

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL ORIENTE

Guía para el Profesor de Matemáticas II

Integrantes

Leticia Aguilar Pascual
German Ávila Vicenteño
Javier Bustos Rosas
Araceli Cabrera Ortiz
Esperanza Martínez López
Ivonne Zenteno Canela
Francisco Javier Rodríguez Pérez

Primera parte

Álgebra

Introducción

El temario de Matemáticas II está estructurado con dos disciplinas fundamentales de la Matemática; Álgebra y Geometría.

La parte de Álgebra comprende dos temas básicos en el estudio de las Matemáticas, las cuales se estructuran en dos unidades, a saber; Unidad 1. Ecuaciones Cuadráticas y Unidad 2. Funciones Cuadráticas. Y la parte de Geometría que también se presenta en este documento, en dos unidades a saber; Unidad 3. Elementos de Geometría Plana y Unidad 4. Semejanza, Congruencia y Teorema de Pitágoras.

Con este programa se pretende que al **finalizar el curso de Matemáticas II**, a través de las diversas actividades encaminadas al desarrollo de habilidades y a la comprensión de conceptos y procedimientos, el alumno:

- Adquiera la capacidad para resolver ecuaciones cuadráticas por diferentes métodos y los aplica en la resolución de problemas.
- Avance en la comprensión del concepto de función, distinga las diferencias y similitudes entre las funciones lineales y cuadráticas. Modela con estas últimas algunas situaciones de variación cuadrática y de optimización.
- Incremente su capacidad de resolver problemas, al incorporar estrategias y procedimientos para realizar construcciones geométricas y para comprender o proporcionar argumentos que justifican un enunciado.
- Perciba que existe una estructura en los conocimientos de la Geometría Euclidiana y que ésta estudia figuras y cuerpos presentes en su entorno.
- Identifique relaciones y patrones de comportamiento en diversas situaciones o problemas geométricos, y a partir de esto establece conjeturas o infiere algunas conexiones entre resultados.
- Valore la importancia de proporcionar una argumentación como la vía que otorga validez al conocimiento geométrico.
- Aplique conceptos, procedimientos y resultados de la Geometría Euclidiana para resolver problemas.
- Haga uso de software para un mejor entendimiento de los temas

UNIDAD 1

ECUACIONES

CUADRÁTICAS

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Propósito: Al final de esta unidad el alumno:

Resolverá ecuaciones cuadráticas mediante diversos métodos de solución. Modelará problemas que conduzcan a este tipo de ecuaciones. Establecerá la relación que existe entre el grado de la ecuación y el número de soluciones.

Aprendizajes

Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

- Analiza las condiciones que se establecen en el enunciado de un problema, y expresa las relaciones entre lo conocido y lo desconocido a través de una ecuación de segundo grado.
- Relaciona un problema nuevo con otro que ya sabe resolver.
- Interpreta en el contexto del problema, lo que significan las soluciones y elige, si es el caso, aquella que tiene sentido en ese contexto.
- Resuelve ecuaciones cuadráticas mediante los diferentes métodos de solución. Transformando la ecuación cuadrática a la forma adecuada para su resolución por un método específico
- Generaliza el método de completar el trinomio cuadrado perfecto y obtiene la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.
- Identifica los parámetros a , b , c en una ecuación cuadrática y los sustituye correctamente en la fórmula general.
- Identifica la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática, a partir de sus coeficientes.
- Establece el modelo matemático del problema y aplica el método de resolución conveniente.

Temario

- Problemas que dan lugar a ecuaciones cuadráticas con una incógnita.
- Resolución de ecuaciones cuadráticas de la forma:
 $x^2 = b$; $ax^2 = b$; $ax^2 + b = c$; $ax^2 + b = 0$; $a(x + b)^2 + c = d$; $(x + b)(x + c) = 0$
- Métodos de solución de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$
- Factorización
- Método de completar un trinomio cuadrado perfecto
- Fórmula general para resolver una ecuación cuadrática
- Discriminante $b^2 - 4ac$ y naturaleza de las raíces
- Problemas de aplicación

Palabras claves: Ecuación, grado de una ecuación, trinomio, cuadrado perfecto, discriminante, factorización.

Materiales de apoyo. *Un material de apoyo es el presente documento que a continuación se desarrolla acorde al temario propuesto. Al final de la unidad se presenta una breve bibliografía*

Identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución. En el presente documentó se desarrollan ejercicios que de alguna manera requieren los alumnos como apoyo para identificar una ecuación de grado dos y como resolverla y a la vez superar aspectos de manejo algebraico.

Al final de la unidad se presenta una breve bibliografía.

Identificación de expresiones algebraicas, en particular ecuaciones de segundo grado

Para iniciar, es conveniente recordar que el lenguaje que suele utilizar el alumno tiene una relación directa con la simbolización de expresiones algebraicas, además entre los propósitos que se persiguen al implementar el Programa de Estudios del Colegio esta retomar los conocimientos del alumno, así partir de ello para que analice las limitaciones de lo que puede representar y explore nuevos caminos que lo conduzcan a describir una expresión que corresponda a una situación dada y en particular a una ecuación de segundo grado. Además, podrá observar que esta expresión puede describirse en formas diversas. Se recomienda una secuencia como la siguiente:

Ejercicio 1. Identifica la expresión que corresponda a una *ecuación*.

a) $3x + 2y$	b) $2x + y = 7$	c) $x^2 + 3x$
d) $x^2 + 1 = 0$	e) $2x^2 - 3x = 0$	f) $x^2 + y^2 = 4$
g) $3x - 2y = 2$	h) $5x^2 = 10$	i) $x + y = 5$
j) $4x^2 - 3x + 10 = 0$	k) $2x - 7 = 10$	l) $(x - 2)(x + 4) = 0$

Ejercicio 2. De las ecuaciones seleccionadas en el ejercicio 1, indica cuales tienen una incógnita y cuales tienen dos incógnitas. Finalmente escribe las que sean cuadráticas con una incógnita.

¿Hay dificultades para resolver lo anterior?

Bien, vamos a identificar las que nos interesan. ¿Cuáles? Las de segundo grado con una incógnita.

Solución: d) e) h) j) l) Explicar _____

¿Qué ocurre con la expresión en el inciso c)? _____

Problemas que generan una ecuación cuadrática

Objetivo particular: Utilizar el lenguaje algebraico para representar un enunciado y dar una respuesta o solución a lo que se pide.

Ejercicio 3. En la siguiente serie de enunciados, encontrar la expresión algebraica que corresponde a cada uno.

1. La suma de los cuadrados de dos números pares consecutivos es 15844. Hallar los números.

2. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 24202. ¿Cuáles son los números?
3. Descomponer el número 10 en dos partes, de manera que la suma de sus valores inversos sea igual a $5/12$.
4. Dos números suman 1018, y la diferencia de sus raíces cuadradas es 10, ¿Cuáles son estos números?
5. Sabiendo que el cociente de las dos raíces de una ecuación de segundo grado es 5 y que la diferencia de estas es 12, escribir dicha ecuación.
6. ¿Cuál es el número cuyos $3/4$ más 1, multiplicado por sus $4/5$ menos 15, dan 16 por producto?
7. Sabiendo que el cociente de las dos raíces de una ecuación de segundo grado es 5 y que la diferencia de estas es 12, escribir dicha ecuación.
8. ¿Cuál es el número que sumado con su raíz cuadrada se obtiene 30?
9. Los tres lados de un triángulo miden 18,16 9 metros, respectivamente. Calcular qué misma cantidad se tiene que restar a cada uno de los lados para que resulte, con las nuevas medidas un triángulo rectángulo.
10. Un rectángulo tiene sus lados iguales a 3 cm y 7 cm. ¿Cuánto se debe aumentar el lado menor para que, disminuyendo el otro en la misma longitud, el rectángulo resultante mida 25 cm^2 de superficie.?
11. Un labrador ha comprado un campo cuadrado para plantarlo de árboles. Poniendo un cierto número por fila le faltan 12 para completar el cuadro, y sembrando uno menos en cada fila le sobran 23, ¿Cuál es el número de árboles de que dispone el labrador?
12. El perímetro de un rombo es de 140 cm y sus diagonales se diferencian en 14 cm. Hallar las medidas de las diagonales.

Considérese el Problema 11. Ya que se tiene un número que se desconoce de árboles, sólo tenemos:

Sembrados en filas ocupando el cuadrado,

- a) En un caso se tiene un número dado por fila _____, pero faltan 12
- b) Si se siembra un árbol menos por fila _____, faltan 25
- c) Escribe las condiciones del campo
- d) Escribe la incógnita que utilizarías para representarlos
- e) Escribe el número de árboles en el primer caso
- f) Escribe el número de árboles en el segundo caso

g) ¿Qué es lo que harías para hallar el número de árboles?



Figura 1

Las expresiones de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ se denominan ecuaciones cuadráticas con una incógnita, en este caso se representa por x , generalmente y por convención a, b y c representa los coeficientes, en algunos textos se denominan *parámetros*.

En la expresión dada (la ecuación) el coeficiente de x^2 , a , siempre es distinto de cero, porque de no ser así dejaría de tener sentido llamarla una ecuación de 2º grado o cuadrática, esto es si $a = 0$ entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ sería de la forma $bx + c = 0$ lo que es una ecuación de primer grado.

Podemos tener ecuaciones de segundo grado completa o incompleta, a saber:

A la expresión $ax^2 + bx + c = 0$ la denominaremos ecuación completa, si a, b, c son diferentes de cero. Y será incompleta, cuando $b = 0$; esto es $ax^2 + c = 0$, un segundo caso puede ser cuando $c = 0$; esto es $ax^2 + bx = 0$ y finalmente, si $b = 0$ y $c = 0$ nuestra expresión sería $ax^2 = 0$.

Ejercicio 3. De las siguientes expresiones algebraicas determina cuál es cuadrática, cual es completa y cual es incompleta. Para contestar correctamente, se deben reducir los términos semejantes.

1. $2x + 5x^2 - 10 = 0$ cuadrática completa _____ cuadrática incompleta _____
2. $2x^2 - 10x = 0$ cuadrática completa _____ cuadrática incompleta _____
3. $3x^2 = 0$ cuadrática completa _____ cuadrática incompleta _____
4. $2x - 6x^2 + 8 - 5x + 9x^2 = 3$ cuadrática completa _____ cuadrática incompleta _____
5. $2x - 6x^2 + 8 - 5x + 6x^2 = 3$ cuadrática completa _____ cuadrática incompleta _____

Vamos a generalizar lo anterior para encontrar una expresión general que nos proporcione una manera de resolver la ecuación, esto es, resolver la pregunta ¿Cuál es la solución de cada una de las ecuaciones? Dicho de otro modo, ¿cuáles son los valores de la variable x que satisfacen la ecuación?.

Forma de resolver una ecuación de segundo grado y posibles soluciones

Nuestra ecuación general de segundo grado, como ya vimos tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$; identificamos quién es a . Al observar determinamos que se trata del **término cuadrático**; ahora determinamos quién es b , observamos y determinamos que es el coeficiente del **término lineal** y finalmente encontramos quién es c , y a este le llamaremos **término independiente**, la razón es que pertenece a un término que no contiene la variable x .

Ejercicio para el alumno ¿Puedes completar el trinomio cuadrado perfecto en la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$, para resolverla? Inténtalo antes de continuar.

Sugerencia. Cuando trabajas con la ecuación general $ax^2 + bx + c = 0$, existe una complicación que consiste en que, el coeficiente de x^2 no es igual a 1. Se requiere dividir la ecuación entre a , lo que provoca que la expresión sea de tipo racional, lo que complica el álgebra a realizar en la expresión de alguna manera.

Procedimiento para obtener la expresión general para resolver una ecuación cuadrática.

Vamos a buscar la expresión general (fórmula) para resolver la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

Primero vamos a transformar la ecuación de tal manera que el coeficiente del término cuadrático sea igual a 1. El procedimiento que vamos a seguir se denomina **completar el trinomio cuadrado perfecto**.

i). - Dividimos todos los términos de la ecuación de segundo grado entre el coeficiente del término cuadrático, esto es, entre a , obtenemos

$$\left(\frac{a}{a}\right)^1 x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{c}{a}\right) = \left(\frac{0}{a}\right)$$

ii). - De donde obtenemos

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{c}{a}\right) = 0$$

iii). – Ahora, restamos el término $\left(\frac{c}{a}\right)$, en ambos lados de la igualdad, con el fin de tener solo términos en x del lado izquierdo

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{c}{a}\right) - \left(\frac{c}{a}\right) = 0 - \left(\frac{c}{a}\right)$$

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x = -\left(\frac{c}{a}\right)$$

iv).- En la expresión anterior, completamos el trinomio cuadrado perfecto en el lado izquierdo de la expresión, para ello se requiere “la mitad del coeficiente del término

lineal al cuadrado”, esto es $\frac{b}{2} = \frac{b}{2a}$, lo elevamos al cuadrado $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ por lo tanto, lo agregamos en ambos términos de la expresión anterior.

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\left(\frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

v).- La **expresión del lado izquierdo de la igualdad es un trinomio cuadrado perfecto**, por lo tanto, lo podemos **factorizar** como un binomio al cuadrado. Al realizarlo tenemos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{b^2}{4a^2}$$

vi).- Realizamos la operación algebraica del lado derecho de la igualdad

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

vii).- Ahora, extraemos la raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad.

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Obtenemos la expresión

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

viii).- Ahora vamos a despejar a la incógnita x , restamos $(\frac{b}{2a})$ en ambos lados de la igualdad

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

ix).- Finalmente se obtiene la solución de la ecuación de segundo grado.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como se puede ver, se tienen dos soluciones; una corresponde al signo más y otra al signo menos, esto es

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Podemos observar que si tenemos una ecuación de segundo grado escrita en forma general, las soluciones se encuentran utilizando las expresiones anteriores. Es importante adentrarse en el lenguaje de ecuaciones, cuando resolvemos una ecuación, decimos que encontramos una **solución**, aunque también es válido el lenguaje de denominar o llamar **raíces a las soluciones encontradas**.

El procedimiento utilizado se conoce como factorización.

En resumen, podemos decir que **toda ecuación de segundo grado con una incógnita tiene dos soluciones, o dos raíces.**

Ejercicio 4. Resolver las siguientes ecuaciones utilizando la formula general

1. $2x + 5x^2 - 10 = 0$
2. $2x^2 - 10x = 0$
3. $3x^2 = 0$
4. $2x - 6x^2 + 8 - 5x + 9x^2 = 3$
5. $2x - 6x^2 + 8 - 5x + 6x^2 = 3$

Solución

1. La ecuación (1) escrita en forma general es $5x^2 + 2x - 10 = 0$; los coeficientes correspondientes son $a = 5$; $b = 2$; $c = -10$, al sustituir en la solución general, se tiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(5)(-10)}}{2(5)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 200}}{2(5)}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{200}}{10} = \frac{-2 \pm 14.14}{10} = \begin{cases} \frac{12.14}{10} = 1.214 \\ -\frac{16.14}{10} = -1.614 \end{cases}$$

Las soluciones aproximadas a centésimos son $x_1 = 1.214$ y $x_2 = -1.614$

2. La ecuación (2) escrita en forma general es $2x^2 - 10x = 0$; se observa que es incompleta, sin embargo, podemos resolver de la siguiente manera; los coeficientes correspondientes son $a = 2$; $b = -10$; $c = 0$, al sustituir en la solución general, se tiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(2)(0)}}{2(2)} = \frac{10 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{10 \pm 10}{4} = \begin{cases} \frac{20}{4} = 5 \\ \frac{0}{4} = 0 \end{cases}$$

Las soluciones son $x_1 = 5$ y $x_2 = 0$

3. La ecuación (3) escrita en forma general es $3x^2 = 0$; tenemos otra ecuación incompleta, sin embargo, podemos escribir los coeficientes correspondientes, estos son $a = 3$; $b = 0$; $c = 0$, al sustituir en la solución general, se tiene:

$$\text{lonos } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(3)(0)}}{2(3)} = \frac{0 \pm \sqrt{0}}{6} = 0$$

La solución es únicamente $x = 0$

NUMEROS COMPLEJOS O IMAGINARIOS

Este caso ocurre cuando se tiene la expresión de una raíz cuadrada, recordemos que todo número elevado al cuadrado es positivo, así que al obtener raíz cuadrada se obtienen los dos posibles casos de soluciones, pero también la raíz cuadrada no puede aplicarse en números negativos. De este modo, se trata de soluciones que no pertenecen a los números reales.

Existen números denominados *complejos* o *imaginarios* y cuya representación es de la forma $x = d + ei$ donde d y e son números reales tal como los conocemos

pero que se acompañan de otra parte, el número i se conoce como *número complejo* y está definido como $i = \sqrt{-1}$.

Veamos el siguiente ejemplo

Ejemplo. Encontrar las soluciones (raíces) de la ecuación $3x^2 + 4x + 5 = 0$

Para resolver, escribimos los coeficientes correspondientes, estos son $a = 3$; $b = 4$; $c = 5$, al sustituir en la solución general, se tiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(3)(5)}}{2(4)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 60}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{-44}}{8}$$

La solución es
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-44}}{8} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-44}}{8} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-44}}{8}$$

Observemos que en nuestra solución hay una expresión que no pertenece a los números reales, a saber $\sqrt{-44} = \sqrt{44}\sqrt{-1} = 6.63\sqrt{-1}$, que de acuerdo con lo establecido anteriormente lo podemos escribir como $6.63i$

Finalmente, la solución es $x = \frac{1}{2} \pm 6.63i = 0.5 \pm 6.63i$

En resumen, se dice que la ecuación no tiene solución en los números reales.

FACTORIZACIÓN

Si seguimos el procedimiento para obtener las soluciones de una ecuación completa de segundo grado, podemos aplicar la factorización al completar el trinomio cuadrado perfecto. Pero también se sabe que existen otros productos, que se incluyen entre los *productos notables* que pueden utilizarse para factorizar. Un comentario importante, si queremos resolver una ecuación cuadrática a través de este procedimiento, no es necesario realizar todo el procedimiento algebraico, simplemente aplicar el resultado general obtenido, como lo hicimos en ejercicio 4.

Resolver la ecuación incompleta de segundo grado dada por $8x^2 - 16x = 0$; para resolverla utilizamos una simple factorización de la siguiente manera: observamos que un factor (elemento de una multiplicación) común a ambos sumandos es la variable x , por lo que podemos escribir nuestra ecuación original como $x(8x - 2) = 0$

Recordamos que cuando el producto de dos factores $a \cdot b = 0$, se cumple que a , b o ambos pueden ser igual a cero.

Entonces, si $x(8x-2)=0$, se debe cumplir que $x=0$ y/o $8x-2=0$; veamos los casos: el primero es $8x-2=0$, solucionamos y se tiene $x=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$. El otro caso es cuando $x=0$. Las soluciones de la ecuación son $x_1=0$ y $x_2=\frac{1}{4}$.

Recordemos que podemos comprobar estos resultados verificando que la ecuación se cumple cuando se sustituye la solución en ella.

Finalmente, un tercer caso es cuando la ecuación es incompleta y es de la forma $ax^2=0$, la solución siempre será $x=0$

Ejemplo Reducir términos semejantes, y clasificar las siguientes ecuaciones en completas e incompletas e indica de qué forma son

Solución

Ecuación	Reducción de términos semejantes	Completa o Incompleta	Forma
1. $-13x^2 = 0$	$-13x^2 = 0$	Incompleta	$ax^2 = 0$
2. $5x^2 + 20x = 0$	$5x^2 + 20x = 0$	Incompleta	$ax^2 + bx = 0$
3. $2x^2 - 6 = 0$	$2x^2 - 6 = 0$	Incompleta	$ax^2 + c = 0$
4. $x^2 - 18x + 5 - 5 = 0$	$x^2 - 18x = 0$	Incompleta	$ax^2 + bx = 0$
5. $5x^2 - 45 - 4x^2 = 0$	$x^2 - 45 = 0$	Incompleta	$ax^2 + c = 0$
6. $2x^2 - 3x + 1 - 2 = 0$	$2x^2 - 3x - 1 = 0$	Completa	$ax^2 + bx + c = 0$
7. $5x^2 + 5x - 3x - 2x = 0$	$5x^2 = 0$	Incompleta	$ax^2 = 0$
8. $35x^2 + 9x - 2 + 2x = 0$	$35x^2 + 11x - 2 = 0$	Completa	$ax^2 + bx + c = 0$
9. $x^2 + 144x - 1 + 56x + 1 = 0$	$x^2 + 200x = 0$	Incompleta	$ax^2 + bx = 0$
10. $x^2 - 6 + x^2 - 2x = 0$	$2x^2 - 2x - 6 = 0$	Completa	$ax^2 + bx + c = 0$

Ejercicio 5. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$	6. $x^2 - 4x + 4 = 0$	11. $18 = 6x + x(x - 13)$
2. $2x^2 - 7x + 3 = 0$	7. $2x - 3 = 1 - 2x + x^2$	12. $6x^2 - 5x + 1 = 0$
3. $-x^2 + 7x - 10 = 0$	8. $x^2 + (7 - x)^2 = 25$	13. $x^2 + (x + 2)^2 = 580$
4. $x^2 - 2x + 1 = 0$	9. $7x^2 + 21x - 28 = 0$	14. $x^2 - 5x - 84 = 0$
5. $x^2 + x + 1 = 0$	10. $-x^2 + 4x - 7 = 0$	15. $4x^2 - 6x + 2 = 0$

A manera de resumen tenemos lo siguiente

Podemos observar que algunas ecuaciones tienen dos soluciones diferentes, otras dos soluciones iguales y otras no tienen soluciones reales, esto es, su solución son números complejos, esto se resume en lo siguiente:

En la resolución de la ecuación cuadrática **podemos analizar** el Discriminante de la ecuación para determinar el tipo de soluciones.

Se le llama Discriminante al radicando que está dentro la raíz de la fórmula general para solucionar una ecuación cuadrática; esto es al termino $b^2 - 4ac$

Analicemos como el Discriminante, afectará la evaluación de $\sqrt{b^2 - 4ac}$, y como nos ayuda a determinar el conjunto solución.

- Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces el número dentro del radical será un valor positivo. Siempre podemos calcular la raíz cuadrada de un número positivo en los números reales, entonces al evaluar la fórmula cuadrática **resultarán dos soluciones**.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces estaremos calculando la raíz cuadrada de 0, y el término, por lo tanto, al ser igual a cero desaparece de la evaluación de la fórmula cuadrática. El resultado, entonces son **dos soluciones iguales**.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces el número dentro del radical será un número negativo. La raíz cuadrada de un número negativo no existe en los números reales, entonces **no habrá soluciones en los números reales**.

Bibliografía

Anfossi, Agustín. *Curso de Álgebra*, Editorial Progreso octava Edición 1980, México

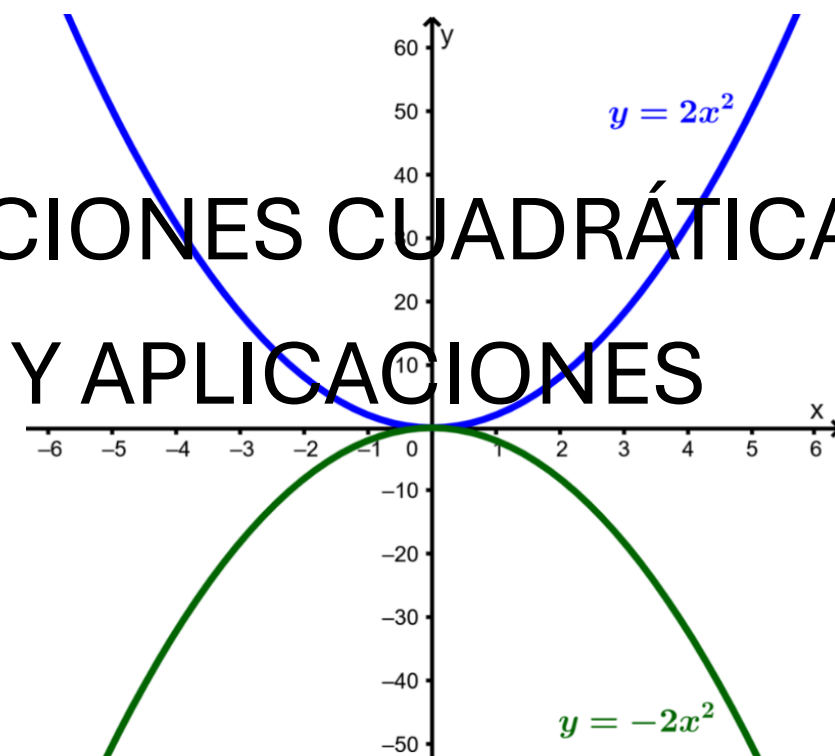
Allen, R. (2008). *Álgebra intermedia*. México, Pearson.

Berrondo M., *Los juegos matemáticos de Eureka*, Editorial Reverté España 2006

Gómez Ortega, Bulajich Manfrino, Valdez Delgado, Álgebra Cuadernos de Olimpiadas, 2016
Larson, R. y Hostetler, R. (2006). *Álgebra*. México: Publicaciones Cultural.
Lovaglia F., Merrit A., Donald C., Álgebra. Oxford University Press, México 2007

UNIDAD 2

FUNCIONES CUADRÁTICAS Y APLICACIONES



FUNCIÓN CUADRÁTICA Y APLICACIONES

Introducción

En esta unidad se trata la segunda parte de álgebra del curso de Matemáticas II, el tema fundamental es el de Funciones algebraicas

Presentación

En esta unidad se propicia el estudio de funciones cuadráticas, con el cual se busca avanzar en el concepto de función introduciendo un nuevo tipo de variación asociada a los conceptos de concavidad y simetría, continuando así, con el desarrollo que corresponde a los ejes de Álgebra y Funciones, repasando y consolidando los conceptos y procedimientos de la Unidad 1 Ecuaciones Cuadráticas ya que serán cruciales para cursos posteriores.

Las funciones cuadráticas ocupan un lugar central en el estudio de las matemáticas, no solo por su relevancia teórica, sino por sus múltiples aplicaciones prácticas en campos tan diversos como la física, la economía, la ingeniería y las ciencias sociales.

Las funciones cuadráticas son fundamentales porque:

1. **Modelan fenómenos naturales y procesos físicos:** La trayectoria de proyectiles, el movimiento de objetos bajo la influencia de la gravedad y el comportamiento de sistemas mecánicos pueden ser descrito mediante funciones cuadráticas.
2. **Aparecen en problemas de optimización:** En economía y negocios, las funciones cuadráticas se utilizan para encontrar valores óptimos, como maximizar beneficios o minimizar costos.
3. **Sientan las bases para estudios avanzados:** Comprender las funciones cuadráticas es esencial para progresar en álgebra y otras áreas avanzadas de las matemáticas.

Este material didáctico está diseñado para proporcionar una comprensión clara y profunda de las funciones cuadráticas, abordando desde conceptos básicos hasta estrategias de enseñanza y aprendizaje, actividades prácticas y soluciones a problemas comunes.

Los aprendizajes que se abordan en este capítulo son:

- ✓ Obtiene el modelo de la función cuadrática de una situación dada.
- ✓ Interpreta el comportamiento de la gráfica y los parámetros de la expresión algebraica, dentro del contexto de una situación dada.

- ✓ Relaciona el número de intersecciones de la curva de una función cuadrática con el eje X , con la naturaleza de las raíces. En particular, identifica su ausencia con la existencia de raíces complejas.
- ✓ Comprende los términos de concavidad, vértice, máximo, mínimo y simetría.
- ✓ Resuelve problemas sencillos de máximos y mínimos aprovechando las propiedades de la función cuadrática.

Para lograr estos aprendizajes, se incluyen aspectos teóricos de los conceptos clave acompañados de algunos problemas y/o ejercicios con propuestas de resolución para ser abordados por los docentes interactuando con los estudiantes a través del planteamiento de interrogantes a los estudiantes para involucrarlos en la resolución de los mismos, además de una sección que incluyen más problemas y ejercicios complementarios en los que se analiza el comportamiento de las funciones cuadráticas en términos de sus parámetros mediante la comparación de la representación gráfica y analítica, la resolución problemas de optimización con métodos algebraicos a fin de continuar con el estudio de las funciones a partir de situaciones que varían en forma cuadrática contrastándola con la variación lineal.

Temario

- Situaciones que involucran cambio y que dan origen a funciones cuadráticas
- Estudio gráfico, analítico y contextual de la función $y=ax^2 + bx +c$, en particular: $y= ax^2$; $y=ax^2 +c$; $y=a(x-h)^2+k$
- Ceros de la función.
- La función $y=ax^2 + bx +c$ y sus propiedades gráficas.
- Simetría, concavidad, máximo o mínimo.
- Forma estándar $y=a(x-h)^2+k$
- Problemas de aplicación

Lo anterior se abordará mediante una combinación de:

- **Clases teóricas:** donde se explicarán los conceptos y propiedades fundamentales.
- **Demostraciones visuales:** utilizando software de graficación para visualizar cómo los cambios en los coeficientes afectan la grafica de la función (parábola).
- **Actividades prácticas:** incluyendo la resolución de problemas y la construcción de gráficas.
- **Problemas de aplicación:** para vincular la teoría con situaciones reales y fomentar la investigación y el pensamiento crítico.

Al finalizar el estudio de las funciones cuadráticas, los estudiantes deberán ser capaces de:

1. **Identificar y describir las propiedades de las funciones cuadráticas** incluyendo el vértice, el eje de simetría y las intersecciones con los ejes.
2. **Graficar funciones cuadráticas** utilizando tanto métodos manuales como herramientas tecnológicas.
3. **Resolver problemas prácticos** aplicando el conocimiento de funciones cuadráticas a situaciones reales.
4. **Analizar y comprender la importancia de los coeficientes** (como afectan la forma y posición de la parábola)
5. **Aplicar técnicas de optimización** utilizando funciones cuadráticas para encontrar máximos y mínimos en contextos diversos.

Conceptos clave

Para lograr el propósito de la unidad, es esencial que los alumnos comprendan una serie de conceptos clave ya que proporcionarán las bases para el análisis y la aplicación de funciones cuadráticas en diversas situaciones. Entre ellos se encuentran los siguientes:

1. Ecuación cuadrática

- **Forma general:** La ecuación cuadrática se expresa como $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$.
- **Coeficientes:** Los valores en particular para, por ejemplo a, b y c son cantidades que determinan la forma y la posición de la representación gráfica de una parábola.

2. Parábola

- **Gráfica de una función cuadrática:** Es una curva llamada parábola *vertical*
- **Concavidad:** Determinada por el signo del coeficiente a :
 - Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba
 - Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo

3. Vértice

- **Punto máximo o mínimo:** El vértice es el punto más alto o más bajo de la parábola.
- **Coordenadas del vértice:** Se calculan usando:

$$h = -\frac{b}{2a}, \quad k = f(h)$$

4. Eje de simetría

- **Recta de simetría vertical:** pasa por el vértice y divide a la parábola en dos partes iguales.
- **Ecuación del eje de simetría:** $x = -\frac{b}{2a}$

5. Intersección con el eje Y

- **Punto donde la parábola corta el eje Y:** se encuentra evaluando $f(0) = c$.

6. Intersección con el eje X

- **Puntos donde la parábola corta el eje X:** se encuentran resolviendo la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

7. Discriminante

- **Parte de la fórmula cuadrática:** determina la naturaleza de las raíces de la ecuación cuadrática.
- **Expresión del discriminante, simbolizado por :** $\Delta = b^2 - 4ac$.
- **Interpretación:**
 - Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales y distintas.
 - Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una raíz doble.
 - Si $\Delta < 0$, la ecuación tiene dos raíces complejas y conjugadas.

8. Forma canónica

- **Reescritura de la función cuadrática:** permite escribir la función cuadrática en una forma factorizada que permite destacar las coordenadas del vértice:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k.$$

donde (h, k) son las coordenadas del vértice.

9. Completar el cuadrado

- **Método algebraico** que se utiliza para expresar una función cuadrática de su forma general a su forma canónica.

10. Transformaciones de la parábola

- **Desplazamientos horizontales y verticales:** como afecta la gráfica en términos de los parámetros b y c .
- **Reflexiones, estiramientos y compresiones:** como afecta la gráfica el parámetro a .

11. Aplicaciones prácticas

- **Modelos de movimiento:** describir la trayectoria de proyectiles.
- **Optimización:** encontrar máximos y mínimos en situaciones de la vida real.
- **Economía y negocios:** aplicaciones en maximización de beneficios y minimización de costos.

12. Resolución de problemas

- **Identificación de parámetros:** obtener y utilizar los coeficientes a , b y c de problemas reales.
- **Análisis de gráficas:** interpretar y construir gráficas de funciones cuadráticas.

El dominio de estos conceptos clave proporciona una base sólida para el logro de los aprendizajes asociados a las funciones cuadráticas en una variedad de contextos matemáticos y del mundo real. Cada uno de estos conceptos es interdependiente, y juntos, permiten una comprensión completa y profunda de las funciones cuadráticas.

Sugerencias de estrategias didácticas

Se ha considerado, la implementación de las siguientes estrategias para abordar los temas de funciones cuadráticas del apartado **Actividades de enseñanza-aprendizaje**, de manera integral, proporcionando a los estudiantes múltiples enfoques

y herramientas para comprender y aplicar este concepto fundamental en matemáticas. Al implementar estas estrategias, se espera que el docente pueda crear un entorno de aprendizaje dinámico y efectivo que promueva la comprensión profunda y el interés por las matemáticas.

1. Uso de gráficas interactivas

Descripción: Utilizar herramientas tecnológicas para visualizar y manipular funciones cuadráticas en tiempo real.

Estrategia:

- **Herramientas:** software como GeoGebra, Desmos o gráficos en Excel.
- **Actividad:** proyectar una función cuadrática en la pantalla y modificar los valores de a , b y c en tiempo real, observando cómo cambia la parábola. Pedir a los estudiantes que predigan el efecto de estos cambios antes de realizarlos.
- **Objetivo:** ayudar a los estudiantes a entender la relación entre los coeficientes y la forma de la parábola.

2. Ejemplos prácticos y relevantes

Descripción: conectar el aprendizaje de funciones cuadráticas con situaciones reales que sean relevantes para los estudiantes.

Estrategia:

- **Ejemplos:** trayectoria de un objeto lanzado al aire, optimización de áreas y volúmenes y situaciones económicas como maximación de ganancias.
- **Actividad:** presentar un problema real, como el lanzamiento de una pelota y guiar a los estudiantes a modelar la situación con una función cuadrática. Resolver el problema usando la función encontrada.
- **Objetivo:** mostrar la aplicabilidad de las funciones cuadráticas en la vida real, aumentando el interés y la comprensión de los estudiantes.

3. Discusión en grupo y colaboración

Descripción: fomentar la colaboración y discusión entre los estudiantes para resolver problemas y compartir estrategias.

Estrategia:

- **Formación de equipos:** dividir a los estudiantes en grupos pequeños y asignarles problemas de funciones cuadráticas para resolver en conjunto.
- **Actividad:** cada grupo presenta su solución y explicación al resto de la clase fomentando la discusión y el debate sobre diferentes métodos de solución.

- **Objetivo:** promover el aprendizaje colaborativo, la comunicación y la capacidad de argumentación.

4. Tareas escalonadas y evaluaciones formativas

Descripción: proveer una secuencia de ejercicios con dificultad creciente para construir la confianza y habilidad de los estudiantes gradualmente.

Estrategia:

- **Secuencia de ejercicios:** comenzar con problemas simples de identificación de coeficientes, avanzar a la graficación y análisis de propiedades (vértice, eje de simetría) y finalmente resolver problemas complejos de aplicaciones.
- **Evaluaciones formativas:** realizar evaluaciones periódicas con retroalimentación inmediata para identificar y corregir errores a tiempo.
- **Objetivo:** asegurar una comprensión sólida y progresiva del tema.

5. Uso de modelos físicos

Descripción: utilizar objetos físicos y manipulativos para ilustrar conceptos abstractos.

Estrategia:

- **Materiales:** regletas de colores, bloques o papel cuadriculado.
- **Actividad:** construir parábolas utilizando materiales manipulativos para visualizar la apertura, el vértice y el eje de simetría.
- **Objetivo:** proporcionar una presentación tangible de conceptos matemáticos abstractos.

6. Investigaciones

Descripción: fomentar la investigación de funciones cuadráticas en diversos campos.

Estrategia:

- **Proyecto:** pedir a los estudiantes que investiguen aplicaciones de funciones cuadráticas en la física, la economía, la biología, entre otros.
- **Actividad:** cada estudiante o equipo presenta su proyecto de investigación explicando cómo las funciones cuadráticas son útiles en el campo estudiado.
- **Objetivo:** desarrollar habilidades de investigación y mostrar la relevancia de las funciones cuadráticas en múltiples disciplinas.

7. Resolución de problemas en contexto

Descripción: incorporar problemas contextualizados que requieren el uso de funciones cuadráticas para su resolución.

Estrategia:

- **Problemas:** de optimización, de tiro parabólico, de diseño (como ventanas de formas específicas).
- **Actividad:** plantear un problema contextualizado y guiar a los estudiantes a través del proceso de modelado matemático, solución y verificación de resultados.
- **Objetivo:** aplicar el conocimiento de funciones cuadráticas en contextos prácticos y significativos.

8. Actividades de reflexión y metacognición

Descripción: promover la reflexión sobre el proceso de aprendizaje y las estrategias utilizadas.

Estrategia:

- **Diarios de aprendizaje:** pedir a los estudiantes que mantengan un diario de aprendizaje donde reflexionen sobre los conceptos aprendidos, las estrategias utilizadas y las dificultades encontradas.
- **Actividades de reflexión:** al finalizar una lección, dedicar unos minutos para que los estudiantes reflexionen sobre lo aprendido y compartan con el grupo.
- **Objetivo: Desarrollar habilidades metacognitivas y fomentar una actitud reflexiva hacia el aprendizaje.**
- **Actividades de enseñanza aprendizaje**

El diseño de las siguientes actividades pretenden proporcionar la mayor comprensión sobre las funciones cuadráticas, abarcando tanto los aspectos teóricos como prácticos. Mediante una variedad de enfoques pedagógicos, se busca atender a diferentes estilos de aprendizaje y fomentar un ambiente de aprendizaje dinámico y efectivo

Problemas que conducen a funciones cuadráticas

Las funciones cuadráticas se utilizan en diversas áreas del conocimiento tales como la Biología, la Física, la Economía, etc. Estas permiten, por ejemplo, describir la

trayectoria de un objeto o la relación entre los costos y beneficios de una empresa entre muchas otras situaciones.

A continuación, abordaremos algunas situaciones que dan lugar a una función cuadrática; analizando las condiciones y relaciones en dichos planteamientos que permitan obtener información útil para su representación algebraica y determinar el dominio y rango de la función encontrada.

Problema 2.1. *En el jardín de una vivienda se ha destinado una zona rectangular para hacer un huerto. Se han dispuesto de 56 metros lineales de malla para cercar la zona. Obtener una expresión algebraica que permita calcular el Área en función de la base de la zona del huerto.*



Solución

Comenzar preguntando al alumno sobre la forma que tiene la zona destinada al huerto. Una vez que identifiquen que es rectangular, plantear preguntas como las siguientes: ¿Cuánto mide el perímetro del rectángulo? ¿cuánto suman la base y la altura? ¿Cómo se obtiene el área de un rectángulo?

Dado que el perímetro del rectángulo es de 56 m, la suma de su base y la altura es de 28 cm. Además, representaremos el área con la letra A y la base con la letra x .

De la suma de la base y la altura se deduce que, la expresión algebraica para la altura en términos de la base será:

$$\text{Altura} = 28 - x$$

Como el área de cualquier rectángulo es $A = (base)(altura)$, tenemos que área del huerto se obtiene con la expresión:

$$A = (x)(28 - x),$$

o bien en su forma desarrollada

$$A = 28x - x^2$$

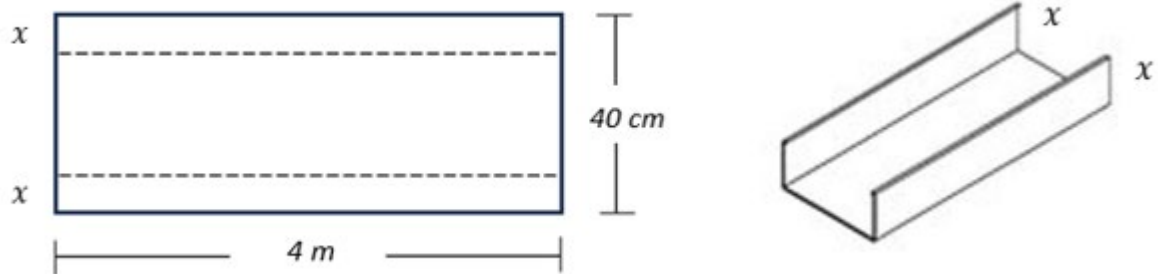
La igualdad anterior es un modelo algebraico para determinar el área del huerto que desea cercarse. Representa algebraicamente la relación entre todas las posibles medidas de la base y el área correspondiente.

En esta expresión, están involucradas dos variables, A y x , donde el valor del área A depende del valor de x , por tal razón decimos que A es la variable dependiente y x es la variable independiente. Esto significa que el área del huerto dependerá de la medida de su base, es decir, el área está en función de la base, por lo que la expresión algebraica debe expresarse de la forma:

$$A(x) = 28x - x^2$$

Abordemos la resolución de más situaciones que dan origen a funciones cuadráticas antes de establecer su definición.

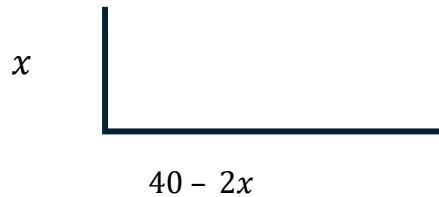
Problema 2.2. De una pieza de metal de 40 cm por 4 m de largo, se va a construir un canal para la lluvia doblando la lámina como se muestra en la siguiente figura:



Obtener una expresión que permita calcular el área de sección transversal del canal A en términos de la medida x de la parte doblada cuya medida está en centímetros.

Solución

Lo que nos piden en este planteamiento es, construir una expresión que relacione el área transversal A del canal, la cual es de forma rectangular en términos de la longitud de su altura x . La sección transversal tiene las siguientes medidas:



Entonces el área A de la sección transversal se obtiene con la siguiente expresión:

$$A = (x)(40 - 2x)$$

o bien en su forma desarrollada

$$A = 40x - 2x^2$$

La igualdad anterior es un modelo algebraico que permite determinar el área de la sección transversal en función del doble o altura de la lámina. Representa algebraicamente la relación entre todas las posibles medidas de la altura y el área transversal correspondiente.

En esta expresión, están involucradas dos variables, A y x , donde el valor del área A depende del valor de x , por tal razón decimos que A es la variable dependiente y x es la variable independiente. Esto significa que el área del huerto dependerá de la medida de su base, es decir, el área está en función de la base, por lo que la expresión algebraica debe expresarse de la forma:

$$A(x) = 40x - 2x^2$$

Problema 2.3. Se va a diseñar un contenedor en forma de cilindro circular recto. Su superficie total deberá ser de 10π unidades cuadradas y su altura debe medir 5 unidades más que el doble del radio de las bases. Obtener un modelo que permita determinar el área total A del contenedor en términos del radio r de las superficies circulares.

Solución

Para la resolución de este problema, se utilizarán fórmulas de geometría relacionadas con el área de la superficie de un cilindro. La información que tenemos es:

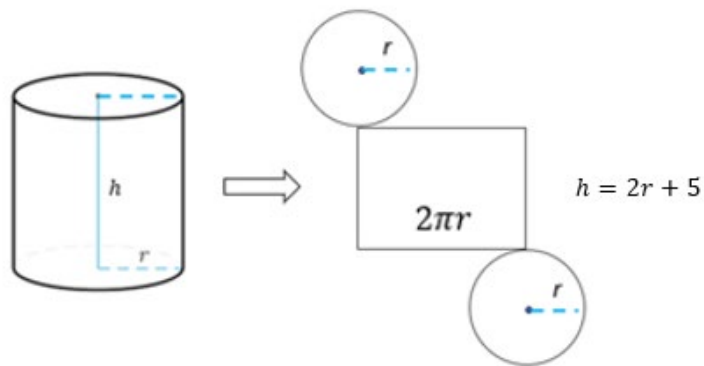
Radio de las superficies circulares:

r unidades

Altura del cilindro h :

$2r + 5$ unidades

Ahora representaremos en la siguiente ilustración, las superficies del contenedor cilíndrico:



De acuerdo con la figura anterior, el área de cada superficie circular del contenedor, se calculan con la fórmula $A_C = \pi r^2$ y la superficie lateral del contenedor, al ser un rectángulo, tiene una base de $2\pi r$ unidades y una altura de $2r + 5$ unidades.

Entonces el área lateral del contenedor está dada por la expresión:

$$A_L = (base)(altura) = (2\pi r)(2r + 5) = 4\pi r^2 + 10\pi r$$

Por otro lado, el área de ambas superficies circulares será:

$$A_C = 2\pi r^2$$

La expresión para determinar el área total en términos del radio de las superficies circulares es:

$$A = \text{Área lateral} + \text{Área de superficies circulares}$$

$$A = A_L + A_C$$

$$A = 4\pi r^2 + 10\pi r + 2\pi r^2$$

$$A = 6\pi r^2 + 10\pi r$$

La igualdad anterior es un modelo algebraico que permite determinar el área total de las superficies de un contenedor de forma de cilindro circular recto en función del radio

de las superficies circulares. Representa algebraicamente la relación entre todas las posibles medidas del radio y el área total de las superficies correspondientes de contenedor.

En esta expresión, están involucradas dos variables, A y r , donde el valor del área A depende del valor de r , por tal razón decimos que A es la variable dependiente y r es la variable independiente. Esto significa que el área del huerto dependerá de la medida de su base, es decir, el área está en función de la base, por lo que la expresión algebraica debe expresarse de la forma:

$$A(r) = 6\pi r^2 + 10\pi r$$

Problema 2.4. *Se introducen 3, 200 abejas en una isla. La población máxima fue de 4, 410 en el día 11 y se extinguió en 32 días. ¿Qué función describe la evolución?*

Solución

Con la información que nos proporcionan debemos obtener una función cuadrática de la forma:

$$P(t) = at^2 + bt + c$$

donde $P(t)$ es la población de abejas en el tiempo t en días. Se tienen las siguientes condiciones:

- La población máxima fue de 4 410 abejas en el día 11, por lo que

$$P(11) = 4\,410$$

- La población se extinguió en 32 días, por lo que

$$P(32) = 0$$

- Asumiremos que las abejas fueron introducidas en el día 0, por lo que

$$P(0) = 3\,200$$

A partir de estas condiciones, obtendremos un sistema de ecuaciones y su resolución nos permitirá conocer los valores de a , b y c :

- Cuando $t = 11$ la población es de 4 410

$$P(11) = a(11)^2 + b(11) + c = 4\,410$$

$$121a + 11b + c = 4\,410 \quad \text{E1}$$

- Cuando $t = 32$ la población es 0

$$P(32) = a(32)^2 + b(32) + c = 0$$

$$1024a + 32b + c = 0 \quad \text{E2}$$

- Cuando $t = 0$ la población es 3 200

$$P(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 3200$$

$$c = 3\,200 \quad \text{E3}$$

Hemos obtenido un sistema de 3x3:

$$\begin{cases} 121a + 11b + c = 4\,410 & \text{E1} \\ 1024a + 32b + c = 0 & \text{E2} \\ c = 3\,200 & \text{E3} \end{cases}$$

Sustituyendo E3 en la ecuación E1 y E2 tenemos

$$\begin{array}{l|l} 121a + 11b + 3\,200 = 4\,410 & 1024a + 32b + 3\,200 = 0 \\ 121a + 11b = 4\,410 - 3\,200 & \mathbf{1024a + 32b = -3\,200} \quad \text{E5} \\ \mathbf{121a + 11b = 1\,210} \quad \text{E4} & \end{array}$$

Se resuelve ahora el sistema de 2x2, por ejemplo, por el método de igualación:

$$\begin{cases} 121a + 11b = 1\,210 & \text{E4} \\ 1024a + 32b = -3\,200 & \text{E5} \end{cases}$$

Despejamos b en ambas ecuaciones:

$$121a + 11b = 1\,210$$

$$b = \frac{1\,210 - 121a}{11}$$

$$1024a + 32b = -3\,200$$

$$b = \frac{-3\,200 - 1\,024a}{32}$$

Igualemos las expresiones anteriores

$$\frac{1\,210 - 121a}{11} = \frac{-3\,200 - 1\,024a}{32}$$

$$32(1\,210 - 121a) = 11(-3\,200 - 1\,024a)$$

$$38\,720 - 3\,872a = -35\,200 - 11\,264a$$

$$38\,720 + 35\,200 = -11\,264a + 3\,872a$$

$$73\,920 = -7\,392a$$

$$\frac{73\,920}{-7\,392} = a$$

$$\mathbf{-10 = a}$$

Sustituyendo el valor de $a = -10$ en la ecuación E4 despejada, obtendremos el valor de b

$$b = \frac{1\,210 - 121a}{11} = \frac{1\,210 - 121(-10)}{11} = \frac{1\,210 + 1210}{11} = \frac{2420}{11}$$

$$\mathbf{b = 220}$$

Los valores de los coeficientes son entonces:

$$\mathbf{a = -10 \qquad b = 220 \qquad c = 3\,200}$$

Por lo tanto, la función cuadrática que describe la evolución de la población de abejas en la isla es:

$$\mathbf{P(t) = -10t^2 + 220t + 3\,200}$$

Para verificar que la función cuadrática anterior satisface las condiciones del problema y que describe realmente la situación planteada, se sugiere construir la gráfica ya sea por medio de una tabla de valores cuyos valores pueden ser sugeridos por el docente en conjunto de los alumnos o bien a través de la construcción en tiempo real del gráfico con el software dinámico GeoGebra.

A través de los problemas anteriores, abordamos relaciones en las que se encuentran presentes dos tipos de variables: **independiente y dependiente**. Estas relaciones se representaron mediante una expresión algebraica también llamada **regla de correspondencia**.

Son un tipo de relaciones especiales llamadas funciones cuadráticas y representan un concepto importante en Matemáticas.

Antes de definir que son las funciones cuadráticas, es conveniente recordar algunos **conceptos clave**:

RELACIÓN

Definición. Un conjunto de pares ordenados generados a partir de relacionar los elementos de un primer conjunto A con los elementos de un segundo conjunto B, se dice que es una relación.

$$R = \{ (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \mid x_i \in A \text{ y } y_i \in B \}$$

Una relación R se llama función, si no existen pares ordenados que tengan el mismo primer elemento. De otra manera, la relación R no es una función si existen al menos dos pares ordenados con el mismo primer elemento, es decir:

$$\text{Si } (x_i, y_i) \in R \text{ y } (x_m, y_m) \in R \text{ tales que } x_i = x_m \text{ y } y_i \neq y_m$$

entonces la relación no corresponde a una función.

Si la relación R es una función f , entonces

$$R = f = \{ (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \}$$

Y los primeros elementos de los pares ordenados del conjunto A, se definen como el **dominio de la función** mientras que a los segundos elementos de los pares ordenados del conjunto B, se definen como el **rango de la función**.

$$\text{Dom } f = \{ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \}$$

$$\text{Ran } f = \{ y_1, y_2, y_3, \dots, y_n \}$$

De manera formal, una función se define de la siguiente manera:

FUNCIÓN

Definición. Una función de un conjunto A en un conjunto B, es una regla de correspondencia o relación que asocia a cada elemento del conjunto A un y solamente un elemento del conjunto B.

Para denotar una función se emplea la notación siguiente:

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ x &\rightarrow f(x) = y \end{aligned}$$

f representa la función de un conjunto A en un conjunto B, $f(x) = y$ se lee “imagen de x bajo la función f ”. A y B por lo general son conjuntos de números reales y la regla de correspondencia se establecerá por medio de una expresión algebraica y se utiliza la notación $f(x)$ que se lee “función de x”, donde x es un elemento del dominio.

Al conjunto A se le llama **dominio de la función f** mientras que al conjunto B se le llama **contradominio de la función f** :

$$A = \text{Dom } f ; B = \text{Cont } f$$

El **rango de la función f** es el conjunto de todas las imágenes:

$$\text{Ran } f = \{f(x) : x \in A\}$$

FUNCIÓN DE VARIABLE REAL

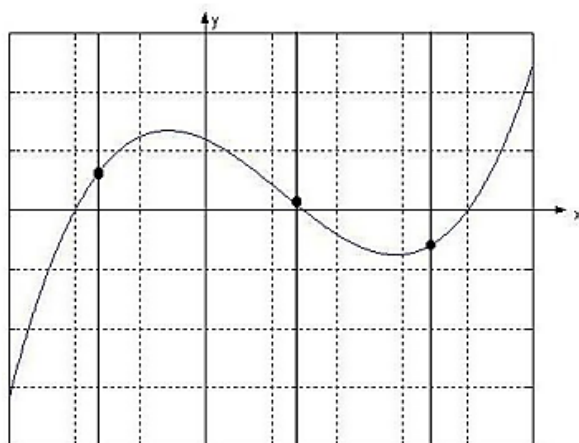
Es una función cuyo dominio y contradominio son subconjuntos de los números reales.

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow B \subseteq \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = y \end{aligned}$$

A la variable x le llamaremos la **variable independiente** y a la variable y la llamaremos **variable dependiente**.

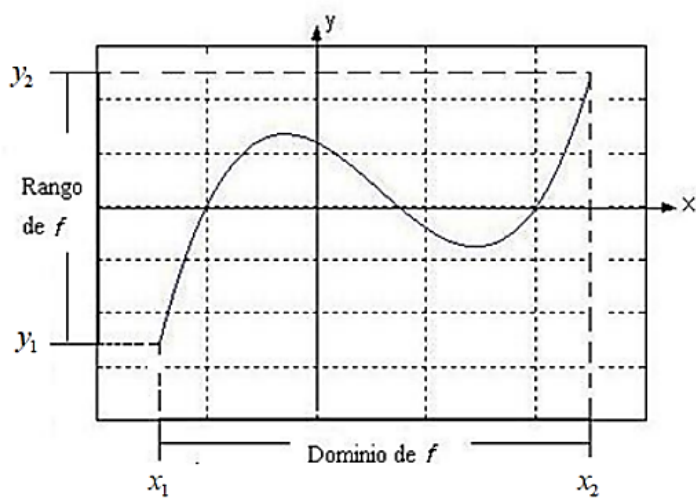
GRAFICA DE UNA FUNCIÓN

La gráfica de una función es la representación de todos los pares ordenados en el plano cartesiano. Para identificar gráficamente a una función, se utiliza la prueba de la línea vertical, la cual consiste en trazar líneas verticales (paralelas al eje Y) y si la gráfica corresponde a una función entonces cualquier línea vertical interseca (toca) a la gráfica a lo más en un punto de ella.



OBTENCIÓN DEL DOMINIO Y DEL RANGO DE UNA FUNCIÓN A PARTIR DE SU GRÁFICA

El dominio de la función se obtiene con la proyección de la gráfica sobre el eje X y el rango de la función se obtiene con la proyección de la gráfica sobre el eje Y, como se observa en la siguiente figura:



El dominio corresponde a todos los valores del eje X que contiene la gráfica, esto es comprendido en el intervalo cerrado $[x_1, x_2]$ cuando se incluyen los extremos, puede ocurrir que no se incluyan los extremos, entonces el dominio es el intervalo abierto (x_1, x_2) .

El rango corresponde a todos los valores del eje Y que contiene la gráfica, esto es comprendido en el intervalo cerrado $[y_1, y_2]$ cuando se incluyen los extremos, puede ocurrir que no se incluyan los extremos, entonces el rango es el intervalo abierto (y_1, y_2) .

De manera general las funciones cuadráticas tienen una forma específica de representarse. Si en una situación en la que se relaciona una variable independiente x y otra variable dependiente y , la cual se suele escribir $y = f(x)$ para representar la función en cuestión entonces podemos decir que la expresión algebraica de una función cuadrática en forma general es:

PRACTICA 1

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Definición. Si x es un número real, una función cuadrática en la variable x es entonces $f(x) = ax^2 + bx + c$, siempre que $a \neq 0$, b y c sean constantes.

Es importante considerar que una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ puede ser evaluada para cualquier valor real que tome x , lo que significa que su dominio corresponderá al conjunto de todos los números reales, es decir:

$$Dom f = IR = (-\infty, \infty)$$

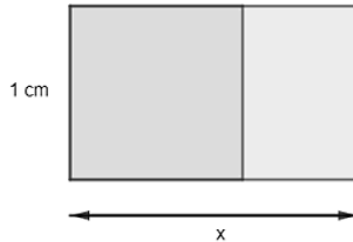
Sin embargo, cuando la variable x representa, en un contexto específico, cantidades como el tiempo, la temperatura, la longitud, etc., entonces los valores que puede tomar esta variable se encuentran restringidas, es decir, el dominio de la función no corresponderá al conjunto de los números reales, sino solo a los que el contexto de la situación establezca como es el caso de las situaciones que se estudian en este apartado.

PRACTICA 2

Para cada uno de los siguientes planteamientos, realizar una figura, que muestre la situación descrita, asignar literales adecuadas a las magnitudes involucradas y obtener un modelo que permita relacionarlas con base a lo que se solicite.

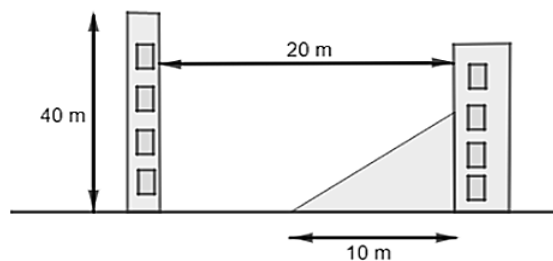
1. El puente colgante que se encuentra en el Bósforo une la parte asiática con la parte europea de la ciudad de Estambul, en Turquía. Fue inaugurado el 30 de octubre de 1973. Los cables de acero tienen forma parabólica. El vano central tiene una longitud de 1074 m y la altura de los pilares desde donde cuelgan los cables es de 165 m y la altura sobre el nivel del mar de 64 m. Se quiere encontrar una expresión matemática de la función cuadrática y el valor de la altura de los cables a los 500 m de uno de los pilares.
2. Dos amigos se encuentran jugando un partido de fútbol con el videojuego FIFA 19. La trayectoria que describe en cierto momento del partido es parabólica. La distancia en línea recta desde que el jugador la pateó hasta que toca al suelo es de 24 m. El arquero no la ataja y cuando llega a él está a 23.50 m del punto de inicio. La altura máxima que alcanza es de 4 m. ¿Cuál es la expresión de la función cuadrática?
3. Se desea cercar un terreno rectangular y dividirlo en tres partes con dos divisiones interiores y paralelas a uno de los lados. Hallar, si es posible, la función que permita determinar las dimensiones del terreno considerando que la longitud total de la cerca es de 800 m y el área del terreno es de $23,000 \text{ m}^2$.

4. Se dice que la forma ideal de un rectángulo utilizado en el dibujo artístico es la del rectángulo áureo, usado por los griegos. En el rectángulo que se muestra a continuación



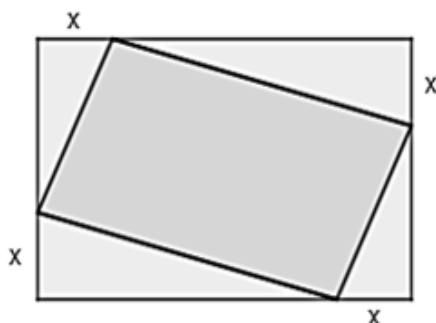
las dimensiones son tales que la razón entre la dimensión mayor y la menor es igual al número de oro, que se simboliza como Φ . Al construir en el rectángulo un cuadrado cuyo lado mide igual que la menor de sus dimensiones se obtiene un rectángulo semejante al original. Obtener una expresión que permita calcular el valor de x que es el valor de Φ .

5. Desde lo alto de un edificio de 40 m de altura se lanza una pelota hacia la calle que describe una trayectoria parabólica. El punto más alto de dicha trayectoria se encuentra a 22.50 m por encima del lugar donde se lanzó la pelota y a 1.5 m del edificio. Frente al edificio hay un depósito cuyos empleados utilizan una rampa mecánica para bajar y subir mercadería. De acuerdo con los datos del siguiente esquema determinar si la pelota puede o no chocar con la rampa y justificar.



6. Un jardín circular cubierto de flores está rodeado por un camino de 2 m de ancho. ¿Cuál es el radio del jardín si, el área del jardín con camino es igual a los $\frac{36}{5}$ del área del jardín?

7. Una cuerda para tender ropa que tiene 35 m de longitud se extiende en diagonal entre las esquinas de un patio rectangular de 98 m de perímetro. ¿Cuáles son las dimensiones del patio?
8. Se quiere construir una ventana que tenga la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo y cuyo perímetro total sea 12 m. Hallar las dimensiones que debe tener la ventana si se quiere que deje pasar la mayor cantidad de luz posible. Sugerencia: utilizar como variable independiente el radio del semicírculo.
9. Un grupo de amigas decide comprar un regalo que cuesta \$24 000. Si se agregan 4 chicas más, cada una debe pagar \$1 000 menos. ¿Cuántas amigas van a participar ahora del regalo? ¿Cuánto dinero deberá aportar cada una?
10. En un rectángulo de 30 cm de base y 20 cm de altura se construyen distintos cuadriláteros con vértices en los lados del rectángulo anterior de forma que la distancia de cada uno de esos vértices a los vértices del rectángulo mencionado sea la misma, por ejemplo:



Obtener una función cuadrática que permita determinar la menor área que puede tener un cuadrilátero construido como se indica.

GRAFICA DE FUNCIONES CUADRÁTICAS

Para obtener la gráfica de una función cuadrática, cuya expresión general es

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

La podemos obtener mediante el método de tabulación; sin embargo, en la actualidad contamos con un software denominado geogebra, se recomienda, si no se conoce, que acudan a la asesoría de un profesor y se observara que es tan simple como teclear la expresión matemática.

Materiales de apoyo

Se ha considerado que los siguientes recursos complementarán el aprendizaje de las funciones cuadráticas de acuerdo a lo esperado al programa de la asignatura del CCH, proporcionando a los estudiantes diversas herramientas para entender, practicar y aplicar los conceptos aprendidos. El uso combinado de estos materiales permitirá una experiencia de aprendizaje más rica y efectiva, adaptada a las necesidades y estilos de aprendizaje de cada estudiante.

Libros de texto

Descripción: Libros específicos para abordar el plan de estudio de Matemáticas II del CCH.

- **Características:** contenido alineado con el programa de estudios, ejercicios prácticos y ejemplos resueltos.
- **Uso:** lectura y resolución de ejercicios para consolidar el aprendizaje teórico y práctico.

Guías de estudio

Descripción: elaboradas por profesores del CCH o disponibles en la biblioteca digital de la UNAM.

- **Características:** resúmenes de los conceptos clave, ejercicios y problemas adicionales y preguntas de autoevaluación con respuestas.
- **Uso:** revisión y autoevaluación antes de exámenes y para reforzar el aprendizaje autónomo.

Software para graficar

Descripción: Herramientas interactivas que permiten a los estudiantes visualizar y manipular gráficas de funciones cuadráticas.

- **Herramientas recomendadas:**
- **Geogebra.** Software matemático gratuito que combina geometría, álgebra y cálculo.
- **Desmos.** Una plataforma en línea gratuita para graficar ecuaciones.

- **Excel.** Utilizando sus herramientas de graficación para realizar y analizar gráficas de funciones cuadráticas.
- **Uso:** exploración de los efectos de los coeficientes en la forma de la parábola y visualización de conceptos teóricos.

Videos educativos

Descripción: videos que explican los conceptos y métodos relacionados con las funciones cuadráticas, disponibles en plataformas educativas.

- **Plataformas recomendadas:**
- **Khan Academy:** videos que explican paso a paso conceptos y problemas de funciones cuadráticas.
- **You Tube:** canales educativos como UNAM Global, UNAM en Línea o profesores reconocidos.
- **Uso:** refuerzo del material aprendido en clase y revisión de conceptos específicos.

Aplicaciones móviles

Descripción: apps que facilitan el aprendizaje interactivo y la práctica de funciones cuadráticas.

- **Recomendaciones:**
- **Photomath:** permite resolver ecuaciones cuadráticas y visualizar el proceso de solución paso a paso.
- **Graphing Calculator + Math:** aplicación para graficar funciones y resolver problemas matemáticos.
- **Uso:** practicar la resolución de problemas y explorar conceptos en cualquier momento y lugar.

Fichas de trabajo

Descripción: documentos breves que contienen ejercicios, problemas y actividades específicas de funciones cuadráticas.

- **Características:** ejercicios variados con diferentes niveles de dificultad, problemas contextualizados que relacionan las funciones cuadráticas con situaciones reales.
- **Uso:** trabajo individual o en equipos durante las clases o como tarea para reforzar el aprendizaje.

Laboratorios virtuales

Descripción: plataformas en línea que simulan experimentos y situaciones prácticas donde se aplican las funciones cuadráticas.

- **Recomendación:**
- **PhET Interactive Simulations:** simulaciones interactivas de fenómenos físicos y matemáticos.
- **Uso:** comprender aplicaciones prácticas de funciones cuadráticas a través de simulaciones interactivas.

Calculadoras científicas y graficadoras

Descripción: herramientas esenciales para resolver ecuaciones y graficar funciones.

- **Recomendaciones:**
- **Texas Instruments TI-84 Plus**
- **Casio FX-991ES Plus**
- **Uso:** resolver ecuaciones, graficar funciones y realizar cálculos complejos.

Plataformas educativas

Descripción: sitios web que proporcionan recursos adicionales para el aprendizaje

- **Recomendaciones:**

- **Moodle UNAM:** plataforma donde los profesores pueden compartir recursos, tareas y exámenes.
- **Corsera Unam:** cursos en línea que cubren ecuaciones y funciones cuadráticas.
- **Uso:** acceso a recursos adicionales, ejercicios interactivos y materiales complementarios.

Asesorías

Descripción: sesiones adicionales donde los estudiantes pueden recibir ayuda personalizada.

- **Características:** asesorías presenciales o en línea proporcionadas por profesores del CCH a través del PIA para resolver dudas, practicar problemas y recibir retroalimentación.
- **Uso:** reforzar el aprendizaje y aclarar dudas específicas sobre el tema de funciones cuadráticas.

Identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución

La siguiente lista comprende situaciones que se han identificado de manera recurrente durante los cursos de Matemáticas II, concretamente para la Unidad 2 de funciones cuadráticas y sus aplicaciones, así como en la impartición de asesorías a los alumnos a través del PIA. El abordaje de estas situaciones problemáticas efectiva requiere de una combinación de estrategias pedagógicas, uso de tecnología y recursos adicionales. Las propuestas de solución presentadas buscan orientar a los docentes para avanzar en el mejoramiento de la comprensión y el rendimiento de los estudiantes en el tema de funciones cuadráticas, adaptándose a las necesidades y estilos de aprendizaje individuales. Al implementar estas estrategias, los docentes pueden crear un ambiente de aprendizaje más inclusivo y efectivo, con la idea de que los alumnos logren avances en su potencial.

Dificultad para visualizar conceptos abstractos

Descripción: muchos estudiantes tienen problemas para entender y visualizar conceptos abstractos como vértice, eje de simetría, concavidad de una parábola, etc.

- **Propuesta de solución:**

- **Uso de software para graficar:** utilizar herramientas como GeoGebra y Desmos para crear gráficas interactivas que permitan a los estudiantes manipular los coeficientes y observar los cambios en tiempo real.
- **Materiales visuales:** incorporar videos educativos, animaciones y diagramas detallados que expliquen estos conceptos de manera clara y visual.

Falta de comprensión de los coeficientes a , b y c ,

Descripción: los estudiantes a menudo no comprenden cómo los coeficientes a , b y c afectan la gráfica de la función cuadrática.

- **Propuesta de solución:**
- **Actividades de exploración:** implementar actividades donde los estudiantes experimenten cambiando los valores de los coeficientes y observen los efectos en la parábola.
- **Clases interactivas:** realizar sesiones prácticas en el laboratorio de computación donde se usen calculadoras gráficas o software especializado para explorar estos efectos.

Dificultad en la resolución de ecuaciones cuadráticas

Descripción: resolver ecuaciones cuadráticas puede ser desafiante, especialmente cuando se utilizan métodos como la fórmula cuadrática o la factorización.

- **Propuesta de solución:**
- **Enseñanza paso a paso:** desglosar cada método de resolución en pasos simples y proporcionar ejemplos resueltos detalladamente.
- **Práctica guiada:** realizar sesiones donde los estudiantes resuelvan ecuaciones con la ayuda del profesor, seguido de ejercicios independientes.

Problemas de aplicación de funciones cuadráticas a situaciones reales

Descripción: los estudiantes a menudo tienen dificultades para aplicar funciones cuadráticas a problemas del mundo real y para interpretar los resultados.

- **Propuesta de solución:**

- **Proyectos de aplicación:** asignar proyectos donde los estudiantes deben identificar y resolver problemas utilizando funciones cuadráticas, como la optimización de áreas o la modelización de trayectorias de proyectiles.
- **Estudios de caso:** presentar estudios de caso que muestren cómo se aplican las funciones cuadráticas en diversas disciplinas como la física, la economía y la ingeniería.

Falta de práctica suficiente

Descripción: los estudiantes no cuentan con la práctica suficiente para dominar los conceptos y técnicas asociados con las funciones cuadráticas.

- **Propuesta de solución:**
- **Fichas de trabajo y ejercicios adicionales:** proveer fichas de trabajo con una variedad de ejercicios que cubran todos los aspectos de las funciones cuadráticas.
- **Plataformas en línea:** utilizar plataformas como Khan Academy y Moodle para asignar tareas adicionales y pruebas formativas que permitan a los estudiantes practicar más.

Ansiedad matemática y falta de confianza

Descripción: la ansiedad matemática y la falta de confianza en sus habilidades pueden impedir que los estudiantes participen activamente y comprendan los materiales.

- **Propuesta de solución:**
- **Ambiente de apoyo:** crear un ambiente de aprendizaje positivo y de apoyo donde los estudiantes se sientan cómodos haciendo preguntas e incluso cometiendo errores para aprender también de éstos.
- **Asesorías:** ofrecer sesiones de asesoría individualizada para ayudar a los estudiantes a superar sus dificultades e incrementar su confianza.

Desconexión entre la teoría y la práctica

Descripción: los estudiantes con frecuencia no ven la conexión entre la teoría matemática y su aplicación práctica, lo que reduce su interés y comprensión.

- **Propuesta de solución:**
- **Integración de proyectos interdisciplinarios:** diseñar proyectos que integren las funciones cuadráticas con otras materias, como la física o economía, mostrando su relevancia práctica.
- **Invitación de profesionales:** invitar a profesionales que utilicen funciones cuadráticas en su trabajo para que hablen con los estudiantes sobre cómo aplican estos conceptos en sus carreras.

Heterogeneidad en el nivel de conocimiento

Descripción: en una misma clase puede haber estudiantes con diferentes niveles de comprensión y habilidades matemáticas.

- **Propuesta de solución:**
- **Enseñanza diferenciada:** implementar estrategias de enseñanza diferenciada adaptando las actividades y el ritmo de la clase para atender a los diferentes niveles de conocimiento.
- **Grupos de estudio:** formar grupos de estudio donde los estudiantes más avanzados puedan ayudar a aquellos que tienen dificultades, fomentando el aprendizaje colaborativo.

Bibliografía

La siguiente bibliografía proporciona una variedad de recursos que abordan las funciones cuadráticas desde diferentes perspectivas y niveles de profundidad, permitiendo a los estudiantes y profesores del Colegio de Ciencias y Humanidades, explorar esta temática de manera exhaustiva. Desde libros de texto y manuales, hasta recursos en línea y plataformas educativas interactivas, esta selección cubre todos los aspectos necesarios para un entendimiento completo de las funciones cuadráticas.

1. Blitzer, R. (2017). *Precálculo: Matemáticas para Cálculo*. Pearson.

- Este libro ofrece una sólida introducción a las funciones cuadráticas dentro del contexto más amplio del precálculo, con numerosos ejemplos y ejercicios prácticos.
2. Demana, F., Waits, B., Foley, G., & Kennedy, D. (2015). *Precálculo: gráfico, numérico y algebraico*. Pearson.
- Proporciona una visión detallada y accesible de las funciones cuadráticas, incluyendo su representación gráfica y aplicaciones prácticas.
3. Larson, R., & Edwards, B. H. (2018). *Precálculo con Límites: Un enfoque gráfico*. Cengage Learning.
- Su enfoque gráfico para el estudio de las funciones es ideal para estudiantes que se benefician de representaciones visuales y contextos aplicados.
4. Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2016). *Precálculo: Matemáticas para Cálculo*. Brooks Cole.
- Ofrece una cobertura extensa y profunda de las funciones cuadráticas, con énfasis en su análisis algebraico y gráfico.
5. Sullivan, M. (2019). *Precálculo: Conceptos a través de funciones, un enfoque de círculo unitario para la Trigonometría*. Pearson.
- Enfoca el estudio de las funciones cuadráticas a través de conceptos y aplicaciones, con una metodología que facilita la comprensión a nivel de bachillerato.
6. Khan Academy. (n.d.). Funciones y ecuaciones cuadráticas. Recuperado de <https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:quadratic-functions-equations>
- Una plataforma educativa gratuita que proporciona lecciones, videos y ejercicios interactivos sobre funciones cuadráticas.
7. Swokowski, E. W., & Cole, J. A. (2019). *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. Cengage Learning.

- Cubre las funciones cuadráticas de manera exhaustiva, con una combinación de teoría, ejercicios y aplicaciones.

8. Zumdahl, S. S., & DeCoste, D. J. (2018). *Algebra*. Houghton Mifflin Hatcourt.

- Proporciona una introducción clara y concisa de funciones cuadráticas adecuadas para estudiantes de bachillerato.

9. Ratti, J. S., & McWaters, M. (2018). *Precálculo: un enfoque de triángulo rectángulo*. Pearson.

- Este texto aborda las funciones cuadráticas desde una perspectiva de precálculo, utilizando un enfoque basado en triángulos rectángulos.

SEGUNDO SEMESTRE DE MATEMÁTICAS

Algebra y Geometría Euclidiana

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Estableceremos los lineamientos generales para las unidades de Geometría, esto es, las unidades 3 y 4 del programa de Matemáticas II, a saber:

UNIDAD III. Elementos básicos de Geometría plana

Al finalizar el alumno. Comprenderá algunos conceptos y relaciones geométricas, obtenidos empíricamente a través de construcciones con regla y compás. Aplicará los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas geométricos.

UNIDAD IV. Congruencia Semejanza y Teorema de Pitágoras

Al finalizar, el alumno: Aplicará los conceptos de congruencia y semejanza y usará el Teorema de Pitágoras en la resolución de problemas que involucren triángulos. Argumentará deductivamente sobre la validez de algunas afirmaciones geométricas y procesos en la resolución de problemas.

Presentación para las unidades 3 y 4 indicando los conceptos claves

Consideramos que el tema de estas unidades es fundamental para el estudiante de bachillerato, le permite al alumno comprender los conceptos de la Geometría Euclidiana, que las figuras tienen un comportamiento bien estructurado y ayuda, por ejemplo, en la construcción de muebles, obras de construcción como son los edificios, barcos, autos, entre otros.

Podemos considerar los conceptos claves desde las definiciones como Punto, Recta, Triángulo, Semejanza, Congruencia, Perímetros y Áreas, Euclides, Pitágoras, Perímetro, Teorema, Pitágoras, Thales, Área, Proceso Deductivo.

Los aprendizajes correspondientes para estas unidades son:

Para la Unidad 3. Elementos básicos de Geometría Plana

Aprendizajes. Comprenderá algunos conceptos y relaciones geométricas, obtenidos empíricamente a través de construcciones con regla y compás. Aplicará los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas geométricos.

- Conoce el origen de la Geometría Euclidiana y su sistematización.
- Describe y reconoce los elementos básicos de una figura geométrica, los expresa en forma verbal y escrita.
- Comprende mediante la construcción, los conceptos: segmento de recta, punto medio, líneas paralelas, líneas perpendiculares, mediatriz, ángulo y bisectriz.
- Clasifica los ángulos por su medida y su relación con otros.
- Conoce e identifica los tipos de ángulos que se forman entre dos rectas cortadas por una transversal.

- Concluye que en el caso que dos rectas paralelas sean cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes e inversamente.
- Aplica los conceptos anteriores en la resolución de problemas
- Clasifica los triángulos según sus lados y ángulos
- Explica en qué casos es posible construir un triángulo, a partir de tres segmentos dados.
- Muestra y justifica las propiedades entre los ángulos de un triángulo.
- Aplica las propiedades de los ángulos de un triángulo en la resolución de problemas.
- Distingue las características que determinan a las rectas y puntos notables en un triángulo.
- Determina geoméricamente la distancia de un punto a una recta.
- Justifica y aplica las propiedades del triángulo isósceles.
- Describe los polígonos por sus características (regulares e irregulares).
- Conoce y aplica las propiedades de los polígonos.
- Calcula el perímetro y área de un polígono regular.
- Calcula el área de un polígono irregular por triangulación.
- Identifica las líneas notables de la circunferencia.
- Localiza el centro de una circunferencia.
- Aproxima el perímetro y área del círculo.
- Utiliza los conocimientos adquiridos, en la resolución de problemas.

Sugerencias de estrategias didácticas para Geometría

La estrategia fundamental consiste en partir de los elementos más simples tales como punto y recta y a partir de ahí ir generando figuras más elaboradas, las cuales permitirán ir estructurando figuras hasta muy complejas, y comprendiendo la matemática de cada una de ellas.

Actividades de enseñanza aprendizaje

Como lo muestra el programa es importante el tratamiento de las figuras más elementales utilizando puntos y rectas, generando triángulos y los diferentes tipos que se pueden trabajar, en este caso con figuras rectilíneas. Las propiedades que se cumplen en los triángulos Darle la mayor de la importancia a los conceptos, a este nivel básico de Semejanza y Congruencia. Es importante mostrar al alumno que existen otro tipo de figuras como el círculo, la esfera, entre otros.

Materiales de apoyo. Notas del grupo 401C

Identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución

Fuentes consultadas en formato APA

Unidad 3

Elementos básicos de Geometría plana

Unidad 3. GEOMETRÍA EUCLIDIANA

- ✓ **Aprendizaje.** Describe y reconoce los elementos básicos de una figura geométrica, los expresa en forma verbal y escrita.

El objeto de estudio de la geometría Euclideana son los cuerpos y figuras geométricas, estudiando sus relaciones mutuas desde el punto de vista de su forma, tamaño y posición, empleando el razonamiento lógico para obtener nuevos resultados.

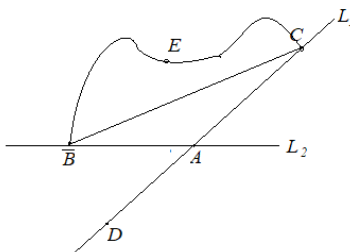
Los “Elementos” de Euclides ofrecen un tratamiento de la geometría plana y del espacio, a partir de un pequeño grupo de suposiciones y postulados iniciales, con los cuales se deducen lógicamente los demás resultados. De hecho es el intento más antiguo de aplicación del llamado método axiomático que consiste en:

- i) Se dan explicaciones sobre ciertos términos básicos: Punto, línea, plano, con intención de sugerir lo que significan.
- ii) Algunos principios o proposiciones relativos a los términos básicos se enuncian y se suponen verdaderos con base en las propiedades sugeridas por las primeras explicaciones. Estos principios se llaman Axiomas o Postulados.
- iii) Todos los demás términos se definen a partir de los términos básicos.
- iv) Los demás principios o proposiciones se demuestran lógicamente a partir de los axiomas o postulados iniciales. A las proposiciones que se demuestran se le llaman teoremas.

Entre los términos básicos que establece Euclides, se tienen las definiciones básicas, a saber:

1. **Punto** es aquello que no tiene partes.
2. **Línea** es una longitud sin ancho. Los extremos de una línea son puntos.
4. **Línea recta** es aquella que yace igualmente respecto de sus puntos.
5. **Segmento de recta.** Línea recta limitada por dos extremos
6. **Superficie** es aquella que tiene tanto largo como ancho. Los extremos de una superficie son líneas.

Ejercicio 3.1 En la siguiente figura identificar los puntos, las líneas, las líneas rectas, los segmentos de recta, los puntos colineales.



Enunciados fundamentales

Proposición. Se llama proposición al enunciado de un hecho, como una ley o un principio, o el enunciado de una cuestión por resolver.

Hay ciertas clases de proposiciones que se emplean a menudo en matemáticas, y a las cuales se han dado nombres especiales, a saber: el axioma, el postulado, el teorema, el problema y el corolario.

Axioma o Noción común. Se llama axioma a una proposición que, siendo evidente, no requiere demostración.

Por ejemplo:

- La parte es menor que el todo
- Si a cantidades iguales se agregan o se quitan cantidades iguales los resultados serán iguales.

Postulado. Se denomina postulado una proposición cuya verdad, no tenga la evidencia de un axioma, se admite sin demostración.

Regularmente es difícil distinguir entre un postulado y un axioma. Tanto el uno como el otro es una suposición que se hace, algo que se dan, por cierto. Toda la ciencia matemática se fundamenta en algunas proposiciones de este tipo. Las que son peculiares a la geometría se llaman generalmente postulados.

Euclides establece Nociones comunes o axiomas. Válidas para todas las ciencias y disciplinas, a saber:

1. *Dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí.*
2. *Si a cantidades iguales se suman cantidades iguales, los resultados son iguales.*
3. *Si a cantidades iguales se restan cantidades iguales, las diferencias son iguales.*
4. *Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.*
5. *El todo es mayor que cualquiera de sus partes.*

Y sus 5 Postulados para la Geometría

1. Es posible trazar una línea recta entre dos puntos distintos.
2. Todo segmento de recta puede extenderse indefinidamente en ambos sentidos.
3. Hay una sola circunferencia con un centro y un radio dado.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si una recta secante (transversal) corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores cuya suma es menor que dos rectos, entonces las rectas suficientemente alargadas, se cortarán del mismo lado.

Los siguientes enunciados permiten tener una conceptualización de términos utilizados en la Geometría.

Teorema. Se conoce como teorema a una proposición que requiere demostración.

Problema. Se llama problema a una cuestión que se propone para resolverse. En geometría los problemas más comunes son aquellos en que se piden construcciones que llenen requisitos dados.

Corolario. Se llama corolario a una proposición que es consecuencia inmediata de otra, y cuya demostración requiere poco o ningún razonamiento nuevo.

Otros axiomas Importantes de las Matemáticas

1) Si cantidades iguales se multiplican o dividen por cantidades iguales, los resultados son iguales. La división no puede ser entre cero.

2) Si cantidades iguales se elevan a una misma potencia, o si a ambas se les extrae una misma raíz, los resultados son iguales.

Cuando este axioma se aplica a la extracción de raíces; se requiere tomar éstas con un mismo signo pues una raíz puede tener más de un resultado.

3) Si en los dos miembros de una desigualdad se ejecuta una misma operación con un número positivo, el sentido de la desigualdad no se altera.

Si, por ejemplo, $a > b$, y x e y son cantidades positivas iguales, tenemos:

$$a + x > b + y, \quad a - x < b - y, \quad ax > by, \quad \frac{a}{x} > \frac{b}{y}$$

4) Si se suman dos desigualdades de un mismo sentido, los resultados son desiguales en el mismo sentido. en el 11úsmo sentido.

Si, por ejemplo, $a > b$, $c > d$, se tiene también: $a + c > b + d$.

5) Si los dos miembros de una desigualdad se restan de los dos miembros de una igualdad, los resultados son desiguales en sentido opuesto a la de la desigualdad dada.

Si $a > b$ y $x = y$, entonces $x - a < y - b$.

6) Toda cantidad puede reemplazarse con su igual.

7) Si una cantidad es mayor que otra, y ésta mayor que una tercera, la primera es mayor que la tercera. Si $a > b$ y $b > c$, se tiene también $a > c$.

Otros Postulados Importantes

I) El camino más corto entre dos puntos es la recta que los une.

II) Toda figura puede hacerse cambiar de posición sin alterar su forma ni sus dimensiones.

III) Todos los ángulos de lados colineales son iguales.

COROLARIO 1. Dos puntos determinan una recta.

COROLARIO 2. Dos rectas no pueden cortarse en más de un punto.

Pero si tuvieran dos o más, puntos comunes coincidirían (postulado I).

COROLARIO 4. En un punto cualquiera de una recta puede levantarse una perpendicular a esa recta, y sólo una.

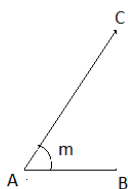
En efecto, si en el punto O pudiesen levantarse dos perpendiculares OC y OB a DA, los ángulos $\angle AOB$ y $\angle AOC$ serían rectos y por tanto iguales, lo cual es imposible.

DEFINICIONES

Ángulo. Se nombra ángulo a la abertura entre dos rectas que se encuentran.

Las dos rectas se denominan lados del ángulo, y el punto donde se encuentran, vértice del ángulo.

Notación de ángulo. En este documento denotaremos ángulo con cualquiera de las siguientes formas:



Notación: Una de las siguientes formas, y mantener la misma en un determinado proceso.

- a) Con una letra (m), en donde se localiza el ángulo.
- b) Con el símbolo \angle seguido de la letra del vértice $\angle A$
- c) Con el símbolo \angle seguido de las letras que determinan los lados del ángulo $\angle BAC$, la letra correspondiente al medio, será la del vértice correspondiente.

Clasificación de ángulos por su medida (agudo, recto, obtuso, llano).

Ángulo agudo. Se denomina ángulo agudo al ángulo cuya medida es menor que un ángulo recto.

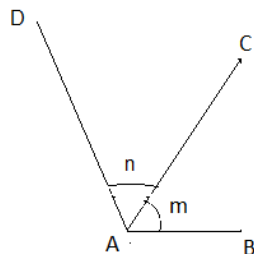
Ángulo recto. Cuando una recta cae sobre otra recta y forma ángulos adyacentes iguales, éstos se llaman ángulos rectos.

Ángulo Obtuso. Se denomina ángulo obtuso al ángulo que es mayor que un ángulo recto y menor a dos ángulos rectos.

Ángulo llano o colineal. Se llama ángulo llano al ángulo de lados colineales, esto es se forma, cuando los lados del ángulo son la prolongación uno del otro.

Clasificación por su relación con otros ángulos (adyacentes, suplementarios, complementarios, opuestos por el vértice).

Ángulos adyacentes. Se nombran ángulos adyacentes a dos ángulos que están uno seguido del otro, tienen un lado en común.

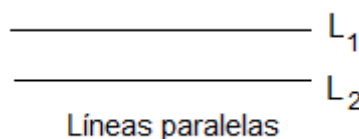
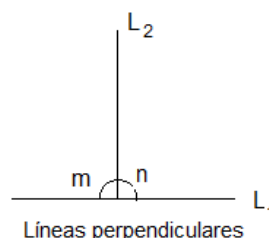


Líneas rectas perpendiculares. Se dice que dos líneas rectas son perpendiculares, cuando una cae sobre la otra y forma ángulos adyacentes iguales.

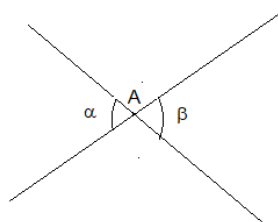
Los ángulos adyacentes forman un ángulo colineal. A cada ángulo igual, se le llama un *ángulo recto*. **Notación** $L_2 \perp L_1$

Líneas rectas paralelas. Se dice que dos rectas son paralelas, si al prolongarlas hacia ambos lados, nunca se cortan.

Notación $L_2 \parallel L_1$



Ángulos opuestos por el vértice. Se denominan ángulos opuestos por el vértice a los ángulos que están al lado de un vértice y que no son adyacentes.



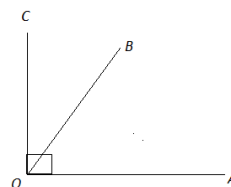
Perígono. Se llama *perígono* el total de los ángulos que pueden engendrarse en un plano por la rotación completa de una recta alrededor de un punto dado; es decir, haciendo girar la recta hasta traerla otra vez, a su posición original.

Es evidente que un perígono es igual a dos ángulos colineales, y también a cuatro ángulos rectos.

Ángulos complementarios, suplementarios, conjugados.

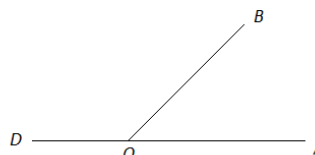
Dos ángulos son *complementarios*, y cada uno es el complemento del otro, cuando su suma es un ángulo recto.

$\angle AOB$ complemento de $\angle BOC$



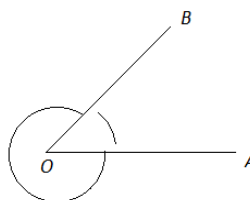
Dos ángulos son *suplementarios*, y cada uno es el suplemento del otro, cuando su suma son dos ángulos rectos.

$\angle AOB$ suplemento de $\angle BOD$



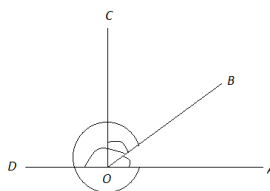
Dos ángulos son *conjugados*, y cada uno es conjugado del otro, cuando su suma es igual a un perígono

$\angle AOB$ conjugado de $\angle BOC$



A partir de las definiciones podemos establecer lo siguiente:

1. *Ángulos iguales tienen complementos iguales, suplementos iguales y conjugados iguales.*
2. *Un ángulo mayor que otro tiene menor complemento, suplemento y conjugado que ese otro.*
3. *Un ángulo mayor que otro tiene menor complemento, suplemento y conjugado que ese otro.*



así el complemento del $\angle AOB$ es el ángulo $\angle BOC$; su suplemento es el ángulo $\angle BOD$; el conjugado el ángulo entrante $\angle BOA$

Propiedades de los ángulos suplementarios. Las siguientes proposiciones son evidentes .

La suma de los dos ángulos adyacentes que una recta forma con otra es igual a dos rectos.

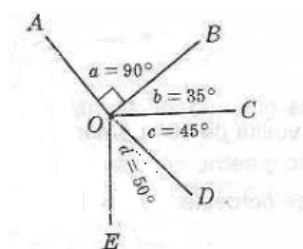
Si la suma de dos ángulos adyacentes es de dos ángulos rectos, los lados no comunes están en línea recta.

Medida de los ángulos. La unidad de medida para los ángulos es $\frac{1}{360}$ de un perígono, y se llama grado.

Cada grado ($^{\circ}$) se divide en 60 minutos ($60'$), y cada minuto se divide en sesenta segundos ($60''$)

Podemos observar que un ángulo recto mide 90° ; uno de lados colineales 180° y un perígono 360°

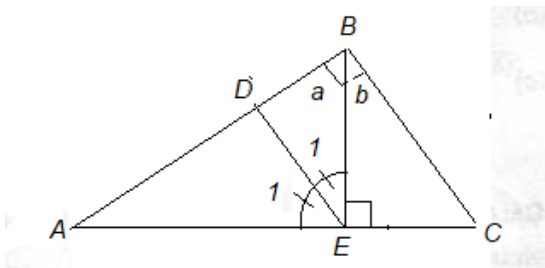
Ejercicio 3.2 Escribir la medida de los ángulos $\angle AOC$, $\angle BOE$ y $\angle AOE$ en la siguiente figura



Solución

$$\begin{aligned}\angle AOC &= 125^{\circ} \\ \angle BOE &= 130^{\circ} \\ \angle AOE &= 140^{\circ}\end{aligned}$$

Ejercicio 3.3 En la figura a) identificar dos pares de segmentos perpendiculares, b) calcular el valor del $\angle a$, si $\angle b = 42^{\circ}$ c) ¿Cuál es el valor de los ángulos $\angle AEB$ y $\angle CED$?



Solución

- a) $AB \perp BE$ $BE \perp AC$
b) $\angle a = 48^{\circ}$
c) $\angle AEB = 90^{\circ}$ y $\angle CED = 135^{\circ}$

Ángulos opuestos por el vértice. Dos ángulos son opuestos por el vértice cuando los lados de uno son la prolongación de los del otro.

Ángulos iguales tienen complementos iguales, suplementos iguales y conjugados iguales.

Ejercicio 3.4 En la siguiente figura identifica los ángulos agudos, los ángulos obtusos, los ángulos rectos, la suma de los ángulos que forman un ángulo perigonal, los ángulos que sean suplementarios, los ángulos complementarios, los ángulos conjugados y los que sean opuestos por el vértice.

C.2 En un punto dado P de una recta dada, construir una recta perpendicular a la recta.

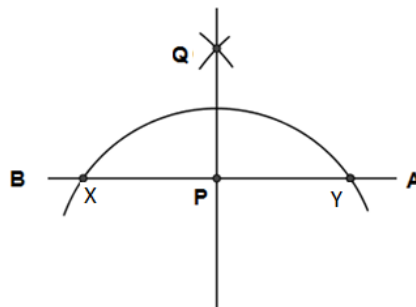
En la recta dada AB y el punto indicado P, vamos a construir una recta perpendicular

Haciendo centro en P, y con cualquier radio, describir arcos que corten al segmento AB. Indiquemos con X e Y a dichos puntos.

Con centro en X y radio XY marcar un arco, y con centro en Y, y con el mismo radio XY, trazar otro arco que corte al ya trazado.

Donde se intersectan los arcos, lo indicaremos con la letra Q.

Finalmente trazamos la recta que va del punto P al punto Q, dicha recta es la perpendicular pedida.



C.3 De un punto dado fuera de una recta dada, construir una recta perpendicular a la recta,

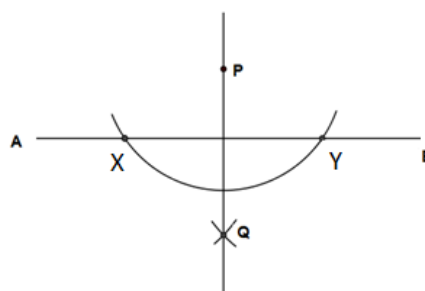
Sobre la recta dada AB y desde el punto indicado P, fuera de la recta, vamos a construir una recta perpendicular.

Con centro en el punto P y radio conveniente, marcamos un arco que corte a la recta AB, nombramos X, Y a los puntos de intersección.

Ahora con centro en X y radio cualquiera, describir un arco y con centro en Y e idéntico radio describamos otro arco, como se muestra.

Marcamos el punto de intersección de los arcos, lo nombramos Q.

Finalmente trazamos la recta PQ, la cual es perpendicular a la recta AB.



C.4 Construcción de la mediatriz de un segmento

Consideremos el segmento AB , queremos construir la mediatriz del segmento.

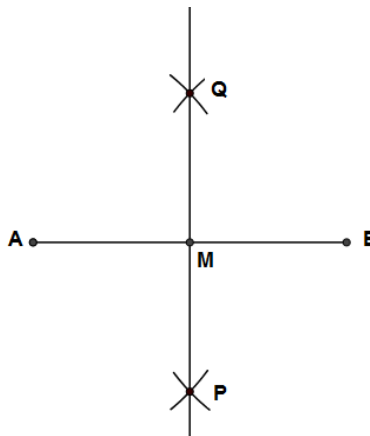
Mediatriz. Recta perpendicular a un segmento en su punto medio M .

Con centro en el extremo A y radio AB , trazamos la circunferencia 1.

Ahora, con centro en el extremo B y radio AB se traza la circunferencia 2, de preferencia los trazos con línea punteada.

Marcamos los puntos de intersección de las circunferencias y los nombramos P y Q . Trazamos la recta PQ .

Esta recta corresponde a la **MEDIATRIZ** del segmento



C.5 Construir un ángulo que tenga la misma medida que un ángulo conocido (de vértice V), sobre una recta dada y un punto de ella P como el vértice del ángulo a construir.

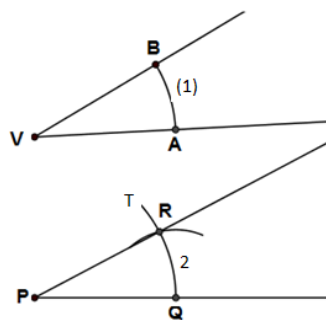
Con centro en el vértice V , y un radio cualquiera, menor al lado menor de los lados del ángulo $\angle AVB$ trazamos un arco de circunferencia (1) que intersecte a ambos lados del ángulo dado.

Nombremos a los puntos de intersección A y B .

Ahora con centro en el punto P y el mismo radio del arco de circunferencia (1) trazamos un arco de circunferencia (2), que corte a la recta dada en el punto Q .

Nombremos al arco QT . Hacer centro en Q y con un radio igual a la cuerda AB , trazar un arco de circunferencia que intersecte al arco QT .

Nombremos al punto de intersección R , trazamos el segmento de recta PR , el $\angle AOB$ es igual al $\angle QPR$.



C.6 Construcción de la bisectriz de un ángulo

Bisectriz. Recta o segmento de recta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales.

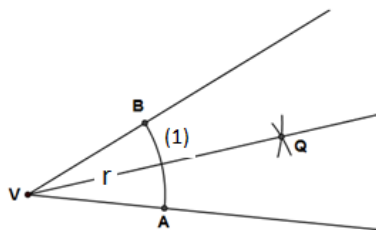
Consideremos el ángulo r mostrado en la figura, los lados del ángulo son los segmentos VA y VB.

Con centro en el punto V y un radio menor a la longitud del segmento menor, trazamos el arco de circunferencia 1 que intersecte a los lados del ángulo.

A los puntos de intersección les llamamos A y B.

Con centro en A y cualquier radio trazamos un arco de circunferencia, y con centro en B e igual radio trazamos otro arco de circunferencia.

El punto donde se intersectan los arcos hacia el interior del ángulo, lo identificamos con Q, trazamos la recta que pase por VQ, éste corresponde a la bisectriz del ángulo.



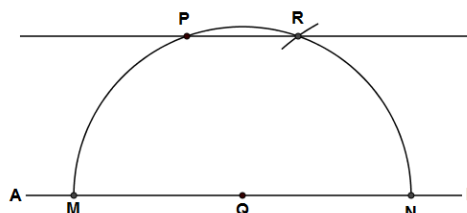
C.7 Construcción de una recta paralela a otra que pasa por un punto dado

Con centro en un punto Q de la recta dada AB y radio QP se traza la semicircunferencia que corta a la recta en los puntos M y N.

Con el compás tomamos la medida del segmento MP.

Con centro en N y radio MP, construimos un arco que corte a la semicircunferencia en el punto R.

Uniendo los puntos P y R se tiene la recta paralela.



Ejercicio 3.6 El alumno debe reproducir las construcciones anteriores

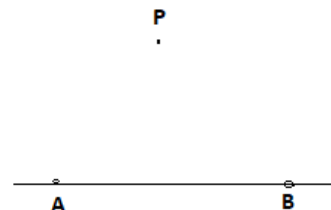
Ejercicio 3.7 Realizar los trazos de la siguiente construcción. Y Justificar que la recta CD construida en el punto P es paralela a la recta AB dada.

Consideremos la recta que pasa por los puntos A y B y sea P un punto dado fuera de la recta;

Trazamos la recta cualquiera que pase por P y que intersecte a la recta dada, nombramos a dicha recta XPY .

Nombramos al punto de intersección de la recta XY con la recta AB , O , y construimos en el punto P un ángulo igual al ángulo $\angle BOX$, (ver construcción C.5).

La recta CD construida es paralela a la recta dada AB .



- ✓ **Aprendizajes.**
- ✓ Conoce e identifica los tipos de ángulos que se forman entre dos rectas cortadas por una transversal.
- ✓ Concluye que en el caso que dos rectas paralelas sean cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes e inversamente

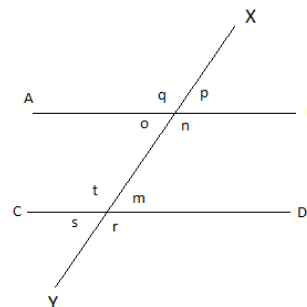
Ángulos alternos internos, alternos externos, correspondientes

En la figura anexa, consideremos que las rectas AB y la recta CD son rectas paralelas, si la recta transversal XY intersecta a ambas rectas, se forman los ángulos m, n, o, p, q, r, s, t . que de acuerdo a su posición, se definen de la siguiente manera:

Correspondientes: Son los pares de ángulos que están del mismo lado de las paralelas y del mismo lado de la transversal, esto es el ángulo q y el ángulo t están del lado izquierdo de la transversal y por encima de las rectas paralelas, siguiendo el mismo criterio, otros pares que son ángulos correspondientes son; el ángulo o y el ángulo s ; el ángulo p y el ángulo m y el ángulo n y el ángulo r .

Alternos internos: Son los pares de ángulos que están entre las rectas paralelas y a diferente lado de la transversal, esto es; los ángulos o y m están entre las rectas paralelas y en diferente lado de la recta transversal, los ángulos n y t cumplen con esta condición.

Alternos externos: Son los pares de ángulos que están fuera de las rectas paralelas y a diferente lado de la transversal, esto es; los ángulos q y r están fuera las rectas paralelas y en diferente lado de la recta transversal, los ángulos n y t cumplen con esta condición.

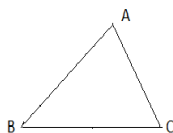


- ✓ **Aprendizaje.** Clasifica los triángulos según sus lados y ángulos.

Clasificación de los triángulos por sus lados (equilátero, isósceles, escaleno) y por sus ángulos (acutángulo, rectángulo, obtusángulo)

Triángulo. Figura plana de tres lados rectos

Notación. Representaremos a un triángulo de la siguiente manera: $\triangle ABC$



Clasificación de triángulos por sus lados

Triángulo equilátero. Se dice que un triángulo es equilátero, si tiene sus tres lados iguales.
FIGURA A

Triángulo isósceles. Se dice que un triángulo es isósceles, si tiene dos de sus lados iguales. FIGURA B

Triángulo escaleno. Se dice que un triángulo es escaleno, si sus tres lados son desiguales.
FIGURA C

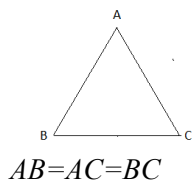


Figura A

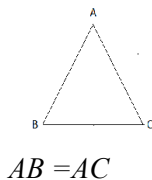


Figura B

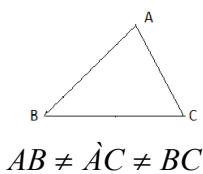


Figura C

Clasificación de triángulos por sus ángulos

Triángulo acutángulo. Se dice que un triángulo es acutángulo, si tiene sus tres ángulos iguales.

Triángulo rectángulo. Se dice que un triángulo es rectángulo, si tiene un ángulo recto.

Triángulo obtusángulo. Se dice que un triángulo es obtusángulo, si tiene un ángulo obtuso.

Ejercicio 3.8. En la figura A, identificar a) el ángulo obtuso, y b) los triángulos rectángulos.

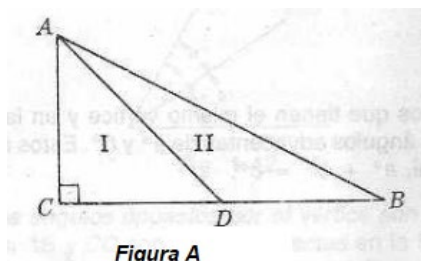


Figura A

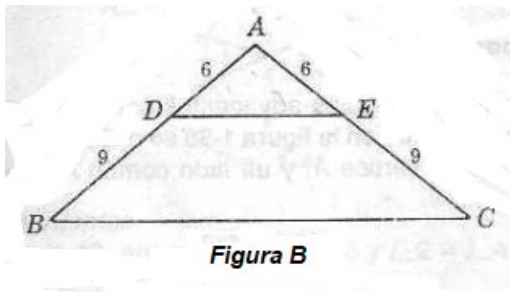
Solución.

Ángulo obtuso $\angle BDA$

Triángulos rectángulos

$\triangle ACD$ y $\triangle ACB$

Ejercicio 3.9 En la figura B, a) identificar los triángulos isósceles y los lados congruentes de cada uno, b) el lado no congruente y el ángulo opuesto a cada uno de ellos.



Solución

- a) Triángulos isósceles $\triangle ADE$ y $\triangle ABC$
Lados congruentes. En $\triangle ADE$ AD y AE y en $\triangle ABC$, AB y AC
- b) Lado no congruente en $\triangle ADE$, es DE el ángulo opuesto es $\angle DAE$ y lado no congruente en $\triangle ABC$, es BC . El ángulo opuesto es $\angle BAC$

✓ **Aprendizaje.** Explica en qué casos es posible construir un triángulo, a partir de tres segmentos dados.

Desigualdad del triángulo

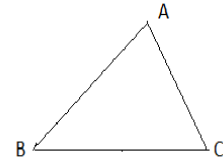
Teorema 3.1. La suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercer lado; y la diferencia menor.

Por demostrar $BC + CA > BA$

$BC + CA > BA$ porque el camino más corto entre dos puntos B y A es la recta que los une. Demostrado

De la desigualdad anterior $CA > BA - BC$

Por lo tanto $BA - BC < CA$. Demostrada la segunda parte.



Ejercicio 3.10. En cuáles de los siguientes casos, es posible construir un triángulo

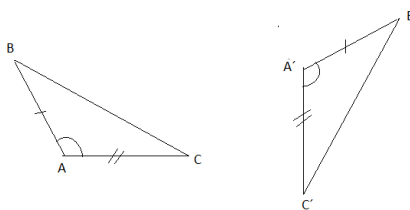
- Un triángulo cuyos lados midan 3, 8 y 11 unidades
- Un triángulo cuyos lados midan 3, 5 y 4 unidades
- Un triángulo cuyos lados midan 10, 5 y 7 unidades

Triángulos congruentes. Se dice que dos triángulos son congruentes si al superponer uno sobre el otro, coinciden en todas sus partes.

Principios de congruencia

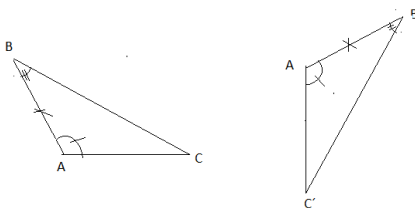
Criterio L. A. L.: Dos triángulos son congruentes si tienen iguales dos de sus lados respectivos y el ángulo comprendido entre ellos.

$$AB = A'B'; \quad AC = A'C' \quad \text{y} \quad \angle A = \angle A'$$



Criterio A. L. A.: Dos triángulos son congruentes si tienen iguales dos de sus ángulos respectivos y el lado entre ellos.

$$\angle A = \angle A' \quad AC = A'C' \quad \text{y} \quad \angle B = \angle B'$$



Proposiciones de Euclides referentes a propiedades de ángulos y triángulos

✓ **Aprendizaje.** Muestra y justifica las propiedades entre los ángulos de un triángulo:

Teorema 3.2. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180° (dos ángulos rectos).

Demostración

Se quiere demostrar que

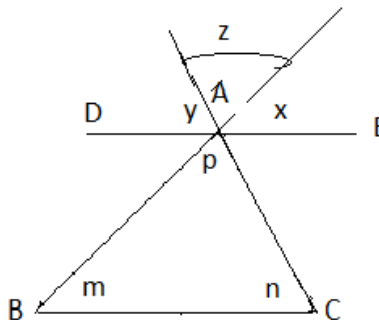
$$m + n + p = 180^\circ = 2 \angle \text{'s rectos}$$

Inicialmente trazamos la recta que pasa por los puntos D y E y que es paralela al lado BC del triángulo.

Prolongamos los segmentos de recta BA y CA. Observamos que se forman los ángulos x, y y z.

Utilizamos lo demostrado para ángulos entre rectas paralelas.

El ángulo n es igual al ángulo y por ser correspondientes; el ángulo x es correspondiente con el ángulo m por lo tanto son iguales y los ángulos p y z son opuestos por el vértice.



Por otra parte, los ángulos x , y y z forman un ángulo llano, por lo tanto $x + y + z = 180^\circ = 2\text{'s rectos}$, de donde, sustituyendo $x = m$, $y = n$ y $z = p$, obtenemos lo que queríamos demostrar $m + n + p = 180^\circ = 2\text{'s rectos}$

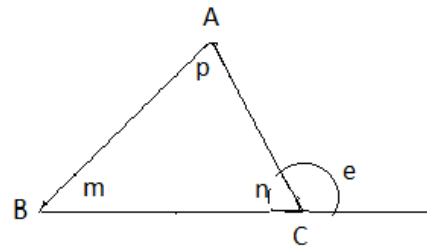
Corolario. La suma de dos ángulos interiores de un triángulo es igual al ángulo exterior no adyacente.

Demostración. Se quiere demostrar que el ángulo exterior e es igual a la suma de los ángulos interiores del triángulo no adyacentes. Esto es $m + p = e$

De acuerdo al teorema 3.2, la suma de los ángulos interiores del triángulo es 180° , esto es $m + n + p = 180^\circ = 2\text{'s rectos}$.

Observamos que los ángulos n y e , son dos ángulos que forman un ángulo colineal, esto es su suma es 180° , esto es: $n + e = 180^\circ = 2\text{'s rectos}$.

Igualando las expresiones que son iguales a dos ángulos rectos, se tiene $m + n + p = n + e$, de donde se obtiene $m + p = e$, que es lo que queríamos demostrar

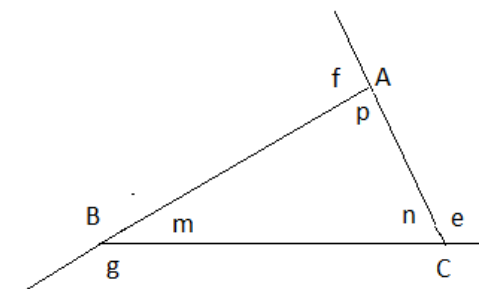


Corolario. La suma de los ángulos exteriores es igual a 360° .

Demostración. Se quiere demostrar que la suma de los ángulos exteriores es igual a 360° , esto es, $e + f + g = 360^\circ$.

De la demostración del teorema 1, se tiene que los ángulos externos son igual a la suma de los ángulos interiores del triángulo no adyacentes, por lo tanto:

$$\left. \begin{aligned} e &= m + p \\ f &= m + n \\ g &= p + n \end{aligned} \right\}$$

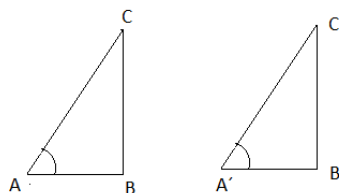


<p>de donde, si sumamos $e + f + g$, obtenemos $e + f + g = m + p + m + n + p + n$</p> <p>de donde: $e + f + g = 2m + 2p + 2n$</p> <p>factorizando, se obtiene $e + f + g = 2(m + p + n)$, y como,</p> <p>$m + n + p = 180^\circ = 2\text{ } \sphericalangle \text{'s rectos}$</p> <p>entonces $e + f + g = 2(180^\circ) = 360^\circ$. Que es lo que queríamos demostrar.</p>	
---	--

Ejercicio 3.11 Si uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es de 37° , ¿cuál es el valor del otro ángulo agudo?

Ejercicio 3.12 Uno de los ángulos de un triángulo es el doble del otro y el triple del tercero. Hállense los tres ángulos.

Teorema 3.3. Dos triángulos rectángulos son iguales si tienen iguales respectivamente la hipotenusa y uno de los ángulos adyacentes a ella.



Demostración. Las hipotenusas son iguales, esto es $AC = A'C'$ y el $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$.

Queremos demostrar que $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ y el

Superponer el $\triangle ABC$ sobre el $\triangle A'B'C'$ (colocar uno encima del otro), de tal manera que el vértice A coincida con el vértice A' y el lado AC tome la dirección de A'C'. Al hacerlo, el vértice C coincidirá sobre el vértice C' (recordar que $AC = A'C'$), también AB tomará la dirección de A'B' (recordar que $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$). Como los puntos C y C' coinciden, y como $\sphericalangle B = \sphericalangle B' = \text{recto}$, entonces CB coincidirá con C'B', ya que, desde un punto exterior, sólo puede bajarse a esa recta una misma perpendicular, por lo tanto $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$

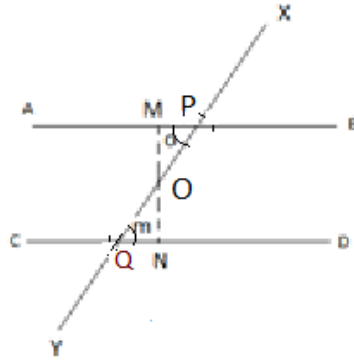
Ejercicio 3.13 Realizar las siguientes construcciones

- Construir un triángulo isósceles dada la base y el ángulo opuesto.
- Construir un triángulo rectángulo dada la hipotenusa y un cateto.
- Construir un triángulo dada la base, la altura y un ángulo adyacente a la base.
- Construir un triángulo equilátero dado el radio del círculo circunscrito.
- Construya un triángulo cuyos ángulos sean respectivamente iguales a los de un triángulo dado.

- f) Construya un triángulo cuyos ángulos sean respectivamente iguales a los de un triángulo dado.

Teorema 3.4 Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal XY, los ángulos alternos internos son iguales.

Demostración. Se quiere demostrar que el ángulo o es igual al ángulo m .



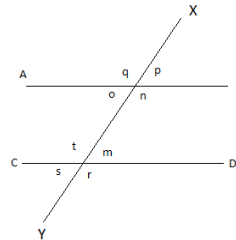
La recta que pasa por los puntos A y B es paralela a la recta que pasa por los puntos C y D. Las rectas son cortadas por la transversal XY en los puntos P y Q.

Primero, localicemos el punto medio O del segmento de recta PQ, a continuación, desde el punto O trazamos la perpendicular MN a la recta CD, observar que también es perpendicular a la recta AB. Se forman dos triángulos rectángulos.

Se tiene que $\angle POM = \angle QON$, ya que son opuestos por el vértice, y que las hipotenusas OP y OQ son iguales, porque O es el punto medio, utilizando la demostración del teorema 3.2, concluimos que $\triangle PMO \cong \triangle QNO$, por lo tanto, el ángulo o es igual al ángulo m , que es lo que se quería demostrar.

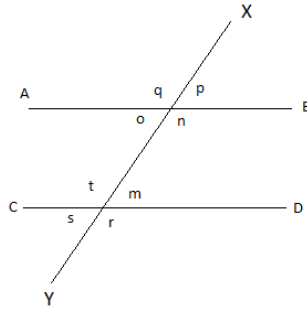
Corolario. Si dos paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos correspondientes son iguales.

Demostración. Queremos demostrar que el ángulo p es igual al ángulo m .

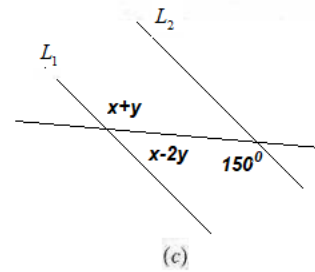
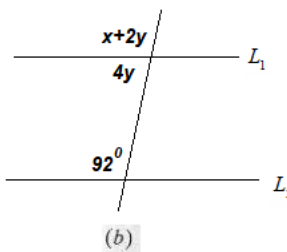
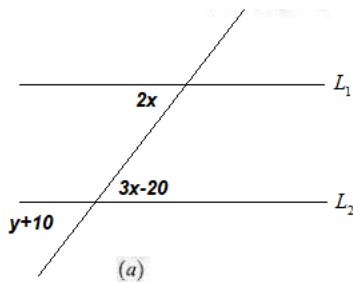


En la figura, observamos que el ángulo p es igual al ángulo o , ya que son opuestos por el vértice. Y de acuerdo con el teorema 3.4, el ángulo o es igual al ángulo m por ser ángulos alternos internos. Por lo tanto, si $p = o$ y $o = m$, entonces, recordemos, si dos cantidades son iguales a una tercera, entonces esas cantidades también son iguales, por lo tanto $p = m$, que es lo que queríamos demostrar.

Ejercicio 3.14 Si el ángulo m es igual a 60° ¿Cuál es el valor de cada uno de los otros siete ángulos? La recta que pasa por los puntos A y B, es paralela a la recta que pasa por los puntos C y D.



Ejercicio 3.14a En cada caso, encuentre los valores de x e y , si las rectas L_1 y L_2 son paralelas.

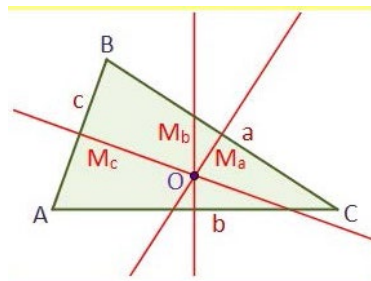


✓ **Aprendizaje.** Distingue las características que determinan a las rectas y puntos notables en un triángulo.

Rectas y puntos notables en un triángulo; Mediatriz, bisectriz, mediana y altura.

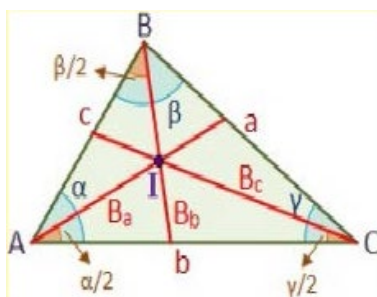
Mediatriz. Las mediatrices son las rectas perpendiculares a cada uno de los lados en los puntos medios de los lados de los triángulos. En todo triángulo se tienen tres mediatrices.

Propiedad. Las mediatrices se intersectan en un punto, el cual se denomina. **circuncentro** y equidista de cada uno de los vértices. Es evidente que se puede circunscribir una circunferencia al triángulo.



Bisectriz. Las bisectrices son las rectas que dividen a cada uno de los ángulos del triángulo en dos ángulos iguales. En todo triángulo se tienen tres bisectrices.

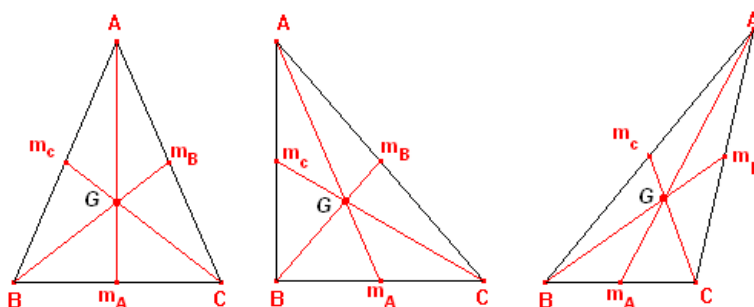
Propiedad. Las bisectrices se intersectan en un punto, el cual se denomina. **incentro** y equidista de cada uno de los lados. Es evidente que se puede inscribir una circunferencia al triángulo.



Mediana. Las medianas son los segmentos de recta, que tienen como extremo uno de los vértices y el punto medio del lado opuesto del triángulo. En todo triángulo se tienen tres medianas.

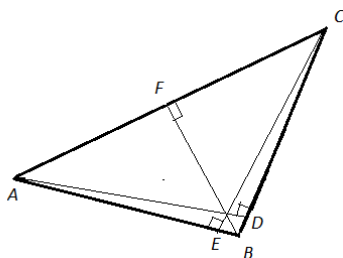
Propiedad. Las medianas se intersectan en un punto, el cual se denomina. **centro de gravedad o baricentro**.

Medianas de un triángulo Acutángulo, Rectángulo y Obtusángulo



Altura. La altura en un triángulo se define como el segmento de recta que parte de un vértice y cae perpendicularmente a la recta que contiene al lado opuesto del triángulo. En todo triángulo, se tienen tres alturas.

Propiedad. Las alturas se intersectan en un punto, el cual se denomina. **ortocentro**



AD altura que corresponde al vértice A, CE altura que corresponde al vértice C y BF altura que corresponde al vértice B.

Ejercicio 3.15 Considerar un triángulo obtusángulo y trazar sus mediatrices (utilizar un color). Observar que se cortan en un punto, con el compás tomar la distancia del punto de intersección a un vértice y trazar una circunferencia, observar que pasa por los vértices del triángulo.

Ejercicio 3.16 Considerar un triángulo acutángulo y trazar sus bisectrices (utilizar un color). Observar que se cortan en un punto, con el compás tomar la distancia del punto de intersección a uno de los lados y trazar la circunferencia, observar que toca a los lados del triángulo.

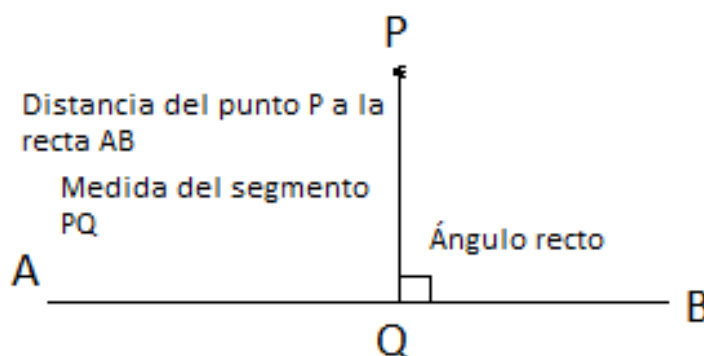
Ejercicio 3.17 En un triángulo cualquiera Encontrar los puntos de intersección de las mediatrices, el de las bisectrices y el de las alturas. Trazar la recta que pasa por las tres intersecciones, dicha recta se conoce como **recta de Euler**.

✓ **Aprendizaje.**

✓ *Determina geométricamente la distancia de un punto a una recta.*

Distancia de un punto a una recta. La distancia entre un punto y una recta corresponde a la distancia más corta entre el punto y la recta y está correspondiente a la medida del segmento perpendicular que baja del punto a la recta.

Para realizar la medición utilizamos la construcción de la perpendicular desde una recta a un punto exterior a ella.

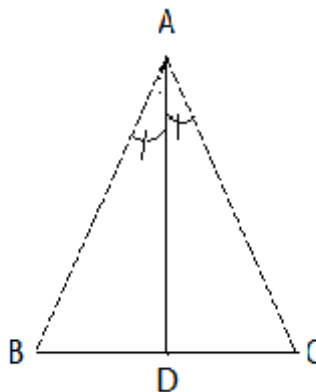


✓ Aprendizaje. Justifica y aplica las propiedades del triángulo isósceles.

Propiedades del triángulo isósceles

Teorema 3.5. En todo triángulo isósceles los ángulos adyacentes a la base son iguales.

Demostrar que $\angle B = \angle C$



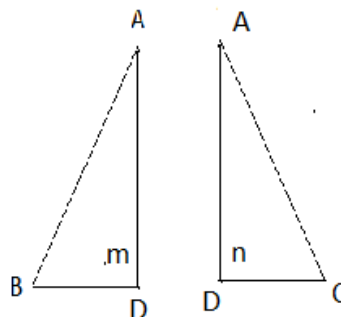
Demostración. El $\triangle BCA$ es isósceles, esto es $BA = CA$

Primero trazamos la bisectriz que corresponde al $\angle A$, la representamos con AD , por lo tanto $\angle BDA = \angle CDA$, además $BA = CA$ y $AD = AD$, en consecuencia el $\triangle BDA = \triangle BDC$, esto es los triángulos son congruentes. Por lo tanto $\angle B = \angle C$, Que es lo que queríamos demostrar.

Corolario. La bisectriz del ángulo formado por los dos lados congruentes, corta al lado opuesto, formando ángulos congruentes.

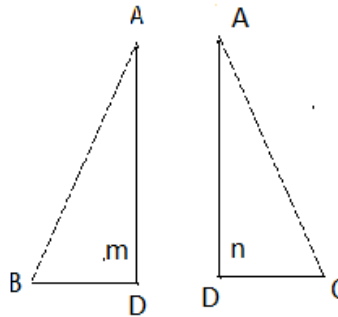
Por demostrar que $m = n$

Demostración. En el teorema 3.5, demostramos que cuando se traza la bisectriz del $\angle A$ los triángulos $\triangle BDA$, $\triangle BDC$ son congruentes, esto nos dice que, los lados y ángulos homólogos son iguales, en consecuencia, m y n son ángulos homólogos y por lo tanto iguales, que es lo que queríamos demostrar.



Corolario. La altura y la mediana de la base de un triángulo isósceles coinciden.

Por demostrar que AD es altura y mediana.



Demostración. De acuerdo al teorema 3.5, se construye la bisectriz AD. Y se demuestra que $\triangle BDA$ y $\triangle BDC$ son congruentes, en consecuencia, los ángulos m y n son iguales y como son adyacentes sobre una recta colineal, entonces son ángulos rectos, por lo que AD es perpendicular a BC, esto es **AD corresponde a la altura de la base**. Por otro lado, por la congruencia de los triángulos, BD y DC son iguales, lo que nos dice que D es el punto medio del lado BC, y por lo tanto **AD es la mediana que corresponde al vértice A**. Podemos afirmar lo que queríamos demostrar; que AD es altura y mediana.

✓ **Aprendizaje.** Describe los polígonos por sus características (regulares e irregulares).

Polígonos regulares e irregulares

Polígono. Se llama polígono a una porción de un plano limitada por segmentos de recta.

Clasificación de polígonos según sus lados, se llama

Un polígono de tres lados se llama **TRIÁNGULO**

Un polígono de cuatro lados se llama **CUADRILÁTERO**

Un polígono de cinco lados se llama **PENTÁGONO**

Un polígono de seis lados se llama **HEXÁGONO**

Un polígono de ocho lados se llama **OCTÁGONO**

Un polígono de diez lados se llama **DECÁGONO**

Un polígono de doce lados se llama **DODECÁGONO**

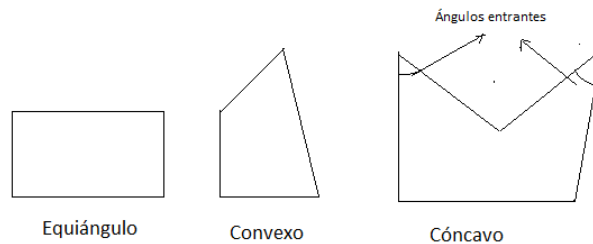
Y es importante definir el **polígono equilátero**, este corresponde al **polígono que tiene todos sus lados iguales**.

Los polígonos también se clasifican por sus ángulos

Un polígono es **equiángulo** cuando **todos sus ángulos son iguales**.

Un polígono es **convexo** cuando **no tiene ángulos entrantes**.

Un polígono es **cóncavo** cuando **tiene ángulos internos entrantes**.



Cuando **un polígono es equilátero y equiángulo**, recibe el nombre de **polígono regular**.
Al polígono que **no tiene a todos sus lados iguales**, se le llama, **polígono irregular**.

Cuadriláteros

Paralelogramo. Cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos

Rectángulo. Paralelogramo con ángulos rectos.

Cuadrado. Es un cuadrilátero cuyos lados miden lo mismo y tiene cuatro ángulos rectos.

Trapezio. Cuadrilátero con dos lados paralelos y dos no paralelos.

Trapezoide. Cuadrilátero irregular.

Rombo. Paralelogramo con lados iguales y ángulos oblicuos.

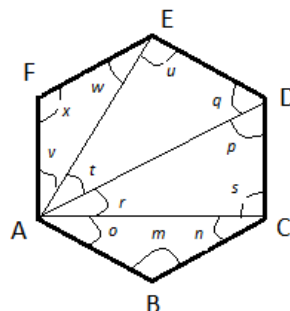
Ejercicio 3.18 . Construir un rectángulo dado un lado y el ángulo de las diagonales.

✓ **Aprendizajes.**

- ✓ Conoce y aplica las propiedades de los polígonos.
- ✓ Calcula el perímetro y área de un polígono regular.

Teorema 3.6. La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es igual al número de lados menos dos, multiplicados por dos ángulos rectos, esto $(n - 2)2 \text{ ángulos rectos} = (n - 2)360^\circ$.

Demostración. Consideremos el caso particular de un hexágono



Trazamos las diagonales AC, AD y AE, podemos observar que se forman 4 triángulos, esto es el número de lados menos 2. Podemos extender el procedimiento para cualquier número de lados.

En la figura observamos que:

En el $\triangle ABC$ la suma de los ángulos es $o + m + n = 2\angle's rectos = 360^0$

En el $\triangle CDA$ la suma de los ángulos es $r + s + p = 2\angle's rectos = 360^0$

En el $\triangle ADE$ la suma de los ángulos es $q + t + u = 2\angle's rectos = 360^0$

En el $\triangle AEF$ la suma de los ángulos es $v + w + x = 2\angle's rectos = 360^0$

Si sumamos todos los ángulos, obtenemos

$$o + m + n + r + s + p + q + t + u + v + w + x = 4(2\angle's rectos)$$

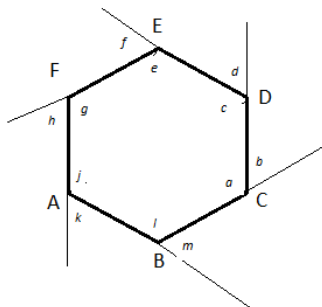
Esto es, el número de lados menos dos por 2 ángulos rectos.

El procedimiento se puede extender para un polígono de n lados.

Corolario. Cada ángulo de un polígono regular de n lados mide $\frac{n-2}{n}(2\angle's rectos)$

Teorema 3.7. La suma de los ángulos exteriores de un polígono de n lados es igual a cuatro ángulos rectos.

Demostración. Consideremos un caso particular, utilicemos un hexágono, el procedimiento para demostrar para n lados es en forma inductiva.



Demostración. La suma de los pares de ángulos $(l, m), (a, b), (c, d), (e, f), (g, h)$ y (j, k) es cada una igual a dos $\angle's rectos$, ya que corresponden a ángulos adyacentes colineales. De otra forma

$$l + m = 2\angle's rectos; \quad a + b = 2\angle's rectos; \quad c + d = 2\angle's rectos;$$

$$e + f = 2\angle's rectos; \quad g + h = 2\angle's rectos; \quad j + k = 2\angle's rectos;$$

La suma de todas estas parejas de ángulos es igual a $12\angle's rectos$.

Para conocer la suma de los ángulos exteriores, $m + b + d + f + h + k$; a la suma anterior, debemos restarle la suma de los ángulos interiores $l + a + c + e + g + j$, esta es igual, de acuerdo al teorema 5, $l + a + c + e + g + j = 4(2\text{ rectos})$.

Finalmente, la suma de los ángulos exteriores de un polígono es

$12\text{ rectos} - 8\text{ rectos} = 4\text{ rectos}$. Que es lo que queríamos demostrar.

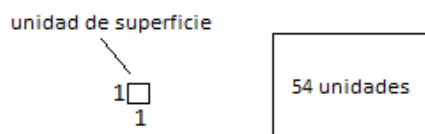
Área y Perímetros de figuras Geométricas

Perímetro de un polígono

Definición. Se define el perímetro de un polígono como la suma de la medida de cada uno de sus lados.

Área de un polígono

Definición de unidad de superficie. Se llama unidad de superficie, o unidad superficial, a la superficie de una figura tomada como unidad para medir la superficie de otra. *Por lo común, la unidad de superficie de un cuadrado cuyo lado es igual a la unidad de longitud.*



La unidad de medida que es aceptada en nuestro país México es el metro cuadrado m^2 existen submúltiplos, tales como decímetro cuadrado dm^2 , centímetro cuadrado cm^2 , milímetro cuadrado mm^2 , entre otros.

El área de un cuadrado la calculamos como $A = bxh$, donde b es la magnitud de la base y h es la altura.

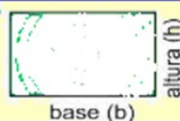
✓ **Aprendizajes.** Calcula el perímetro y área de un polígono regular.

Ejercicio 3.19 Demuestre que el área de un triángulo es $A = \frac{bxh}{2}$, donde b es la magnitud de la base y h es la altura.

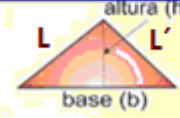
A continuación de presentan expresiones para calcular Áreas y Perímetros de figuras geométricas

	Figura	Área	Perímetro
Cuadrado		$A = L \times L$	$P = L + L + L + L$

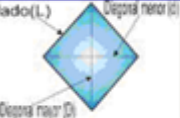
Rectángulo

	$A = b \times h$	$P = b + b + h + h$
---	------------------	---------------------


Triángulo

	$A = \frac{b \times h}{2}$	$P = b + L + L'$
---	----------------------------	------------------


Rombo

	$A = D \times d$	$P = L + L + L + L$ L lado del rombo
---	------------------	---


Paralelogramo

	$A = b \times h$	$P = b + b + L + L'$
---	------------------	----------------------

Trapezio

	$A = \frac{h(B + b)}{2}$	$P = B + b + L + L'$
---	--------------------------	----------------------

Pentágono

	$A = \frac{p \times a}{2}$	$P = L \times \# \text{ lados}$
---	----------------------------	---------------------------------

Ejercicio 3.20 Dado el perímetro de un triángulo equilátero construya el triángulo.

Ejercicio 3.21 Hállense las alturas de los paralelogramos cuyas áreas y bases son respectivamente: a) 25 cm^2 , 8 cm . b) 48 mm^2 , 24 mm .

Ejercicio 3.22 Hállense las alturas de los triángulos cuyas áreas y bases son respectivamente: a) 9.5 m^2 , 3 m . b) 20 m^2 , 10 m .

Ejercicio 3.23 ¿Cuál es el valor de cada ángulo en los siguientes polígonos regulares?

- Pentágono.
- Octágono.
- El polígono de 32 lados.

Ejercicio 3.24 ¿Cuántos lados tiene un polígono regular en que cada ángulo es de 140° ?

Ejercicio 3.25 ¿Cuál es el valor de cada ángulo en los siguientes polígonos regulares?

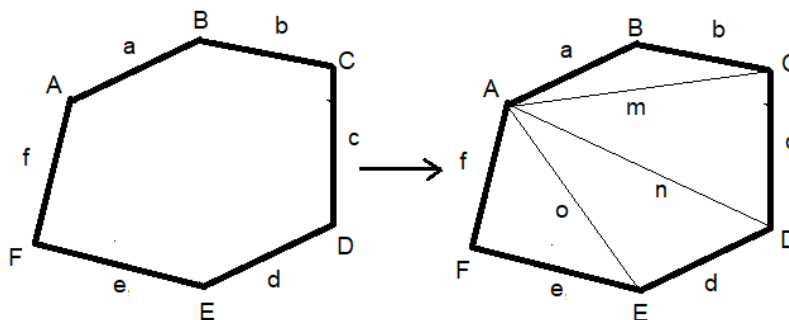
Pentágono. Octágono. El polígono de 32 lados.

¿Cuántos lados tiene un polígono regular en que cada ángulo es de 140° ?

✓ **Aprendizaje.** *Calcula el área de un polígono irregular por triangulación.*

Área de un polígono irregular.

Se quiere calcular el área de un polígono irregular, para ello, dividimos el área del polígono en las áreas de los triángulos que la componen, esto es trazamos los segmentos AC, AD, AE.



El área total del polígono será la suma de las áreas de los triángulos. El área de cada triángulo es, de acuerdo a la fórmula de Heron son:

$$\text{Área del } \triangle ABC \text{ es } A_1 = \sqrt{s_1(s_1 - a)(s_1 - b)(s_1 - m)} \quad \text{donde } s_1 = \frac{a + b + m}{2}$$

$$\text{Área del } \triangle ACD \text{ es } A_2 = \sqrt{s_2(s_2 - m)(s_2 - c)(s_2 - n)} \quad \text{donde } s_2 = \frac{m + c + n}{2}$$

$$\text{Área del } \triangle ADE \text{ es } A_3 = \sqrt{s_3(s_3 - n)(s_3 - d)(s_3 - o)} \quad \text{donde } s_3 = \frac{n + d + o}{2}$$

$$\text{Área del } \triangle AFE \text{ es } A_4 = \sqrt{s_4(s_4 - o)(s_4 - e)(s_4 - f)} \quad \text{donde } s_4 = \frac{o + e + f}{2}$$

Donde s_1, s_2, s_3, s_4 son los semiperímetros de los triángulos correspondientes.

Por lo tanto, el Área A del polígono irregular ABCDEF es:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

BIBLIOGRAFIA

- Cresa, Jacobo P *Elementos geométricos de Euclides*, 1689 Archive.org
- Filloy, E. y Zubieta, G. (2001) *Geometría*. México: Grupo Editorial Iberoamericana
- García Arenas, Bertran Infante. *Geometría e Experiencias*, Editorial Alhambra, México, 1990
- Heath, Thomas Sir, *Los trece libros de los Elementos de Euclides* Vol II, Dover publications, inc. Segunda edición, Nueva York
- Howard Eves, *Estudio de las Geometrías*, tomos I y II, UTEHA, 1976
- Lozano, C. y Vázquez, A. (2009). *Geometría y trigonometría*. México: Prentice Hall.
- Polya, G. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas* (1ª ed., 9ª reimp. ed.). México: Trillas
- Smith, S., Charles R., Dossey J., Keedy M., y Bittinger M., (2001). *Álgebra*. México: Pearson
- Swokowski, E. y Cole, J. (). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México, 2011
- Wenworth, Smith. *Geometría Plana y del Espacio*. Ed. Porrúa. México. 1980.
- Zubieta, F. *Álgebra Elemental*, México 1966
- Moise, Downs. *Geometría Moderna*. Ed. Addison Wesley Iberoamericana. 1995
- Hemmerling. *Geometría Elemental*. Ed. Limusa. 2003

Unidad 4

Congruencia, semejanza y

Teorema de Pitágoras

UNIDAD 4. Congruencia Semejanza y Teorema de Pitágoras

A continuación, establecemos los aprendizajes y el temario

Aprendizajes. Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

- Utiliza correctamente la notación propia de la congruencia.
- Comprende el concepto de congruencia.
- Construye segmentos y ángulos congruentes.
- Reconoce cuándo dos triángulos son congruentes con base en la definición.
- Argumenta empíricamente la validez de los criterios de congruencia
- Argumenta deductivamente la validez de algunas construcciones geométricas y de algunas afirmaciones.
- Aplica los criterios de congruencia de triángulos para justificar congruencia entre lados, ángulos y triángulos.
- Resuelve problemas, por medio de los criterios de congruencia.
- Utiliza correctamente la notación propia de la semejanza.
- Comprende el concepto de semejanza.
- Reconoce cuándo dos figuras son semejantes.
- Reconoce cuándo dos triángulos son semejantes con base en la definición.
- Establece como válidos los criterios de semejanza.
- Calcula perímetros y áreas en triángulos semejantes y la razón entre ellos.
- Aplica los criterios de semejanza en la resolución de problemas.
- Divide un segmento en n partes iguales y a partir de esta construcción infiere el Teorema de Thales.
- Reconoce y justifica el Teorema de Pitágoras y su recíproco, desde el punto de vista geométrico y algebraico.
- Utiliza los conocimientos adquiridos en esta unidad, en la resolución de problemas.

Temario

- Notación. • Congruencia.
- Figuras congruentes
- Congruencia de triángulos.
- Criterios LAL; LLL; ALA
- Construcciones de: • Bisectriz de un ángulo. • Mediatriz de un segmento. • Perpendicular a una recta. • Teorema del triángulo isósceles y su recíproco.
- Problemas de aplicación
- Semejanza. Notación
- Figuras semejantes
- Semejanza de Triángulos

- Criterios Semejanza LLL; AAA; LAL
- Razón entre perímetros y entre áreas de triángulos semejantes.
- Problemas de aplicación
- Teorema de Thales y su recíproco
- Teorema de Pitágoras y su recíproco
- Problemas de longitudes y áreas que involucran semejanza, congruencia y Teorema de Pitágoras.
- Teorema de la altura de un triángulo rectángulo

Conceptos Clave. En esta unidad los conceptos clave que vamos a considerar son: Semejanza, Congruencia, Rectas en un triángulo (altura, bisectriz, mediatriz, Perpendicular), isósceles, escaleno, equilátero, Teorema.

Sugerencias de estrategias didácticas. Estas sugerencias se presentan en el desarrollo del **material de apoyo**, que se realiza más adelante.

Identificación de puntos problemáticos. En particular nos podemos referir a

Introducción

En el capítulo anterior se describió la base axiomática sobre la que se cimienta la Geometría Euclidian y en general lo que se desprende de ella, los distintos postulados que conllevan a un conjunto amplio de proposiciones, teoremas y variados resultados que en muchos casos suelen observarse como propiedades obvias en la educación básica.

En el presente texto se describen algunas de estas propiedades sin demostrar en forma estricta que son consecuencia de los axiomas euclidianos planteados, aunque en algunas de estas también se mostrará una demostración para observar cómo es que se deduce de una serie de principios o axiomas y resultados previos.

Una de las primeras proposiciones de los Elementos de Euclides, es el número 4 del libro I, donde se describe uno de los criterios utilizados para determinar si dos triángulos son congruentes.

Se demuestra en la proposición 5 del Libro I de los *Elementos* de Euclides¹, que junto a la proposición 6 da una caracterización de los triángulos isósceles.

En el *Libro V* se enuncia: *Razón es el respecto o relación mutua, que tienen entre sí dos magnitudes del mismo género según la cantidad sola*²

Hasta la *Proposición 12* de este libro, Euclides trata sobre *proporción*, y es en el Libro VI donde se define lo que se entiende como figuras semejantes. En este mismo contexto, es natural observar la conveniencia de precisar lo que se entiende por proporción en cursos previos de matemáticas, y posteriormente considerar los resultados que permiten caracterizar a dos figuras semejantes.

Aspecto histórico de semejanza

En lo que se refiere a semejanza, las propiedades son diferentes de la congruencia, la utilidad de las propiedades que se derivan de ella data también desde la antigüedad. Es muy conocido el pasaje en la historia de las matemáticas que se refiere a Eratóstenes, célebre por el cálculo que hizo de la longitud de la tierra.

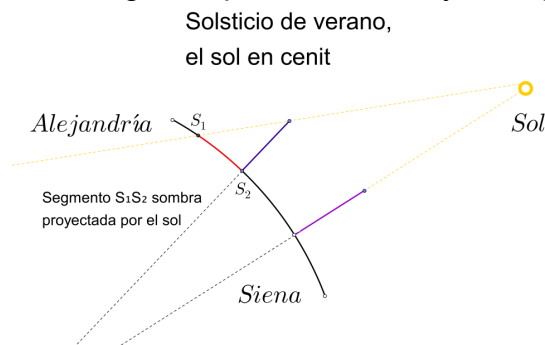
La longitud de la tierra encontrada por él, fue de 252, 000 estadios³. Como es comentado en diversos pasajes sobre historia y en particular en historia de las matemáticas, este personaje tuvo acceso a documentos antiguos de las ciudades en las que habitó y pudo deducir de esta información que la luz del sol no tenía los mismos efectos al proyectarse en la ciudad de Siena, antiguo Egipto, que en Alejandría. De este modo decidió observar la sombra proyectada por un palo de altura conocida y clavado en el suelo de un determinado lugar en ambas ciudades (Figura 3).

¹ Puede verse la obra de Heath, traducción del griego de los *Elementos* de Euclides

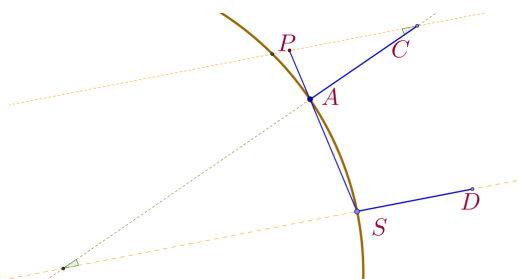
² Cresa, Jacobo []

³ Unidad de longitud en Grecia, en Egipto, y otras regiones del mundo antiguo, unidad variable de acuerdo con el lugar donde se utilizaba. Esta medida está basada en la longitud de un estadio, Olimpia en el caso de Grecia. Su equivalencia se considera entre 170, 000 m y 180,000 m, esta variabilidad es un tema de discusión en la actualidad.

Si se considera como hipótesis que los rayos solares son paralelos, (el suelo o superficie terrestre está tan lejos el Sol de la tierra que tales rayos pueden considerarse paralelos) el ángulo que forma la sombra del palo en el suelo es el mismo que corresponde al ángulo que se forma entre los radios de la circunferencia que representa a la tierra, determinados estos por las ciudades de Alejandría y Siena, representados en la Figura 4 por las letras A y S respectivamente.



Sea la transversal que pasa por los puntos A y C, los ángulos alternos internos $\angle PCA$ y $\angle AOS$ son iguales y se conocen la distancia AS, la longitud $PC = SD$, y la longitud PA. El valor que dio Eratóstenes al ángulo de inclinación de la sombra⁴ fue de $7^\circ 12'$ en la ciudad de Alejandría, mientras que en la ciudad Siena es de 0° , la distancia entre ambas ciudades las estimó en 5,000 estadios⁵. Con estos datos, calculó la longitud de la circunferencia de la tierra asignándole un valor de 252 000 estadios equivalente a 40, 000 km (un error de 90 km, de acuerdo a los cálculos actuales para un cálculo realizado 200 a.C.



Figuras congruentes

En matemáticas, dos figuras de puntos son congruentes si tienen los lados iguales y el mismo tamaño. Por así decirlo, dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y tamaño, aunque su posición u orientación sean distintas. Las partes coincidentes de las figuras congruentes se llaman homólogas o correspondientes.

Ejercicio 4.1. Construir un segmento congruente al segmento AB. Figura 1

⁴ $1/50$ de la longitud de una circunferencia,

⁵ Se dice que envió a una persona a medir a pie la distancia entre ambas ciudades

Ejercicio 4.2 Construir un ángulo congruente a un ángulo dado $\angle AOB$. Figura 2



Figura 1

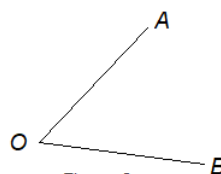
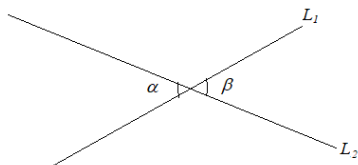


Figura 2

Ejercicio 4.3 Demostrar que los ángulos opuestos por el vértice son congruentes



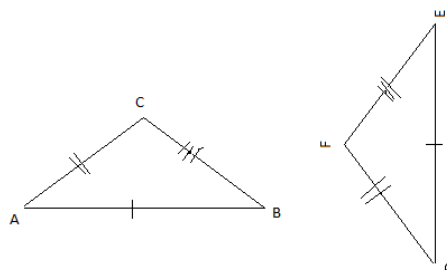
α y β son ángulos opuestos por el vértice. Demostrar que son congruentes equivale a demostrar que $\angle \alpha = \angle \beta$

Triángulos congruentes. Se dice que dos triángulos son congruentes si al superponer uno sobre el otro, coinciden en todas sus partes.

Las marcas en los triángulos (I, II, III), significará que los lados son iguales y se dirá que son lados homólogos.

De igual manera los ángulos homólogos se marcarán de la misma forma.

En caso de ser lado o ángulo común, lo representaremos con una (x).



Cuando dos triángulos sean congruentes lo representaremos con $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Podemos determinar que dos triángulos son congruentes, utilizando los siguientes principios.

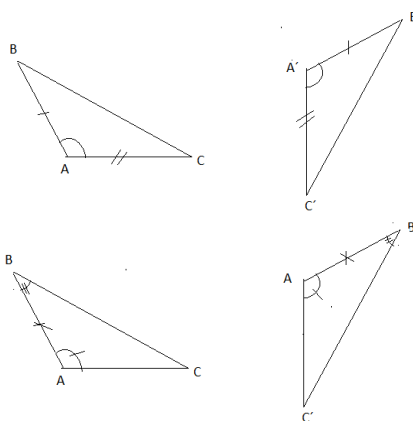
Principios o Criterios de congruencia de Triángulos

Criterio L. A. L.: Dos triángulos son congruentes si tienen iguales dos de sus lados respectivos y el ángulo comprendido entre ellos.

$$AB = A'B'; \quad AC = A'C' \quad \text{y} \quad \angle A = \angle A'$$

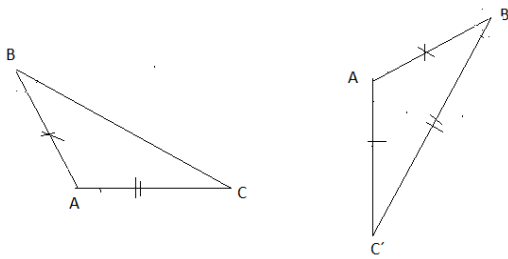
Criterio A. L. A.: Dos triángulos son congruentes si tienen iguales dos de sus ángulos respectivos y el lado entre ellos.

$$\angle A = \angle A' \quad AC = A'C' \quad \text{y} \quad \angle B = \angle B'$$



Criterio L. L. L.: Dos triángulos son congruentes, si tienen iguales los lados en los dos triángulos

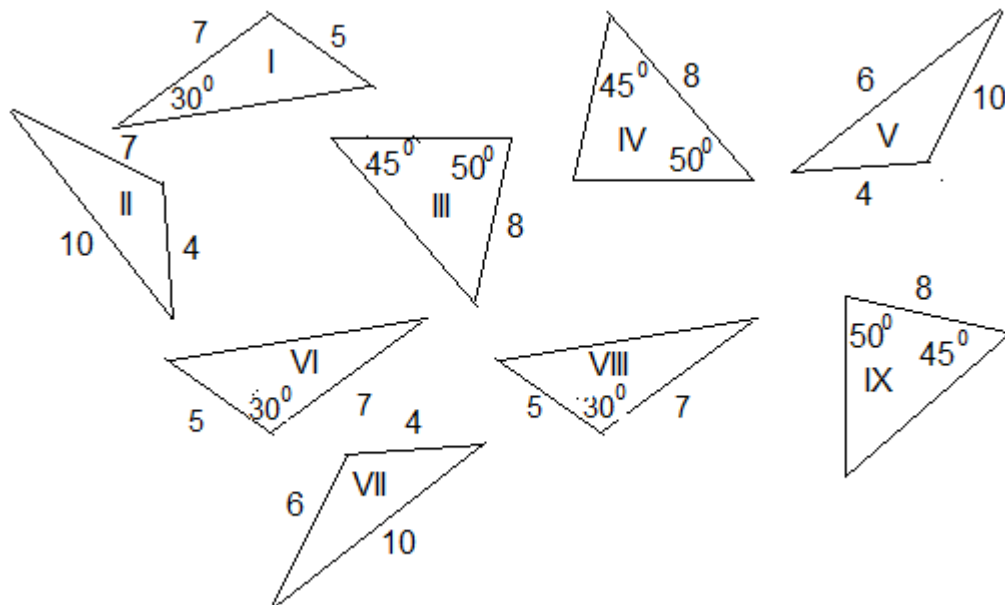
$$AB = A'B'; AC = A'C' \quad \text{y} \quad BC = B'C'$$



✓ Aprendizajes

✓ Reconoce cuándo dos triángulos son congruentes con base en la definición.

Ejercicio 4.4 Indicar las parejas de triángulos que son congruentes y mencionar bajo qué principio.



- ✓ Argumenta empíricamente la validez de los criterios de congruencia
- ✓ Argumenta deductivamente la validez de algunas construcciones geométricas y de algunas afirmaciones

Con el concepto de congruencia, vamos a demostrar que las rectas notables en un triángulo cumplen con la condición solicitada.

Justificación de que la bisectriz de un ángulo que divide al ángulo en dos ángulos iguales

Recordemos la construcción

Consideremos el ángulo α mostrado en la figura, los lados del ángulo son los segmentos VA y VB.

Con centro en el punto V y un radio menor a la longitud del segmento menor, trazamos el arco de circunferencia 1 que intersecte a los lados del ángulo.

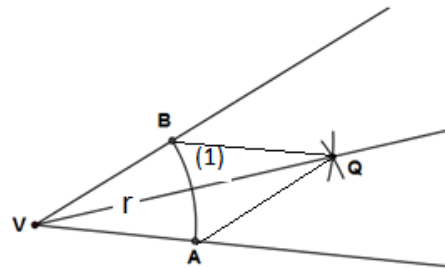
A los puntos de intersección les llamamos A y B.

Con centro en A y cualquier radio trazamos un arco de circunferencia, y con centro en B e igual radio trazamos otro arco de circunferencia.

El punto donde se intersectan los arcos hacia el interior del ángulo, lo identificamos con Q, trazamos la recta que pase por VQ, éste corresponde a la bisectriz del ángulo.

Trazamos los segmentos BQ y AQ. Observamos que se forman dos triángulos $\triangle VBQ$ y el $\triangle VAQ$

Queremos demostrar que el $\angle BVQ$ es igual al $\angle AVQ$, para ello basta con demostrar que los ángulos, son ángulos homólogos de triángulos congruentes.



Ejercicio 4.5 Demostrar que los triángulos $\triangle VBQ$ y el $\triangle VAQ$ son congruentes

Justificar las afirmaciones 1, 2 y 3

1. $VB = VA$
2. $BQ = AQ$
3. $VQ = VQ$

Por lo tanto los triángulos $\triangle VBQ$ y $\triangle VAQ$ son congruentes por el principio (L.L.L) y en consecuencia el $\angle BVQ$ es igual al $\angle AVQ$ por ser ángulos homólogos de triángulos congruentes. LQQD

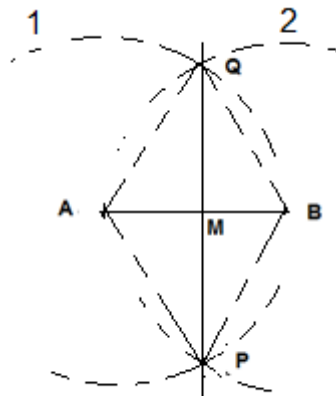
Vamos a demostrar que la recta perpendicular a un segmento en su punto medio (MEDIATRIZ) divide al segmento AB en dos partes iguales.

Con centro en el extremo A y radio AB, trazamos la circunferencia 1.

Ahora, con centro en el extremo B y radio AB se traza la circunferencia 2, de preferencia los trazos con línea punteada.

Marcamos los puntos de intersección de las circunferencias y los nombramos P y Q. Trazamos la recta PQ.

Esta recta corresponde a la **MEDIATRIZ** del segmento



Queremos demostrar que $AM = MB$, para ello basta con demostrar que los lados son lados homólogos de triángulos congruentes.

Demostrar que $\triangle AQP \cong \triangle BQP$ y por lo tanto $AM = MB$

Ejercicio 4.6. Con la figura anterior, vamos a justificar cada una de las siguientes afirmaciones

1. $AQ = BQ$
2. $AP = BP$
3. $QP = QP$
4. $\triangle AQP \cong \triangle BQP$
5. $\angle AQP = \angle BQP$

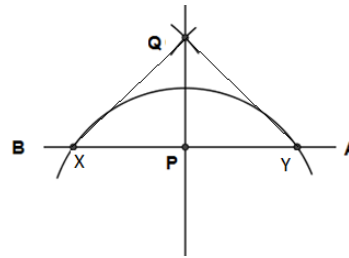
Con lo anterior, demostraremos que los triángulos $\triangle AQM$ y $\triangle BQM$ son congruentes

6. $\angle AQP = \angle AQM$ ángulo común
7. $\angle BQP = \angle BQM$ ángulo común
8. $\angle AQP = \angle BQP$ Por demostración previa
9. $\therefore \angle AQM = \angle BQM$ dos cosas iguales a una tercera son iguales entre si.
10. $AQ = BQ$; son radios de circunferencias trazadas con radios iguales.
11. $QM = QM$ lado común
12. $\triangle AQM$ y $\triangle BQM$ son congruentes por el principio (L.A.L)
13. $AM = MB$ por ser lados homólogos de triángulos congruentes. LQQD

Vamos a demostrar que el trazo una recta desde un punto dado de una recta dada, es una recta perpendicular a la recta.

En la recta dada AB y el punto indicado P, vamos a construir una recta perpendicular Haciendo centro en P, y con cualquier radio, describir arcos que corten al segmento AB. Indiquemos con X e Y a dichos puntos.

Con centro en X y radio XY marcar un arco, y con centro en Y , y con el mismo radio XY , trazar otro arco que corte al ya trazado. Donde se intersectan los arcos, lo indicaremos con la letra Q . Finalmente trazamos la recta que va del punto P al punto Q , dicha recta es la perpendicular pedida.



Queremos demostrar que el ángulo $\angle XPQ$ es igual al $\angle YPQ$, esto es los ángulos adyacentes colineales son iguales, o sea ángulos rectos. Y por lo tanto que QP es perpendicular a AB .

La demostración se realiza a continuación

Ejercicio 4.7. Justificar los puntos 1,2,3,4 y 5

1. $PX = PY$
2. $XQ = YQ$
3. $QP = QP$
4. $\triangle XPQ \cong \triangle YPQ$
5. $\angle XPQ = \angle YPQ$

Teorema del triángulo isósceles y su recíproco

Los triángulos isósceles tienen dos lados iguales, ¿por qué los ángulos adyacentes al lado desigual son iguales? Estas características se entienden como propias de la definición de estos triángulos, sin embargo, la igualdad de dos de sus ángulos se demuestra en la proposición 5 del Libro I de los *Elementos* de Euclides que junto a la proposición 6 da una caracterización de los triángulos isósceles. Uno de los argumentos que se utilizan en esta demostración es lo que conocemos como congruencia de triángulos. Es interesante observar, que la descripción que se hace en la antigüedad, no dista mucho de la que se utiliza en la actualidad.

Teorema. En triángulos isósceles, los ángulos en la base son iguales, y prolongados los lados iguales, los ángulos situados sobre la base son también iguales entre sí.

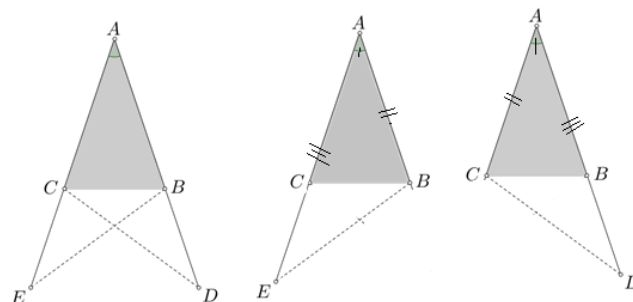


Figura 1

Demostración. Sea ABC el triángulo dado, en el cual AB y AC son los lados iguales. Vamos a demostrar que $\angle ABE = \angle ACD$

Ejercicio 4.8. Justificar cada una de las siguientes afirmaciones

1. Construimos $CE=BD$
2. $AB=AC$
3. $AB+CE=AC+BD$
4. $\angle A = \angle A$
5. $\triangle ABE \cong \triangle ACD$
6. $\angle ABE = \angle ACD$

Ahora vamos a demostrar que $\angle ACB = \angle ABC$, ángulos adyacentes a lados iguales de triángulo isósceles.

Vamos a considerar los triángulos BDC y CBE

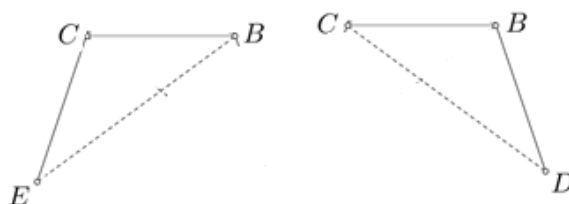


Figura 2

Demostración.

$$CE=BD$$

$$\angle BDC = \angle ECB$$

$$EB=CD$$

$$\triangle ECB \cong \triangle DBC$$

$$\angle ACB = \angle ABC$$

Por construcción

Por ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes $\triangle ABE \cong \triangle ACD$

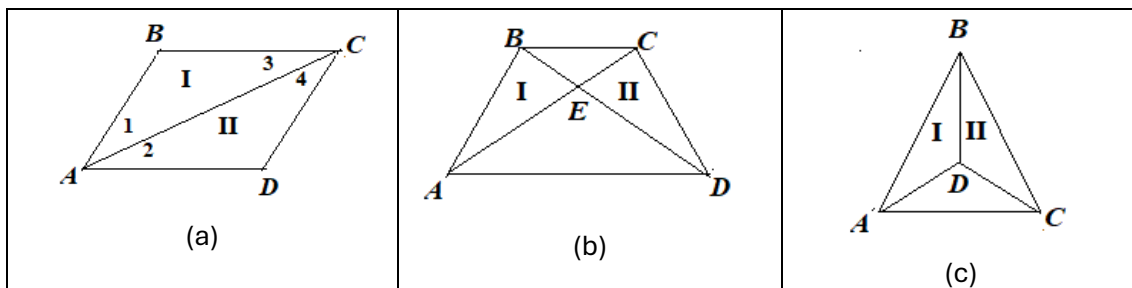
Por ser lados correspondientes de triángulos congruentes

Por criterio de congruencia LAL

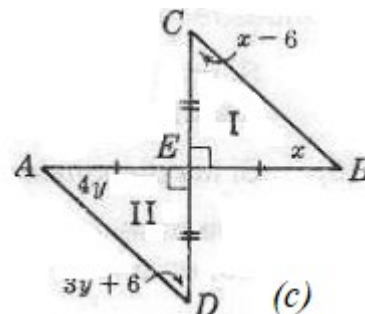
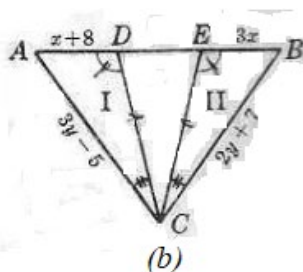
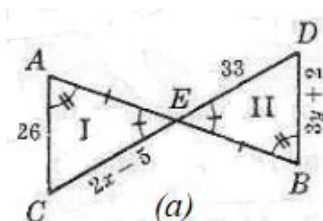
Por ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes $\triangle ECB \cong \triangle DBC$. Lo que queríamos demostrar

Ejercicio 4.9 En los siguientes casos (a), (b) y (c) demostrar que los triángulos I y II son congruentes. En cada caso indicar el principio de congruencia aplicado.

Datos: $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$	Datos $BE = EC$, $AE = ED$	Datos $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$ son isósceles



Ejercicio 4.10 En los siguientes ejercicios encontrar los valores de x e y



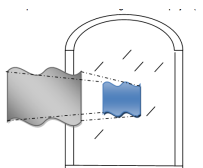
- ✓ **Aprendizajes**
- ✓ Utiliza correctamente la notación propia de la semejanza
- ✓ Comprende el concepto de semejanza
- ✓ Reconoce cuándo dos figuras son semejantes

Semejanza

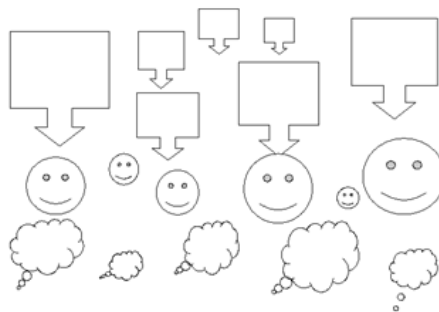
En la vida cotidiana, lo que se generalmente se entiende como figuras semejantes, se refiere a figuras que se parecen, que tienen ciertas características casi iguales, con ligeras diferencias.

En geometría, lo relevante es que se puede caracterizar a ciertas figuras con este concepto, esto es, dar condiciones necesarias y suficientes para definir lo que entendemos por semejanza. Es entonces importante, aclarar cuáles serán los principios que se adoptarán para determinar cuándo serán semejantes dos figuras dadas, desde el punto de vista geométrico.

Puede considerarse que la imagen de cierta figura en el espejo es semejante a ella, la imagen puede cambiar y esto dependerá de la distancia a la que se encuentre la figura del espejo. (Figura).



Ejemplo 4.1

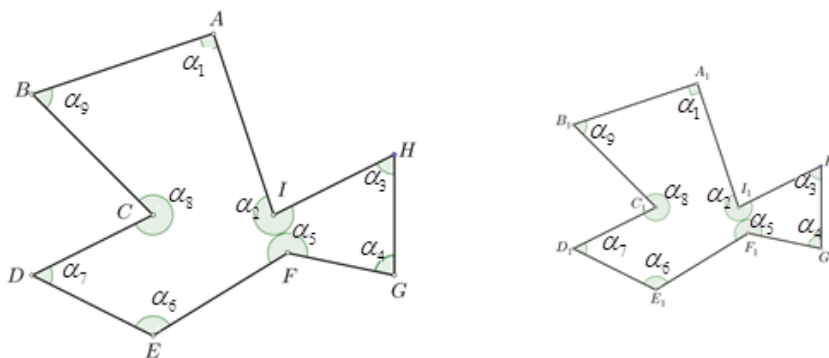


La figura plana más sencilla, una figura rectilínea, es para la cual se define la semejanza en los *Elementos* de Euclides.

Definición. Dos figuras rectilíneas son semejantes si tienen sus ángulos iguales y los lados alrededor de los ángulos iguales, proporcionales.

Consideremos dos figuras rectilíneas es necesario observar cuáles son sus ángulos, indicar cada ángulo con su igual para después observar los lados alrededor de dichos ángulos. Entonces es necesario llegar a un acuerdo de cómo indicar los ángulos, de aquí la convención de utilizar letras griegas, o bien por su vértice y puntos que lo forman, también se ha acordado que las letras mayúsculas señalan puntos o vértices, las letras minúsculas segmentos de recta.

Para el caso de la siguiente figura, se tienen nueve vértices, sean A, B, C, D, E, F, G, H e I . Para cada uno de éstos existe un ángulo (Figura), sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9$, respectivamente



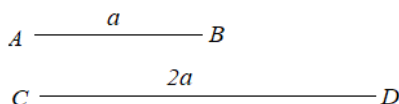
Semejanza de triángulos

Para considerar la semejanza entre triángulos, únicamente se considera la definición dada por Euclides en los *Elementos*.

Antes de establecer el concepto de semejanza, recordemos los conceptos de razón y proporcionalidad.

Razón. Se define la razón como la comparación de dos cantidades a y b por medio de su cociente $\frac{a}{b}$, a la cantidad $\frac{a}{b}$, se le llama razón inversa.

Geométricamente, podemos ver la comparación de la magnitud de las magnitudes de dos segmentos.



En la figura, el segmento AB tiene medida a y el segmento CD tiene medida $2a$, la razón de AB a CD es $\frac{AB}{CD} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, lo cual significa que la magnitud de AB es la mitad de la magnitud de CD.

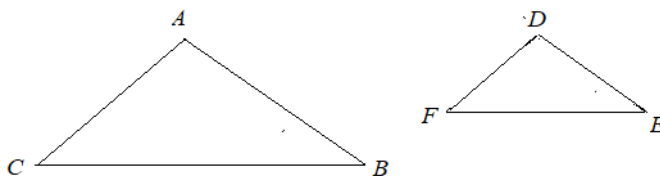
Ejercicio 4.10 Demostrar que la razón de CD a AB es 2, ¿Significa que la magnitud de CD es el doble de la magnitud de AB?

Proporción. Se llama proporción a una razón de la forma $y = mx$, donde $\frac{y}{x} = m$,

$m = \frac{p}{q}$ y además $q \neq 0$ cuando se da la igualdad de dos razones, se dice que están en proporción

Definición. Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos iguales y los lados alrededor de los ángulos iguales son proporcionales.

Notación. El triángulo ABC es semejante al triángulo $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



Si los triángulos mostrados en la figura anterior son semejantes, se cumple que $\angle C = \angle F$, $\angle B = \angle E$ y $\angle A = \angle D$ y los lados adyacentes a los ángulos iguales son proporcionales, esto es, $\frac{CA}{FD} = \frac{AB}{DE} = \frac{CB}{FE}$.

Criterios de semejanza

Como en el caso de congruencia, las proposiciones descritas por Euclides en los *Elementos* permiten garantizar que dos triángulos son semejantes con el mínimo de condiciones, esto es, sin tener que comprobar los tres ángulos y los tres pares de lados que corresponden a cada ángulo. Un resultado al respecto y que se refiere a triángulos *equiangulares (ángulos iguales)*, es decir de ángulos iguales es el siguiente:

Principio 1. En triángulos equiangulares, los lados alrededor de dichos ángulos son proporcionales ⁶

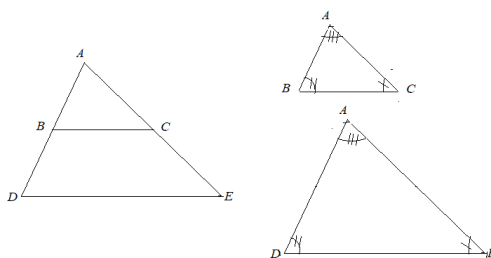
Esta proposición permite garantizar que dos triángulos serán semejantes si sus ángulos son iguales. Esto se conoce como el criterio ángulo, ángulo, ángulo (AAA)

Principio 2. La anterior proposición, también enuncia que *los lados son correspondientes con aquéllos que subtienden los ángulos iguales* es decir, los lados alrededor de los ángulos iguales, esto se conoce como el criterio de semejanza (LLL)

Principio 3. Si uno de dos triángulos tiene uno de sus ángulos igual a otro ángulo del segundo triángulo y los lados alrededor de dichos ángulos son proporcionales, dichos triángulos serán equiangulares.

Esta proposición es equivalente a lo que se conoce como el criterio lado, ángulo, lado, (LAL) para semejanza de triángulos

Ejemplo 4.2 Demostrar que los triángulos ABC y ADE son semejantes, donde BC es paralela a DE



Demostración.

$$\angle B = \angle D$$

Por ser ángulos correspondientes

⁶ Ver Proposición 4 del Libro VI de los Elementos de Euclides (ver Heath)

$$\angle C = \angle E$$

Por ser ángulos correspondientes

$$\angle A = \angle A$$

Por ser ángulo común

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE$$

Por criterio (AAA)

Podemos decir que los lados correspondientes son proporcionales, esto es

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

Y también

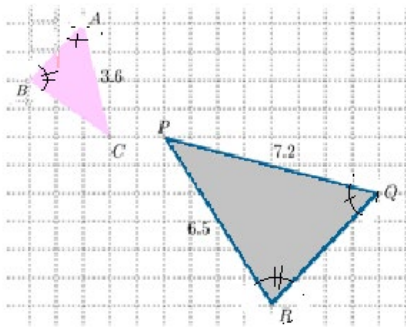
$$\frac{AB + BD}{AB} = \frac{AC + CE}{AC}, \text{ de donde } \frac{AB}{AB} + \frac{BD}{AB} = \frac{AC}{AC} + \frac{CE}{AC}, \text{ por lo tanto}$$

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AC}$$

Ejemplo 4.3 Considera un triángulo isósceles, si una recta es paralela a uno de sus lados, el triángulo que se forma con los puntos de intersección de dicha recta con el triángulo (si es necesario se prolongan los dos lados restantes), es también isósceles. En ambos triángulos sus lados respectivos son proporcionales.

	<p>Sea el $\triangle ABC$, la recta paralela al lado AB y los puntos de intersección de ésta, con los lados AC y BC, son M y N respectivamente.</p> <p>Los ángulos respectivos en cada triángulo cumplen que</p> $\angle CAB = \angle CMN \text{ y } \angle CBA = \angle CNM$ <p>entonces los ángulos $\angle ACB$ y $\angle MCN$ también serán iguales</p> <p>Por el criterio AAA, entonces $\triangle ABC \sim \triangle MCN$</p> <p>Como $\angle CAB = \angle CBA$ y $\angle CAB = \angle CMN$, además $\angle CBA = \angle CNM$, entonces $\angle CMN = \angle CNM$, es decir, el $\triangle MCN$ es isósceles.</p>
--	---

Ejemplo 4.4 Considera la pareja de triángulos $\triangle AAC$ y $\triangle PQR$, muestra que son semejantes y encuentra la longitud del lado BC .



Podemos observar que

$$\angle PQR = \angle BAC \text{ y } \angle PRQ = \angle ABC$$

entonces $\angle ACB = \angle QPR$

Los triángulos son semejantes por criterio AAA, esto es

$$\Delta ABC \sim \Delta PQR$$

Sus lados son entonces proporcionales.

El lado PR corresponde con BC , el lado PQ corresponde con AC , como son los triángulos semejantes entonces la proporción es la misma entre estos segmentos, recordamos la identidad

$$\frac{BC}{PR} = \frac{AC}{PQ}$$

Entonces $\frac{BC}{PR} = \frac{PQ}{AC}$ es equivalente a

$$\frac{BC}{6.5} = \frac{3.6}{7.2}$$

y de aquí

$$BC = \frac{(3.6)(6.5)}{7.2} = 3.25.$$

✓ **Aprendizaje**

- ✓ *Divide un segmento en n partes iguales y a partir de esta construcción infiere el Teorema de Thales*

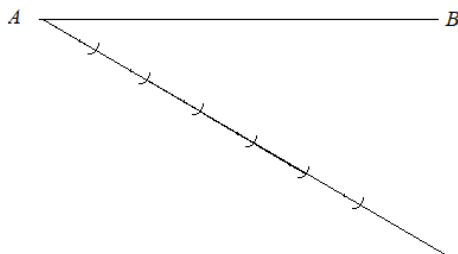
Dividir un segmento en n-partes iguales

Se quiere dividir un segmento en n-partes iguales. Por ejemplo, dividir el siguiente segmento AB en 6 partes iguales.

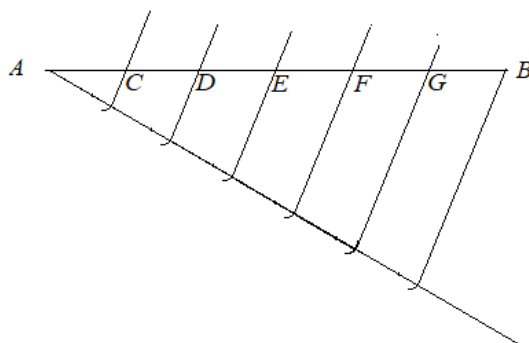


Trazamos una semi recta auxiliar a cualquier ángulo respecto al segmento AB . Tomamos una abertura cualquiera con el compás y marcamos segmentos sobre la recta auxiliar, uno tras otro, en este caso 6.

Los segmentos marcados en el segmento auxiliar son de igual magnitud, ya que así se construyeron.



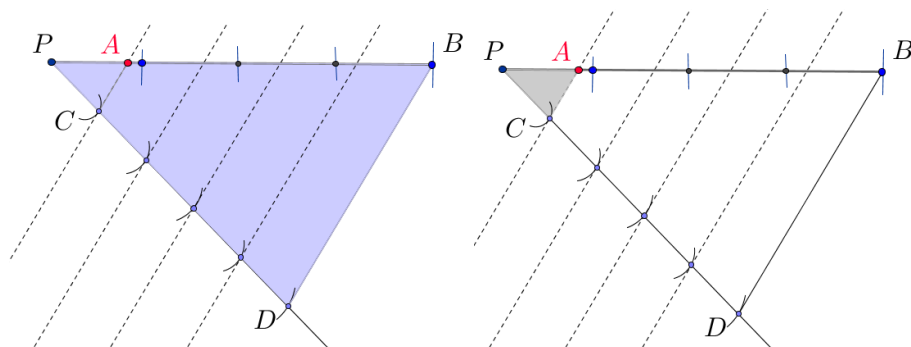
Ahora el punto final del sexto segmento lo unimos con el punto B, y a continuación trazamos líneas paralelas a este último segmento trazado



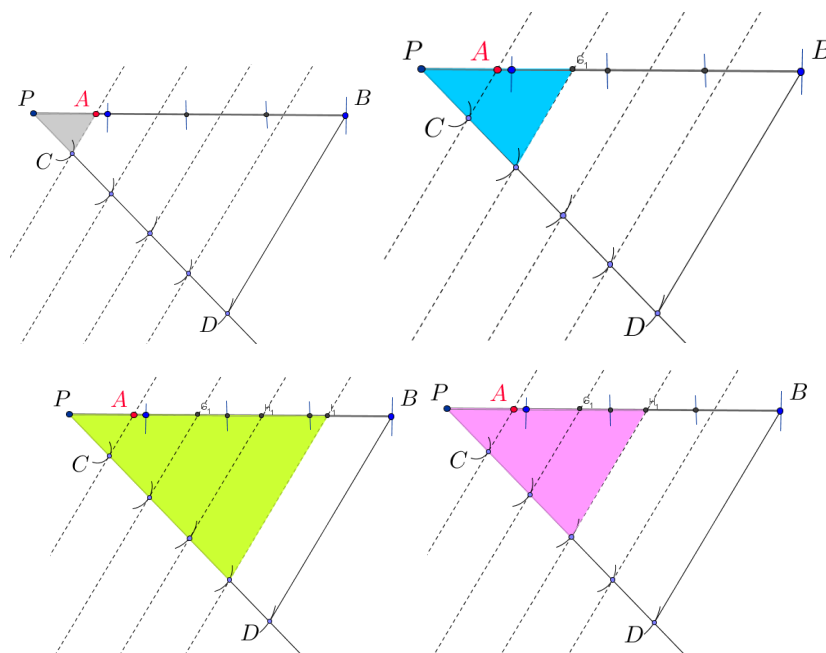
Los segmentos AC , CD , DE , EF , FG y GB , son segmentos de igual magnitud. Observar que los trazos en la recta auxiliar son de cualquier tamaño pero también iguales entre sí. Esta construcción nos permite enunciar el siguiente Teorema.

El ejercicio anterior es una muestra de cómo la semejanza y la división de segmento en n -partes iguales permiten deducir una proposición como el teorema de Tales.

El teorema de Tales se refiere a una pareja únicamente, pero puede extenderse a varias parejas de triángulos



El resultado indica que la propiedad es transitiva



Teorema de Thales. Si dos rectas cualesquiera son cortadas por rectas paralelas, los segmentos que determina en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes de la otra.

	$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \quad \text{de otra manera}$ $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC}$
--	---

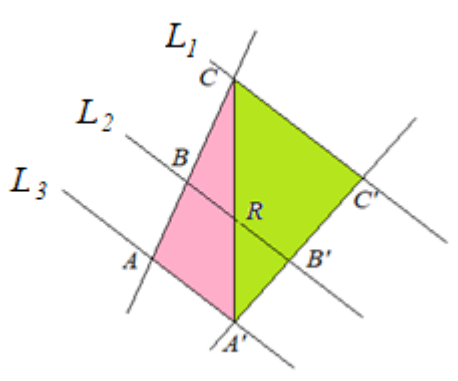
Este teorema nos permite calcular, por tanto, la longitud de un segmento si conocemos su correspondiente en la otra recta y la proporción entre ambos.

✓ **Aprendizaje**

✓ *Reconoce cuándo dos triángulos son semejantes con base en la definición*

Ejercicio 4.10. Las rectas L_1 , L_2 y L_3 son paralelas. Encontrar a) Que triángulos son semejantes entre sí. b) Las proporciones válidas en los triángulos sombreados. Usar el resultado del ejemplo anterior.

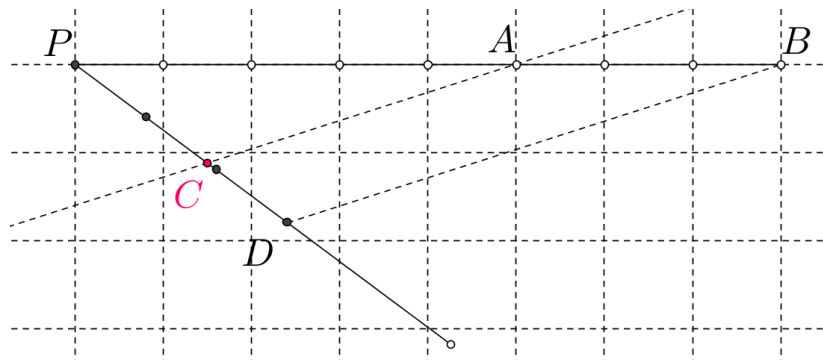
	Solución
--	-----------------

	<p>Tracemos una línea auxiliar CA'</p> <p>a) $\triangle CAA' \sim \triangle CBR$ $\triangle A'CC' \sim \triangle A'RB'$</p> <p>b) En $\triangle CAA'$ $\frac{CB}{BA} = \frac{CR}{RA'}$ En $\triangle A'CC'$ $\frac{CR}{RA'} = \frac{C'B'}{B'A'}$ Por lo tanto</p> $\frac{CB}{BA} = \frac{C'B'}{B'A'}$
---	--

Ejemplo 4.5 Encontrar la longitud de PC si los triángulos cumplen $\triangle PAC \sim \triangle PBD$ y $PD = 3$. La proporción entre los segmentos es $\frac{PA}{PB} = \frac{5}{8}$

Ya que $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PD}$ se tiene $\frac{PA}{PB} = \frac{5}{8} = \frac{PC}{PD} = \frac{PC}{3}$. Entonces $\frac{5}{8} = \frac{PC}{3}$ es decir,

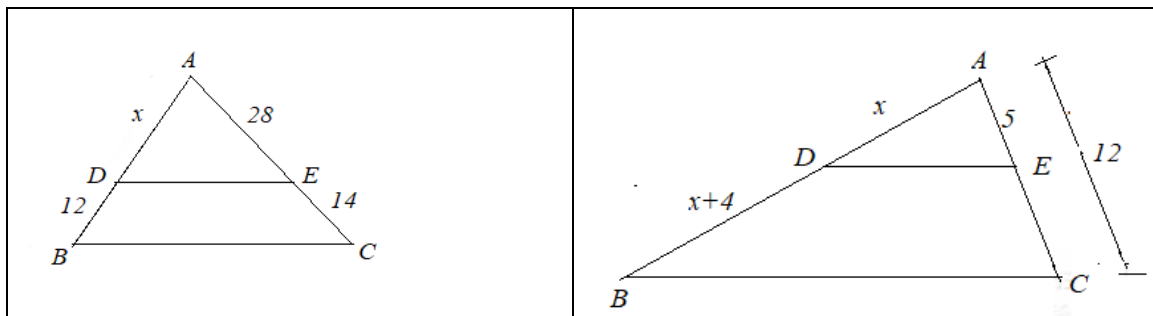
$PC = \frac{5}{8}(3) = \frac{15}{8}$. Que puede verse como $PC = 1 + \frac{7}{8}$ en la Figura



Es importante observar que los triángulos semejantes en el ejemplo anterior son $\triangle PAC$ y $\triangle PBD$.

Ejercicio 4.11 Encontrar la longitud del segmento PD utilizando el Teorema de Tales, si la proporción indicada $\frac{PA}{PB} = \frac{1}{6}$ y $PC = 3$ y $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PD}$. Reproducimos las unidades tal como se hizo en el ejemplo 7 y en los ejercicios 3 de la sección anterior para encontrar la magnitud de PD .

Ejercicio 4.12 Encontrar el valor de x en las siguientes figuras. En ambos casos $DE \parallel BC$



Ejercicio 4.13 Halla la altura de un árbol sabiendo que su sombra mide 12 metros y que en ese mismo instante la sombra de un palo de 1,5 metros mide 4,5 metros. **Solución 4 m.**

Ejercicio 4.14 Calcular la altura de la Giralda de Sevilla, sabiendo que su sombra mide 48,75 metros y que en ese mismo instante una persona de 1,8 metros proyecta una sombra de 0,9 metros. **Solución 97.5 m**

Ejercicio 4.15 Cuenta la leyenda que Tales para medir la altura de la pirámide de Keops colocó un palo de un metro en el centro de una circunferencia de radio 1m y esperó hasta que la sombra midiese exactamente un metro, instante en el que la sombra de la pirámide media 147 m ¿cuánto mide de alto la pirámide. **Solución 147 m**

Ejercicio 4.16 Sergio sale en una foto con su amigo Enrique. en la foto Sergio mide 4,5 cm y Enrique 4,25 cm. Si en la realidad Enrique mide 1,7 metros, ¿Cuánto mide Sergio? **Solución 1.8 m**

✓ **Aprendizaje**

✓ *Reconoce y justifica el Teorema de Pitágoras y su recíproco, desde el punto de vista geométrico y algebraica*

Teorema de Pitágoras

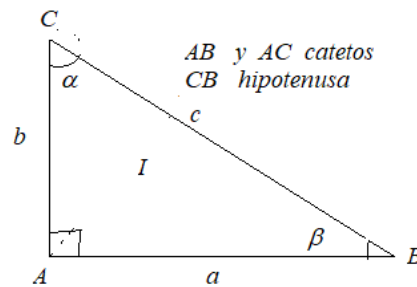
Uno de los resultados más conocidos en matemáticas es el teorema de Pitágoras. Se tienen vestigios de que este resultado se conocía en Mesopotamia, pero la demostración de tal resultado se describe hasta la antigua Grecia y se atribuye al personaje del cual lleva su nombre.

Este resultado se cumple únicamente cuando uno de los ángulos internos de un triángulo es recto. Una demostración de este teorema, existen varias, una se basa en la semejanza y es la que describiremos a continuación después de su enunciado

Teorema de Pitágoras. En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Demostración. En el siguiente triángulo rectángulo, se debe demostrar que $a^2 + b^2 = c^2$

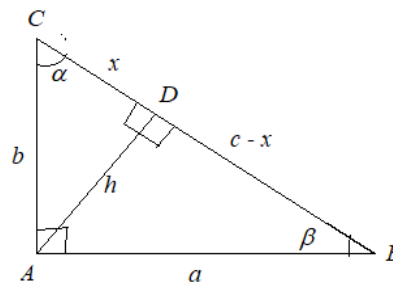
Vamos a utilizar el concepto de semejanza para la demostración.



Primero vamos a trazar la altura correspondiente al vértice A.

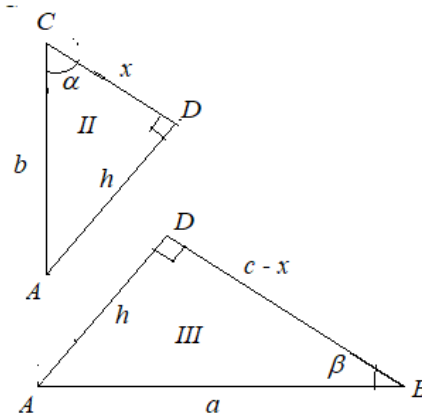
Utilizamos h para representar la medida de la altura CD.

Observamos que en el vértice D se tienen dos ángulos rectos.

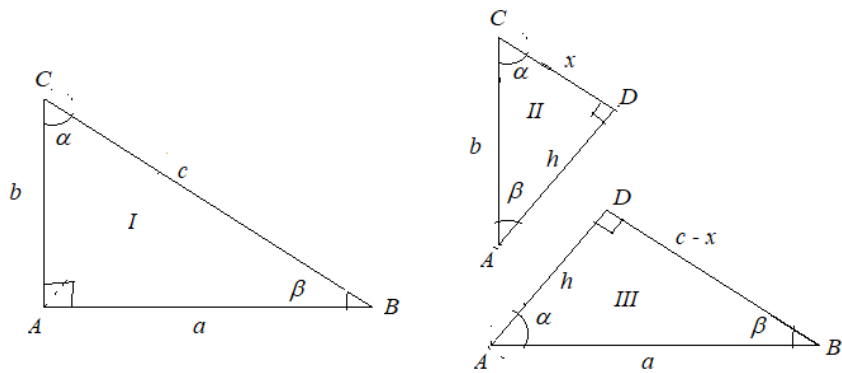


Observemos que los triángulos I y II tienen igual dos ángulos, el ángulo recto y el ángulo α , por lo tanto, el tercer ángulo del triángulo II , es igual a β . Podemos concluir que los triángulos I y II son semejantes.

Observemos que los triángulos I y III tienen igual dos ángulos, el ángulo recto y el ángulo β , por lo tanto, el tercer ángulo del triángulo III , es igual a α . Podemos concluir que los triángulos I y III son semejantes.



Ahora establecemos las correspondientes proporciones



Las proporciones correspondientes entre que los triángulos I y II , son:

$$\left[\frac{b}{x} = \frac{c}{b} \right] = \frac{a}{h} \quad \text{de aquí} \quad b^2 = cx \quad (1)$$

Las proporciones correspondientes entre que los triángulos I y III , son:

$$\frac{b}{h} = \left[\frac{a}{c-x} = \frac{c}{a} \right] \quad \text{de aquí} \quad a^2 = c(c-x) \quad (2)$$

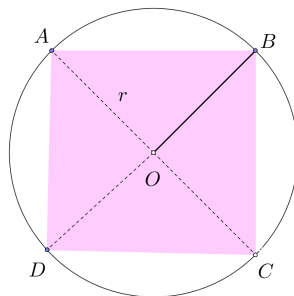
De la ecuación 2 obtenemos $a^2 = c^2 - cx$, y como $cx = b^2$, se tiene_

$$a^2 = c^2 - cx = c^2 - b^2, \text{ finalmente}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{lo que queríamos demostrar}$$

Aplicaciones del teorema de Pitágoras

Ejemplo 4.6 Encuentra el lado del cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 1 y en general de radio r .



Ya que el cuadrado está inscrito en la circunferencia, sean AB, BC, CD , y DA los lados del cuadrado y O el centro de la circunferencia, entonces $OA = r$, y por lo tanto $OA = r = OB = OD = OC$

El $\angle AOB = 90^\circ$, entonces por el Teorema de Pitágoras

$$(AB)^2 = (AO)^2 + (OB)^2$$

$$\text{Así que } (AB)^2 = (r)^2 + (r)^2 = 2r^2$$

y entonces $AB = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}$, En el caso de que $r = 1$,

$$AB = \sqrt{2}$$

Ejemplo 4.7 Encontrar el área de un triángulo equilátero si su lado mide l

Como el triángulo es equilátero, al trazar la altura en cualquiera de sus lados, ésta coincide con la mediatriz, así que corta al lado BC en el punto medio, lo nombramos M . Entonces el $\triangle AMC$ es un triángulo rectángulo, de modo que se cumple el teorema de Pitágoras

$$(AC)^2 = (MC)^2 + (AM)^2$$

Ya que $AC = l$, y $AM = \frac{l}{2}$, entonces

$$(l)^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + (AM)^2$$

$$\text{,de donde } (AM)^2 = (l)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} (l)^2$$

Entonces

$$AM = \sqrt{\frac{3}{4} l^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

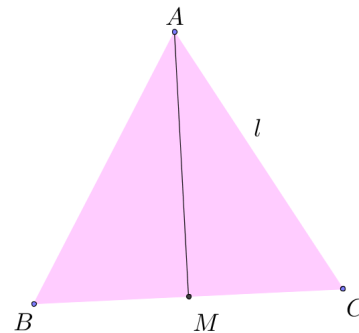
$$\text{El área del triángulo es } A = \frac{l\left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

Corolario. El producto de los dos catetos, de un triángulo rectángulo, coincide con el producto de la hipotenusa por la altura sobre ella.

$$\left[\frac{b}{x} = \frac{c}{b}\right] = \frac{a}{h} \quad \text{de aquí, tenemos: } ch = ab \quad \text{por lo tanto} \quad c = \frac{ab}{h}$$

Corolario. La altura construida sobre la hipotenusa es $h^2 = x(c-x)$

$$\frac{b}{h} = \left[\frac{a}{c-x} = \frac{c}{a}\right] \quad \text{se tiene} \quad ah = b(c-x) \quad (4)$$



$$a = \frac{bh}{x} \quad \text{y de ecuación (4)} \quad a = \frac{b(c-x)}{h}$$

Igualando ambas ecuaciones, se tiene $h^2 = x(c-x)$.

Del mismo modo, es fácil observar también que se cumple el resultado contrario al Teorema de Pitágoras, el denominado recíproco de Pitágoras.

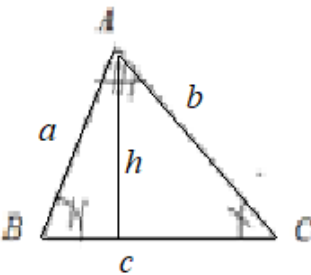
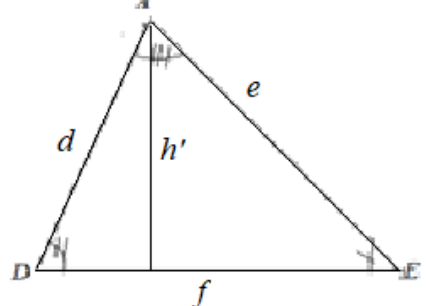
Teorema. Si en un triángulo se cumple que el cuadrado de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados, entonces el triángulo es rectángulo.

Ejercicio 4.17 Construir cuadrados sobre los lados de un triángulo rectángulo y mostrar que la suma de las áreas de los cuadrados contruidos sobre los catetos, es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

✓ **Aprendizaje**

✓ *Calcula perímetros y áreas en triángulos semejantes y la razón entre ellos*

Razón entre perímetros y entre áreas de triángulos semejantes

	
Perímetro $\triangle ABC$ $P = a + b + c$	Perímetro $\triangle ADE$ $P' = d + e + f$
Proporción $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = \frac{h}{h'} = n$	Por lo tanto $a = nd$ $b = ne$ $c = nf$
Perímetro $P = nd + ne + nf$ $P = n(d + e + f) = nP'$	Podemos afirmar que los perímetros están en la misma proporción que los lados correspondientes, esto es: $\frac{P}{P'} = n$
Área $\triangle ABC$ $A = \frac{bh}{2}$	Área $\triangle ADE$ $A' = \frac{f h'}{2}$

<p>Área</p> $A = \frac{(nf)(nh')}{2} = n^2 \frac{f h'}{2} = n^2 A'$	<p>Podemos afirmar que las áreas están en la proporción</p> $\frac{A}{A'} = n^2$
---	--

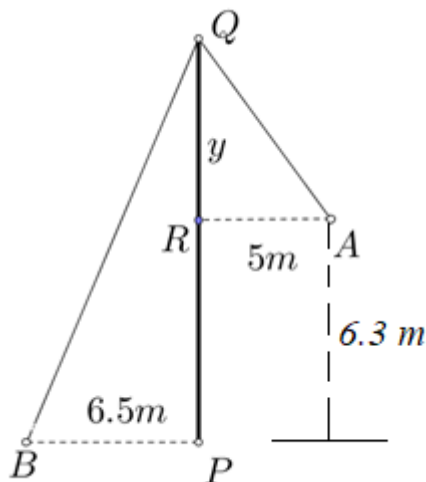
✓
✓
✓

✓ **Aprendizaje**

✓ *Utiliza los conocimientos adquiridos en esta unidad, en la resolución de problemas*

Problemas de longitudes y áreas que involucran semejanza, congruencia y Teorema de Pitágoras. Teorema de la altura de un triángulo rectángulo.

Ejemplo 4.8 Un antena de una empresa telefónica se va a instalar sobre un terreno y se fija desde su punto más alto por dos cuerdas metálicas que se sujetarán a dos puntos. Uno de estos puntos se encuentra a una altura de 6.3m y el otro punto está sobre el piso. Si la distancia de estos puntos a la base de la antena es de 5m y de 6.5 respectivamente y la altura de la antena es de 12 metros, encontrar la longitud de las cuerdas AQ y BQ en cada caso.



La antena se representa por el segmento PQ, entonces $PQ = 12$. Sea el punto A que se encuentra a la altura de 6.3 m y sea B el punto que está sobre el piso.

Consideremos el punto R el extremo que determina la distancia del punto A a la antena.

Sea $QR = y$ y $RP = 6.3$ entonces $QR = y = 5.7$

Por el teorema de Pitágoras, Se cumple que

$$(BQ)^2 = (BP)^2 + (PQ)^2$$

$$(AQ)^2 = (y)^2 + (AR)^2$$

entonces

$$(BQ)^2 = (6.5)^2 + (12)^2$$

$$BQ = \sqrt{(6.5)^2 + (12)^2} \approx 13.647$$

Por otro lado

$$(AQ)^2 = (y)^2 + (AR)^2$$

$$(AQ)^2 = (5.7)^2 + (5)^2$$

$$AQ = \sqrt{(5.7)^2 + (5)^2} = \sqrt{32.49 + 25}$$

$$= \sqrt{57.49}$$

Entonces $AQ \approx 7.582$

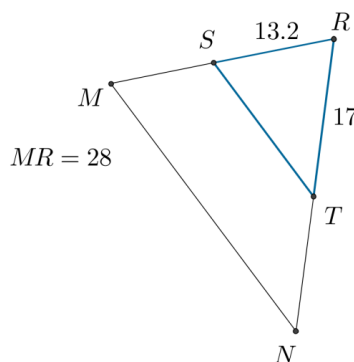
Ejemplo 4.9.- El segmento MN es paralelo al lado ST del $\triangle RST$, (Figura 12). Encontrar la longitud del segmento si $MR = 28$.

Solución

:

Ya que hay segmentos paralelos, entonces se tienen pares de ángulos iguales, a saber:

$$\angle RST = \angle RMN \quad \text{y} \quad \angle STR = \angle MNR$$



Observar que $\angle MRN = \angle SRT$, aunque esto es claro, pues es un ángulo que comparten ambos triángulos. Por tanto ambos triángulos son semejantes:

$$\triangle RST \sim \triangle RMN$$

Por tanto sus lados son proporcionales:

$$\frac{RS}{RM} = \frac{ST}{MN} = \frac{TR}{NR}$$

De donde se tiene $\frac{13.2}{28} = \frac{ST}{MN} = \frac{17}{NR}$, esto es $\frac{13.2}{28} = \frac{17}{NR}$, $NR(13.2) = (17)28$

$$NR = \frac{(17)(28)}{13.2} = \frac{476}{13.2} = \frac{119}{3.3} \approx 36.0$$

Ejemplo 4.10. Considera los triángulos de la figura y la medida indicada en sus segmentos, determina si son semejantes o no.

Solución:

Consideremos las proporciones de acuerdo a los ángulos que nos parezcan iguales

En el par de triángulos (a), la expresión de proporcionalidad es:

$$\frac{10}{6} = \frac{14}{8} = \frac{12}{7} \text{ ¡¡¡¡ Falso!¡}$$

Ya que $\frac{5}{3} \neq \frac{7}{4}$ y además $\frac{12}{7} \neq \frac{7}{4}$
pues $48 \neq 49$, también $\frac{10}{3} \neq \frac{12}{7}$.

Por tanto esta pareja de triángulos no son semejantes.

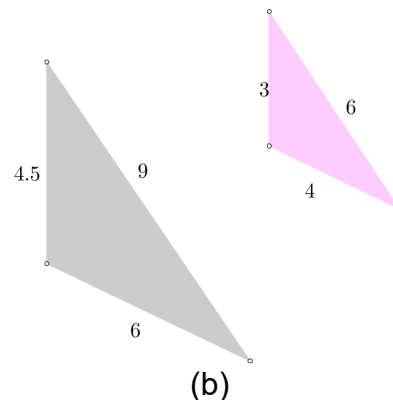
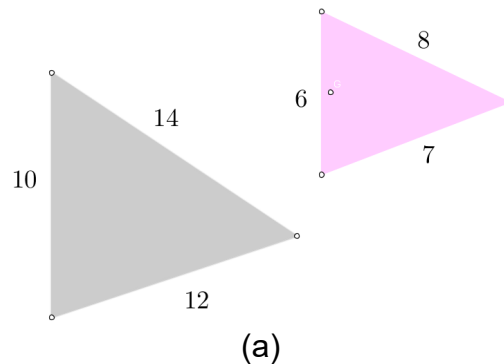
Para el caso de la pareja de triángulos (b), la expresión es :

$$\frac{4.5}{3} = \frac{6}{4} = \frac{9}{6}$$

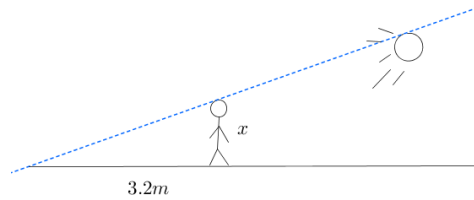
La cual es cierta ya que,

$$(4.5)(4) = 6(3) \text{ y } (6)(6) = (9)(4).$$

Por tanto los triángulos de la figura (b) sí son semejantes, y entonces sus ángulos correspondientes son iguales. Para identificarlos es conveniente indicar tales triángulos con letras.

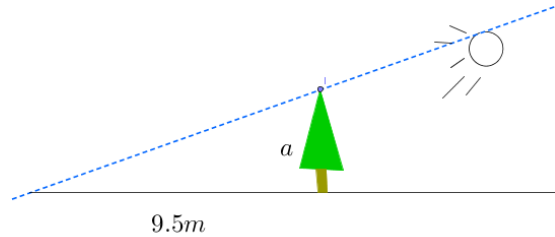


Ejemplo 4.11.- En una hora determinada del día encuentra la proporción entre la sombra (3.2m) y la altura x de una persona. Si la altura de esta persona es de 1.58m y a la misma hora un árbol proyecta una sombra de 9.5m encuentra la altura del árbol.



Solución: $\text{proporción} = \frac{x}{3.2}$,

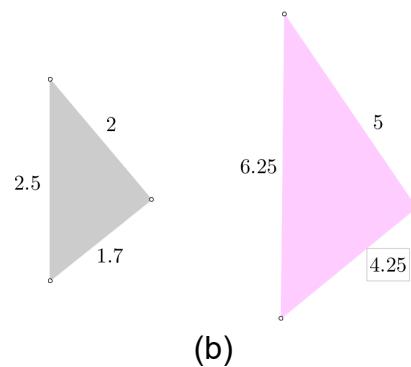
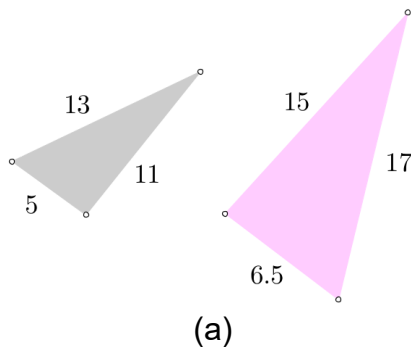
Si la altura de la persona es de 1.58m y ya que los triángulos formados por la sombra, del árbol y el rayo del sol, es semejante al formado por la persona, sombra y rayo del sol, entonces

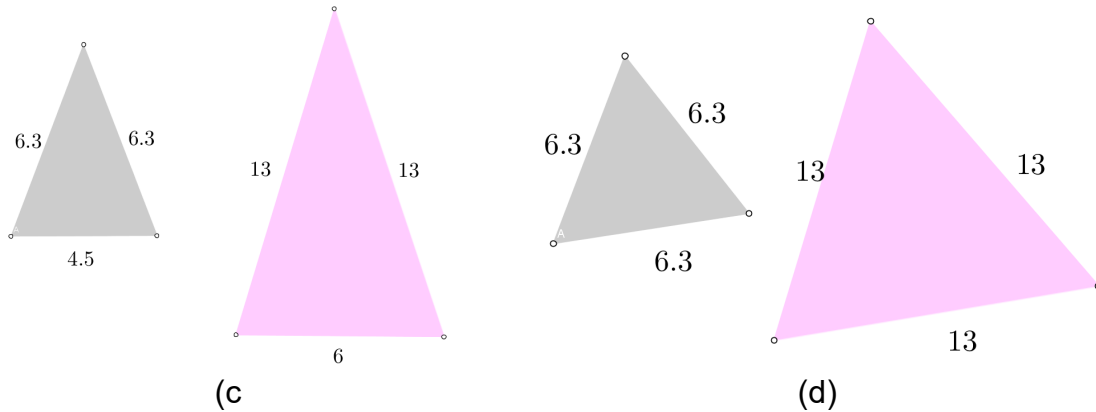


$\frac{1.58}{3.2} = \frac{a}{9.5}$, la altura del árbol

$$a = \frac{1.58}{3.2} (9.5) \approx 4.69$$

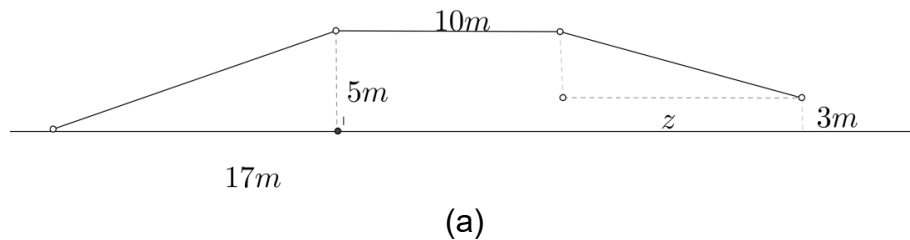
Ejercicio 4.18. - Muestra si son semejantes o no los pares de triángulos siguientes





Solución (a) NO (b) Sí, c) NO d) Sí

Ejemplo 4.12- Para transportar autos entre dos islas, se utiliza un puente de $30m$ de largo que se compone de dos rampas y una zona plana como se muestra en la figura. La altura a la que asciende es $5m$ y debe acceder al barco que se encuentra a $3m$ del piso. Si el inicio de la rampa está a $17m$ de la zona plana y ésta mide $10m$ para después descender. Encuentra la longitud de las rampas



Solución:

Observemos que se forman triángulos rectángulos, asignamos letras para identificar catetos e hipotenusa (figura b). En un caso los catetos miden $17m$ y $5m$ entonces

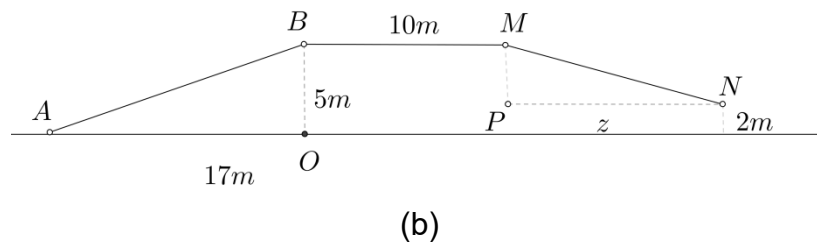
$$(17)^2 + (5)^2 = (AB)^2$$

Entonces

$$\sqrt{(17)^2 + (5)^2} = AB$$

De aquí $AB = \sqrt{314} \approx 17.72$

Y del mismo modo $MN = \sqrt{(z)^2 + (MP)^2} = \sqrt{(13)^2 + (3)^2} = \sqrt{178} \approx 13.34$



Ejemplo 4.13 En un almacén de tubos de acero, se apilan en grupos como se muestra en la figura (a). Si el radio de los tubos es de 0.40 m , ¿cuál será la altura del estibado?

Solución:

Si se estiban tres tubos como se muestra en la figura (b), para calcular la altura de este grupo de tres tubos necesitamos calcular la altura del triángulo que se encuentra en el centro y aumentar dos veces el radio. El triángulo es equilátero y la longitud de sus lados es $2r = 0.80$, así que

Por el teorema de Pitágoras

$$(0.80)^2 = (0.40)^2 + (h)^2 \text{ entonces}$$

$$h = \sqrt{(0.80)^2 - (0.40)^2} = \sqrt{0.64 - 0.16} = \sqrt{0.48}$$

Así que la altura de este grupo de tres tubos es

$$2(0.40) + \sqrt{0.48} = 0.8 + \sqrt{0.48}$$

En forma análoga, para la figura (a) se tiene un triángulo equilátero (figura c) cuyos lados miden

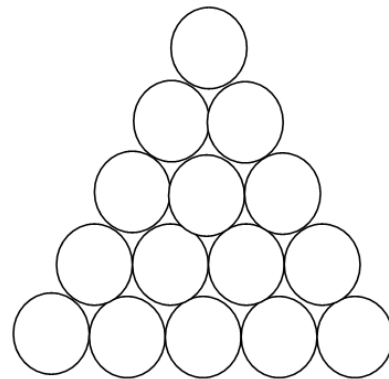
$4(2r) = 4(0.80) = 3.2$, entonces por el teorema de Pitágoras se tiene

$$(3.2)^2 = (1.60)^2 + (h)^2 \text{ y así}$$

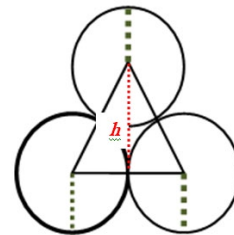
$$h = \sqrt{(3.2)^2 - (1.6)^2} = \sqrt{10.24 - 2.56} = \sqrt{7.68}$$

Así que la altura de este grupo de tres tubos es

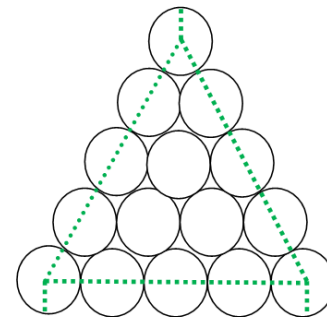
$$2(0.4) + \sqrt{7.68} = 0.8 + \sqrt{7.68}$$



(a)

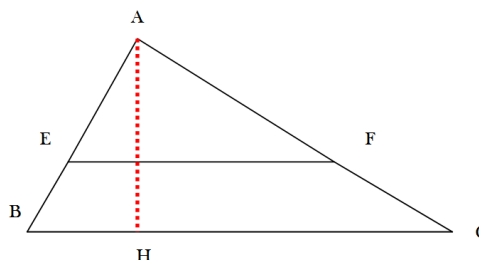


(b)



(c)

Ejemplo 4.14- Considera los triángulos semejantes de la figura, $\triangle AEF \sim \triangle ACB$, además $AE = 3.2$, $AB = 4.8$, $AF = 4.6$, $AC = 6.9$ y $EF = 5.2$



Si el segmento $HC = 5.4$, encontrar la proporción entre los lados, calcular el área de cada triángulo y mostrar cuál es la proporción entre las áreas.

Solución:

La proporción entre los lados de los triángulos es

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{3.2}{4.8} = \frac{4.6}{6.9} = \frac{5.2}{BC} = r$$

Entonces es claro que $BC = 7.8$, y como $HC = 5.4$ se tiene que la altura es

$$HA = \sqrt{(6.9)^2 - (5.4)^2} = \sqrt{47.61 - 29.16} = HA = \sqrt{18.45}$$

Y el área del $\triangle ABC$ está dada por

$$\frac{(BC)(HA)}{2} = \frac{(7.8)(\sqrt{18.45})}{2}$$

Mientras que la altura del $\triangle ACB$ es semejante también a la altura z del $\triangle AEF$, se cumple que $\frac{3.2}{4.8} = \frac{z}{\sqrt{18.45}}$ entonces $z = \frac{(3.2)(\sqrt{18.45})}{4.8}$ y el área de $\triangle AEF$ es

$$\frac{(EF)(z)}{2} = \frac{(5.2)(3.2)(\sqrt{18.45})}{2(4.8)} = \frac{(5.2)(3.2)(\sqrt{18.45})}{(4.8)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(5.2)(3.2)(7.8)(\sqrt{18.45})}{(4.8)(7.8) \cdot 2}$$

Entonces

$$\text{área de } \triangle AEF = \frac{(5.2)(3.2)(7.8)(\sqrt{18.45})}{(4.8)(7.8) \cdot 2} = \left\{ \frac{(3.2)}{(4.8)} \right\} \left\{ \frac{(3.2)}{(7.8)} \right\} (\text{área de } \triangle ABC)$$

Podemos ver que se encuentra dos veces la proporción de la semejanza entre los triángulos, esto es

$$\text{área de } \triangle AEF = r^2(\text{área de } \triangle ABC)$$

Ejemplo 4.15. Considera los triángulos semejantes del ejercicio anterior. Muestra que la proporción entre los lados dada por

$$\frac{3.2}{4.8} = \frac{4.6}{6.9} = \frac{5.2}{BC} = r$$

también determina una proporción entre las áreas de dos rectángulos formados por ambos triángulos, la cual será r^2 .

En la figura (a) se muestra el rectángulo que se forma con $\triangle ACB$, el área de éste es

$$(AC)(AB) = (6.9)(4.8),$$

mientras que el área del rectángulo formado por $\triangle AEF$ es

$$(AE)(AF) = (3.2)(4.6).$$

Entonces

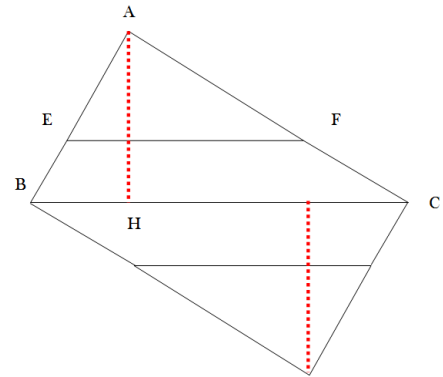
$$\begin{aligned} \text{área del rectángulo } AEF &= \\ &= (3.2)(4.6) \frac{(4.8)(6.9)}{(4.8)(6.9)} = \frac{(3.2)(4.6)}{(4.8)(6.9)} (4.8)(6.9) \end{aligned}$$

Esto significa que

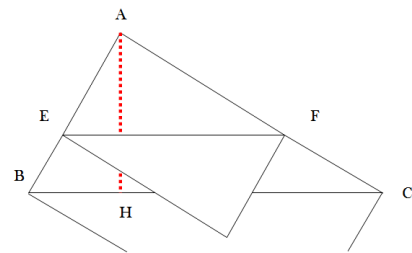
$$\text{área rectángulo } AEF = \frac{(3.2)(4.6)}{(4.8)(6.9)} (4.8)(6.9)$$

es decir,

$$\begin{aligned} \text{área rectángulo } AEF &= \\ r^2 (\text{área rectángulo } ABC) \end{aligned}$$



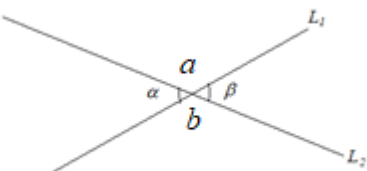
(a)



(b)

Solución a algunos ejercicios de la unidad 4

Ejercicio 4.3

	<p>Definimos los ángulos a y b</p> $\sphericalangle \alpha + \sphericalangle a = 180^0$ $\sphericalangle \beta + \sphericalangle a = 180^0$ <p>Restamos ecuaciones</p> $\sphericalangle \alpha - \sphericalangle \beta = 0^0$ <p>Por lo tanto $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta$</p>
---	---

Ejercicio 4.4

Congruentes triángulo VI con triángulo VIII. Criterio LAL

Congruentes triángulo IV con triángulo IX. Criterio ALA

Congruentes triángulo V con triángulo VII. Criterio LLL

Ejercicio 4.5

1. Radios de la circunferencia 1
2. Radios de la circunferencia 2
3. Lado común

Ejercicio 4.6

1. son radios de circunferencias trazadas con radios iguales.
2. son radios de circunferencias trazadas con radios iguales.
3. es un lado común.
4. por el principio de congruencia (L.L.L)
5. por ser ángulos homólogos de triángulos congruentes.

Ejercicio 4.7

1. son radios de una misma circunferencia
2. son radios de circunferencias trazadas con radios iguales
3. lado común
4. por el principio de congruencia (L.L.L)
5. por ser ángulos homólogos de triángulos congruentes. LQQD

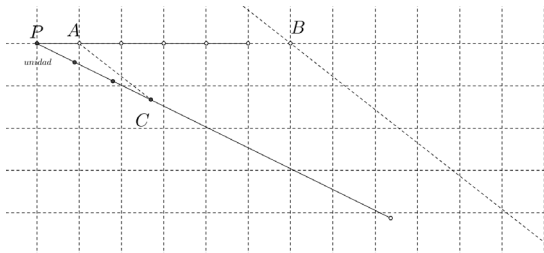
Ejercicio 4.8

1. Postulado de Euclides
2. Lados de triángulo isósceles
3. Axioma. Si a cosas iguales agregamos cosas iguales, los resultados son iguales
4. Ángulo común
5. Por criterio de congruencia LAL
6. Por ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes. Lo que queríamos demostrar.

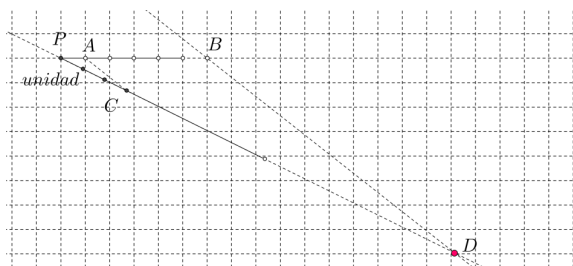
Ejercicio 4.11 Se divide el segmento PB se divide en 6 partes iguales, así que $6PA = PB$, y ya que
$$\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PD}$$

Se tiene que $\frac{1}{6} = \frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PD}$, esto es $\frac{1}{6} = \frac{3}{PD}$, entonces $PD = 3(6) = 18$.

$PA = 1$, $PB = 6$, $PC = 3$.



Será necesario prolongar el segmento que contiene a PC para encontrar al segmento PD (Figura). Al trazar las unidades se verá que $PD = 18$



Bibliografía

- Cresa, Jacobo P *Elementos geométricos de Euclides*, 1689 Archive.org
- Fillooy, E. y Zubieta, G. (2001) *Geometría*. México: Grupo Editorial Iberoamericana
- García Arenas, Bertran Infante. *Geometría e Experiencias*, Editorial Alhambra, México, 1990
- Heath, Thomas Sir, *Los trece libros de los Elementos de Euclides* Vol II, Dover publications, inc. Segunda edición, Nueva York
- Howard Eves, *Estudio de las Geometrías*, tomos I y II, UTEHA, 1976
- Lozano, C. y Vázquez, A. (2009). *Geometría y trigonometría*. México: Prentice Hall.
- Polya, G. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas* (1ª ed., 9ª reimp. ed.). México: Trillas
- Smith, S., Charles R., Dossey J., Keedy M., y Bittinger M., (2001). *Álgebra*. México: Pearson
- Swokowski, E. y Cole, J. (). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México, 2011
- Wenworth, Smith. *Geometría Plana y del Espacio*. Ed. Porrúa. México. 1980.
- Zubieta, F. *Álgebra Elemental*, México 1966
- Moise, Downs. *Geometría Moderna*. Ed. Addison Wesley Iberoamericana. 1995
- Hemmerling. *Geometría Elemental*. Ed. Limusa. 2003

Fuentes consultadas

- Finazzi, Celia María, La solución de ecuaciones algebraicas, una visión histórica, Revista Ciencias, enero 1990. México
- Hernández Patricio, L.J. *Sobre los principios fundamentales de la Geometría* Comentarios sobre los Elementos
- Meavilla Seguí, Vicente, *Álgebra geométrica, Notas históricas*. Divulgamat, España 2007
- Mora Meneses, Esther, *Las matemáticas del Islam*, Divulgamat, España 2001
- Morales Miguel Ángel, *La circunferencia de Feuerbach o por qué me encantan los triángulos*, Diario El País, El Aleph, 2016
- Yuste, Piedad. *Ecuaciones cuadráticas y procedimientos algorítmicos. Diofanto y las matemáticas en Mesopotamia*. Revista Theoría 2008, España

Mesografía

- <https://www.ecured.cu> consulta: /03/2017
- <http://www.aev.cgfi.ipn.mx> consulta: /05/2017
- <http://portalacademico.cch.unam.mx/alumno> consulta: 02/2017
- <https://www.geogebra.org> consulta: /03/2017
- http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Otros/01_1_b.html consulta: /11/2016
- <http://prop18.blogspot.mx/2006/06/libro-i-de-euclides.html> consulta: /10/2016

<http://www.webdianoia.com/presocrat/tales.htm> consulta: /09/2016

<http://www.euclides.org/menu/articles/aarticle1.htm> consulta: /04/2017

<http://www.revistaciencias.unam.mx> consulta: /04/2017

<http://vps280516.ovh.net/divulgamat15> consulta: /04/2017

<https://r4z0rbl4ck.wordpress.com/tag/codigo-java-solucion-de-ecuaciones-cuadraticas/>

Ligas de Imágenes de ESCHER

¹ <http://hotelkafka.com/blogs/Escher/labels/Escher.html>

² <http://hotelkafka.com/blogs/Escher/labels/Escher.html>

³ <http://news.zing.vn/thu-tai-tinh-mat-post3823.html>

⁴ <http://hotelkafka.com/blogs/Escher/labels/Escher.html>