ordena la ecuación de tal forma que los términos que no contienen a "*x*", se encuentren en el segundo miembro.
x^2 - ___ = - 2*y* - ___.
b) x^2 - 4*x* + ____= - 2*y* - __+4 Completando el trinomio cuadrado en "*x*".
c) (*x* - __)^2 = - 2*y* - __ Factorizando el trinomio y simplificando el segundo miembro.
d) $(x - 2)^2$ = - 2 (*y* + __) Factorizando el segundo miembro para obtener la ecuación ordinaria. ______________________________.
e) La parábola tiene su eje de simetría paralelo al eje de coordenadas ________________.

f) El vértice tiene coordenadas (,)
g) El valor del parámetro *p* es __________
h) Las coordenadas del foco son:__________
i) La longitud del lado recto es_____________
j) La ecuación de la directriz es_____________
k) La ecuación del eje de simetría es_________
l) Traza la gráfica en el siguiente plano cartesiano.



Actividad extra-clase:

Completa el procedimiento para determinar la ecuación ordinaria de las parábolas que tienen como ecuación general:

a) $x^2 + 10x + 4y + 21 = 0$ *b)* $y^2 + 2y - 6x - 20 = 0$
c) $3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$ *d)* $y^2 - 4y + 6x - 8 = 0$

6. Fase de Cierre. Parábola y su Ecuación Cartesiana.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Explorará en una situación o problema que dé lugar a una función cuadrática, valores, condiciones, relaciones y comportamientos que le permitan obtener información del problema, como un paso previo a establecer la representación algebraica.
Procedimentales:	• Aprende los procedimientos para establecer la ecuación ordinaria y/o general de la parábola. • Aprende a manejar de forma eficiente el software GeoGebra.
Actitudinales:	• Reflexiona sobre el uso de software especializado para el desarrollo de la unidad, en particular GeoGebra. • Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

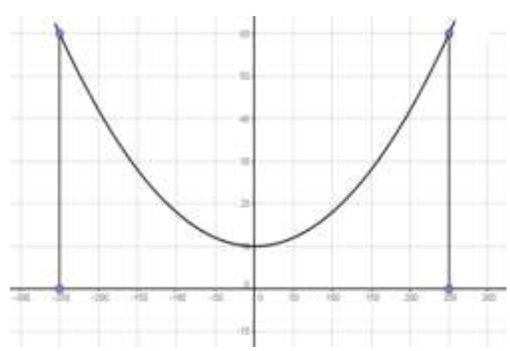
Secuencia Didáctica 8. Proyectos de trabajo.

En esta sección se exponen los proyectos que los estudiantes, organizados en equipos de tres, tendrán que realizar a lo largo de esta unidad didáctica. Estos proyectos pretenden orientar al estudiante para que construya algunos de los significados más importantes a los que remite la noción de lo parabólico en el mundo físico, verbigracia: antenas de televisión, puentes colgantes, antenas de satélite, arcos de puentes, micrófonos reflectores, recolectores de calor solar, etcétera. Entre las propiedades más notables de una parábola se distingue la de reflexión, la cual se relaciona con la recta tangente a una parábola. Bajo esta orientación, se plantean diferentes problemas que pueden modelarse con una ecuación cuadrática.

Estos proyectos les son planteados a los estudiantes en cualquier lugar (fase) de esta unidad didáctica y su evaluación se hará al final de la unidad didáctica con la exposición del mismo, por equipo, a sus demás compañeros. El proyecto será supervisado todo el tiempo por el profesor, con lo que tendrá la oportunidad de ir viendo el avance de sus estudiantes a lo largo del desarrollo de esta unidad didáctica.

Proyecto A. Cálculo de la Altura de un Puente Colgante.

Suponiendo que la curva que describe el cable de suspensión de un puente colgante es una parábola, donde los pilares que lo sostienen tienen una altura de 60 metros y están separados por una distancia de 500 metros, estando el punto más bajo del cable a una altura de 10 metros sobre la carretera del puente. Considérese al eje de las abscisas como la horizontal que define el puente, y al eje de las ordenadas como el eje de simetría de la parábola, determinar: a) la ecuación general de la parábola, b) la altura de un punto situado a 80 metros del centro del puente.

Imagen de un Puente Colgante.	Representación en el plano cartesiano de un arco del puente con los datos planteados.
	

I. Considerando la figura de la representación del arco del puente, contesta las preguntas y completa el procedimiento para determinar la ecuación general de la parábola y la altura de un punto situado a 80 metros del centro del puente.

1) ¿Qué coordenadas tiene el vértice?_______________.
2) ¿La parábola es horizontal o vertical?________________.
3) ¿Cuál es la ecuación que representa a la parábola?___________________
4) Si un punto de la parábola tiene como abscisa 250, ¿cuál es el valor de la ordenada?___________________
5) Sustituye las coordenadas en la ecuación del 3).
6) Sustituye el vértice y el punto de la parábola en la ecuación ordinaria para obtener el valor de "p".

$$(x - \_\_)^2 = 4p(y - \_\_\ )$$

7) *4p =*
8) Por lo tanto la ecuación es_________

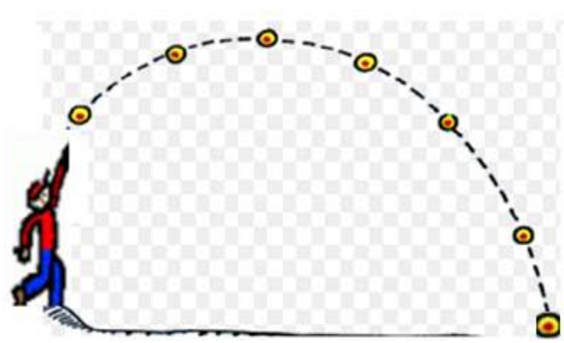
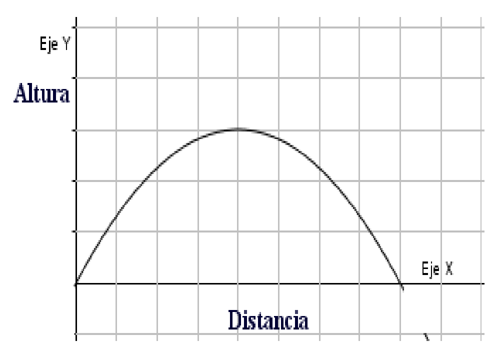
9) Calcular la altura de un punto situado a 80 metros del centro del puente significa determinar el valor de ______.

10) Sustituyendo en la ecuación general el valor de $x = 80$ y despejando "*y*" se tiene: Respuesta b) La altura de un punto situado a 80 metros del centro del arco es de ______metros.

Proyecto B. Cálculo de la Altura Máxima que Alcanza una Pelota de Béisbol.

Desde la base, un jugador de béisbol lanza una pelota que sigue una trayectoria descrita por la parábola $3x^2 - 240x + 160y = 0$. a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota? b) ¿a qué distancia del jugador cae?

Nota: considérese la base como el origen de coordenadas y las unidades en metros.

Imagen del Jugador de Béisbol.	Representación en el plano cartesiano de la trayectoria de la pelota.
	

1) Expresa la ecuación en su forma ordinaria.

2) ¿Qué coordenadas tiene el vértice?

3) ¿Cuál es la altura máxima?

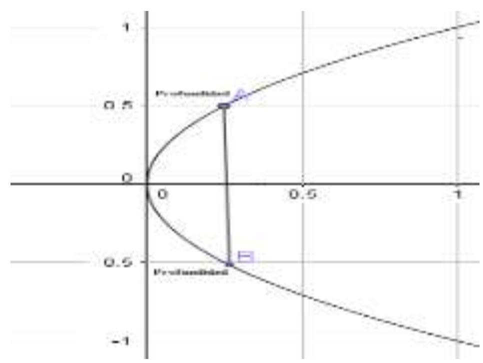
4) ¿Determina los puntos en donde la parábola intersecta al eje x?

5) ¿A qué distancia cae la pelota del jugador?

Proyecto C. Cálculo de la Altura Máxima que Alcanza una Pelota de Béisbol.

Antena parabólica.

Una antena parabólica para televisión tiene un de 1 metro de ancho, en la parte donde está situado su receptor; es decir su foco. ¿A qué distancia del fondo de la antena está situado el receptor de señales?

Imagen de Antena Parabólica	Representación en el plano cartesiano de antena parabólica.
	

1) La antena queda representada en el plano cartesiano por la ecuación ordinaria _________ $y^2 = 4px$.
2) De acuerdo a la representación gráfica, la distancia del fondo de la antena al receptor significa la distancia del vértice al _______foco.
3) ¿Cuál es la distancia del vértice al foco? ___p
4) El lado recto de la parábola representa el ancho de la antena, por lo tanto,

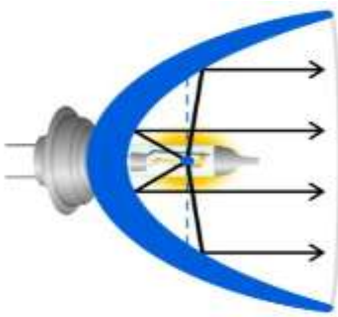
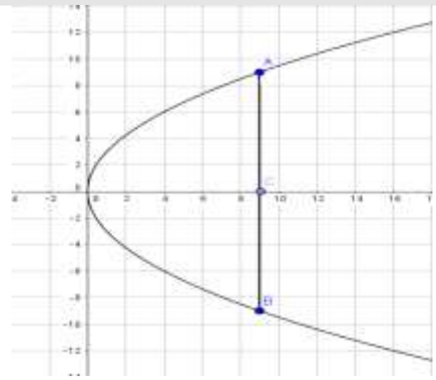
   1 metro =_____$|4\boldsymbol{p}|$
5) De acuerdo a la representación de la antena en el plano cartesiano el signo del parámetro "p" es: positivo.
6) El valor de "p" es _____________
7) El receptor está situado a __25____centímetros del fondo de la antena.
8) Si la representación de la antena en el plano cartesiano fuera de una parábola

vertical, ¿cambiaría el resultado?

Proyecto D. Cálculo de la Ubicación del foco en un faro de automóvil.

Faro de automóvil.

El faro de un automóvil tiene un diámetro de 18 cm. y 9 cm. de fondo, ¿dónde debe colocarse el foco?

Imagen de un faro	Representación en el plano cartesiano del faro
	

1) El faro queda representado en el plano cartesiano por la ecuación ordinaria: $\underline{y^2 = 4px}$
2) De acuerdo a la representación gráfica, la distancia de los puntos _________________es el diámetro del faro.

3) Determina las coordenadas de los puntos A, B y C, toma en cuenta que el diámetro es de 18 cm. y el fondo es de 9 cm.

4) Determina el valor del parámetro *p*, para ello toma un punto de la parábola y sustitúyelo en la ecuación.

5) ¿Cuál es la distancia del vértice al foco? ___ *p*

6) Por lo tanto *el foco debe colocarse a* _______ *cm. del vértice*.

7. Materiales de Apoyo.

Unidad 4. La Parábola y su Ecuación Cartesiana.

- ***Sección 1.*** **En cada caso encuentra la ecuación canónica de la parábola.**

1. El vértice *V* de la parábola está en el origen de coordenadas y el foco *F* tiene coordenadas *F(0,5).*

$a)\ x^2 = -20y$ $b)\ x^2 = 20y$ $c)\ y^2 = 20x$ $d)\ y^2 = -20x$

2. La ecuación de la directriz es $x = -4$, y el vértice *V* está en el origen de coordenadas.

$a)\ x^2 = 16y$ $b)\ x^2 = -16y$ $c)\ y^2 = -16x$ $d)\ y^2 = 16x$

3. Las coordenadas del foco son *F(-6,0)* y el vértice *V* está en el origen de coordenadas.

$a)\ x^2 = -24y$ $b)\ y^2 = 24x$ $c)\ x^2 = 24y$ $d)\ y^2 = -24x$

4. La ecuación de la directriz es $y = 3$, y el vértice *V* de la parábola está en el origen de coordenadas.

$a)\ y^2 = 12x$ $b)\ x^2 = -12y$ $c)\ x^2 = 12y$ $d)\ y^2 = -12x$

5. Las coordenadas de los extremos del lado recto son, *L(-8,4) y R(8,4)* y *p* es positivo.

$a)\ x^2 = 16y$ $b)\ x^2 = -16y$ $c)\ y^2 = 16x$ $d)\ y^2 = -16x$

6. Las coordenadas de los extremos del lado recto son, *L(3,6) y R(3,-6)* y *p* es negativo.

$a)\ y^2 = 12x$ $b)\ y^2 = -12x$ $c)\ x^2 = 12y$ $d)\ x^2 = -12y$

Tabla de respuestas de la sección 1.					
1. b	2. d	3. d	4. b	5. a	6. a

- ***Sección 2.*** **En cada caso, encuentra lo que se pide, considerando que el vértice de la parábola está fuera del origen.**

7. Encuentra la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos V(-4,3) y F(-1,3), respectivamente. Determina también la ecuación de la directriz y su eje de simetría.

$a)\ (y+4)^2 = 6(x+2)$ $Directriz: x = -\frac{7}{2}$ $E.S: y = -4$

$b)\ (y-4)^2 = 6(x-2)$ $Directriz: x = -\frac{7}{2}$ $E.S: y = -4$

$c)\ (y+4)^2 = -6(x-2)$ $Directriz: x = -\frac{7}{2}$ $E.S: y = -4$

$d)(y-4)^2 = -6(x-2)$ $Directriz: x = -\frac{7}{2}$ $E.S: y = -4$

8. Encuentra la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos V(3,3) y F(3,1), respectivamente. Determina también la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto.

$a)\ (x-3)^2 = 8(y-3)$ $Directriz: y = 5$ $L.R.: 8$

$b)\ (x-3)^2 = -8(y-3)$ $Directriz: y = -5$ $L.R.: 8$

$c)\ (x-3)^2 = -8(y-3)$ $Directriz: y = 5$ $L.R.: 8$

$d)(x-3)^2 = -8(y-3)$ $Directriz: y = 5$ $L.R: -8$

9. La directriz de una parábola es la recta $x + 5 = 0$ y su vértice es el punto V(0,3). Hallar su ecuación general.

$a)\ y^2 - 6y - 20x - 9 = 0$ $b)\ y^2 - 6y - 20x + 9 = 0$ $c)\ y^2 - 6y + 20x + 9 = 0$ $d)y^2 + 6y - 20x + 9 = 0$

10. Encuentra la ecuación ordinaria de la parábola cuya ecuación general es $y^2 + 8y - 6x + 4 = 0$.

$a)\ (y+2)^2 = 6(x+4)$ $b)(y-4)^2 = -8(x+2)$ $c)\ (y-4)^2 = -6(x-2)$ $d)(y+4)^2 = 6(x+2)$

11Encuentra la ecuación de la parábola cuyo vértice está en *V(3,2)* y su foco está en *F(5,2).*

$a)\ (y+4)^2 = -6(x+3)$ $b)(y-2)^2 = 8(x-3)$ $c)\ (y-4)^2 = 8(x-2)$ $d)(y+3)^2 = 6(x+2)$

12. Encuentra las coordenadas del vértice, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto de la parábola cuya ecuación general es: $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$.

$a)\ V\left(2,\frac{3}{2}\right);\ F\left(8,\frac{3}{2}\right)$ $Directriz: y = 8$ $L.R.: 10$

$b)\ V\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right);\ F\left(\frac{9}{2},\frac{1}{2}\right)$ $Directriz: y = \frac{1}{2}$ $L.R.: 6$

$c)\ V\left(\frac{3}{2},2\right);\ F(3,2)$ $Directriz: x = 0$ $L.R.: 6$

$d)\ V(3,2);\ F(7,2)$ $Directriz: x = 4$ $L.R: -6$

13. Encuentra los puntos de intersección de la recta: $x + y - 1 = 0$ con la parábola: $x^2 - 4x - y + 1 = 0$.

a) A(1,1) ; B(3,2) b) A(0,1) ; B(3,-2) c) A(-1,1) ; B(3,-2) d) A(1,-1) ; B(3,-2)

14. Encuentra los puntos de intersección de la recta: $6x - y - 2 = 0$ con la parábola: $x^2 + 4x - y - 5 = 0$.

a) A(-1,-8); B(3,-16) b) A(-1,-8) ; B(3,16) c) A(-1,-8); B(-3,16) d) A(1,-8) ; B(3,-16)

15. Encuentra los puntos de intersección de la recta: $4x - 7y + 38 = 0$ con la parábola: $y^2 - 2y - 4 = 0$.

a) No hay puntos. b) A(-3,0) c) A(-1,0) ; B(-1,4) d) A(4,0) ; B(-1,0)

16. Encuentra los puntos de intersección de la parábola: $-y^2 + 6x + 18 = 0$ con la circunferencia: $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

a) A(3,0) ; B(0,-0) b) A(0,3) ; B(3,0) c) A(-3,0) d) A(1,-3) ; B(1,3)

17. Encuentra los puntos de intersección de la circunferencia: $x^2 + y^2 = 16$ con la parábola: $x^2 - y = 0$.

a) A(-1.88,-3.53) ; B(1.88,3.53) b) A(-1.88,3.53) ; B(1.88,-3.53)

c) A(-1.88,-3.53) ; B(1.88,-3.53) d) A(-1.88,3.53) ; B(1.88,3.53)

Tabla de respuestas de la sección 2.						
7. a	8. c	9. c	10. d	11. b	12. c	13. b
14. b	15. a	16. c	17. d			

- ***Sección 3.*** **En cada caso, encuentra lo que se pide, considerando que el plano cartesiano es la referencia para establecer una fórmula.**

18. Desde el origen de coordenadas un jugador de beisbol lanza una pelota que sigue la trayectoria descrita por la parábola: $3x^2 - 240x + 160y = 0$. Si las unidades son metros, ¿cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota y a qué distancia del jugador cae?

a) Altura= 30 m. Distancia=80 m. b) Altura= 90 m. Distancia= 45 m. c) Altura= 60 m. Distancia= 40 m. d) Altura= 50 m. Distancia= 30 m.

19. Se construye un reflector parabólico con una distancia focal de 68.58 centímetros. ¿Cuál es el diámetro del reflector si debe tener 30.48 centímetros de profundidad en su eje?

a) D=130.5 cm. b) D= 90.87 cm. c) D=182.88 cm. d) D=150.65 cm.

20. Un arco parabólico tiene una altura de 25 metros y una luz de 40 metros. ¿Cuál es la altura de los puntos del arco situados 8 metros a ambos lados de su centro?

a) Altura= 21 m. b) Altura= 30 m. c) Altura= 40 m. d) Altura= 26 m.

21. Se lanza una piedra horizontalmente desde la cima de una torre de 185 metros de altura con una velocidad de 15 m/seg. ¿Cuál es la distancia del punto de caída al pie de la torre suponiendo que el suelo es horizontal?

a) Distancia= 57.5 m.
b) Distancia= 80.7m.
c) Distancia= 98.3m.
d) Distancia= 92.5 m.

22. Un avión que vuela hacia el sur a una altura de 1500 metros y a una velocidad de 200 km/hra., deja caer una bomba. ¿Cuál es la distancia horizontal del punto de caída a la vertical del punto de lanzamiento?

a) Distancia= 575 m.
b) Distancia= 972 m.
c) Distancia= 750 m.
d) Distancia= 850 m.

23. Una antena parabólica tiene un diámetro de 1 metro, si tiene una profundidad de 20 centímetros. ¿A qué altura debemos colocar el receptor?, o sea, ¿a qué distancia está el foco del vértice?

a) Altura= .25 m. b) Altura=.35 m. c) Altura=.30 m. d) Altura= .40 m.

24. Un puente tiene una longitud de 160 metros, el cable que lo soporta tiene la forma de una parábola. Si el puntal en cada uno de los extremos tiene una altura de 25 metros, ¿cuál es la ecuación de la parábola?

$a)\ y^2 = 256x$ $b)\ y^2 = -256x$ $c)\ x^2 = -256y$ $d)\ x^2 = 256y$

25. En un puente colgante, la distancia entre sus torres es de 300 metros y la altura de las torres es de 100 metros. Escribe la ecuación del cable que soporta el puente.

$a)\ x^2 = 225y$ $b)\ y^2 = 225x$ $c)\ x^2 = -225y$ $d)\ y^2 = 225x$

26. La ecuación de un puente cuya distancia entre sus torres es de 300 metros y la altura de sus torres es de 100 metros. Es $x^2 = 225y$, encuentra la altura del puntal que se encuentra a 50 metros del centro del puente.

a) Altura= 10.05 m. b) Altura= 10.21 m. c) Altura= 11.01 m. d) Altura= 11.11 m.

27. El cable de un puente colgante está dado por la ecuación $x^2 = 400y$. Si los postes del puente tienen una altura de 64 metros, ¿cuál es la longitud del puente?

a) Longitud= 310 m.
b) Longitud= 300 m.
c) Longitud= 320 m.
d) Longitud= 340 m.

28. Un diseñador de automóviles desea diseñar un faro que tenga 16 centímetros de diámetro. La bombilla que se va a utilizar en él tiene un filamento a 2 centímetros del cuello, ¿qué profundidad debe tener el faro para que el filamento quede en el foco, si el cuello de la bombilla se coloca a la altura del vértice del faro.

a) Profundidad= 4 cm.
b) Profundidad= 8 cm.
c) Profundidad= 6 cm.
d) Profundidad= 5 cm.

29. La antena de un radiotelescopio en forma de paraboloide tiene un diámetro de 8 metros. Si la profundidad de la antena es de 0.5 metros, ¿a qué distancia debe colocarse el receptor?

a) Distancia= 3.5 m.
b) Distancia= 2.5 m.
c) Distancia= 1 m.
d) Distancia= 2 m.

30. Una antena parabólica para televisión tiene un diámetro de 1 metro y su receptor está colocado 25 centímetros arriba de su vértice, ¿qué profundidad tiene la antena?

a) Profundidad= 0.25 m.
b) Profundidad= 0.20 m.
c) Profundidad= 0.15 m.
d) Profundidad= 0.10 m.

Tabla de respuestas de la sección 3.						
18. a	19. c	20. a	21. d	22. b	23. c	24. d
25. a	26. d	27. c	28. b	29. d	30. a	

Sección 4. **Parábola con Vértice en el Origen.**

1) Encuentre las coordenadas del foco, los puntos extremos del lado recto y la ecuación de la directriz de las siguientes parábolas. Dibuje la gráfica de cada parábola.

Ecuación de la Parábola	SOLUCIONES		
	Foco	Lado recto	Ecuación de la Directriz
i. $3y^2 = 8x$	$\left(\frac{2}{3}, 0\right)$	$L_r = \frac{8}{3}$	$x + \frac{2}{3} = 0$
ii. $x^2 = 8y$	$(0,2)$	$L_r = 8$	$y + 2 = 0$
iii. $3y^2 = -4x$	$\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$	$L_r = \frac{4}{3}$	$x - \frac{1}{3} = 0$

2) Encuentre la ecuación de las parábolas que tengan las propiedades indicadas. Dibuje cada curva.

Datos	**SOLUCIONES** (Ecuación pedida)
iv. $Foco(3,0); Directriz: x + 3 = 0$	$y^2 - 12x = 0$
v. $Vértice(0,0); L_r = 14, y\ su\ gráfica$ $abre\ hacia\ la\ derecha.$	$y^2 - 14x = 0$
vi. $Vértice\ el\ origen; Eje\ de\ simetría\ sobre\ el\ eje\ x.$ $Y\ que\ pase\ por\ el\ punto\ P(-3,6).$	$y^2 + 12x = 0$
vii. $Vértice(0,0); L_r = 16, y\ su\ gráfica$ $se\ abre\ hacia\ abajo.$	$x^2 + 16x = 0$

Sección 5. **Parábola con Vértice Fuera del Origen.**

3) Encuentre la ecuación general de la parábola de vértice y foco dados.

Datos	**SOLUCIONES** (Ecuación pedida)
i. $Vértice(3,2)\ y\ Foco(5,2)$	$y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$
ii. $Vértice(-2,3)\ y\ Foco(1,3)$	$y^2 - 6y - 12x - 15 = 0$

4) Encuentre la ecuación general de la parábola que tenga las propiedades indicadas. Dibuje cada curva.

Datos	**SOLUCIONES** (Ecuación pedida)
i. $Foco(0,6)\ y\ Directriz\ el\ eje\ "x".$	$x^2 - 12y + 36 = 0$
ii. $Vértice(2,3), eje\ paralelo\ al\ de\ coordenadas$ "y", $y\ que\ pase\ por\ el\ punto\ P(4,5)$	$x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$
iii. $Foco(6,-2); Directriz: x - 2 = 0$	$y^2 + 4y - 8x + 36 = 0$
iv. $Foco(-2,-1);\ Lado\ recto\ el\ segmento\ entre\ los\ puntos\ (-2,2) y\ (-2,4).$	$y^2 + 2y - 6x - 20 = 0$ $y^2 + 2y + 6x + 4 = 0$

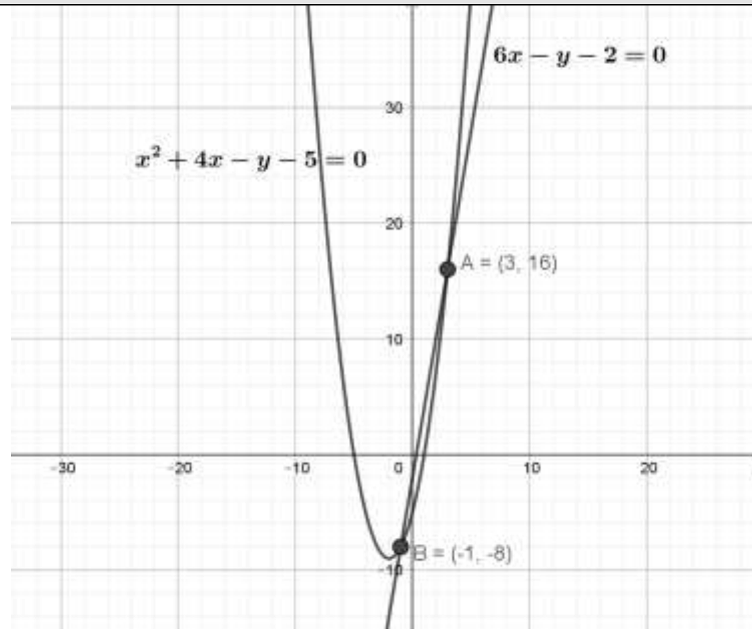
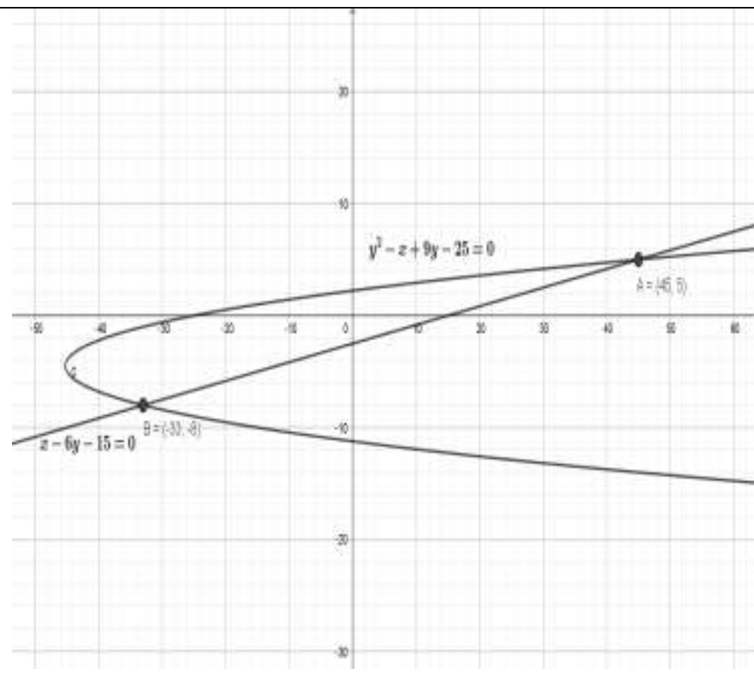
5) Encuentre los elementos de cada una de las siguientes parábolas y represéntelas gráficamente.

Ecuación	**S O L U C I O N E S**			
	Vértice	Foco	Lado Recto	Directriz
$y^2 - 4y + 6x - 8 = 0$	$(2,2)$	$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$	6	$x - \frac{7}{2} = 0$
$3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$	$\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}\right)$	$\frac{5}{3}$	$y + 2.17 = 0$
$y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$	$\left(\frac{3}{2}, 2\right)$	$(3,2)$	6	$x = 0$
$x^2 - 2x - 8y + 33 = 0$	$(1,4)$	$(1,6)$	8	$y - 2 = 0$

6) A partir de la ecuación general de la parábola, encuentra la ecuación ordinaria (reducida) y las coordenadas del vértice en cada caso.

Ecuación General	Ecuación Ordinaria	Vértice
$y^2 + 8y + 6x - 20 = 0$	$(y + 4)^2 = -6(x - 6)$	$(6, -4)$
$y^2 - 8x - 8y + 64 = 0$	$(y - 4)^2 = 8(x - 6)$	$(6,4)$
$x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$	$(x - 2)^2 = 2(y - 3)$	$(2,3)$

7) Encuentre en cada caso los puntos de intersección de la parábola y recta dados.

Sistema dado	Solución Gráfica
i. Parábola: $x^2 + 4x - y - 5 = 0$; recta: $6x - y - 2 = 0$	 **Solución:** $\boldsymbol{A(3,16) y\ B(-1,-8)}$
ii) Parábola: $y^2 - x + 9y - 25 = 0$; Recta: $x - 6y - 15 = 0$	 **Solución:** $\boldsymbol{A(45,5) y\ B(-33,-8)}$

Sección 6. Proyectos de trabajo: Aplicaciones de la parábola en el mundo físico.

Consideremos aquí lo aprendido en las secciones anteriores y lo realizado a lo largo de esta unidad en el salón de clases, resuelve lo siguiente. Los dos primeros problemas presentan un procedimiento para encontrar la solución, misma que puedes utilizar para resolver los otros.

Problema 1. Una antena para televisión tiene forma de paraboloide. Calcula la posición del receptor que se coloca en el foco si la antena tiene un diámetro de 3.048 metros y 0.6096 metros de profundidad.

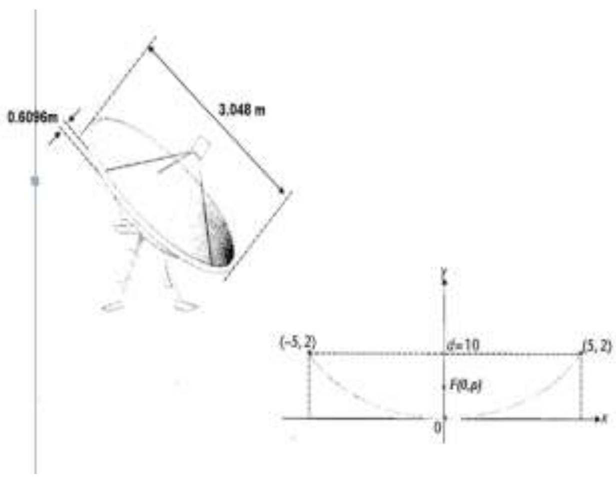


Figura 1. Antena de Televisión.

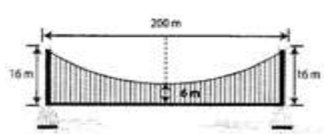
Solución: De acuerdo con la figura 1, la ecuación de la parábola es de la forma: $x^2 = 4py$, donde $x = 1.524$, entonces $y = 0.6096$, así tendríamos:

$$(1.524)^2 = 4p(0.6096)$$
$$P = 0.9525$$

Por lo tanto el receptor se coloca a:

$0.9525\ metros\ del\ vértice.$

Problema 2. Los cables de un puente colgante forman un arco parabólico. Los pilares que lo soportan tienen una altura de 16 metros sobre el nivel del puente y están separados 200 metros. El punto más bajo del cable queda a 6 metros sobre la calzada del puente. Calcula la altura del cable a 80 metros del centro.



Si tomamos como eje x la horizontal que define el puente y el eje y como el eje parábola, tenemos la gráfica siguiente:

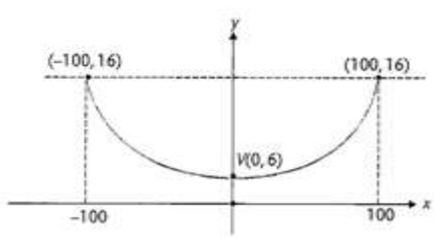


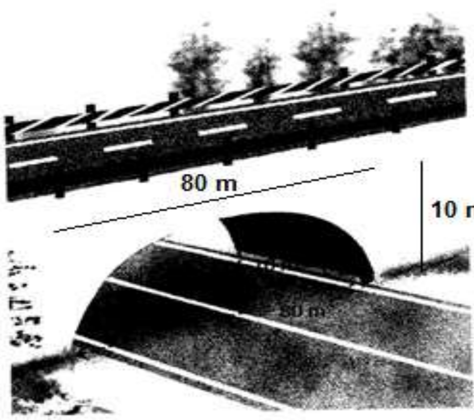
Figura 2. Cables de un puente colgante.

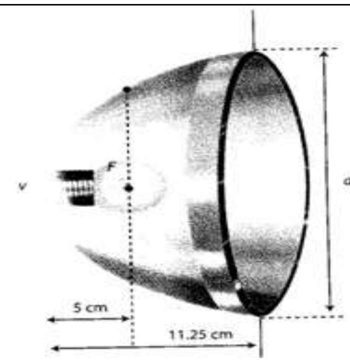
Solución:
De acuerdo con la figura 2, la ecuación de la parábola es de la forma: $(x-h)^2=4p(y-k)$, donde $h=0$ y $k=6$.
Al sustituir valores queda: $(x-0)^2=4p(y-6)$
$x^2=4p(y-6)$
Cuando $x=100$, entonces $y=16$. Por lo tanto:

$$(100)^2=4p(16-6)$$
$$10000=4p(10)$$
$$4p=1000$$

Al sustituir en la ecuación $x^2=4p(y-6)$ queda: $x^2=(1000)(y-6)$;

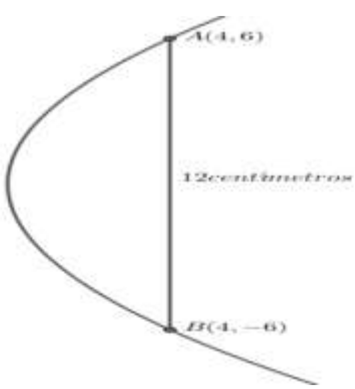
<table>
<tr><td></td><td>luego si x=80 resulta: 6400/1000=y-6, donde 6.4=y-6, y=12.4metros

La altura del cable a 80 metros del centro es de 12.4 metros.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Problema 3. El arco parabólico que se forma en el puente de concreto de la figura tiene un claro de 80 metros y una altura máxima de 10 metros. Calcula la altura del arco a 8 metros del centro.

Solución: 9.6 metros.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Problema 4. El faro de un automóvil tiene un reflector parabólico de 11.25 centímetros de profundidad. Si el bulbo luminoso está a 5 centímetros del vértice a lo largo del eje de simetría, determinar:
a) El diámetro del reflector. Solución: 30 cm.

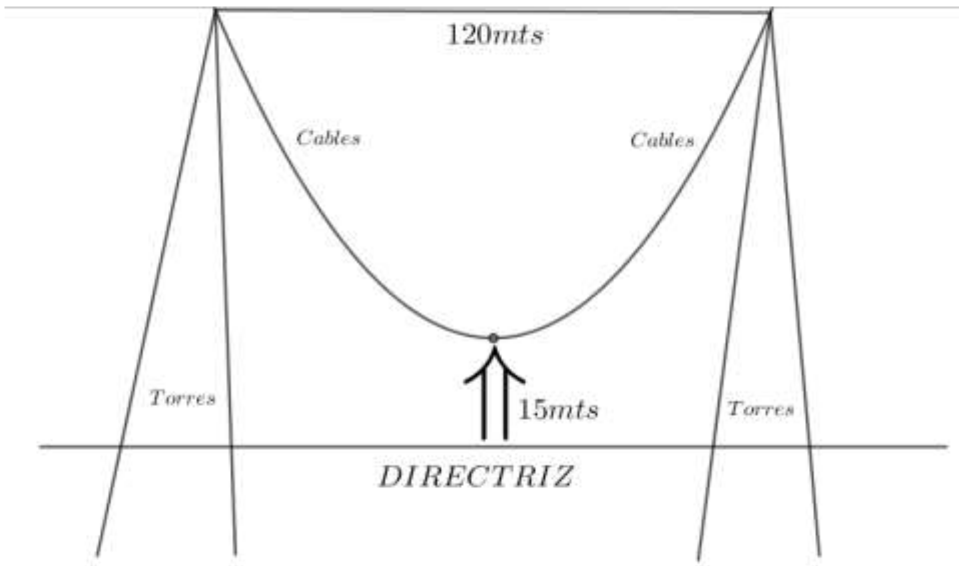
b) El ancho que tiene el faro al nivel del bulbo luminoso. Solución: 20 cm.</td></tr>
</table>

Problema 5. El diámetro de un foco reflector es de 12 cm y su profundidad 4 cm. Localice el foco.



Solución: Foco: 94 cm.

Problema 6. Un puente colgante de 120mts de longitud tiene trayectoria parabólica sostenida por torres de igual altura, si la directriz se encuentra en la superficie terrestre y el punto más bajo de cada cable está a 15mts de altura de dicha superficie Hallar la altura de las torres.



Solución: 15 m.

Problema 7. El cable de suspensión de un puente colgante adquiere la forma de un arco de parábola. Los pilares que lo soportan tienen una altura de 60 metros y están separados una distancia de 500 metros, quedando el punto más bajo del cable a una altura de 10 metros sobre la calzada del puente. Tomando como eje x la horizontal que define el puente, y como eje y el de simetría de la parábola, *encuentra la ecuación de ésta*. Además, calcula la altura de un punto situado a 80 metros del centro del puente. Construye la figura.

Solución: Ecuación: $x^2 - 1.250y + 12.500 = 0$, Altura: 15.12 m.

Problema 8. Se lanza una piedra horizontalmente desde la cima de una torre de 185 metros de altura con una velocidad de 15 m/s. Determina la distancia del punto de caída al pie de la torre suponiendo que el suelo es horizontal.

Solución: 92.5 m.

Problema 9. Los cables de un puente colgante forman un arco parabólico. Los pilares que lo soportan tienen una altura de 30 metros y están separados por una distancia de 400 metros. Si el punto más bajo de los cables queda a 10 metros sobre el puente, calcula la altura que tienen a 100 metros de éste último. (Consulta el problema 2).

Solución: 15 m.

.

Problema 10. Una antena parabólica tiene 3 metros de ancho, en la parte donde está situado su aparato receptor ¿A qué distancia del fondo de la antena está colocado el receptor de señales?

Solución: 0.75 m.

8. Autoevaluación.

Sección I. Dada la ecuación de la parábola $y^2 = 12x$, resuelve los ejercicios 1 a 4.

1. Determina la ecuación de la directriz.

a) $x = 3$
b) $x = -4$
c) $x = -3$
d) $y = 3$

2. Determina las coordenadas de los extremos del lado recto.

a) $(3,3)$ y $(3,-3)$
b) $(3,6)$ y $(3,-6)$
c) $(-3,6)$ y $(-3,-6)$
d) $(4,8)$ y $(4,-8)$

3. Determina las coordenadas del foco.

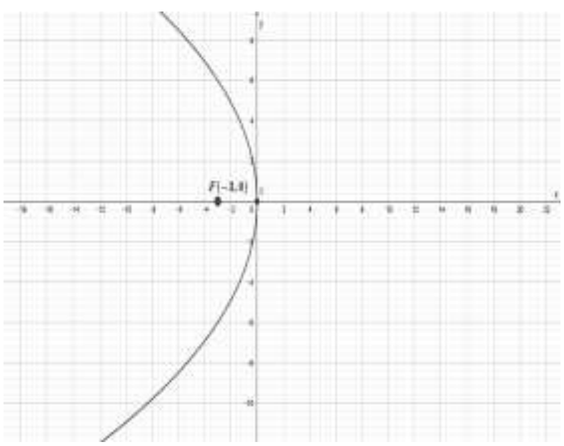
a) $F(4,0)$
b) $F(0,-4)$
c) $F(3,0)$
d) $F(0,3)$

4. Determina la longitud del lado recto.

a) $L_r = 12$
b) $L_r = 3$
c) $L_r = 8$
d) $L_r = 4$

Sección II. Resuelve los ejercicios siguientes.

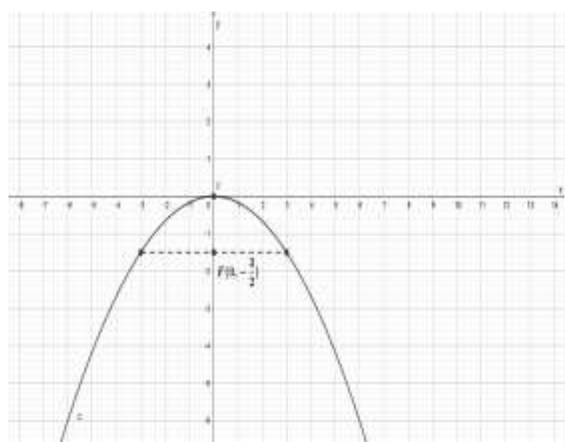
5. Determina la ecuación de la parábola de la figura siguiente.



a) $x^2 = 12y$ b) $x^2 = -12y$

c) $y^2 = 12x$ d) $y^2 = -12x$

6. Determina las coordenadas de los extremos del lado recto.



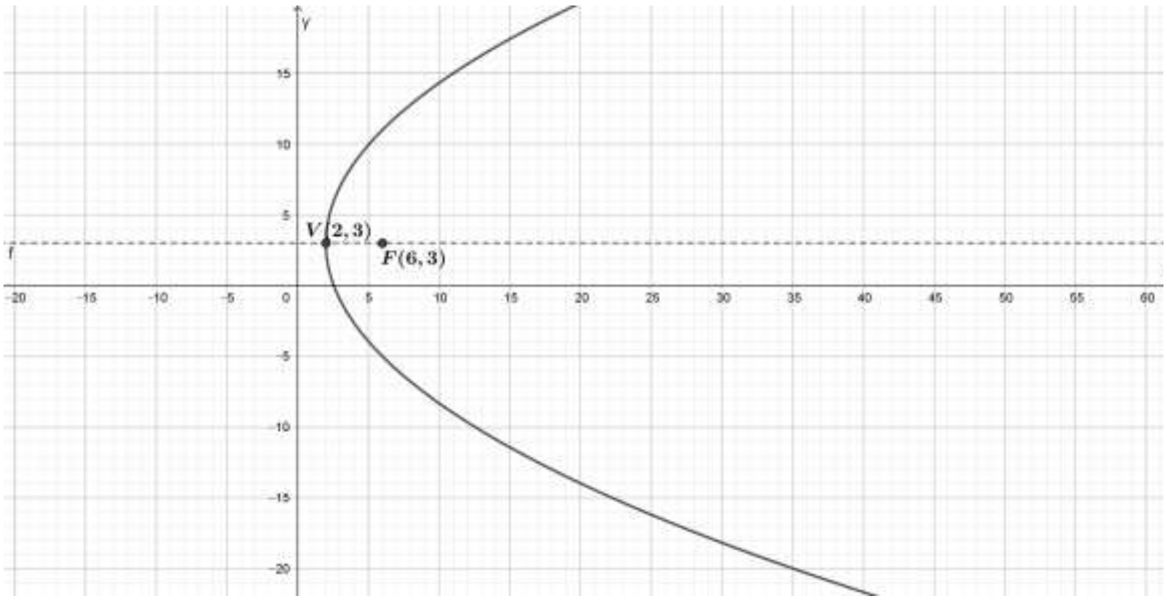
a) $x^2 = -6y$ b) $y^2 = 6x$
c) $y^2 = -6x$ d) $x^2 = 6y$

7. Determina la ecuación de la parábola cuya longitud del lado recto es 14 y se abre hacia arriba.
a) $y^2 = 14x$ b) $y^2 = -16x$
c) $x^2 = 14y$ d) $x^2 = -14y$

8. Determina la ecuación de la parábola con vértice en el origen y en la que la ecuación de la directriz es $y = 5$.
a) $x^2 = 20y$ b) $x^2 = -20y$
c) $y^2 = -20x$ d) $y^2 = 20x$

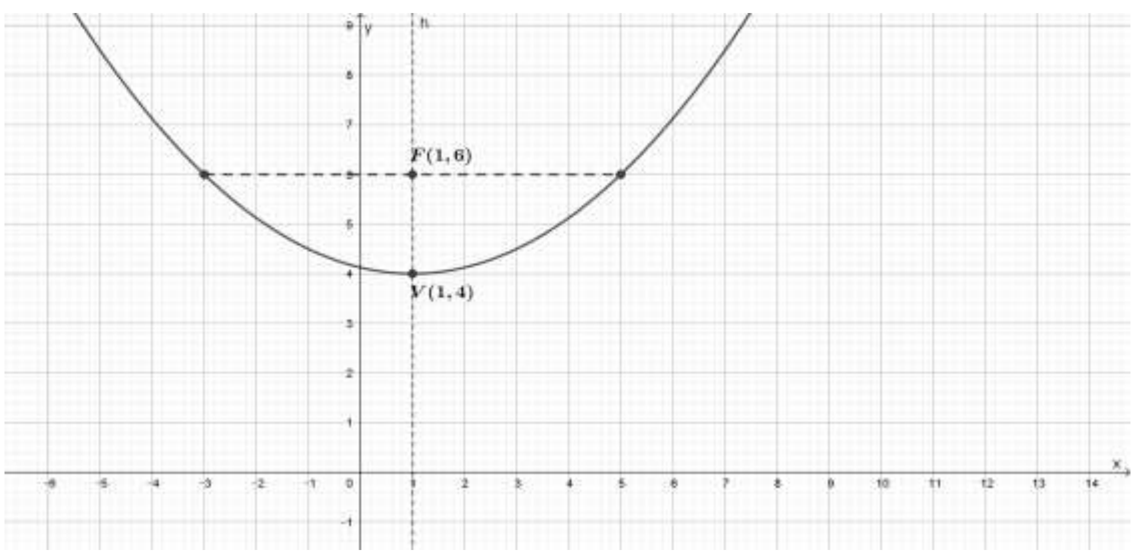
Sección III. Resuelve los ejercicios siguientes.

9. Determina la ecuación de la parábola de la figura siguiente.



a) $x^2 - 16x + 6y + 41 = 0$
b) $x^2 + 16x - 6y - 41 = 0$
c) $x^2 + 16x - 6y + 41 = 0$
d) $y^2 - 16x - 6y + 41 = 0$

10. Determina la ecuación que corresponde a la parábola de la figura siguiente.



a) $x^2 - 2x + 8y - 30 = 0$ b) $x^2 - 2x - 8y + 33 = 0$ c) $x^2 - 2x - 6y + 30 = 0$

d) $x^2 + 2x - 8y + 33 = 0$

A partir de la ecuación $x^2 - 6x - 12y - 15 = 0$, resuelve los ejercicios 11 y 12.

11. Determina la ecuación de la parábola en su forma ordinaria.

a) $(x-3)^2 = 12(y-2)$
b) $(x-3)^2 = 12(y+2)$
c) $(x+3)^2 = 12(y-2)$
d) $(x-3)^2 = 16(y+2)$

12. Determina las coordenadas del vértice.

a) $V(-3,2)$
b) $V(3,2)$
c) $V(-3,-2)$
d) $V(3,-2)$

A partir de la ecuación $y^2 - 4y - 8x + 44 = 0$, resuelve los ejercicios 13 y 14.

13. Determina la ecuación de la parábola en su forma ordinaria.

a) $(y-2)^2 = 8(x+5)$
b) $(y+2)^2 = 8(x+5)$
c) $(y+2)^2 = 8(x-5)$
d) $(y-2)^2 = 8(x-5)$

14. Determina la ecuación de la directriz.

a) $x = 3$
b) $x = 1$
c) $x = 2$
d) $x = 4$

Sección IV. Resuelve las aplicaciones de las parábolas siguientes.

15. El faro de un automóvil tiene un reflector de 18 centímetros de diámetro y 8 centímetros de profundidad. ¿A qué distancia del vértice está situado el bulbo luminoso.

a) $3\ cm.$
b) $2\ cm.$
c) $2.53\ cm.$
d) $3.4\ cm.$

16. Un reflector tiene forma de un paraboloide de revolución. Si la fuente de luz está situada a 6 centímetros de la base a lo largo del eje de simetría y la profundidad del reflector es de 12 centímetros, calcula el diámetro del paraboloide.

a) $15\ cm.$
b) $16.1\ cm.$
c) $33.94\ cm.$
d) $33.94\ cm.$

17. Un puente tiene forma de arco parabólico con 40 metros de claro y una altura máxima de 8 metros. Calcula la altura del arco a 10 metros del centro.

a) $5.6\ m.$
b) $6\ m.$
c) $7\ m.$
d) $6.5\ m.$

18. Los cables de un puente colgante forman un arco parabólico. Los pilares que lo soportan tienen una altura de 20 metros y están separados 80 metros. Si el punto más bajo de los cables queda a 10 metros sobre el puente, calcula la altura de los cables a 20 metros de dicho punto.

a) $12.5\ m.$
b) $9\ m.$
c) $9.6\ m.$
d) $10.4\ m$

Tabla de respuestas de la autoevaluación.							
Sección I.				Sección II.			
1. c	2. b	3. c	4. a	5. d	6. a	7. c	8. b
Sección III.				Sección IV.			
9. d	10. b	11. b	12. d	15. c	16. d	17. b	18. a
13. d	14. a						

9. Bibliografía Básica.

Bosco, H., M.D. (2003). *Selección de lecturas Didáctica general I.* Facultad de Filosofía y Letras, Mayo.

Cuellar, J.A. (2012). *Matemáticas III.* México: Mc. Graw-Hill.

Mejía, M. *et al.* (2011). *Guía para el Profesor de Matemáticas III.* Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Oriente.

Robledo, R. P. (2008). *Propuesta para el aprendizaje significativo de la función cuadrática para el Bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades.* Tesis de Grado: Maestro en Docencia para la Educación Media Superior (Matemáticas). Universidad Nacional Autónoma de México.

Swokowsky, E. W. y Cole, J. A. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: International Thomson Editores.

Bibliografía Virtual. Sitios consultados.

Se sugiere explorar los sitios electrónicos siguientes.

http://dgb.unam.mx/

http://www.fciencias.unam.mx/servicios/biblioteca/electrónicos

http://phet.colorado.edu/en/simulation/projectile-motion.

UNAM-Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades

Página web: http://www.cch.unam.mx/

- Historia.
- Misión y filosofía.
- Plan de estudios.

Programas de estudio

https://www.cch.unam.mx/programasestudio

Programa de Estudio. Área de Matemáticas I-IV. (2016). Semestres: I a IV. CCH-UNAM.

UNIDAD 5. Circunferencia, la Elipse y sus Ecuaciones Cartesianas.	MATEMÁTICAS III.

Propósito:
Al finalizar, el alumno:
Será capaz de obtener las ecuaciones cartesianas de la circunferencia y la elipse y trazar sus gráficas correspondientes, dado cualquier conjunto de elementos definitorios. Resolverá problemas donde tales curvas se presenten, con el fin de avanzar en la consolidación del método analítico y desarrollar su habilidad de reconocimiento de formas y estructuras. **Tiempo: 20 horas.**

1. **Presentación de la Unidad 5.**

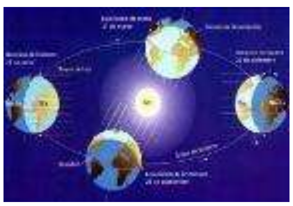
En esta unidad continuaremos con el estudio de las cónicas, comenzaremos con la circunferencia y sus ecuaciones cartesianas, terminaremos con la elipse y sus ecuaciones cartesianas. Para el desarrollo de la unidad debemos tener presente el propósito de la unidad, por lo tanto, con la finalidad de que el alumno obtenga nuevos conocimientos, habilidades y destrezas para resolver problemas de corte analítico, deberá debe contar con los conocimientos elementales adquiridos y la experiencia del trabajo realizado en las unidades anteriores.

El estudio de la circunferencia y la elipse son de gran importancia en la geometría analítica, pues desde la antigüedad están presentes en nuestra vida. La circunferencia la podemos observar en: una moneda, una lata cilíndrica, las ruedas de una bicicleta, el diseño de un jardín o de una bolsa, al arrojar una piedra en el agua quieta se forman circunferencias concéntricas, en fenómenos naturales como en un huracán.






La elipse es muy útil en la astronomía ya que permite conocer la trayectoria de los planetas, también es importante en arquitectura, por ejemplo en un auditorio si un locutor se encuentra en un foco de la elipse es escuchado perfectamente en el otro foco, otro uso es en óptica, consideremos un espejo de superficie elíptica, si un rayo de luz parte de uno de los focos y pega con contra el espejo, entonces se reflejará hacia el otro foco, también lo podemos encontrar en artículos decorativos.



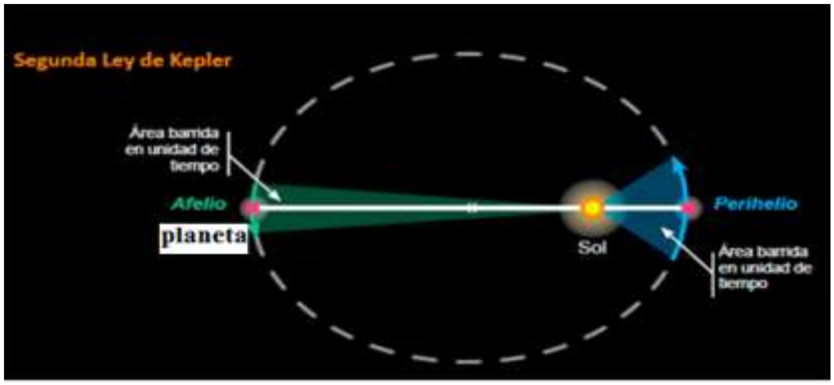
Se han mencionados algunos de los tantos ejemplos de las aplicaciones de estas curvas. Su estudio nos permite conocer más al universo, en particular a nuestro planeta y a lo que nos rodea.

Para comprender la importancia del estudio de la elipse se propone un **Phisilet** (animación de un fenómeno físico) que se encuentra en la siguiente dirección:

https://www.edistribucion.es/anayaeducacion/8450043/recursos/u_05/.../visor.swf

Observa la figura 1. Movimiento de los Planetas Alrededor del Sol y resuelve el cuestionario que se encuentra debajo. La finalidad de este es que te puedas ir familiarizando con dos curvas que estudiaremos en esta unidad y la importancia que tienen estas en diferentes contextos de la vida.

Figura 1. Movimiento de los Planetas Alrededor del Sol



Resuelve el siguiente cuestionario:

- ¿Qué tipo de trayectoria describe el planeta alrededor del sol: es un círculo o qué tipo de figura es? ________________________________.
- ¿El planeta se mantendrá siempre a la misma distancia del sol en su movimiento de traslación (365 días)? __________________________.
- Con la animación que viste y la siguiente figura, puedes concluir que en cierta época del año el planeta se encuentra más cercano o más alejado del sol. ¿esta cercanía o alejamiento serán las culpables de las cuatro estaciones del año? Explica. ____ ____.

Visita la siguiente dirección electrónica con la finalidad de que puedas contestar el siguiente cuestionario.
https://www.google.com.mx/search?q=trayectoria+el%C3%ADptica+alrededor+del+sol&oq=trayector%C3%ADa+el%C3%ADptica&aqs=chrome.5.69i57j0l5.13259j0j8&sourceid=chrome&ie=UTF-8

Cuestionario.

1. ¿Qué es la trayectoria elíptica?
2. ¿Cuál es la trayectoria que siguen los planetas alrededor del Sol?
3. ¿Qué es el movimiento elíptico?
4. ¿Cómo se explica el movimiento de los planetas alrededor del Sol?
5. ¿Cómo son las órbitas de los planetas alrededor del Sol?

Finalmente, Hay que subrayar a los estudiantes la importancia que tiene la trayectoria elíptica para que se produzcan las cuatro estaciones del año y la importancia que tienen en la diversidad biológica del planeta. En el desarrollo de esta unidad permitirá al alumno reafirmar el método analítico para obtener las ecuaciones de la circunferencia y la elipse y trazar sus gráficas, así mismo pondrá en práctica sus conocimientos, habilidades y destrezas, para la resolución de problemas.

En el programa vigente, la unidad tiene como primera temática el estudio de la ecuación ordinaria de la circunferencia, en donde se define la circunferencia como el lugar geométrico, se definen sus elementos y se obtiene la ecuación ordinaria con centro en el origen y fuera de él. Las siguientes temáticas de la circunferencia son: obtención de la ecuación general, relación entre la ecuación ordinaria y ecuación general y problemas de aplicación. La unidad continúa con el estudio de la elipse con las temáticas siguientes: definición de elipse como lugar geométrico, sus elementos, simetría con respecto a los ejes y al centro, los parámetros de su representación algebraica, su ecuación general y por ultima temática la intersección de cónicas, trazando de tangentes, propiedades óptica y auditiva.

Para el desarrollo de la unidad es importante que el alumno comprenda la manera de construir estas curvas cerradas y las propiedades que tienen, pues esto les facilitará el procedimiento para llegar a la definición, para lograr esto, es necesario tener presente los conocimientos adquiridos en las asignaturas anteriores y en las unidades estudiadas en este curso, pues se requieren conocimientos algebraicos y geométricos.

Las habilidades requeridas en los procesos algebraicos como son:

- Desarrollo de un binomio al cuadrado.
- Realizar factorización de expresiones algebraicas.
- Completar un trinomio cuadrado perfecto.

Conocimientos necesarios en los procesos geométricos como son:

- La localización de puntos en el plano cartesiano.
- Concepto de lugar geométrico.
- Noción de segmento rectilíneo en el plano cartesiano.
- Longitud de un segmento rectilíneo.

Para apoyar a los alumnos con dificultades, se propone lo siguiente:

- Aplicar un examen diagnóstico que permita detectar las dificultades de los alumnos en los procesos algebraicos y geométricos.

- Dejarles actividades extra-clase, con base en las deficiencias detectadas en el examen diagnóstico. Las actividades deberán ser evaluadas para conocer los avances.
- Canalizarlos al Programa Institucional de Asesorías del plantel. Revisar las actividades realizadas en el PIA para conocer sus avances.
- Durante el desarrollo de actividades en el aula, el profesor debe estar atento del trabajo y comportamiento de los alumnos, en especial de aquellos que han presentado dificultades tanto de aprendizaje como de integración al grupo.

En cada tema para el logro de los aprendizajes se presentan secuencias didácticas en las cuales se realizan actividades para la solución de problemas o ejercicios a través de una guía dirigida, con el propósito de realizar conjeturas, obtener conclusiones y obtener la solución requerida.

Antes de comenzar el estudio de esta unidad se sugiere aplicar el siguiente examen diagnóstico.

Examen diagnóstico para Unidad 5. Circunferencia, la elipse y sus ecuaciones cartesianas.
Nombre del alumno:_________________________________. Grupo:_________.

1. Localizar en el plano cartesiano los siguientes puntos:

   a) (-3, 5) b) (1.5, - 2) c) (0, 0) d) $\left(\frac{4}{5}, 0\right)$ e) (0, 7)

2. Determinar las coordenadas del punto medio del segmento que tiene como extremos los puntos A (2, 1) y B (9,-7).

3. Utilizando el método de completar cuadrados obtén la solución de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

   a) $2x^2 - 16x + 30 = 0$ b) $3x^2 + 6x - 24 = 0$

4. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 8 \\ 3x + 2y + 3z &= 8 \\ 5x - 4y - 2z &= 7 \end{aligned}$$

5. Escribe la ecuación y traza la gráfica de las siguientes rectas:

a) Recta paralela al eje de las abscisas y tiene intersección con al eje de las ordenadas en -7.
b) Recta paralela al eje de las ordenadas y tiene intersección al eje de las abscisas en 3.

Como ya se mencionó, los alumnos que presenten deficiencias en el examen diagnóstico, deberán realizar actividades extra-clase y/o canalizarlos al Programa Institucional de Asesorías del plantel.

2. Actividades de Enseñanza Aprendizaje.

Para que el alumno adquiera de los aprendizajes señalados en la unidad, se realizaran actividades en las cuales se fomentará tanto el trabajo individual como en equipo y favoreciendo la participación del grupo.
Las actividades por realizar en el desarrollo de la unidad son secuencias que tienen la finalidad de:

- Continuar con el proceso de relacionar el álgebra con la geometría.
- Construcción de la circunferencia doblando papel.
- A través de procedimientos que permitan realizar análisis y formular conjeturas el alumno identifique las características de un conjunto de puntos en el plano que definen a la circunferencia y a la elipse.
- Obtener la ecuación de la circunferencia, a partir de su definición.
- Deduce la ecuación cartesiana de la circunferencia conociendo: a) el centro y su radio, b) los extremos de uno de sus diámetros, c) el centro y un punto que pertenece a la circunferencia y d) tres de sus puntos.
- Determinar la ecuación general de la circunferencia.
- Obtener la ecuación ordinaria a partir de la ecuación general y determina el centro y radio de una circunferencia.
- Determinar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia, la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos, la intersección entre recta y circunferencia.
- Solución de problemas donde se involucra la ecuación de la circunferencia.
- Construcción de la elipse doblando papel.
- Obtener la definición de la elipse como lugar geométrico e identificar sus elementos.
- Obtener la ecuación cartesiana de una elipse, con ejes paralelos a los ejes cartesianos.
- Reconocer los diferentes tipos de diferencia de simetría de la elipse.
- Identificar el papel de los parámetros a, b, y c en la gráfica de la elipse y para emplearlos en su construcción.

- Determinar los elementos de la elipse trasformando la ecuación general en su forma ordinaria.
- Resolver problemas de corte geométrico, donde se involucra la elipse.

3. Conceptos Clave.

Plano cartesiano, lugar geométrico, punto medio de un segmento, diferencia entre circunferencia y círculo, distancia entre dos puntos, puntos equidistantes, Teorema de Pitágoras, diferencia entre ecuación ordinaria y ecuación general, pendiente rectas perpendiculares, recta tangente a una circunferencia, ecuación de rectas paralelas a los ejes coordenados, sistema de ecuaciones de 3x3.

4. Puesta en Escena de los Aprendizajes por Desarrollar.

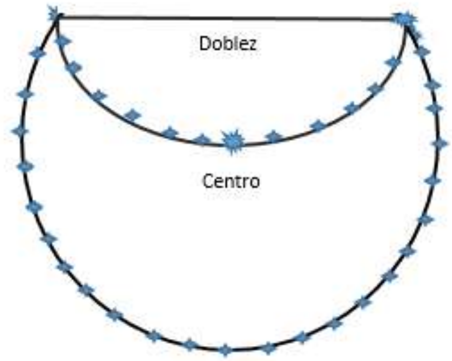
- **La circunferencia y sus ecuaciones cartesianas.**

Secuencia Didáctica 1. Circunferencia de Forma Canónica y Ordinaria.

Aprendizaje:
El alumno deduce la ecuación ordinaria de la circunferencia e identifica sus elementos (radio y coordenadas del centro).

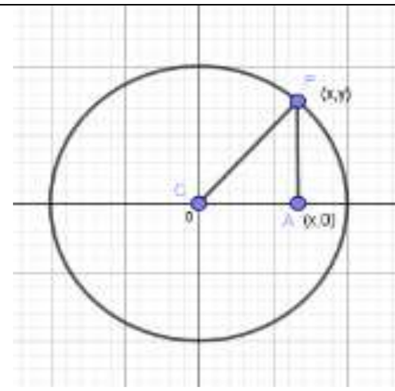
APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Reconozca distintas formas de representación de la circunferencia (canónica y ordinaria) a través de su deducción algebraica.
Procedimentales:	• A partir de un problema pueda determinar alguna de las formas de la circunferencia para su estudio. • Valora la herramienta computacional como auxiliar en la visualización y comprensión de los parámetros $h, k\ y\ r$.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Participa en el trabajo.

Fase de Inicio.	Esta sección la iniciaremos definiendo la circunferencia como lugar geométrico para ello se realizará la siguiente actividad. Los alumnos realizarán de manera individual la siguiente actividad. **Actividad 1.** En una hoja de papel albanene o encerado se trazar una circunferencia con un radio lo mayor posible, de acuerdo a la hoja. Marcar el centro de la circunferencia y varios puntos que pertenecen a la circunferencia. Tomar un punto de la circunferencia, hacerlo coincidir con el centro de la circunferencia y realizar un dobles (el dobles debe quedar muy marcado), esto deberá hacerse con el mayor número de puntos.



1) ¿Qué figura geométrica se observa? _______________.
2) ¿Qué propiedades determinas que tiene la figura? _____________________________.
3) La distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia es una constante llamada_______________.
4) ¿Qué elementos se necesitan para construir una circunferencia?____.
5) De acuerdo a las características observadas la circunferencia se define como el lugar geométrico de todos los puntos que____.
6) Trazar un sistema de coordenadas donde el origen coincida con el centro, marcar un punto P de la circunferencia y construir un triángulo de vértices C (0,0), P(x,y) y A(x,0).
7) ¿Qué tipo de triángulo se formó de acuerdo a sus ángulos?_____________________________________.
8) La hipotenusa representa ________de la circunferencia.
9) ¿Qué longitudes tienen los catetos?__________________________ ____.

<table>
<tr><td></td><td>



10) Por el Teorema de Pitágoras se tiene que: $X^2 + Y^2 =$_______esta representación es llamada ecuación **ordinaria de la circunferencia con centro en el origen y radio r.**

</td></tr>
<tr><td>

Fase de Desarrollo.

</td><td>

Hoja de trabajo 1.

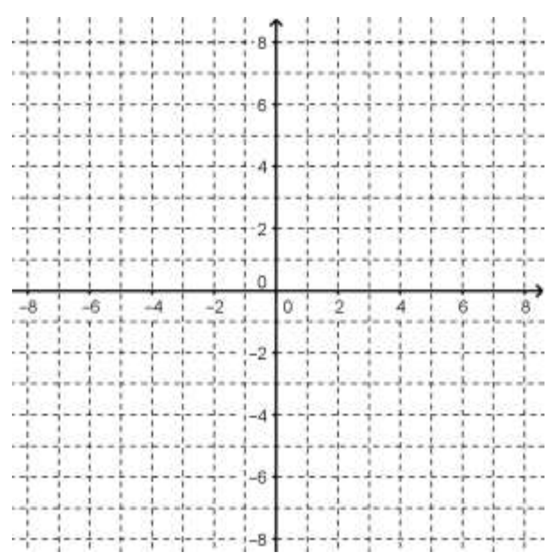
Actividad 2. Realizar la actividad en forma individual y comparando los resultados con sus compañeros.

1. Determinar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos P(x,y) que se encuentran a "r" unidades del punto fijo C(h,k) llamado centro.

   Utilizando la distancia entre dos puntos se tiene que:

   $\sqrt{(x-\quad)^2+(\qquad)^2} =$ ______ elevando al cuadrado ambos miembros se obtiene la ecuación ______________la cual es llamada ecuación **ordinaria de la circunferencia con centro en (h,k) y radio r.**

2. Graficar y determinar la ecuación ordinaria de la circunferencia de Centro (-3, 2) y radio r = 2.



</td></tr>
</table>

Sustituir C(-3, 2) y radio r = 2 en la ecuación ordinaria de la circunferencia:

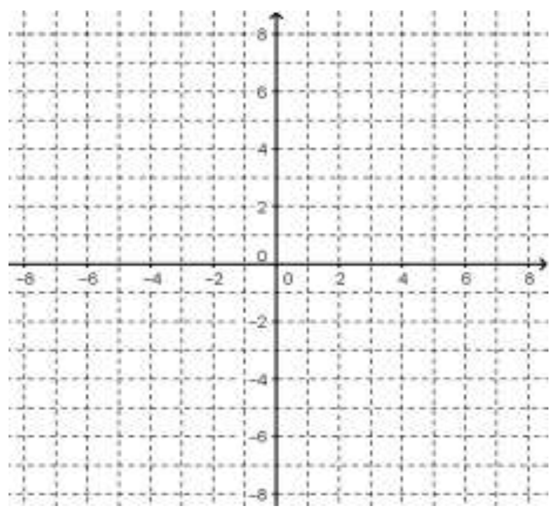
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

por tanto se tiene:

$(x-(\_\_\_\_))^2+(y-(\_\_\_\_))^2=(\_\_\_\_)^2$

$(x+\_\_)^2+(y-\_\_)^2=\_\_\_$ Ecuación ordinaria.

3. Graficar y determinar la ecuación ordinaria de la circunferencia de centro en C(2, - 5) y radio igual $\sqrt{17}$.



Sustituir (2, - 5) y radio r = $\sqrt{17}$ en la forma ordinaria de la ecuación d la circunferencia:

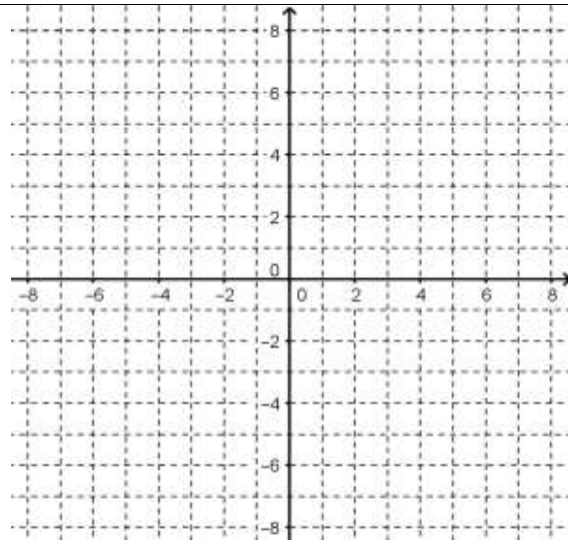
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

por tanto se tiene:

$(x-\_\_\_\_)^2+(y-(\_\_\_\_))^2=(\_\_\_\_)^2$

$(x-\_\_)^2+(y+\_\_)^2=\_\_\_$ Ecuación ordinaria.

4. Graficar y determinar la ecuación ordinaria de todos los puntos que equidistan 5 unidades del punto fijo (8,-4).



Por la definición de circunferencia se tiene que el centro tiene coordenadas (8, - ___) y el radio es de longitud _______.

Sustituyendo el centro y el radio r = 5 en la forma ordinaria de la ecuación d la circunferencia:

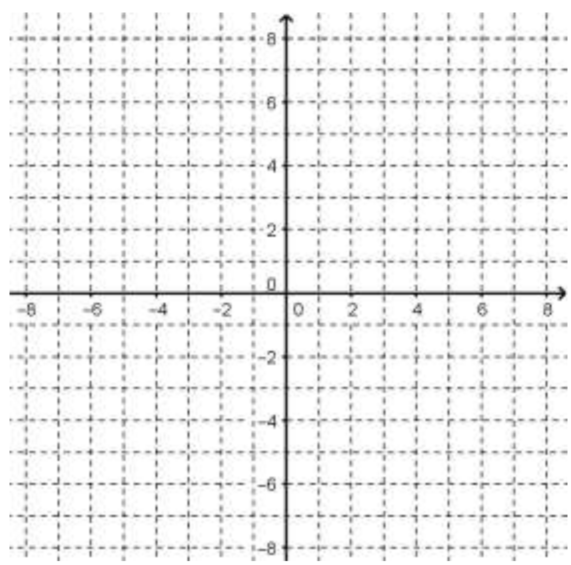
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

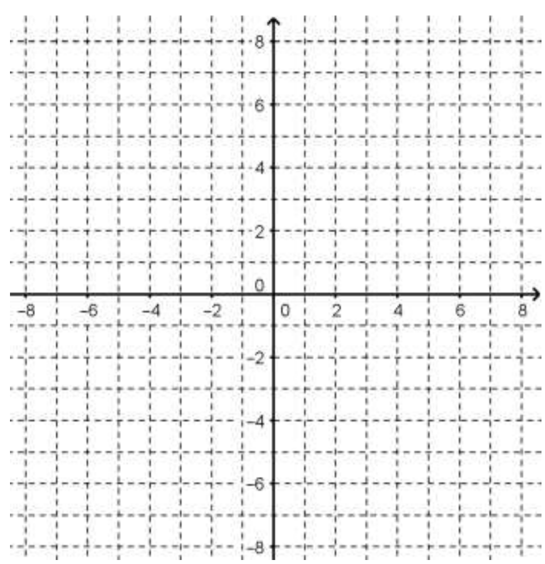
por tanto se tiene:

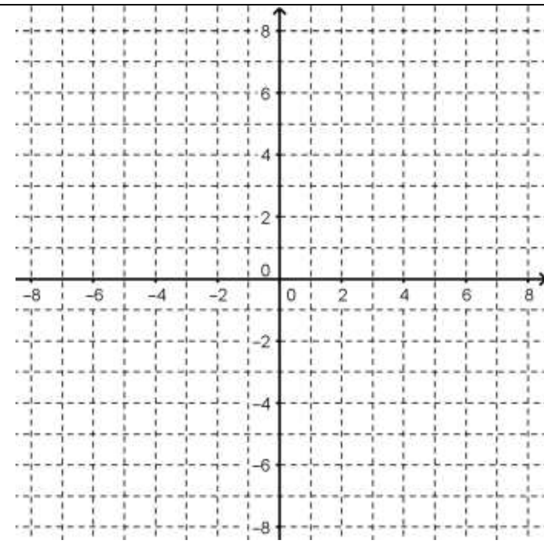
$(x-\_\_\_\_)^2+(y-(\_\_\_\_))^2=(\_\_\_\_)^2$

$(x-\_\_)^2+(y+\_\_)^2=\_\_\_$ Ecuación ordinaria.

5. Graficar y determinar la ecuación ordinaria de la circunferencia que pasa por el punto (- 3,- 5) y tiene su centro en C(5,3).

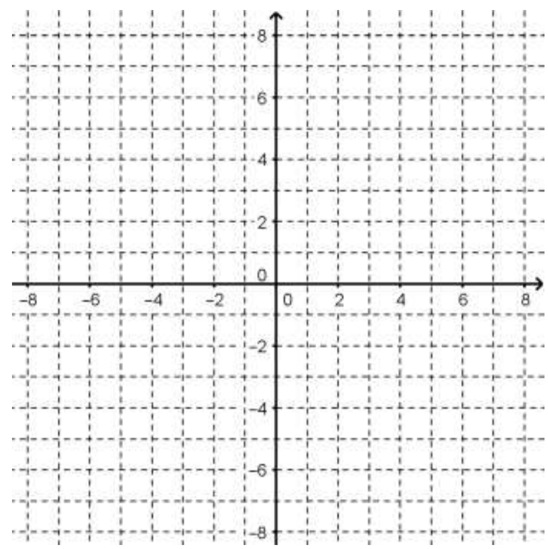


	Si el punto (-3,-5) pasa por la circunferencia entonces satisface la ecuación $(x-5)^2+(y-3)^2=r^2$ Sustituir las coordenadas del punto (-3,-5) para obtener el radio. $((-3)-5)^2+((\_\_\_)-3)^2=r^2$; r^2 = ____ $(x-\_\_)^2+(y-\_\_)^2=\_\_\_$ Ecuación ordinaria.
Fase de Cierre.	**Hoja de trabajo 2.** **Actividad 3.** Realizar la actividad en forma individual y comparando los resultados con sus compañeros. 1. El conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro se llama ____________ 2. Siempre se puede obtener la ecuación ordinaria de la circunferencia si se conoce el centro y la longitud de su radio.______________________ 3. ¿Qué relación existe entre el centro y los puntos de una circunferencia? 4. La ecuación de la circunferencia de centro en el origen y radio r es: _______________________. 5. Graficar y determinar el centro y radio de las siguientes circunferencias. a) $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$ Centro (,) Radio r =  b) $x^2 + y^2 = 1$ Centro (,) Radio r =



c) $(x+6)^2 + (y-4)^2 = \frac{9}{4}$

Centro (,) Radio r =



Secuencia Didáctica 2. Circunferencia de forma general. Parte 1.

Aprendizaje:
El alumno obtiene la ecuación general de la circunferencia.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR

Conceptuales:
- Reconozca la forma general de la circunferencia.

Procedimentales:
- Transita de la forma ordinaria a la forma general y viceversa.
- A partir de un problema pueda determinar alguna de las formas de la circunferencia para su estudio.
- Valora la herramienta computacional como auxiliar en la visualización y comprensión de los parámetros $h, k\ y\ r$.

Actitudinales:
- Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros.
- Participa en el trabajo.
- Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Fase de Inicio.

En esta sección se proponen ecuaciones de la circunferencia en forma ordinaria, para que el estudiante desarrolle las operaciones indicadas y obtenga la ecuación general e identifique el tipo de términos que la componen.

Realizar la actividad en forma individual y comparando los resultados con sus compañeros.

Actividad 1.

Dada la siguiente circunferencia, desarrollar los binomios, simplificar, igualar a 0 e identificar el tipo de términos que componen a la ecuación resultante.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

1) $x^2 - 2xh + h^2 +$ ______________ $= r^2$
2) ____________ $+ y^2 - 2yk + k^2 -$ ___ $= 0$
3) $x^2 +$ ___ $- 2xh - 2yk + h^2 +$ ___ $- r^2 = 0$
4) Como h,k y r son constantes, hacemos un cambio de variable donde: $-2h = D$; $-2k = E$; $h^2 + k^2 - r^2 = F$, entonces la ecuación resultante es:

$x^2 +$ ___ $+ Dx +$ ___ $+ F = 0$ la ecuación resultante es la ecuación general de la circunferencia.

Fase de Desarrollo.

Hoja de trabajo 3.

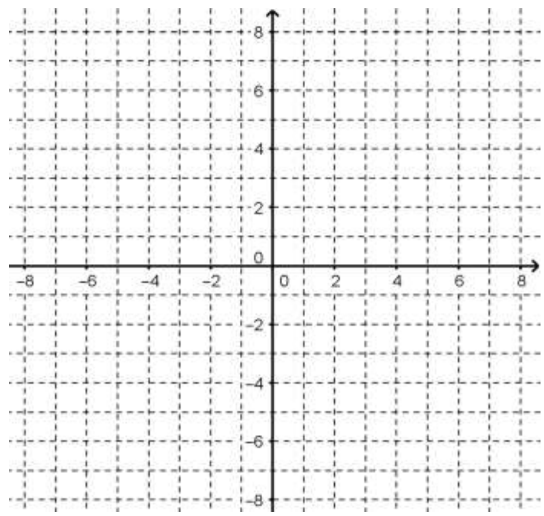
Actividad 2. Realizar la actividad en forma individual y comparando los resultados con sus compañeros.

Graficar y determinar la ecuación general de las siguientes circunferencias:

a) $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 16.$

Desarrollando los binomios se tiene:

$x^2 - \underline{\qquad} + \underline{\qquad} + \underline{\qquad}^{\,2} - 4\underline{\quad} + 4 = 16$
$x^2 + y^2 - \underline{\quad}x - 4y + 25 + \underline{\qquad} = 16$
$x^2 + y^2 - 10x - \underline{\quad} + 29 - \underline{\qquad} = 0$
$x^2 + y^2 - 10x - 4y + \underline{\qquad} = 0$. Ecuación general de la circunferencia.



b) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$

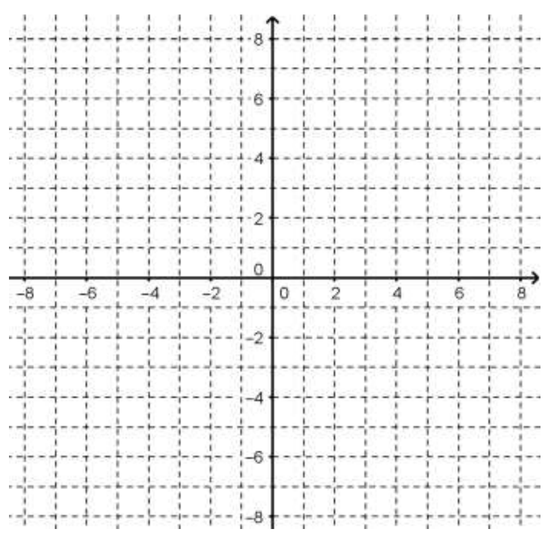
Desarrollando los binomios se tiene:

$x^2 - \underline{\qquad} + 16 + y^2 + 4\underline{\quad} + 4 = 25$

$x^2 + \underline{\quad}^{\,2} - \underline{\quad}x + 4y + 16 + \underline{\qquad} = 25$

$x^2 + y^2 - \underline{\qquad}\,x + 4y + 20 - \underline{\qquad} = 0$

$x^2 + y^2 - 8x + 4y - \underline{\qquad} = 0$ Ecuación general circunferencia.



c) $(x+6)^2 + (y - 0)^2 = 25$

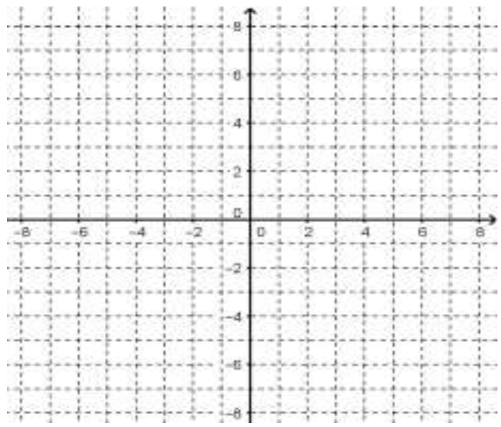
Desarrollando los binomios se tiene:

$\_\_\_ +12\_\_\_ + 36 + y^2 – 2y \_\_ + 0 = 25$

$x^2 + \_\_\_\_\_^2 \_\_x + 36 = 25$

$x^2 + y^2 +12 x + \_\_\_ - 25 = 0$

$x^2 + y^2 + \_\_\_\_ + \_\_\_\_ = 0$ Ecuación general de la circunferencia.



d) Centro en C (0, 1) y radio igual a 3

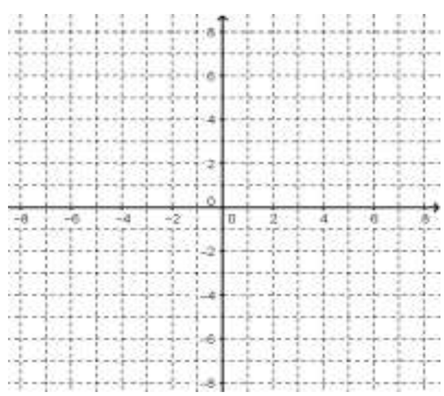
La expresión de la ecuación ordinaria de la circunferencia es: $(x - 0)^2 + (y - \_\_)^2 = (\_\_\_)^2$

Desarrollando los binomios

$x^2 +2x(\_\_\_) + 0 + y^2 – 2\_\_ + 1 = 9$

$x^2 + y^2 – 2y + \_\_ - 9 = 0$

$x^2 + y^2 - \_\_\_\_ - \_\_\_\_ = 0$ Ecuación general circunferencia.

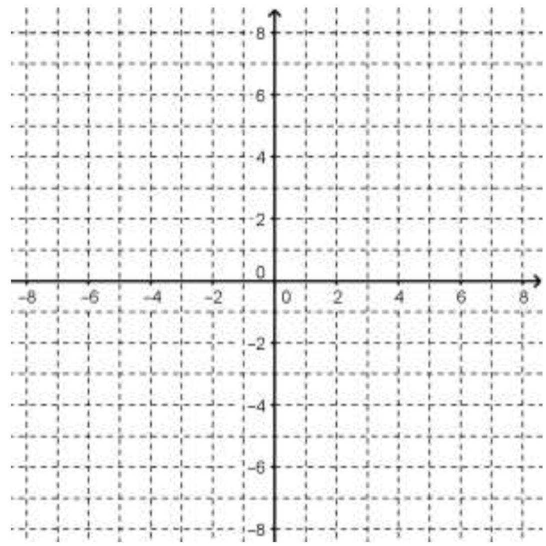


e) Centro en C (8,- 4) y radio igual a 4.

La expresión de la ecuación ordinaria de la circunferencia es:

$(x - 8)^2 + (y – (-4))^2 = (\_\_\_)^2$

Desarrollando los binomios:

	$x^2 + 2x(\_\_\_) + 64 + y^2 + \_\_\ y + 16 = 16$ $x^2 + y^2 - 16\ \_\_ + 8y + 64 + 16 = 16$ $x^2 + y^2 - \_\_x + 8y + \_\_ = 0$ $x^2 + \_\_\_^2 - \_\_x + 8y + 64 = 0$ Ecuación general de la circunferencia. 
Fase de Cierre.	**Hoja de trabajo 4** **Actividad 3.** Realizar la actividad en forma individual y comparando los resultados con sus compañeros. 1. Dada la ecuación $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ y desarrollando los binomios se obtiene la ________________llamada ecuación general de la circunferencia. 2. Determina la ecuación general de la circunferencia de radio r = 6 y centro en el punto C (- 1, 3). 3. Si el centro de una circunferencia es el origen y el radio es igual $\sqrt{13}$ entonces su ecuación general es: _____________________________. 4. Comprueba que la circunferencia: $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 94 = 0$ pasa por el punto (-3, - 5). Recuerda que si un punto pertenece a un lugar geométrico entonces satisface su ecuación. 5. Determina la ecuación general y los valores D, E y F de la circunferencia: $(x-4)^2 + (y+5)^2 = 36$.

Secuencia Didáctica 3. Circunferencia. Parte 2.

Aprendizaje:
El alumno obtiene la ecuación ordinaria a partir de la ecuación general y determina el centro y el radio de una circunferencia.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Identifica el centro y el radio de una circunferencia al transitar a la forma ordinaria.
Procedimentales:	• Completa cuadrados para pasar de la forma general a la ordinaria. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Participa en el trabajo.

Fase de Inicio.

En esta sección se proponen ecuaciones de la circunferencia en forma general, y con su orientación el profesor solicita a los alumnos que realicen las operaciones pertinentes para obtener a partir de la ecuación general la ecuación ordinaria de la circunferencia e identifique los elementos de la circunferencia.

Con el apoyo del profesor, realizar la actividad en forma individual y comparando los resultados con sus compañeros.

Actividad 1.

Para determinar la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia y como consecuencia, el centro y el radio, a partir de la forma general de la ecuación, es necesario recordar como completar un Trinomio Cuadrado Perfecto (Completar el cuadrado).

Completar el Cuadrado.

Para completar el trinomio cuadrado perfecto en una expresión de la forma $x^2 \pm bx$, se debe sumar $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

La expresión se trasforma en $x^2 \pm bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2$.

Expresar las siguientes ecuaciones de la circunferencia en su forma ordinaria, determinar su centro, radio y realiza el bosquejo de la gráfica.

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$

1) Reordenar el término constante en el segundo miembro de la ecuación.

____

2) Asociar términos con "x" y términos con "y".

____

3) Completar los cuadrados:

Coeficiente de "x": $b =$ ____; $\left(\frac{b}{2}\right)^2 =$

Coeficiente de "y": $b =$ ____; $\left(\frac{b}{2}\right)^2 =$

4) Agrega el resultado de $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, para completar los trinomios para "x" y "y" respectivamente, así como en el segundo miembro de la ecuación.

$x^2 - 6x + \_\_\_ + y^2 + 4y + \_\_\_ = -4 + \_\_\_ + \_\_\_$

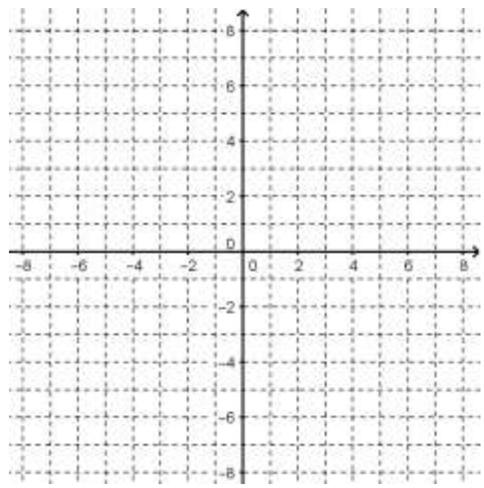
5) Factoriza los T.C.P., y simplifica términos en el segundo miembro, por tanto la ecuación en su forma ordinaria queda como:

$$(\_\_\_\_\_\_)^2 + (\_\_\_\_\_\_)^2 = \_\_\_\_$$

6) Por lo que el centro y radio respectivamente son:

$C(\_\_\_ \quad , \quad \_\_\_)$; $r = \_\_\_\_\_$

7) El bosquejo de la gráfica de la ecuación es:



Fase de Desarrollo.

Hoja de trabajo 5

Actividad 2. Realizar la actividad en forma individual y comparando los resultados con sus compañeros.

Determinar la ecuación ordinaria, el centro, el radio y realizar un bosquejo de la gráfica de las siguiente circunferencia:

a) $x^2 + y^2 + 3x - 3y - \frac{1}{2} = 0$

1) Reordena el término constante en el segundo miembro de la ecuación.

____.

2) Asocia términos con "x" y términos con "y".

____.

3) Completa los cuadrados:

Coeficiente de "x": $b =$ ____; $\left(\frac{b}{2}\right)^2 =$

Coeficiente de "y": $b =$ ____; $\left(\frac{b}{2}\right)^2 =$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

4) Agrega el resultado de $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, para completar los trinomios para "x" y "y" respectivamente, así como en el segundo miembro de la ecuación.

$x^2 + 3x + \frac{9}{4}y^2 - 3y + \_\_\_ = \frac{1}{2} - \frac{9}{4} - \_\_\_\_$

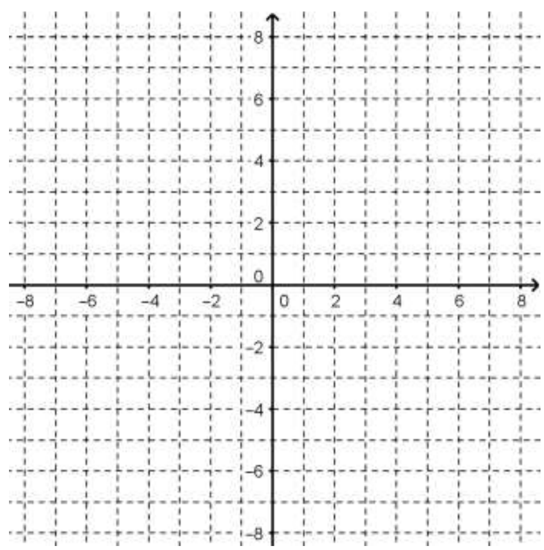
5) Factoriza los T.C.P., y simplifica términos en el segundo miembro, por tanto la ecuación en su forma ordinaria queda como:

$$(x + \_\_\_)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \_\_\_$$

6) Por lo que el centro y radio respectivamente son:

$C\left(\_\_\_ \;,\; \_\_\_\right)$; $r = \_\_\_\_$

7) El bosquejo de la gráfica de la ecuación es:



</td>
</tr>
<tr>
<td>

Fase de Cierre.

</td>
<td>

Hoja de trabajo 6.

Actividad 3. Realizar la actividad en forma individual y comparando los resultados con sus compañeros.

a) La ecuación general de la circunferencia es: ___________________.
b) La ecuación ordinaria de la circunferencia es: __________________.
c) A partir de la ecuación general se puede obtener la ecuación ordinaria de una circunferencia, para ello es necesario ____________________________________
d) Para completar el trinomio cuadrado perfecto en la expresión $x^2 \pm bx$, se debe sumar _____________
Para obtener la expresión _____________________
e) Para completar el trinomio cuadrado perfecto en la expresión $y^2 \pm by$, se debe sumar _____________
Para obtener la expresión _____________________

</td>
</tr>
</table>

	Determinar la ecuación ordinaria, el centro, el radio y realizar un bosquejo de la gráfica de las siguientes circunferencias: a) $x^2 + y^2 - 16y + 64 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 11$ c) $4x^2 + 4y^2 + 8x - 16y + 12 = 0$

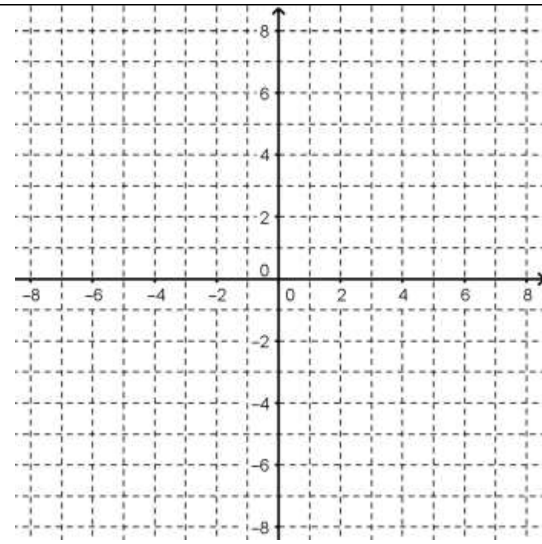
Secuencia Didáctica 4. Problemas de Corte Geométrico.

Aprendizaje:
El alumno resuelve problemas de corte geométrico.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR

Conceptuales:	• Comprende los conceptos de tangente, pendiente, para determinar la ecuación de la circunferencia.
Procedimentales:	• Resuelve problemas de corte geométrico llegando a las formas ordinaria o general, dependiendo las condiciones del problema.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Valora el software GeoGebra para visualizar y comprender los elementos involucrados con la circunferencia. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Fase de Inicio.	En esta sección se resolverán problemas, por ejemplo: Encontrar la ecuación de la tangente a la circunferencia, la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos, la intersección entre recta y circunferencia y en otros contextos. Con el apoyo del profesor, realizar la actividad en forma individual y comparando los resultados con sus compañeros. **Actividad 1.** Determinar la ecuación general de la circunferencia con centro es el punto $C(1,1)$ y es tangente a la recta con ecuación $2x+y+4=0$. 1) ¿Qué ángulo tienen entre sí, la tangente y la recta que contiene al radio de la circunferencia en el punto de tangencia?____________________ ____. 2) Determinar la pendiente de la recta tangente.______________________. 3) Emplear el resultado anterior para determinar la pendiente de la recta que contiene al radio de la circunferencia. 4) Dibujar en el sistema de coordenadas los elementos que se proporcionan como datos.



5) La recta que contiene al radio pasa por el centro de la circunferencia $C(1,1)$, con este punto y la pendiente obtenida en el punto anterior, determina la ecuación de esta recta.
6) La circunferencia pasa por el punto de tangencia p, cruce de la recta tangente y la recta que contiene al radio, emplea las ecuaciones de las dos rectas y resuelve el sistema de ecuaciones lineales para determinar las coordenadas de este punto.
   Observa que el radio es el segmento de recta que va del centro de la circunferencia $C(1,1)$ y el punto de tangencia.
7) Determinar la longitud del radio.
8) Con la longitud del radio y el centro de la circunferencia $C(1,1)$, la ecuación ordinaria de la circunferencia es:

____.

Fase de Desarrollo.

Hoja de trabajo 7

Realizar la actividad en forma individual y comparando los resultados con sus compañeros.

Actividad 2.

Determinar la ecuación ordinaria, el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos $(0,0)$, $(2,-6)$ y $(4,0)$.

Cada punto al encontrarse sobre la circunferencia cumple con la forma general de la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

1) Sustituir las coordenadas del punto $(0,0)$ en la ecuación general.

$$(\quad)^2+(\quad)^2+D(\quad)+E(\quad)+F=0$$

   La ecuación resultante es:
2) Sustituir las coordenadas del punto $(2,-6)$ en la ecuación general

$$(\quad)^2+(\quad)^2+D(\quad)+E(\quad)+F=0$$

   La ecuación resultante es:

   ____

3) Sustituir las coordenadas del punto $(4,0)$ en la ecuación general

$$(\quad)^2+(\quad)^2+D(\quad)+E(\quad)+F=0$$

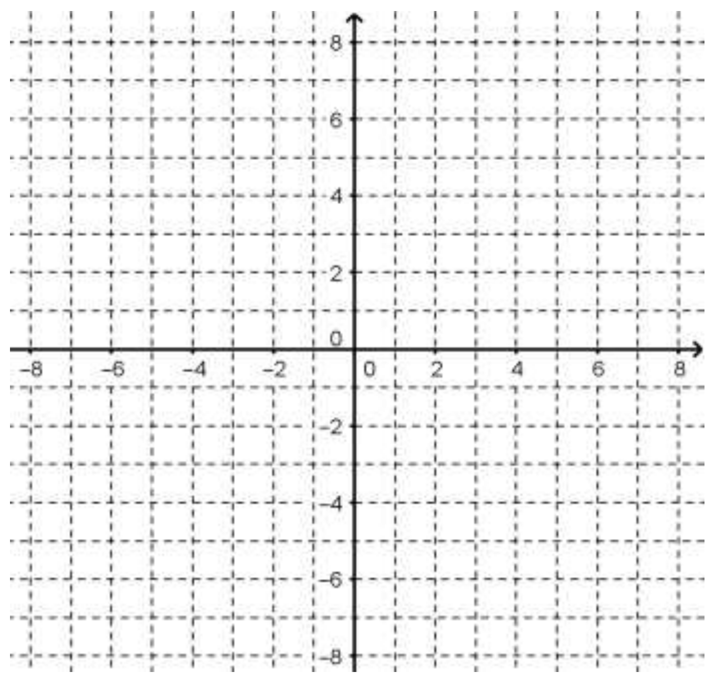
La ecuación resultante es: ____

4) Con las tres ecuaciones obtenidas, se forma un sistema de ecuaciones lineales 3x3. Resolver el sistema para determinar los valores de D, E y F.

5) Sustituir los valores de D, E y F en la ecuación general. $x^2+y^2+\_\_\_x+\_\_\_y+\_\_\_\_=0$

6) Determinar el centro y el radio de la circunferencia con la ecuación ordinaria.

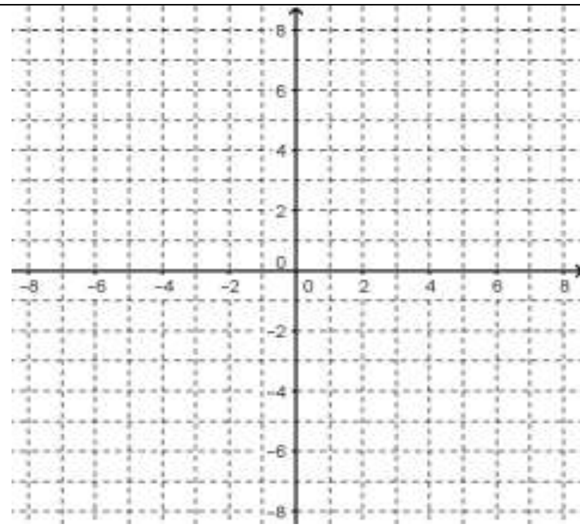
7) Ubicar en el plano cartesiano las coordenadas del centro, dibuja la circunferencia y comprueba que pasa por los puntos que se indicaron en el problema.



Actividad 3.

Determinar los puntos de intercepción de la recta con ecuación $y=3x$ y la circunferencia $x^2+y^2=10$.

1) Determinar las coordenadas del centro de la circunferencia, su radio, realiza el bosquejo de la gráfica y trazar la recta.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


2) Determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la circunferencia y la recta resolviendo el sistema de ecuaciones no lineal que se forma con las dos ecuaciones.

$$x^2 + y^2 = 10$$

$$y = 3x$$

3) Los puntos de intersección son:_______________.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Fase de Cierre.</td>
<td>

Hoja de trabajo 8

Realizar las actividades en forma individual y comparando los resultados con sus compañeros.

Actividad 4.

1. Determinar la ecuación general de la circunferencia tangente al eje de las abscisas y centro en (- 4, 5)
2. Determinar la ecuación general de la circunferencia con centro en (-2,3) y es tangente a la recta 20x – 21y – 42 = 0
3. En la circunferencia que pasa por los puntos A(0,0), B(1,0) y (0,1)

a) Obtener la ecuación general y ordinaria.
b) Determinar el centro y el radio.

4. Determinar la longitud de una cuerda de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ que se encuentra sobre en la recta x – 7y + 25 = 0.
5. Se desea trazar una pista circular en un mapa. Las condiciones dadas es que la pista tenga centro en C(5,12) y además debe pasar por el punto A(-2,8).

a) Determinar la ecuación que describe a todos los puntos de la pista.
b) Se desea instalar dos cabinas en la pista de tal forma que tenga ordenada igual a 8, ¿Cuáles son las coordenadas de las cabinas?
c) Realizar la gráfica que representa la pista de acuerdo a su ecuación.
</td>
</tr>
</table>

Secuencia Didáctica 5. Construcción de la Elipse con Dobleces y el Método del Jardinero.

Aprendizaje:

El alumno obtiene la definición de elipse como lugar geométrico e identificará sus elementos.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR

Conceptuales:
- Identifica a una elipse como lugar geométrico.
- Comprueba geométricamente su definición.

Procedimentales:
- Utiliza métodos de papiroflexia y el método del jardinero para definir y determinar los elementos de una elipse.

Actitudinales:
- Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros.
- Participa en el trabajo.
- Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

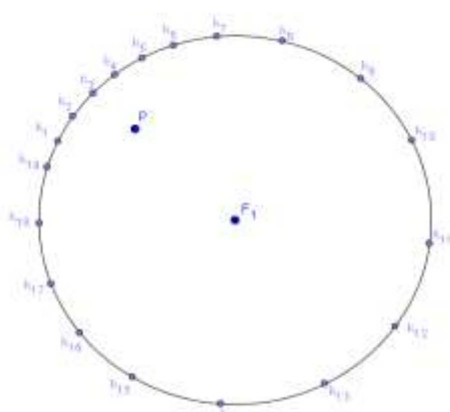
Fase de inicio.

En esta sección el alumno construirá una elipse con dobleces de papel, y definirá la elipse como lugar geométrico.

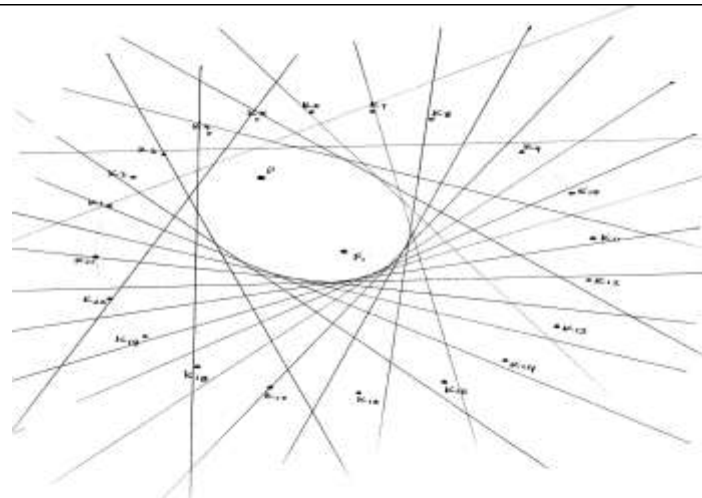
Los alumnos realizarán de manera individual la siguiente actividad.

Actividad 1.

1. En una hoja de papel albanene o encerado se traza una circunferencia de radio cualquiera, asígnale al centro la letra F_1.
2. Marca un punto P al interior del círculo.
3. Alrededor del punto P y sobre la circunferencia marca punto cercanos a P y asígnales las letras $k_1, k_2, k_3, \ldots;$ conforme te alejes de P, márcalos más alejados. Ver la siguiente figura.



4. Ahora haz coincidir cada uno **de** los puntos $k_1, k_2, k_3, \ldots;$ con el punto P, y traza un doblez en cada una de estas coincidencias hasta terminar con el último punto k_n. Ver la siguiente figura.
5. ¿Qué figura geométrica se observa?_____________________.

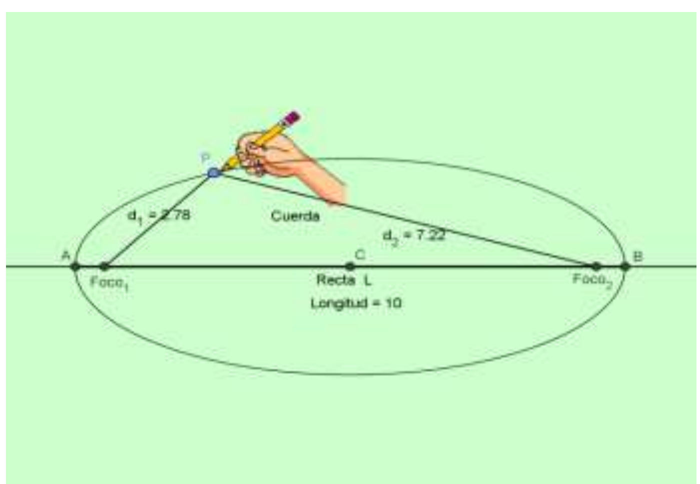


- **Otra forma de construir una la elipse es por el método del jardinero.**

En una cartulina, cartón o cualquier material donde puedas insertar un par de “chinches”, “tachuelas“ o “clavos”.

Construcción.

1. Corta un hilo de longitud *2a* y sujeta sus extremos en las tachuelas o clavos, estos son dos puntos *(Foco$_1$ y Foco$_2$)*, sobre la recta “L” teniendo en cuenta que *2a* debe ser mayor que la distancia de *Foco$_1$Foco$_2$.*
2. Tensa el hilo con la punta de un lápiz, como se muestra en la siguiente figura.



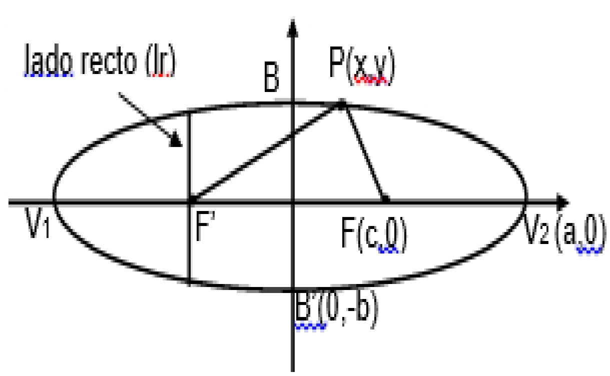
El lápiz trazará en su movimiento una elipse con focos en los puntos F_1F_2, ya que la suma de las distancias, de la punta del lápiz a cada uno de los focos es constante: siempre es igual a *2a*. Este procedimiento es muy usado por los jardineros para trazar prados elípticos.

De acuerdo a las características observadas, la elipse se define como: **El lugar geométrico de todos los puntos en el plano para los cuales la suma de sus distancias a dos puntos fijos es __________________.**

- Los puntos fijos se llaman: ____.
- Los puntos en donde la curva corta a la recta "L" se llaman: ________________________. Asígnales las letras V_1 y V_2 respectivamente.
- Localiza el punto medio de la distancia entre los focos, el cual recibe el nombre de: _______________. Asígnale la letra "C".
- Traza una recta perpendicular a la recta "L" por el punto "C", la intersección de esta recta con la curva obtenida son los extremos del eje: _____________________. Asígnales las letras B_1 y B_2 respectivamente.
- Traza un segmento perpendicular a la recta "L" que pase por cada uno de los focos, donde los extremos sean puntos de la curva, este segmento recibe el nombre de: _______________.

Los elementos básicos de la elipse son los siguientes:

- **Eje Mayor (2a)**
- **Eje Menor (2b)**
- **Centro (h, k)**
- **Eje Focal (2c),**
- **Focos F' y F.**
  Vértices (V_1 y V_2)
  Extremos del eje menor (B' y B)
- **Lado Recto (Lr = $\frac{2b^2}{a}$)**
- **Excentricidad (e = $\frac{c}{a}$)**

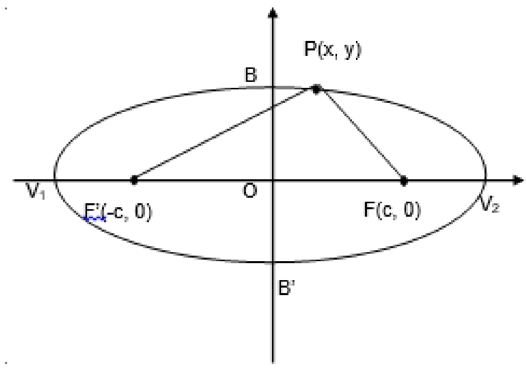


Fase de Desarrollo.

Hoja de trabajo 9.

Actividad 2. Realizar la actividad en forma individual y comparando los resultados con sus compañeros.

1. Determinar la ecuación ordinaria o canónica de una elipse con centro en el origen y eje mayor sobre el eje de las abscisas.



2. Si en la figura anterior se hace coincidir el punto P con B, como B es un punto de la elipse se cumple: **FB +F'B = 2a**

Considerando los triángulos triángulos **F'OB** y **BOF,** completa las respuestas:

a) Los lados **OF'** y **OF** son ___________ y cada uno mide ________________.

b) **OB** es lado ___________ de los dos triángulos y su medida es ______________.

c) Los ángulos **F'OB** y **BOF** son __________________.

d) De manera que los triángulos son congruentes por el criterio ______________________________________.

e)¿Puedes concluir a que es igual: $\mathbf{c^2 + b^2 =}$ ______?

f) Por lo tanto, $\mathbf{b^2 = a^2 - c^2}$ **(*)**

Por definición, una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano, cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos *$F_1(c,0)$ y $F_2(-c,0)$. Es constante e igual a la longitud del eje mayor* ***(2a).*** Matemáticamente tenemos la expresión:

$$d(P, F) + d(P, F') = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Otra manera conveniente es: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

	3) Elevando al cuadrado ambos miembros y desarrollando se obtiene: $$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$ 4) Al simplificar términos semejantes se obtiene: $$4cx=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$ 5) Dividiendo entre (4) y asociando como: $cx-a^2=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ 6) Elevando al cuadrado ambos miembros, desarrollando y simplificando: $$c^2x^2+a^4=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2$$ 7) Escribiendo como: $c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$ 8) Multiplicando por (- 1) ambos miembros: $$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$ 9) Factorizando en ambos miembros: $$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$ 10) Por e) sabemos que **$a^2 - c^2 = b^2$** entonces al sustituir en la expresión anterior se obtiene: $x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$ 11) Al dividir ambos miembros entre **a^2b^2,** se obtiene: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$ La cual es llamada: **Ecuación de la elipse en forma canónica, con cetro en el origen y eje mayor sobre el eje de las abscisas.**
Fase de Cierre.	**Hoja de trabajo 10.** Tomando en cuenta la ecuación (1), completa las proposiciones siguientes: Las coordenadas del centro de la elipse son: ______________. Los vértices del eje mayor está sobre el eje: ________________ y sus coordenadas son: _________. Los vértices del eje menor está sobre el eje: ______________ y sus coordenadas son: _________. Las coordenadas de los focos son: __________________. De forma análoga se obtiene la **Ecuación de la elipse en forma ordinaria o canónica, con cetro en el origen y eje mayor sobre el eje de las ordenadas.**

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

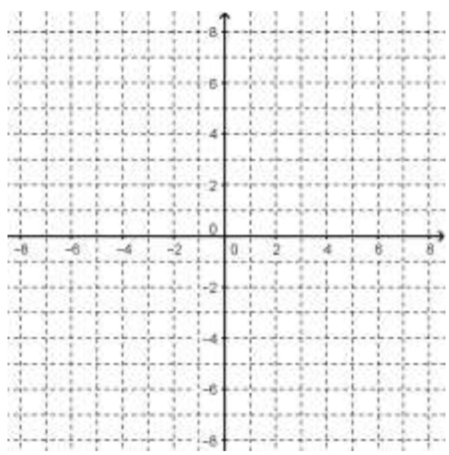
Tomando en cuenta la ecuación (2), completa las proposiciones siguientes:

Las coordenadas del centro de la elipse son: __________
Los vértices del eje mayor está sobre el eje: _______________ y sus coordenadas son: ________.
Los vértices del eje menor está sobre el eje: _____________ y sus coordenadas son: ________.
Las coordenadas de los focos son: _____________________.

Realizar las actividades en forma individual y comparando los resultados con sus compañeros.

Actividad 3.

1. Determinar la ecuación de la elipse cuyos focos son *F(5,0) y F´(-5,0),* tal que la longitud de su eje mayor es 12. Además realizar la gráfica de la elipse.



Actividad 4.

Completa las proposiciones siguientes:

Como el punto medio entre los focos es *C(0,0)* y los focos están sobre el eje *x*; entonces la elipse tiene su eje mayor sobre el eje____________, por lo tanto es horizontal y su ecuación es de la forma____________________.

La distancia entre los focos es: 2c =_________ y c = ____.

La distancia entre los vértices es: 2a = _______ y a = ____.

Sabemos por f) **(*)** que: $b^2 = a^2 - c^2$.

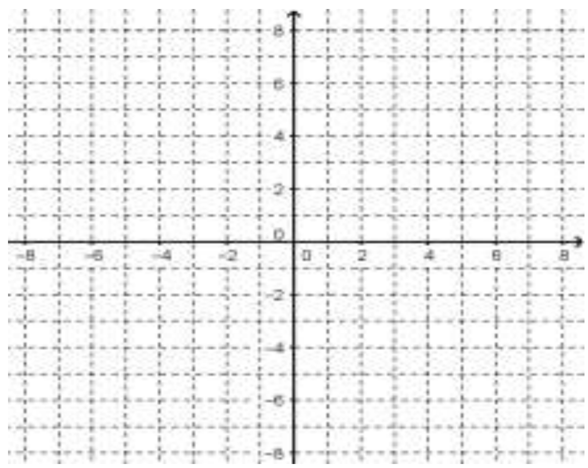
Por lo tanto: b^2= _______.

$b = \sqrt{11} \approx 3.31$ y por lo tanto la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$$

Completar la siguiente tabla y graficar la elipse.

a	*b*	*c*	*Centro*	*Focos*	*Vértices*	B_1	B_2



2. Dada la ecuación: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Llena los espacios en blanco y realiza la gráfica.

Como la variable “y” esta sobre el mayor valor (9) entonces la elipse está en posición vertical, los focos están en el eje de ____________.

Por lo tanto, a^2 = _____ ; **a** = _______.

Los vértices eje mayor son: V_1(,) y V_2(,).

$\mathbf{b}^2$ = _____; **b** = ______ . B_1(,) y B_2(,)

Por la relación $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$, obtenemos que $\mathbf{a^2 - b^2 = c^2}$.

Por lo tanto c^2 = _______; **c** = __________.

Las coordenadas de los focos son: F’(,) y F (,).

Longitud del lado recto es: $L_r = \frac{2b^2}{a} = - = -$.

La excentricidad es: e = ________

Secuencia Didáctica 6. Ecuación Ordinaria de la Elipse de Centro *(h,k)*.

Aprendizaje:

El alumno:

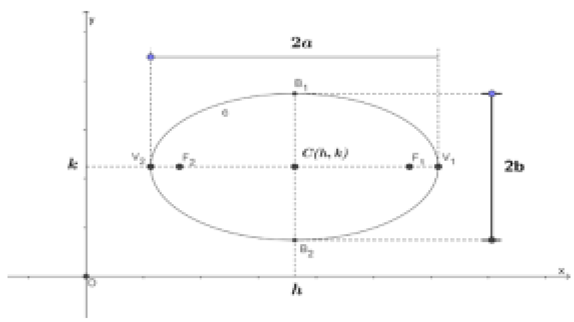
- Obtiene la ecuación cartesiana de una elipse, con ejes paralelos a los ejes cartesianos.
- Reconoce los diferentes tipos de simetría de la elipse.
- Identifica el papel de los parámetros a, b, c en la gráfica de la elipse y los emplea en su construcción.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR

Conceptuales:	• Reconoce la ecuación ordinaria de una elipse con centro fuera del origen a través de una traslación de ejes. • Comprueba geométricamente su definición.
Procedimentales:	• Utiliza métodos algebraicos para determinar los elementos de una elipse.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Fase de Inicio.

Esta sección se iniciará haciendo una traslación de h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente de la elipse con centro en el origen y eje focal paralelo al eje x.



Sustituimos *x* por *(x-h)* y *y* por *(y-k),* en la ecuación

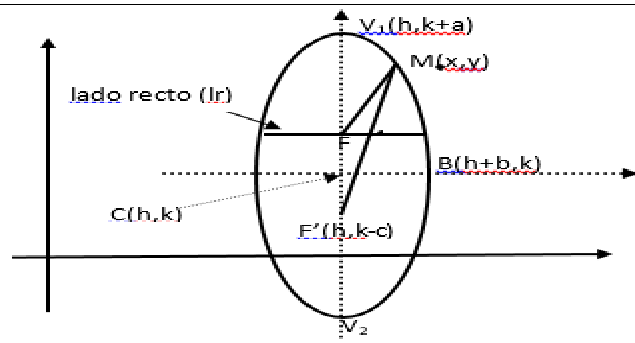
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

La ecuación de la elipse con centro *C(h,k)* y eje focal paralelo al eje *x*, en la forma canónica u ordinaria es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Análogamente, la ecuación de la elipse con centro *C(h,k)* y eje focal paralelo al eje *y*, canónica u ordinaria es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$



Fase de Desarrollo.

Hoja de trabajo 11.

Realizar la actividad en forma individual y comparando los resultados con sus compañeros.

Considerando las imágenes anteriores completa los espacios en blanco.

1. Las coordenadas de los vértices del eje mayor son: $V_1(h+a,k)$ y $V_2($, $)$.
2. Las coordenadas de los vértices del eje menor son: $B_1(h,k+b)$ y $B_2($, $)$.
3. Las coordenadas de los focos son: $F_1(h+c,k)$ y $F_2($, $)$.

De forma análoga si el eje mayor fuera paralelo al eje "y" tendremos:

4. Las coordenadas de los vértices del eje mayor son: $V_1(h,k+a)$ y $V_2($, $)$.
5. Las coordenadas de los vértices del eje menor son: $B_1(h+b,k)$ y $B_2($, $)$.
6. Las coordenadas de los focos son: $F_1(h,k+c)$ y $F_2($, $)$.
7. Dada la elipse:

$$\frac{(x\ +\ 2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

Llena los espacios en blanco para obtener sus elementos y realiza la gráfica.

Como la variable "x" esta sobre el mayor valor (25) entonces la elipse está en posición ___________, Los focos están en el eje de _____________

Por lo tanto, a^2 = _____ ; **a** = ________

Los vértices eje mayor son: $V_1($, $)$ y $V_2($, $)$.

$\mathbf{b}^2$ = _____; **b** = _______ . $B_1($, $)$ y $B_2($, $)$.

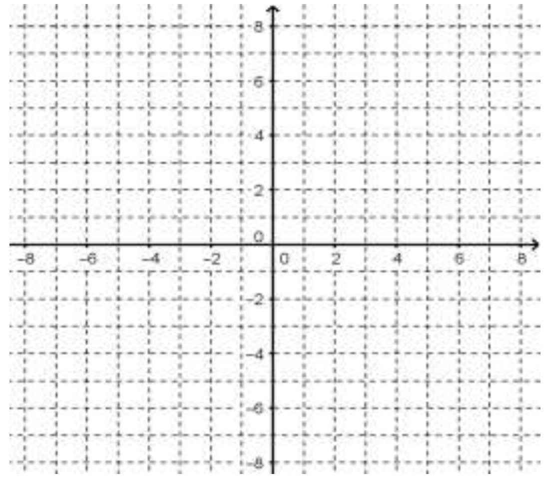
Por la relación $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$, obtenemos que $\mathbf{a^2 - b^2 = c^2}$

Por lo tanto c^2 = _______; **c** = ___________

Las coordenadas de los focos son: F'(,) y F (,).

Longitud del lado recto es: $L_r=\frac{2b^2}{a}=-=-$.

La excentricidad es: e = _________



1. Dada la elipse

$$\frac{(x-\ 3)^2}{16}+\ \frac{(y-5)^2}{25}=1$$

Llena los espacios en blanco para obtener sus elementos y realiza la gráfica.

Como la variable “y” está sobre el mayor valor (9) entonces la elipse está en posición ___________. Los focos están en el eje de ____________

Por lo tanto, a^2 = _____ ; **a** = _______

Los vértices eje mayor son: V_1(,) y V_2(,).

$\mathbf{b}^2$ = _____; **b** = ______ . B_1(,) y B_2(,)

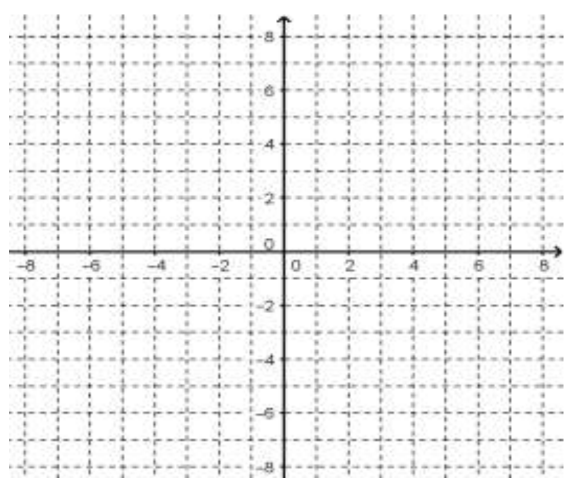
Por la relación $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$, obtenemos que $\mathbf{a^2 - b^2 = c^2}$

Por lo tanto c^2 = _______; **c** = __________

Las coordenadas de los focos son: F’(,) y F (,)

Longitud del lado recto es: $L_r = \frac{2b^2}{a} = \frac{}{} = \frac{}{}$.

La excentricidad es: e = ________



Fase de Cierre.

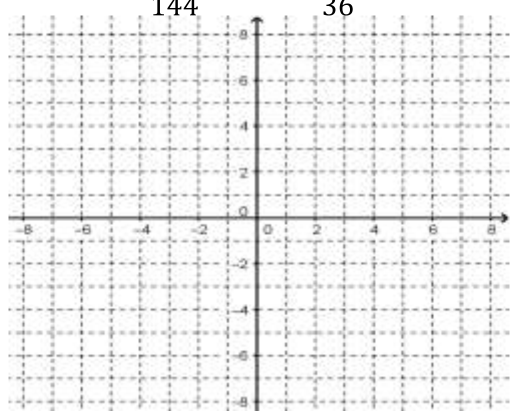
Hoja de trabajo 12.

Actividad.

Realizar en forma individual y comparando los resultados con sus compañeros.

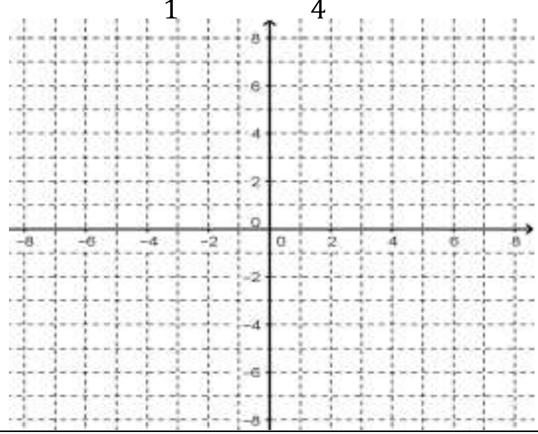
1. Realiza una lista de los elementos de una elipse.
2. ¿Qué relación existe entre los parámetros a y b cuando la excentricidad e se aproxima a 0?________________.
3. ¿Se considera a la circunferencia como un caso especial de la elipse?___________. Si la respuesta es afirmativa, entonces los ejes tienen __________longitud.
4. La elipse horizontal tiene su eje mayor paralelo al eje _________ y la elipse vertical tiene su eje mayor paralelo al eje__________.
5. La ecuación de la elipse horizontal con centro en (h,k) es:______________________
6. La ecuación de la elipse vertical con centro en (h,k) es:______________________
7. Determina todos los elementos de la elipse y realiza la gráfica.

$$\frac{(x-12)^2}{144}+\frac{(y-10)^2}{36}=1$$



8. Determina todos los elementos de la elipse y realiza la gráfica.

$$\frac{(x-3)^2}{1}+\frac{(y+5)^2}{4}=1$$



Secuencia Didáctica 7. Ecuación General de una Elipse.

Aprendizaje:

El alumno determina los elementos de la elipse transformando la ecuación general a su forma ordinaria.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR

Conceptuales:	• Reconoce la ecuación general de una elipse.
Procedimentales:	• Utiliza métodos algebraicos para transformar la forma general a la ordinaria y viceversa.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Fase de Inicio.

En esta sección se obtendrá la ecuación general de la elipse, partiendo de su ecuación ordinaria y se determinaran los elementos de la elipse transformando la ecuación general a su forma ordinaria.

Actividad 1.

Determinar la ecuación de la elipse $\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$. en su forma general:

Para obtener la ecuación de la elipse en su forma general se desarrollan los binomios y se simplifica el primer miembro de la ecuación $\frac{25(x^2+2x+1)+16(y^2-\quad +4\ )}{400}=1$

Multiplicando por _______ ambos miembros se tiene:

$$25(x^2+2x+1)+16(y^2-4y+4)=400.$$

Simplificando e igualando a cero se tiene:

$5x^2+16y^2+50x-64y-311=0$. Esta ecuación es de la forma:

$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ Ecuación General de la elipse.

Donde $A\ y\ B$ son del mismo signo y diferentes.

Fase de Desarrollo.

Hoja de trabajo 13.

Realizar las actividades en forma individual y comparando los resultados con sus compañeros.

Actividad 2.

Completa los espacios en blanco.

Dada la ecuación: $\mathbf{25x^2+16y^2+50x-64y-311=0}$. Determina**:** a) La ecuación de la elipse en su forma ordinaria, b) las coordenadas de los vértices del eje mayor, c) las coordenadas de los vértices del eje menor, d) las coordenadas de los focos y e) la gráfica.

a). Para obtener la ecuación ordinaria de la elipse dada la ecuación general, se requiere realizar algunos procesos algebraicos.

Utilizando el método de completar un trinomio cuadrado perfecto (TCP).

Paso 1. Se agrupan las x e y en un signo de agrupación y el término independiente se pasa al segundo miembro de la ecuación:

$$(25\mathrm{x}^2 + 50\mathrm{y}) + (16\mathrm{y}^2 - 64\mathrm{y}) = 311.$$

Paso 2. Verifica que el coeficiente del primer término de cada binomio sea 1. Si no lo es sácalo como factor común:

$$25(\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{y}) + 16(\mathrm{y}^2 - 4\mathrm{y}) = 311.$$

Paso 3. Se completan cuadrados en ambos binomios, sacando la mitad del termino de en medio y elevándolo al cuadrado y en el segundo miembros de la ecuación, se multiplica este número por la cantidad que está fuera de los paréntesis:

$$25(\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{y} + \_\_\_) + 16(\mathrm{y}^2 - 4\mathrm{y} + \_\_\_) = 311 + \_\_\_ + 64$$

Paso 4. Se Factoriza cada (TCP) y se divide todo entre la suma que resulta en el segundo miembro de la ecuación:

$$\frac{25(\mathrm{x}+1)^2}{400} + \frac{16(\mathrm{y}-2)^2}{400} = \frac{400}{\_\_\_\_}. \text{ Simplificando}$$

$$\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1. \ Forma\ Ordinaria$$

La expresión anterior es de la forma: $\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{h})^2}{\mathrm{b}^2} + \frac{(\mathrm{y}-\mathrm{k})^2}{\mathrm{a}^2} = 1$. Es una elipse de centro (h,k) con eje mayor paralelo al eje “y”.

Por lo tanto $\mathrm{h} = \_\_$, $\mathrm{k} = 2$, $\mathrm{a}^2 = \_\_\_\_$; $\mathrm{a} = 5$ y $\mathrm{b}^2 = 16$; $\mathrm{b} = \_\_\_$. $\mathrm{c}^2 = \mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2$; $\mathrm{c} = \sqrt{25 - \_\_}$

$\mathrm{c} = \sqrt{9}$; $\mathrm{c} = \_\_\_$.

b). $\mathrm{V}_1(\mathrm{h}, \mathrm{k} + \mathrm{a})$ y $\mathrm{V}_2(\mathrm{h}, \mathrm{k} - \mathrm{a})$. Por lo tanto:

$$\mathrm{V}_1(\_\_, 7) \text{ y } \mathrm{V}_2(1, \_\_\_)$$

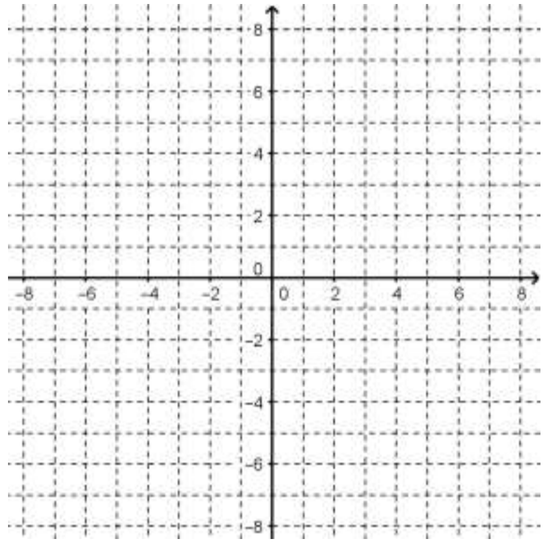
c). Las coordenadas de los extremos del eje menor son: $B_1(h+b, k)$ y $B_2(h-b, k)$. Por lo tanto.

$$B_1(5,2) \quad y \quad B_2\ (\_\_\_\_, \_\_\_)$$

d). Se sabe que los focos tienen coordenadas: $\mathrm{F}_1(\mathrm{h}, \mathrm{k} + \mathrm{c})$ y $\mathrm{F}_2(\mathrm{h}, \mathrm{k} - \mathrm{c})$. Por lo tanto, los focos son:

$$\mathrm{F}_1(1, 5) \quad \text{y} \quad \mathrm{F}_2(1, \_\_\_)$$

e).



Actividad 3.

Determinar la ecuación de la elipse en su forma ordinaria, con los datos siguientes: centro $(-1,2)$; vértices $(2,2)$ y $(-4,2)$; excentricidad $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Como el Centro es $(-1,2)$, entonces h= -1 y k= ____ .

a=3 y b=____.

entonces: $\mathrm{c}^2 = \mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2$

Por lo tanto: $c^2 = (3)^2 - (\_\_\_\_)^2$

$C = \sqrt{9-4} = \sqrt{5} \approx 2.23$

Sabemos que: $e = \frac{c}{a}$; $\frac{\sqrt{5}}{3}$

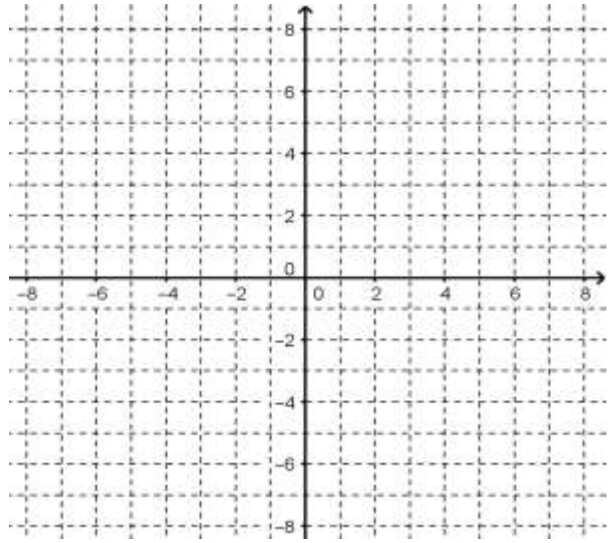
La ecuación es de la forma: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

y por lo tanto la ecuación en su forma ordinaria es:

$$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

Completar el siguiente cuadro y graficar con la información obtenida.

a	*b*	*c*	*centro*	*focos*	*vértices*	*Puntos B_1 y B_2*

	8 6 4 2 0 −8 −6 −4 −2 0 2 4 6 8 −2 −4 −6 −8

Fase de Cierre.	Realizar los siguientes ejercicios en forma individual y comparando los resultados con sus compañeros. **Elipse con centro en el origen.** 1) Escribe la ecuación en forma ordinaria de la elipse con centro (h, k) y eje mayor paralelo al eje de las abscisas. 2) ¿Cuál es la ecuación en forma ordinaria de la elipse con centro (h, k) y eje mayor paralelo al eje de las ordenadas? 3) Escribe la ecuación general de la elipse. 4) Determina los elementos de cada una de las siguientes elipses y realiza un bosquejo, según la ecuación que se da en cada caso. $\mathrm{a)} 3x^2 + 4y^2 = 48.$ $b)\ x^2 + 3y^2 = 6.$ $c)\ 7x^2 + 16y^2 = 112$ 5) Determina la ecuación de la elipse de centro el origen que satisfaga las condiciones indicadas. $\mathrm{a)} \mathrm{F}(\pm 5,0), \mathrm{V}(\pm 6,0).$ $b)\ L_r = 9, F(\pm 3,0).$ $c)\ F(0, \pm 3), e = \frac{3}{5}.$ $d)\ Pasa\ por\ el\ Punto(-1,1), V(0, \pm 2)$ 6) Obtener la ecuación de la elipse de centro el origen, focos sobre el eje (x) y que pase por los puntos: $P_1(-3,2\sqrt{3})\ y\ P_2\left(4, \frac{4\sqrt{5}}{3}\right)$. **Elipse con centro fuera del origen.** 7) Dadas las siguientes elipses determinar sus elementos y representarlas gráficamente. a) $9x^2 + 4y^2 - 90x - 24y + 225 = 0$ b) $x^2 + 36y^2 + 4x - 432y + 1264 = 0$ c) $4x^2+32y^2+4x+128y+65=0$

Secuencia Didáctica 8. Construcción de una Elipse Utilizando GeoGebra.

Aprendizaje:
El alumno resuelve problemas geométricos y en otros contextos.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR

Conceptuales:
- Reconoce a la elipse como un lugar geométrico.

Procedimentales:
- Utiliza GeoGebra para caracterizar los elementos básicos de una elipse.

Actitudinales:
- Valora el uso de GeoGebra para la construcción de una elipse.
- Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros.
- Participa en el trabajo.
- Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Fase de inicio.

En esta sección el alumno y profesor construirán y caracterizarán los elementos básicos de una elipse a través de diversas construcciones dadas en las hojas de trabajo 15. En esta actividad se realiza la construcción de la elipse utilizando el software GeoGebra, siguiendo el protocolo y/o las instrucciones de construcción.

Fase de Desarrollo.

Hoja de trabajo 15.
Construcción de una elipse utilizando GeoGebra.

Protocolo de Construcción		
Paso	Nombre	Definición
i	Punto A	
ii	Punto B	
iii	Segmento a:	Segmento [A,B]
iv	Punto P	Punto en “a”
v	Punto O	Punto medio en A, B
vi	Punto F	Punto en “a”
vii	Punto F´	F reflejado en O
viii	Segmento b:	Segmento [P, A]
ix	Segmento c:	Segmento [P, B]
x	Circunferencia d:	Circunferencia con centro en F y radio b
xi	Circunferencia e:	Circunferencia con centro en F´ y radio c
xii	P_2 y P_1	Punto de intersección en P_2

		y P_1
xiii	Lugar geométrico: lugar 1	Lugar geométrico [P_1, P]
xiv	Lugar geométrico: lugar 2	Lugar geométrico [P_2, P]
xv	Número Distancia P_1 a F	Distancia de P_1 a F
xvi	Texto. Texto	P_1 F
xvii	Número Distancia	P_1 F´
xviii	Texto. Texto	P_1 F´
xix	Segmento f:	Segmento [P_1 F]
xx	Segmento f:	Segmento [P_2 F´]

Instrucciones de Construcción.

Recordemos que: La elipse se define como el lugar geométrico de los puntos del plano, cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados "focos" es constante.

1. Ubicar los puntos A y B y traza el segmento AB correspondiente al eje mayor, definimos en él un punto P, y dibujamos el punto medio "O" del segmento AB que será el centro de la elipse.

2. Situaremos los focos en cualquier posición para obtener una de las elipses que tienen AB como eje mayor. Definimos el punto F_1 y calculamos su simétrico con **Simetría Central** (objeto a reflejar: luego, centro de simetría) con respecto al punto "O", para obtener F_2.

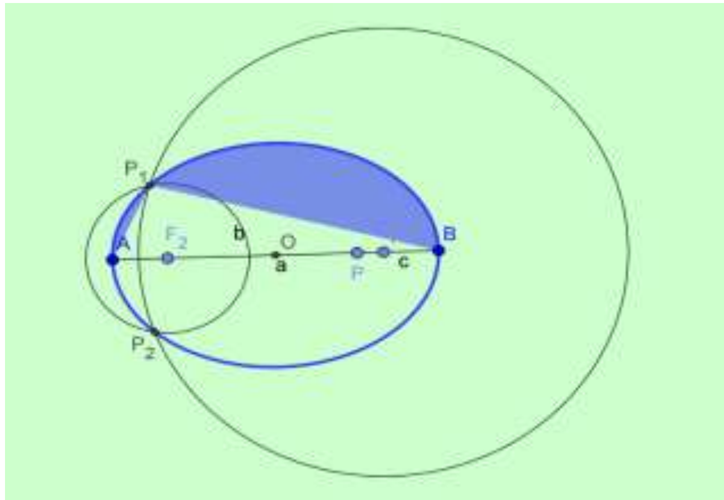
3. Definimos los segmentos PA y PB que aparecerán con los rótulos *b* y *c* respectivamente, ya que con el rótulo "*a"* aparece el segmento inicial AB.

4. Trazamos dos circunferencias con centro en F_1 y F_2, y radios PA y PB respectivamente, utilizando para ello la herramienta **circunferencia dados su centro y radio.**

5. Con esta herramienta pulsamos sobre el centro y al abrir el cuadro para introducir la medida del radio, introducimos *b* y *c* respectivamente.

6. Después, obtendremos los puntos de corte de las dos circunferencias anteriores, que determinaran los dos puntos P_1 y P_2 de la elipse.

Construcción de la elipse utilizando GeoGebra (punto P generador).

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


a) Selecciona los puntos P_1 y P_2 y marca el comando "Activa rastro".
b) Selecciona el punto P "Generador" y muévelo.

c) Describe lo que obtuviste______________________

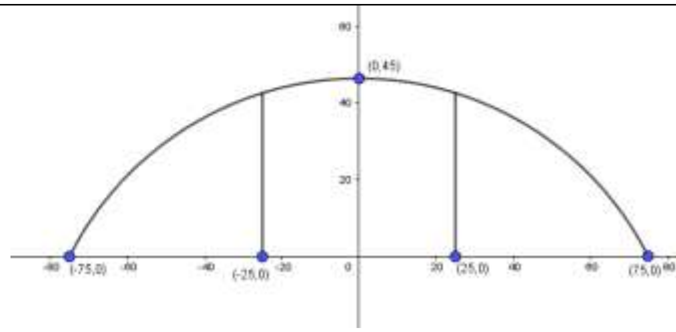
d) Escribe el nombre de los elementos básicos de una elipse: ____

e) Cuando el punto P se desplaza sobre el segmento AB, “los puntos que se obtienen son puntos que pertenecen a ________”, en particular cuando se “**activa rastro”** en P_1 y P_2. Más aún, para obtener la elipse, basta con utilizar la herramienta **lugar geométrico.** En particular el lugar descrito por P_1 cuando se elige “P” y repitiendo el proceso el lugar geométrico descrito por el punto P_2, cuando se vuelve a elegir el punto “P”.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Fase de Cierre.</td>
<td>
Hoja de trabajo 16.
Realizar las actividades en forma individual y comparando los resultados con sus compañeros.

Actividad

a) Determinar los puntos de intersección de la recta $x – y = 0$ con la elipse $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1.$

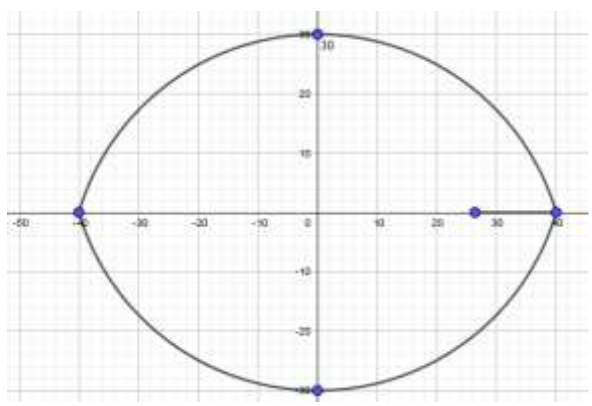
b) Un arco tiene forma de semielipse con una luz de 150 metros siendo su altura máxima de 45 metros. Determinar la longitud de dos soportes verticales situados cada uno a igual distancia del extremo del arco. Suponer que la base del arco se encuentra en el eje de las abscisas y el origen es el punto medio.
</td>
</tr>
</table>



c) La tierra describe una trayectoria elíptica alrededor del Sol que se encuentra en uno de los focos. Sabiendo que el semieje mayor tiene 1,485 x 10^8 kilómetros y que la excentricidad es, aproximadamente de $\frac{1}{62}$, determinar la máxima y mínima distancia de la tierra al sol.

d) Determinar la ecuación de la elipse con centro en el origen, eje mayor sobre el eje de las abscisas y que pasa por los punto (4,3) y (6,2).

e) En un acuario para delfines, se desea construir una piscina de forma elíptica. Deberá tener 80 metros de largo y 60 metros de ancho. En un extremo, se colocará un aro por encima del agua que quede ubicado en uno de los focos de la piscina. ¿A qué distancia quedará el aro del extremo de la piscina?



5. Materiales de Apoyo.

Unidad 5. Circunferencia, la Elipse y sus Ecuaciones Cartesianas.

➢ Circunferencia.

- ***Sección 1.*** **En cada problema determina lo que se pide.**

1. La ecuación de la circunferencia cuyo centro es $C(-4{,}3)$ y de radio 5.

$a)\ (x-3)^2+(y+4)^2=20$ $b)\ (x+4)^2+(y-3)^2=25$
$c)\ (x+3)^2+(y-4)^2=25$ $d)\ (x-4)^2+(y+3)^2=20$

2. La ecuación de la circunferencia que pasa por el punto (4,-3) y cuyo centro está en el origen.

$a)\ x^2+y^2=16$ $b)\ x^2+y^2=20$ $c)\ x^2+y^2=9$ $d)\ x^2+\ y^2=25$

3. La ecuación de la circunferencia de centro en C(-5,3) y de radio 6.

$a)\ (x-5)^2+(y-3)^2=36$ $b)\ (x+5)^2+(y-3)^2=36$
$c)\ (x-5)^2+(y-3)^2=36$ $d)\ (x-5)^2+(y+3)^2=36$

4. Los extremos de uno de los diámetros de una circunferencia son los puntos A(-7,4) y B(3,-2), su ecuación es.

$a)\ (x-2)^2+(y-1)^2=34$ $b)\ (x-2)^2+(y+1)^2=34$
$c)\ (x+2)^2+(y-1)^2=34$ $d)\ (x+2)^2+(y+1)^2=34$

5. El centro de una circunferencia es el punto C(5,1) y la circunferencia pasa por el punto D(8,5), su ecuación es.

$a)\ (x-5)^2+(y-1)^2=25$ $b)\ (x-5)^2+(y+1)^2=25$
$c)\ (x+5)^2+(y+1)^2=25$ $d)\ (x+5)^2+(y-1)^2=25$

6. La ecuación de una circunferencia es $(x-3)^2+(y+2)^2=36$, su ecuación general es.

$a)\ x^2+y^2-6x-4y-23=0$ $b)\ x^2+y^2+6x+4y-23=0^2$
$c)\ x^2+y^2-6x+4y+23=0$ $d)\ x^2+y^2-6x+4y-23=0$

7. La ecuación estándar de una circunferencia es $x^2+y^2-6x-4y-10=0$.

$a)\ (x-3)^2+(y-2)^2=23$ $b)\ (x-3)^2+(y+2)^2=23$
$c)\ (x+3)^2+(y-2)^2=23$ $d)\ (x+3)^2+(y+2)^2=23$

8. La ecuación estándar de la circunferencia de centro C(8,6) que es tangente al eje de las abscisas.

$a)\ (x+8)^2+(y-6)^2=36$ $b)\ (x+8)^2+(y+6)^2=36$
$c)\ (x-8)^2+(y+6)^2=36$ $d)\ (x-8)^2+(y-6)^2=36$

9. Ecuación de la circunferencia con centro el punto C(-2,3) y pasa por el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos A(7,6) y B(-1,2).

$a)\ (x-3)^2+(y+4)^2=26$ $b)\ (x-3)^2+(y-4)^2=26$
$c)\ (x+3)^2+(y-4)^2=26$ $d)\ (x+3)^2+(y+4)^2=26$

10. Los puntos de intersección de la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=25$ con la recta $3y-4x=0$.

$a)\ (3,4)\,,(-3,4)$ $b)\ (3,4)\,,(3,-4)$
$c)\ (3,4)\,,(-3,-4)$ $d)\ (-3,4)\,,(3,-4)$

Tabla de respuestas de la sección 1. Circunferencia.				
1. b	2. d	3. b	4.c	5.a
6. d	7.b	8.d	9.b	10. c

➢ Elipse.

- ***Sección 2.*** **En cada caso obtener lo que se pide.**

1. Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, determina la longitud del eje menor.

a) 20 unidades. b) 6 unidades. c) 12 unidades. d) 10 unidades.

2. Dada la ecuación de la elipse $16x^2+25y^2=400$, obtén la longitud de cada lado recto.

a) $L_r=\frac{32}{5}\ u.$ b) $L_r=\frac{28}{5}\ u.$ c) $L_r=\frac{12}{5}\ u.$ d) $L_r=\frac{24}{5}\ u.$

3. La ecuación de la elipse horizontal cuyo centro es el punto C(5,6) cuyo eje mayor mide 10 y su eje menor mide 6.

$a)\ \frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-6)^2}{9}=1$ $b)\ \frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y+6)^2}{25}=1$
$c)\ \frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y+6)^2}{9}=1$ $d)\ \frac{(x+5)^2}{9}+\frac{(y+6)^2}{25}=1$

4. La ecuación de la elipse vertical cuyo centro es C(-4,3), si las coordenadas de un extremo del eje mayor es V_1(-4,10) y las coordenadas de un extremo del eje menor son M_1(0,3).

$a)\ \frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{49}=1$ $\qquad b)\ \frac{(x+4)^2}{49}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$

$c)\ \frac{(x+4)^2}{49}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$ $\qquad d)\ \frac{(x+4)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{49}=1$

5. Si la ecuación de la elipse es $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$, determina las coordenadas de los extremos del eje mayor.

$a)\ V_1(-6,-2)\,,V_2(4,-2)$ $\qquad b)\ V_1(6,-2)\,,V_2(-4,-2)$

$c)\ V_1(6,2)\,,V_2(-4,2)$ $\qquad d)\ V_1(6,2)\,,V_2(4,2)$

6. Las coordenadas de los extremos del eje menor de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

$a)\ M_1(0,4)\,,M_2(0,5)$ $\qquad b)\ M_1(4,0)\,,M_2(5,0)$

$c)\ M_1(0,-4)\,,M_2(0,4)$ $\qquad d)\ M_1(4,0)\,,M_2(-4,0)$

7. Si la ecuación de una elipse es $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, obtén las coordenadas de los focos.

$a)\ F_1(-4,0)\,,F_2(4,0)$ $\qquad b)\ F_1(-5,0)\,,F_2(5,0)$

$c)\ F_1(0,-4)\,,F_2(0,4)$ $\qquad d)\ F_1(0,5)\,,F_2(0,-5)$

8. La ecuación de la elipse con centro en el origen, un foco en (3,9) y un vértice en (-4,0).

$a)\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ $\qquad b)\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

$c)\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$ $\qquad d)\ \frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$

9. La ecuación de la elipse con un foco en (0,2) y vértices en (0,-3) y (0,3).

$a)\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ $\qquad b)\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

$c)\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ $\qquad d)\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$

10. La ecuación de la elipse con centro en (2,-3), un foco en (3,-3) y un vértice en (5,-3).

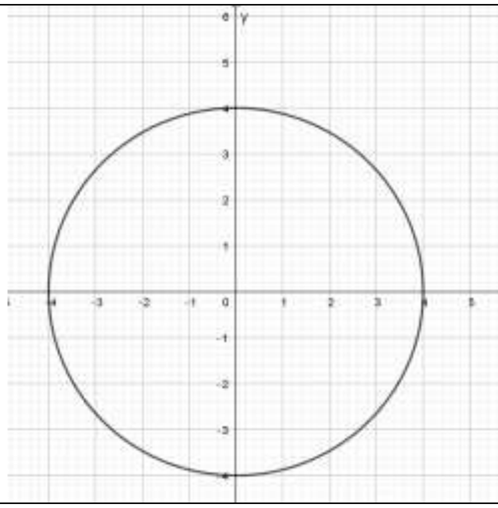
$a)\ \frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{8}=1$ $\qquad b)\ \frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{8}=1$

$c)\ \frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{8}=1$ $\qquad d)\ \frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{8}=1$

Tabla de respuestas de la sección 2. Elipse.				
1. b	2. a	3. a	4.d	5.b
6. c	7.a	8.a	9.d	10. c

6. Autoevaluación. Circunferencia.

1. Determina la ecuación de la circunferencia de la siguiente figura.



a) $x^2 + y^2 = 10$

b) $x^2 + y^2 = 4$

c) $x^2 + y^2 = 16$

d) $x^2 + y^2 = 36$

2. La ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto C(-1,1) y pasa por el punto A(-4, -3) es:

$a)$ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 25$ $b)$ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$
$c)$ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$ $d)$ $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 25$

3. El radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 23 = 0$ es:

$a)$ 5 $b)$ 6
$c)$ 4 $d)$ 9

4. Las coordenadas del centro de la circunferencia cuya ecuación es.
$x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$, son:

$a)$ $C(3,-5)$ $b)$ $C\ (-3,-5)$
$c)$ $C(3,5)$ $d)$ $C\ (-3,5)$

5. La ecuación general de la circunferencia cuyo radio es $r = 4$ y centro en (3, -2) es:
$a)$ $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$ $b)$ $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$
$c)$ $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ $d)$ $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 3 = 0$

6. La ecuación general de la circunferencia que es tangente al eje x y el centro está en (-3, -4) es:

$a)$ $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 9 = 0$ $b)$ $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 9 = 0$
$c)$ $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$ $d)$ $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$

7. La ecuación general de la circunferencia que pasa por el punto, $P(4,-5)$ cuyo centro es el punto, $C(6,-4)$ es:

$a)\ x^2+y^2+12x+8y-47=0$ $b)\ x^2+y^2-12x-8y+47=0$
$c) x^2+y^2-12x+8y-47=0$ $d)\ x^2+y^2-12x+8y+47=0$

8. La ecuación en forma ordinaria de la circunferencia que pasa por los puntos A$(5{,}10)$, B$(7{,}4)$ y C$(-9,-4)$ es:

$a)\ (x+3)^2+(y-4)^2=100$ $b)\ (x-3)^2+(y+4)^2=100$
$c)\ (x-3)^2+(y+4)^2=100$ $d)\ (x+3)^2+(y+4)^2=100$

9. La ecuación general de la circunferencia en donde los puntos $A(-4{,}7)$ y $B(10,-3)$ son extremos de uno de sus diámetros es:

$a)\ x^2+y^2-6x+8y-61=0$ $b)\ x^2+y^2-6x-8y-61=0$
$c) x^2+y^2-6x+8y+61=0$ $d) x^2+y^2+6x+8y+61=0$

10. Los puntos de intersección de la circunferencia $x^2+y^2-6x-16=0$ con la recta $4x-3y-12=0$ son:

$a)\ (0,-4)\ y\ (6{,}4)$ $b)\ (0,-4)\ y\ (-6,-4)$
$c)\ (0,4)\ y\ (-6,-4)$ $d)\ (0,4)\ y\ (6,-4)$

Tabla de respuestas de la autoevaluación. Circunferencia.				
1. c	2. a	3. b	4. d	5.c
6. a	7. d	8. a	9. b.	10. a

7. Autoevaluación. Elipse.

1. Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, la longitud del eje mayor es:

a) 20 unidades. b) 6 unidades. c) 12 unidades. d) 10 unidades.

2. Si la ecuación de la elipse es $\frac{(x-1)^2}{144}+\frac{(y-3)^2}{169}=1$, la longitud del eje menor es:

a) 20 unidades. b) 24 unidades. c) 22 unidades. d) 26 unidades.

3. La ecuación estándar de la elipse $4x^2 + y2 - 8x + 4y + 4 = 0$ es:

$a)\ (x-1)^2+\frac{(y+2)^2}{4}=1$ $b)(x+1)^2+\frac{(y+2)^2}{4}=1$
$c)\ (x-1)^2+\frac{(y-2)^2}{4}=1$ $d)\ (x+1)^2+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

4. Las coordenadas del centro y de los vértices de la elipse $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$ son:

$a)\ C\ (1,2)\ y\ V\ (6{,}2),(-4{,}2)$ $b)\ C\ (-2,1)\ y\ \ V(2,-6),(4{,}2)$

$c)\ C\ (-1,-2)\ y\ V\ (6,-2),(4,-2)$ $d)\ C\ (-2,1)\ y\ \ V(2,-6),(4{,}2)$

5. Las coordenadas de los focos y vértices de la elipse $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{289}=1$ son:

$a)\ F\ (0, \pm 8)\ y\ V\ (0, \pm 17)$ $b) F\ (\pm 8, 0)\ y\ V\ (\pm 17, 0)$

$c)\ F\ (0, \pm 17)\ y\ V\ (0, \pm 8)$ $d)\ F\ (0, \pm 17)\ y\ V\ (0, \pm 8)$

6. La ecuación general de la elipse con centro en C(1, - 2), eje mayor de longitud 10 unidades y eje menor de longitud 6 unidades es:

$a)\ 25x^2-9y^2+50x-36y+164=0$ $b)\ 25x^2+9y^2-50x+36y-164=0$
$c) 25x^2-9y^2-50x+36y+164=0$ $d) 25x^2+9y^2+50x-36y+164=0$

7. La elipse $169x^2+144y^2-338x-864y-22871=0$ está representada en forma ordinaria por la ecuación:

$a)\ \frac{(x-3)^2}{144}+\frac{(y+1)^2}{169}=1$ $b)\ \frac{(x+3)^2}{144}+\frac{(y+1)^2}{169}=1$
$c)\ \frac{(x-1)^2}{144}+\frac{(y-3)^2}{169}=1$ $d)\ \frac{(x-1)^2}{144}+\frac{(y+3)^2}{169}=1$

8. La ecuación de la elipse con centro en el punto C(1,2), sus focos en $\mathrm{F}\ (\pm 6, 2)$ y pasa por el punto P(4,6) tiene como ecuación ordinaria:

$a)\ \frac{(x-2)^2}{20}+\frac{(y-1)^2}{45}=1$ $b)\ \frac{(x-1)^2}{20}+\frac{(y-2)^2}{45}=1$
$c)\ \frac{(x-2)^2}{45}+\frac{(y-1)^2}{20}=1$ $d)\ \frac{(x-1)^2}{45}+\frac{(y-2)^2}{20}=1$

9. La ecuación general de la elipse con focos en $\mathrm{F}\ (\pm 5{,}0)$ y excentricidad $e=\frac{5}{8}$ es:

$a)\ 39x^2-64y^2+2496=0$ $b)\ 39x^2+64y^2-2496=0$
$c) 39x^2-64y^2-2496=0$ $d) 39x^2+64y^2+2496=0$

10. Se desea construir un arco de forma semieliptica de 100 metros de longitud y una altura de 40 metros. Para marcar su forma, un albañil usa una cuerda y dos estacas. La longitud de la cuerda y dónde debe clavar las estacas es.

a) Cuerda de 60m y estacas a 30m del centro.
b) Cuerda de 80m y estacas a 40m del centro.
c) Cuerda de 100m y estacas a 30m del centro.
d) Cuerda de 120m y estacas a 40m del centro.

Tabla de respuestas de la autoevaluación. Elipse				
1. d	2. b	3. a	4. a	5. a
6. b	7. c	8. d	9. b	10. c

8. Bibliografía Básica.

- Cuellar, J.A. (2012). *Matemáticas III*. México: Mc. Graw-Hill.
- Swokowski. E. (1988). *Elipses. En Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica (pp.546 - 552)*. Ciudad de México: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A de C.V.
- Lehmann, C. (1989). *Ecuación de la Circunferencia. En Geometría Analítica (pp. 99-110).* Ciudad de México: Hispano Americana.
- Miranda, L. (2018). *La Circunferencia, La Elipse. En Trigonometría y Geometría Analítica (pp.161- 209).* Ciudad de México: Con-Ciencia.
- Torres. C. (1998). *Secciones Cónicas. En Geometría Analítica (pp.204- 211).* México: Santillana.

ANEXOS

Anexo 1. Fases de una secuencia didáctica: Es la serie de actividades que con un progresivo nivel de complejidad desarrollan los alumnos auxiliados por el profesor, con el propósito de llegar a un aprendizaje determinado. Las principales características de cada una de estas fases quedan expuestas en la siguiente tabla. Cabe mencionar que, las tres fases marcadas en el "Protocolo de Equivalencias para el Ingreso y la Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades (3ª Versión 2008)", son: 1) fase de inicio, 2) fase de desarrollo, 3) fase de síntesis[7]. Las cuales quedan descritas en la tabla 1.

Tabla 1. Fases de una Secuencia Didáctica.		
Fase	Trabajo del Profesor	Trabajo del Alumno
1) Fase de Inicio *I. Iniciación al tema o unidad didáctica.*	-El profesor identificará las pre-concepciones del estudiante acerca del tema o unidad didáctica bajo consideración, a través de la elaboración de un cuestionario diagnostico o una entrevista donde sean señaladas las ideas, prejuicios y conceptos con que llega el alumno. -Con lo anterior, el profesor detectará y considerará los posibles errores conceptuales de los estudiantes, a partir de los cuales planifica su enseñanza. -Organizar el trabajo en el aula y coordinar las puestas en común. -Informar sobre los contenidos que se van a desarrollar. - Interesar a los estudiantes por los contenidos de enseñanza y fomentar el trabajo individual y colectivo.	-En esta fase, los alumnos explicitan sus ideas y modelos explicativos con los que inicia el tema de estudio. -Es esencial en esta etapa provocar la inquietud por aprender, lo cual implica que el alumno, en cierto modo, se comprometa a participar activamente y a profundizar sobre el tema. -Investigación documental dirigida u orientada a confrontar aquellas pre-concepciones del estudiante y las validadas por las matemáticas, con lo que comenzará a diferenciar su interpretación de aquella proporcionada por la matemática.
2) Fase de desarrollo *II. Información e introducción de conceptos*	El profesor investigará, seleccionará, traducirá y adecuará diverso tipo de materiales para introducir los nuevos conocimientos. -El profesor divide la unidad temática en sub-unidades, cada una de ellas conformada por una serie de secuencias didácticas en las que el diseño de modelos y hojas de trabajo constituyen una parte fundamental para la enseñanza. -Diseño de modelos. Se considera el tema, los objetivos programáticos así	-Investigará en la bibliografía señalada y en los materiales seleccionados los conceptos pertinentes al tema. -Desarrollará las actividades bajo la dirección del profesor y de acuerdo con la hoja de trabajo correspondiente. En ambos casos, el estudiante recabará información para

[7] Cf. Página 32. Gaceta CCH Suplemento especial número 4, 23 de mayo de 2008.

	como los obstáculos epistemológicos visibles y generales del grupo, con la finalidad de alcanzar o acceder al conocimiento matemático, sea estableciendo un nuevo conocimiento, ampliándolo o, inclusive reelaborándolo. -Las hojas de trabajo pueden ser cuestionarios, prácticas virtuales, guías de lectura, etcétera.	organizarla e interpretarla desde el punto de vista matemático y ya no desde el sentido común. Ello dará como resultado la diferenciación y construcción de nociones, conceptos o procedimientos matemáticos.
3) Fase de cierre *III. Ampliación y aplicación de conceptos.*	-El profesor diseñará hojas de trabajo que favorezcan y extiendan el significado de los conceptos ya introducidos, lo que deberá dar lugar a que el estudiante logre una diferenciación conceptual más precisa y, en última instancia, a que den lugar a una reconciliación de los significados previos con los nuevos. - El profesor diseñará actividades que muestren la utilidad de las nociones, conceptos o procedimientos matemáticos involucrados que contribuyan a que los alumnos vean la relevancia y utilidad de lo aprendido en el contexto actual. - El planteamiento de conjeturas, así como la corroboración de los contenidos conceptuales, resulta crucial en esta etapa para lograr una clara diferenciación, así como una mejor reconciliación de significados.	-El estudiante realizará las actividades indicadas. -El estudiante resolverá las hojas de trabajo planteadas en esta fase. -El estudiante buscará la utilidad del nuevo conocimiento en su entorno social, para dar relevancia y significado a lo aprendido. -El estudiante expresará los conocimientos matemáticos adquiridos no sólo a través del lenguaje cotidiano, sino también a través de diferentes registros de representación matemática, a saber, por medio de tablas, de gráficas y de su modelo algebraico.
IV. Evaluación y Conclusión.	-El profesor indagará sobre el cambio o evolución de las ideas de los alumnos, realizando comparaciones entre su pensamiento actual y el inicial, a través de un cuestionario o entrevista. Conviene, por lo tanto, recoger las pre-concepciones de los estudiantes para así observar la evolución de las mismas a partir de la reflexión y diferenciación progresiva que el estudiante ha realizado a través de esta secuencia de aprendizaje.	-Realización del cuestionario y de la entrevista (en caso de que así sea), para comparar los conocimientos que poseen con los iníciales y establecen las diferencias más destacadas entre estos.

Cabe destacar que cada una de las fases de una unidad didáctica se constituye con diversas *secuencias didácticas u hojas de trabajo* para que los alumnos aprendan significativamente las principales *ideas, nociones, conceptos y procedimientos matemáticos*, cuestión con la que se les involucra, además, con otra forma de trabajo, en donde el auténtico protagonista es él mismo. Por otra parte, conviene observar que cada unidad didáctica debe diseñarse, considerarse y presentarse de manera flexible, en absoluto rígida, pues debe depender de las características de los alumnos y de cómo construyan el conocimiento, por lo que deberán permitir modificar las fases originalmente planeadas sin olvidar en ningún instante las metas que se pretenden alcanzar. En este sentido, el constructivismo empata o se complementa con otras teorías del aprendizaje como, por ejemplo, con la *teoría de registros de representación semióticas* de R. Duval, en donde:[8]

> [Esta teoría] permitirá analizar las actividades que se desarrollen en diferentes registros y los pasajes entre ellos, en ambos sentidos. [Por lo que] Se prestará especial atención a proponer ejercicios que requieran de pasajes entre representaciones no congruentes, según el *sentido de conversión*.[9]

Los registros a los que se refiere Duval son, en nuestro caso, los *registros de representación geométrica* (gráficas de las funciones), los *registros de representación algebraica* (fórmulas de las funciones), así como los *registros de representación aritmética* (tablas o muestras de datos de fenómenos diversos). La conversión de uno de estos registros en otro, no siempre es algo asequible al estudiante por lo que, a diferencia de lo establecido por Duval, que exige la conversión completa de registros, en nuestra propuesta estas conversiones deberán seleccionarse de acuerdo con los objetivos y la estructura cognitiva de los aprendices.

Por lo anterior, resultará fundamental elaborar y disponer de un amplio banco de secuencias didácticas y hojas de trabajo para ampliar las opciones de aprendizaje y no dar lugar a la improvisación. Este abanico de posibilidades estará directamente vinculado con los materiales y recursos didácticos de que se disponga y de los que se haya pensado echar mano.

---

[8] Cf. [Duval; 1999].

[9] Como dice Duval: "un cambio de registro resulta interesante y fecundo cuando los tratamientos en dos registros diferentes no son computacionalmente equivalentes, es decir, no son congruentes".

Anexo 2. Interfaz álgebra-geométrica GeoGebra.

GeoGebra 5.0

El uso de GeoGebra no es complicado y no requiere dedicar sesiones específicas para la explicación de su funcionamiento. Desde el primer contacto con el mismo y con pequeñas aclaraciones por parte del profesor, el alumno será capaz de crear construcciones elementales. Conforme vaya utilizándolo con más frecuencia irá profundizando en sus posibilidades.

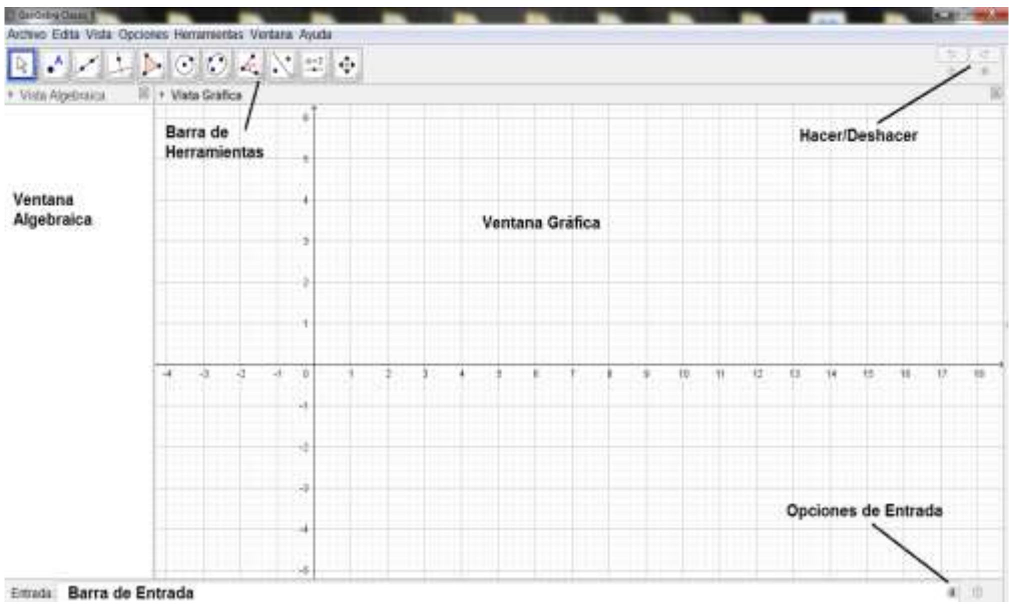
GeoGebra permite abordar la geometría desde una forma dinámica e interactiva que ayuda a los estudiantes a visualizar contenidos matemáticos que son más complicados de afrontar desde un dibujo estático. También permite realizar construcciones de manera fácil y rápida, con un trazado exacto y real, que además, revelarán las relaciones existentes entre la figura construida; también permitirá la transformación dinámica de los objetos que la componen. Debido a estas dos características el profesorado y el alumnado pueden acercarse a GeoGebra de varias maneras, no excluyentes entre sí pero que a menudo están relacionadas con el nivel de capacitación que se tenga del programa. Por otro lado las funciones, ecuaciones y los elementos de una construcción pueden ser introducidos directamente. La integración de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) en el mundo educativo nos permite disponer de unos recursos que, usados de forma adecuada, se convierten en una herramienta potente y con interesantes funcionalidades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

La buena disposición por parte del alumno para el uso de estos recursos es muy favorable. Es evidente el carácter motivador de los mismos y su eficacia para favorecer metodologías activas y participativas, que permiten además que el estudiante se sienta partícipe de su propio aprendizaje. Podrá trabajar las matemáticas de forma experimental, esto es, interactuar con objetos matemáticos, construirlos, analizar comportamientos, comprobar propiedades, hacer conjeturas, realizar simulaciones. El profesor dispone, con estas herramientas, de un medio para presentar de forma atractiva y dinámica distintos conceptos y procedimientos, así como, para fomentar la reflexión y el análisis. La utilización correcta de las mismas deberá permitirle reducir esfuerzos y tiempos dedicados a algunas tareas que pueden resultar tediosas e incidir en aspectos que resulten más pedagógicos e interesantes.

Cabe mencionar que este programa "solo" no garantizan los aprendizajes de los temas exigidos en la asignatura de Matemáticas III, por lo que las secuencias didácticas y las hojas de trabajo elaboradas para esta asignatura, son, por así decirlo, la parte medular del aprendizaje de los estudiantes. Estas posibilidades no deben perder de vista que su propósito o fin es el de coadyuvar a que el alumno haga una reflexión sobre sus propias ideas, manteniéndolo activo y con su atención puesta en la intersección de sus intereses y de los contenidos de enseñanza, pues sólo podrá reestructurarlas si estás caen en su propio lenguaje.

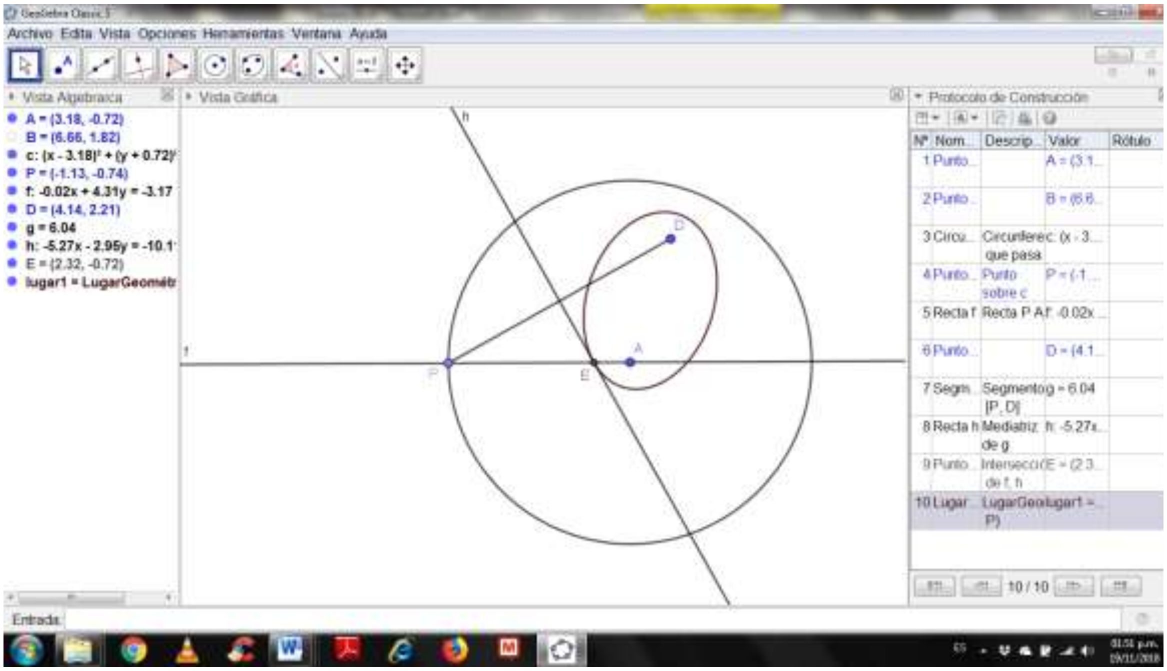
A continuación, se muestra las diferentes partes de la ventana de GeoGebra, mismas que se muestran en la figura 1.

Figura 1. Ventana de GeoGebra.



Las experiencias de aprendizaje en una aula de medios (sala Telmex, por ejemplo), brinda al alumno una experiencias completamente diferentes a lo que han sido las "clases" de la enseñanza tradicional, son la realización de nuestra unidad y secuencias didácticas, es decir, son nuestros espacios de aprendizaje. En ellas ha lugar para la interacción entre estudiantes, el profesor y las tecnologías informáticas contemporáneas, por lo que son el lugar propicio para la construcción de conocimiento matemático conjugando el análisis, la síntesis, la modelación, la representación, etc., así como la evaluación del conocimiento construido por todos los participantes. En nuestro caso, la generación de estas experiencias de aprendizaje presume tener un lugar (aula) equipado con computadoras con GeoGebra. En la figura 2, se muestra un Applet o escenario interactivo donde a partir de la construcción de un lugar geométrico (elipse) se obtienen dos más (circunferencia e hipérbola), únicamente moviendo el punto D hacia el punto A y moviendo el punto D fuera de la circunferencia hacia fuera de ella respectivamente. Además se muestra el protocolo de construcción el cual es muy simple.

Figura 2. Construcción de un escenario interactivo para visualizar tres secciones cónicas.



Las experiencias de aprendizaje en el aula de medios, son experiencias completamente diferentes a lo que han sido las "clases" de la enseñanza tradicional, es decir, son otro espacio de aprendizaje. En ellas ha lugar para la interacción entre estudiantes, el profesor y las tecnologías informáticas contemporáneas, por lo que son el lugar propicio para la construcción de conocimiento matemático conjugando el análisis, la síntesis, la modelación, la representación, etc., así como la evaluación del conocimiento construido por todos los participantes.

Anexo 3.Lo Parabólico en tu Entorno-Imágenes.

Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades: Plantel Oriente.

Actividad Grupal: Trabajo de Investigación

Autor(es):

Grupo:

Título: Lo Parabólico en tu Entorno.	
Justificación de la elección del tema: La tecnología contemporánea nos permite hacer una búsqueda rápida y eficiente de diferentes conceptos, en nuestro caso estos conceptos son matemáticos y en particular lo relacionados con situaciones o fenómenos parabólicos. Esta actividad de búsqueda nos va permitir acercarnos a la Fase de Inicio. Lo Parabólico en tu Entorno.	
Propuesta de recursos a utilizar *(Describa de forma general los recursos de imagen, que considera podría utilizar para la Secuencia Didáctica 1.)*	**Idea de las imágenes a utilizar**: La búsqueda de imágenes tendrán que ver con los siguientes conceptos: 1. Movimiento parabólico 2. Imágenes de forma parabólica 3. Lo parabólico en tu entorno

Sección imagen

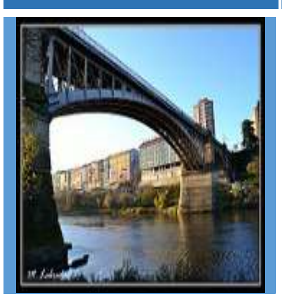
Imagen (Inserte aquí la imagen en un tamaño reducido)	**Nombre del archivo en su computadora** (Ejemplo: Ford.jpg)	**Cita de la imagen** **En formato: Creative commons / © Copyright**
	Imagen 1.jpg	**Sitio:** Flickr **Licencia:** Algunos derechos reservados **Link:** **http://www.flickr.com/search/?w=all&q=puentes+parab%C3%B3licos&m=text** Dirección de la imagen http://farm8.staticflickr.com/7014/6666586851_972bcc1b75_m.jpg.

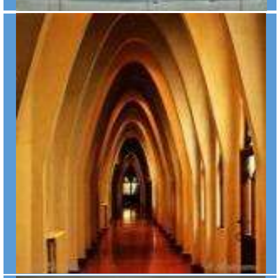
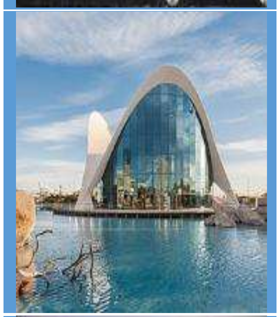
	Imagen 2.jpg	**Sitio:** Flickr **Licencia:** Algunos derechos reservados **Link: http://www.flickr.com/search/?q=Arco%C3%ADris&z=e** Dirección de la imagen http://farm5.staticflickr.com/4056/4714645004_980cd57b0a_m.jpg.
	Imagen 3.jpg	**Sitio:** Flickr **Licencia:** Algunos derechos reservados **Link: http://www.flickr.com/search/?q=Arco%C3%ADris&z=e** Dirección de la imagen http://farm3.staticflickr.com/2452/3848997712_6db063dfc1_m.jpg.
	Imagen 4.jpg	**Sitio:** Flickr **Licencia:** Algunos derechos reservados **Link:http://search.babylon.com/?s=img&babsrc=HP_ss&rlz=0&q=Par%C3%A1bolas+en+el+arte&start=12** Dirección de la imagen http://t0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcTytkiBNsDPyfLDAieSKsTwK3EXaJeUeQBPux2kczlSf0fiqPlZnbBxGvM.
	Imagen 5.jpg	**Sitio:** Flickr **Licencia:** Algunos derechos reservados **Link:http://search.babylon.com/?s=img&babsrc=HP_ss&rlz=0&q=palacio%20de%20las%20Teresianas** Dirección de la imagen http://t1.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQUwugAEly5PMuajlUfZEzzns6PQYRMf__81R_HbNIoThrAPmmOO57MRYON.
	Imagen 6.jpg	**Sitio:** Flickr **Licencia:** Algunos derechos reservados **Link:** http://robledo-arana.blogspot.com/ Dirección de la imagen http://t2.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSyx4UiHxQemEcF9FJVVQbWw0G3xRQPPHYZL5i9y5_PEKUY3jS_B58nQi8L.
	Imagen 7.jpg	**Sitio:** Flickr **Licencia:** Algunos derechos reservados **Link: http://www.catedu.es/matematicas_mundo/FOTOGRAFIAS/conicas26.JPG** Dirección de la imagen http://t0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQpEwANSBu8FRbToWGbqqO6Z7xtTjAp1PjFw6HgBWFlypMQpqW9yVDVEw.

	Imagen 8.jpg	**Sitio:** Flickr **Licencia:** Algunos derechos reservados **Link:** **http://catedu.es/matematicas_mundo/FOTOGRAFIAS/conicas28.JPG** Dirección de la imagen http://t1.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcThPMtQXG9ZGEaa4PCUn-bdUPOgawJfotCEnWacnzP_t6aiGDjNB54D5A.
	Imagen 9.jpg	**Sitio:** Flickr **Licencia:** Algunos derechos reservados **Link:** **http://espiralcromatica.edublogs.org/files/2009/01/parabola-pelota-de-tenis-300x186.jpg** Dirección de la imagen http://t2.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcRQ09uLcFL1HRtBPwM3qf9izAUaRtmeIdqOjn4cfD779Z7X0Br2mAMuEso.
	Oceanográfico (Valencia) España.	https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/13/L%27Oceanografic%2C_Valencia%2C_Spain_2_-_Jan_07.jpg/250px-L%27Oceanografic%2C_Valencia%2C_Spain_2_-_Jan_07.jpg
	Arcoíris. Nayarit	https://www.google.com.mx/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0CAcQjRxqFQoTCK30vf7b58YCFZMRkgodTq0Mpg&url=http%3A%2F%2Fwww.nayaritenlinea.mx%2F2014%2F07%2F12%2Ffotos-impresionante-arco-iris-maravilla-a-ciudadanos-en-tepic&ei=PN6rVa3mIZOjyATO2rKwCg&bvm=bv.98197061,d.cGU&psig=AFQjCNGAfqDj9_ZheV59RPlxDdrz6zT2jQ&ust=1437412999695047