



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

PLANTEL ORIENTE



Informe de Área Complementaria

Cuaderno de Trabajo de Matemáticas IV

2022-2023

Integrantes

GRUPO 401-C

Francisco Javier Rodríguez Pérez

Leticia Aguilar Pascual

José Germán Ávila Vicenteño

Javier Bustos Rosas

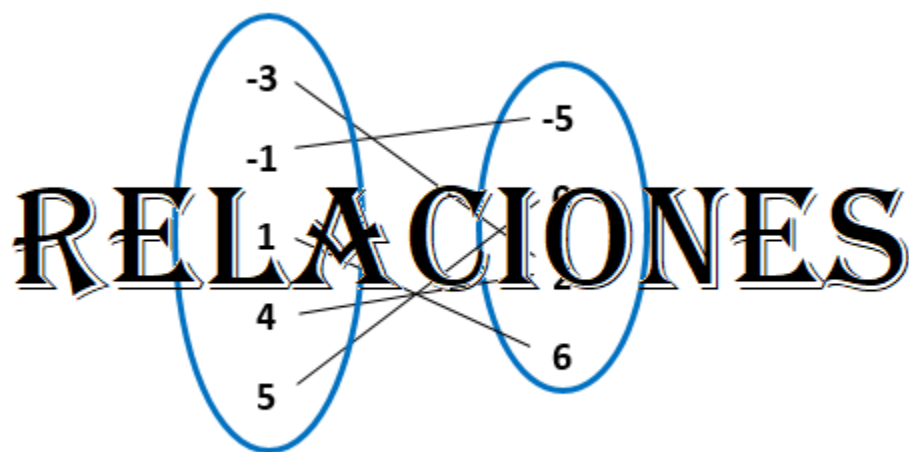
Araceli Cabrera Ortiz

Esperanza Martínez López

Miguel Ángel Rivera Espinosa

Ivonne Zenteno Canela

UNIDAD 0



UNIDAD 0. RELACIONES**Apéndice**

| | |
|--|--|
| 1. Introducción. Relaciones | |
| 2. Función de variable real | |
| 3. Propiedad de tricotomía | |
| 4. Gráfica de una función. Dominio y Rango | |
| 5. Ejercicio para evaluar una expresión algebraica | |
| 6. Ejercicios Generales | |
| 7. Tabla de especificaciones | |
| 8. Examen para evaluación | |

Introducción

Relaciones

En el curso se trabajarán diversas clases de funciones. Se consolidan e integran conceptos y procedimientos de los ejes temáticos que el alumno ha asimilado en los cursos anteriores, tanto en el manejo de expresiones algebraicas como del plano cartesiano.

En este primer capítulo se integran ideas generales utilizadas para presentar el concepto de *relación* que permitirán establecer el concepto de *función* de una manera intuitiva, utilizando inicialmente la representación tabular (parejas ordenadas) y la representación gráfica. La definición formal de *función* requiere por parte del alumno, de una madurez y conocimientos algebraicos bien fundamentados y estructurados la cual se espera lograr al final del curso.

Los aprendizajes que se pretenden en esta introducción son:

- *Explora diferentes relaciones, reconociendo las condiciones necesarias para determinar si una relación es función, la simboliza y distingue el dominio y el rango*
 - ✓ Identificar una función a partir de pares ordenados.
 - ✓ Identificar una función a partir de un gráfico en coordenadas cartesianas.
 - ✓ Encontrar el dominio y rango de una función en una representación de pares ordenados.
 - ✓ Encontrar el dominio y rango de una función en una representación gráfica.
 - ✓ Identificar una función a partir de gráficos de Venn- Euler.
 - ✓ Evaluar una expresión algebraica.
 - ✓ Identificar un problema con números enteros y uno con números racionales.

El tiempo mínimo estimado para el capítulo es de 5 horas.

En el capítulo se requieren los siguientes materiales:

- Plumas de colores varios
- Calculadora científica
- Lápiz y goma
- Cuaderno para anotaciones extras

Relaciones

Vamos a obtener conjuntos de pares ordenados para establecer el concepto de relación

Ejercicio I.1. Se lanzan dos dados libres una vez, los dados sin defectos. Considerar los puntos que muestran en sus caras superiores.

a) ¿Cuáles son los resultados posibles del dado 1?

b) ¿Cuáles son los resultados posibles del dado 2?

c) Llenar la tabla de los resultados posibles en las caras de los dos dados.

| | | | | | | | | | | | | |
|--------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Dado 1 | | | | | | | | | | | | |
| Dado 2 | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | |
|--------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Dado 1 | | | | | | | | | | | | |
| Dado 2 | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | |
|--------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Dado 1 | | | | | | | | | | | | |
| Dado 2 | | | | | | | | | | | | |

Para las actividades siguientes, utilizar x para representar los valores de puntos del dado 1 y utilizar y para representar los valores de puntos del dado 2.

d) Llenar la tabla siguiente de modo que los puntos en la cara del dado 1 muestren un **número menor** de puntos a los que muestra la cara del dado 2.

| | | | | | | | | |
|--------|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Dado 1 | | | | | | | | |
| Dado 2 | | | | | | | | |

| | | | | | | | |
|--------|--|--|--|--|--|--|--|
| Dado 1 | | | | | | | |
| Dado 2 | | | | | | | |

e) ¿Cuál es la expresión algebraica que indica lo anterior? _____

f) Llenar la siguiente tabla de modo que los puntos de la cara del dado 1 sean igual a los puntos que muestra la cara del dado 2.

| | | | | | | |
|--------|--|--|--|--|--|--|
| Dado 1 | | | | | | |
| Dado 2 | | | | | | |

g) ¿Cuál es la expresión algebraica que indica lo anterior? _____

h) Para la tabla siguiente, el número de puntos en la cara del dado 1 debe ser el doble del número de puntos que se indican en el dado 2

| | | | |
|--------|--|--|--|
| Dado 1 | | | |
| Dado 2 | | | |

i) ¿Cuál es la expresión algebraica que indica lo anterior? _____

Relación

Definición. Un conjunto de pares ordenados generados a partir de una regla de correspondencia entre los elementos de un primer conjunto A con los elementos de un segundo conjunto B, se define como una **relación** y se representa aquí por la letra **R**.

$$R = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n) \mid x_i \in A, y_i \in B\}$$

Una relación R se llama función, si no existen pares ordenados que tengan el mismo primer elemento.

Otra manera de esta definición es la siguiente:

La relación R no es una función si existen al menos dos pares ordenados con el mismo primer elemento, es decir:

Si $(x_p, y_p) \in R$ y $(x_m, y_m) \in R$ tales que $x_p = x_m$ y $y_p \neq y_m$ entonces la relación no corresponde a una función.

Si la relación R es una función f , entonces se representa por

$$R = f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n) \mid x_i \in A, y_i \in B\}$$

En donde el conjunto A , los primeros elementos de los pares ordenados, se define como el **dominio de la función** y al conjunto B , los segundos elementos de los pares ordenados, como el **rango de la función**.

$$\text{Dom } f = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$$

$$\text{Ran } f = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$$

Ejercicio 1.2. ¿Las relaciones obtenidas en el ejercicio 1.1 son funciones?

¿por qué? _____

Las reglas obtenidas en los incisos (e), (g) e (i) se conocen como *reglas de correspondencia*, ya que hacen corresponder a los elementos del primer conjunto elementos del segundo conjunto.

La definición formal de una función se describe de la siguiente manera:

Definición. Una función de un conjunto A en un conjunto B , es una regla de correspondencia (relación) que asocia a todos y cada uno de los elementos del conjunto A con uno y solamente uno, elemento del conjunto B .

Lo que puede representarse como

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow f(x) = y$$

donde f representa la función de un conjunto A en un conjunto B .

Al conjunto A se le llama **dominio de la función f** y al conjunto B se le llama **contradominio de la función f** .

$$A = \text{Dom } f \quad ; \quad B = \text{Cont } f$$

$f(x) = y$ se lee : *imagen de x bajo la función f* .

Definición. El rango de la función f es el conjunto de la imagen de todos los puntos del dominio de f .

$$\text{Ran } f = \{f(x) ; x \in A\}$$

Ejercicio I.3. Escribir el dominio y rango de las funciones del ejercicio I.1

| función | dominio | rango |
|---------|---------|-------|
| | | |
| | | |
| | | |

Función de variable real

En el curso de matemáticas IV, se trabaja con funciones reales de variable real; es decir, con funciones cuyo dominio y contradominio son subconjunto de los números reales. Esto puede simplificarse en la expresión siguiente

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = y$$

A la variable x se le llama **variable independiente**, y a la variable y **variable dependiente**.

La siguiente propiedad permiten trabajar con un orden en el conjunto de los números reales.

Propiedad de tricotomía

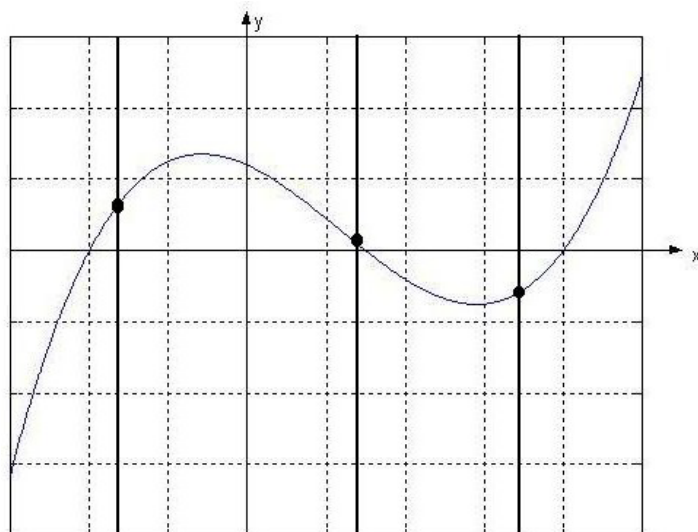
Dados a, b dos números reales cualesquiera entonces se cumplen una y sólo una de las siguientes condiciones:

- i) a es menor que b ($a < b$)
- ii) a es igual a b ($a = b$)
- iii) a es mayor que b ($a > b$)

Gráfica de una función

La grafica de una función es la representación de todos los pares ordenados en el plano cartesiano.

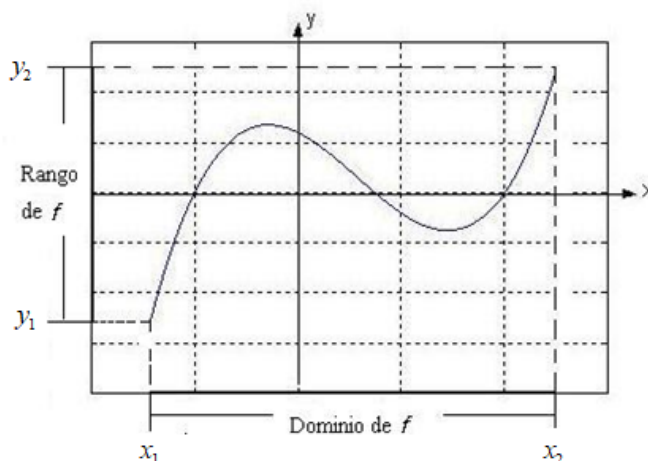
Para identificar gráficamente a una función, utilizamos la prueba de la línea vertical, la cual consiste en trazar líneas verticales (paralelas al eje Y) y si la gráfica corresponde a una función entonces cualquier línea vertical interseca (toca) a la gráfica a lo más en un punto de ella.



La gráfica corresponde a una función

Obtención del dominio y del rango de una función a partir de su gráfica

El *dominio* de la función se obtiene con la proyección de la gráfica sobre el eje X y el *rango* de la función se obtiene con la proyección de la gráfica sobre el eje Y, como se observa en la figura.



El dominio corresponde a todos los valores del eje X que contiene la gráfica, esto es comprendido en el intervalo cerrado $[x_1, x_2]$ cuando se incluyen los extremos, puede ocurrir que no se incluyan los extremos, entonces el dominio es el intervalo abierto (x_1, x_2) .

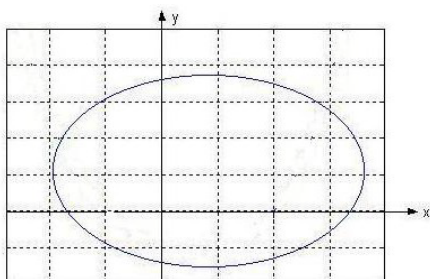
El rango corresponde a todos los valores del eje Y que contiene la gráfica, esto es comprendidos en el intervalo cerrado $[y_1, y_2]$ cuando se incluyen los extremos, puede ocurrir que no se incluyan los extremos, entonces el dominio es el intervalo abierto (y_1, y_2) .

La definición de función expresada en este capítulo es una definición intuitiva, que se debe manejar durante todo el curso a través de las representaciones algebraica, tabular y gráfica de la función misma.

Ejercicio 1.4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos determina una función? En caso afirmativo, escribir su dominio y su rango.

| relación | dominio | rango |
|--|---------|-------|
| $R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (1,6), (4,5)\}$ | | |
| $S = \{(2,4), (3,6), (4,8), (5,10), (4,9)\}$ | | |
| $Q = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2)\}$ | | |
| $F = \{(1,8), (2,8), (3,8), (4,8), (5,8)\}$ | | |

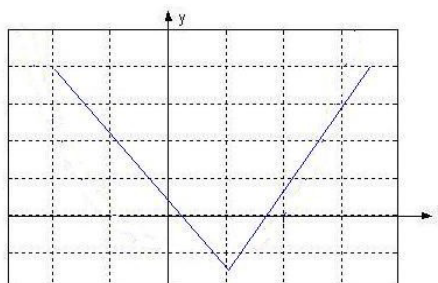
Ejercicio 1.5. ¿Cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función en el intervalo mostrado? Justificar la respuesta.



(a)

Función Si No

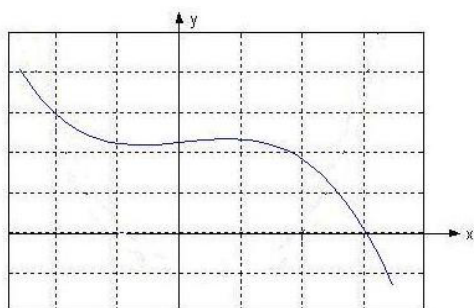
¿Por qué? _____



(b)

Función Si No

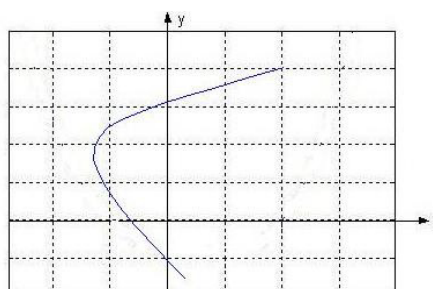
¿Por qué? _____



(c)

Función Si No

¿Por qué? _____

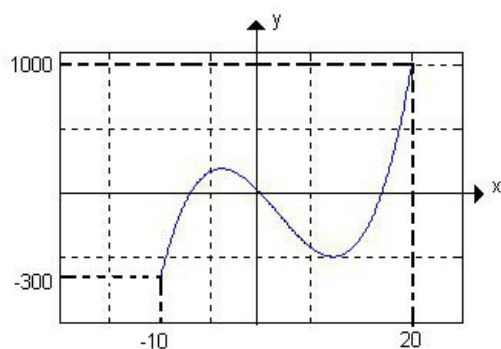


(d)

Función Si No

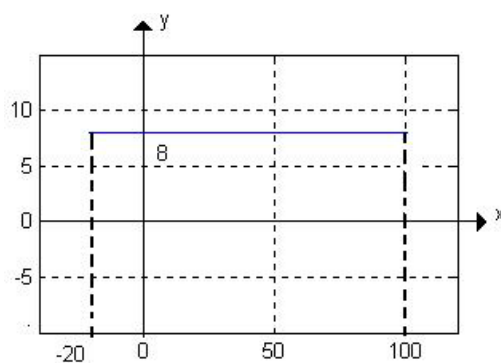
¿Por qué? _____

Ejercicio 1.6. En cada una de las siguientes gráficas, determinar el dominio y el rango de la función en el intervalo mostrado.



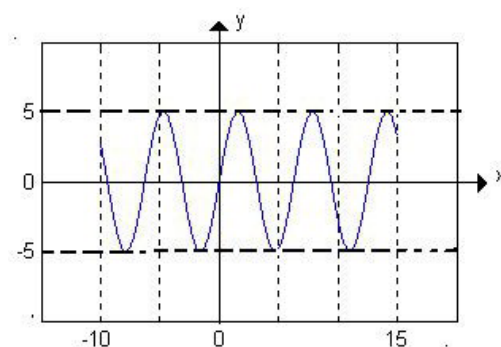
Dom = _____

Ran = _____



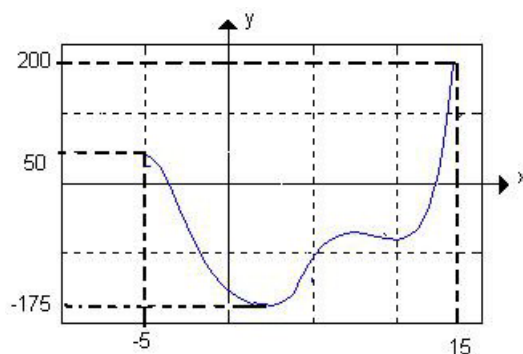
Dom = _____

Ran = _____



Dom = _____

Ran = _____

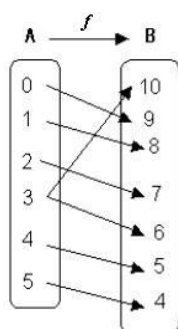


Dom = _____

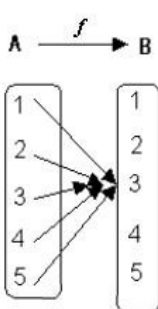
Ran = _____

Con los siguientes ejercicios se muestra otra representación de pares ordenados por medio de diagramas que incluyen flechas para mostrar qué elemento del primer conjunto se relaciona con qué elemento del segundo conjunto. Considerando tal relación responder los ejercicios siguientes.

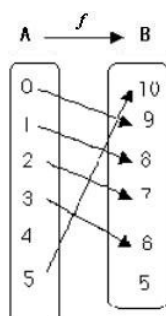
Ejercicio 1.7. ¿Cuáles de los siguientes diagramas determinan una función de A en B ? Explicar.



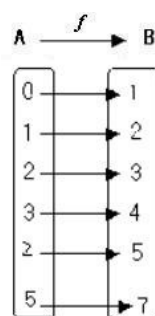
a) _____



(b) _____

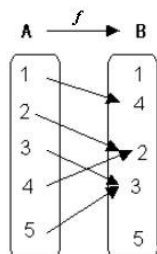


c) _____



d) _____

Ejercicio 1.8. Obtener el Dominio, Contradominio y Rango de las siguientes funciones.

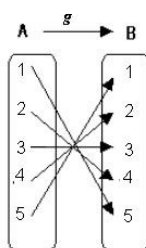


(a)

Dom = _____

Cont = _____

Ran = _____

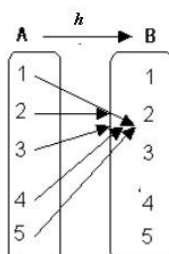


(b)

Dom = _____

Cont = _____

Ran = _____

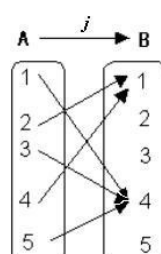


(c)

Dom = _____

Cont = _____

Ran = _____



(d)

Dom = _____

Cont = _____

Ran = _____

Ejercicio para evaluar una expresión algebraica en los valores dados

Ejercicio I.9. Las siguientes relaciones algebraicas, son funciones cuyo dominio es el conjunto A su contradominio es el conjunto de los números reales $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, Obtener el rango cuando el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a) $f(x) = x^2 - 3x$ $\text{Ran } f =$ _____

b) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 1}$ $\text{Ran } f =$ _____

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ $\text{Ran } f =$ _____

d) $f(x) = 2^x$ $\text{Ran } f =$ _____

Ejercicios propuestos

1. En los siguientes conjuntos de pares ordenados, indicar cual corresponde a una función.

a) $\{(5,9),(2,5),(7,10),(8,3),(-3,-4)\}$

b) $\{(-5,9),(-5,2),(10,10),(8,3),(-4,4)\}$

c) $\{(2,4),(3,9),(4,16),(5,25),(6,36)\}$

d) $\{(5,9),(2,9),(7,9),(8,9),(-3,9)\}$

e) $\{(9,9),(9,5),(3,10),(3,3),(-3,-4)\}$

2. En las siguientes funciones, expresar su dominio y su rango

a) $\{(5,9), (2,5),(7,10),(8,3),(-3,-4)\}$

b) $\{(-5,9),(5,2), (10,10),(8,3),(-4,4)\}$

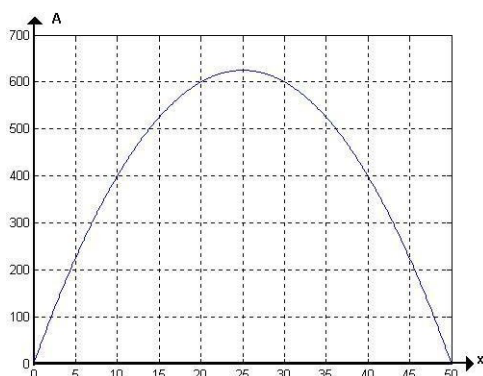
c) $\{(2,4), (3,9),(4,16),(5,25),(6,36)\}$

d) $\{(5,9), (2,9),(7,9),(8,9),(-3,9)\}$

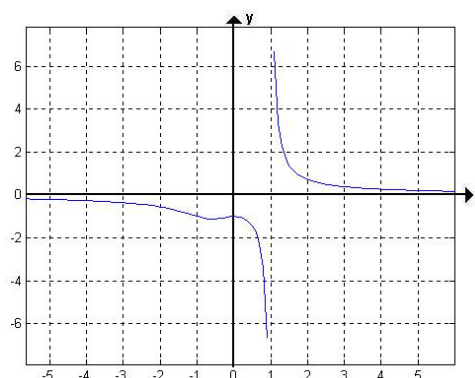
e) $\{(3,27), (4,64),(5,125),(6,216),(-3,-27)\}$

3. En las siguientes funciones, de acuerdo con la gráfica, encontrar su dominio y su rango.

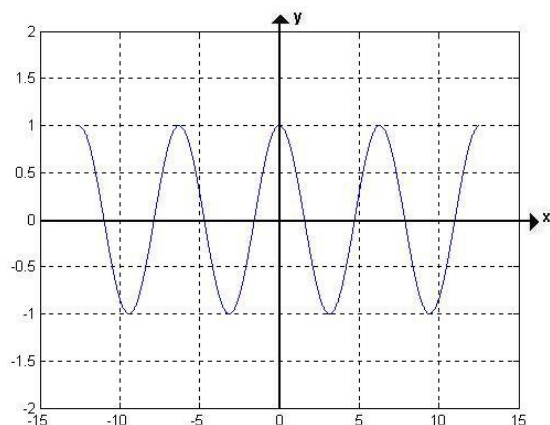
a)



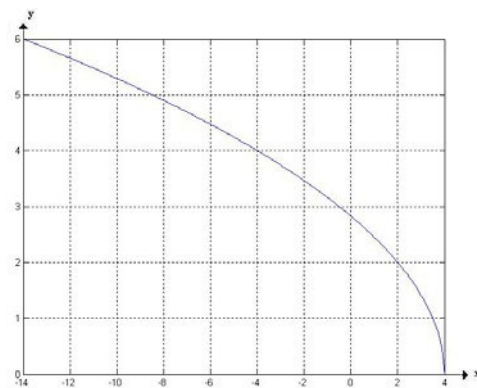
b)



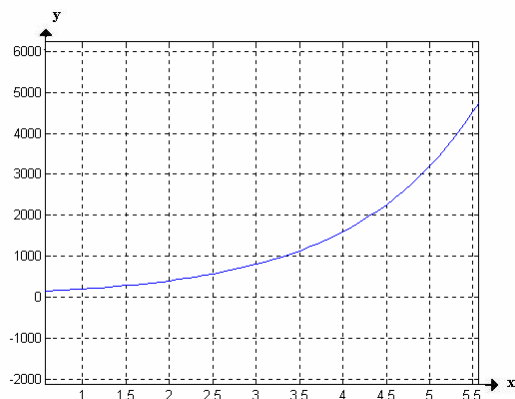
c)



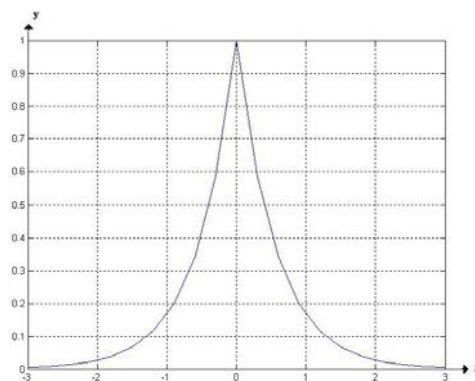
d)



e)



f)



4. Si la función f es $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ hallar el rango de cada una de las siguientes funciones

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ Rango $f =$ _____

b) $f(x) = 2x - 3$ Rango $f =$ _____

c) $f(x) = \frac{x^2+3}{x+2}$ Rango $f =$ _____

d) $f(x) = \frac{2x-5}{4-x}$ Rango $f =$ _____

e) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3}$ Rango $f =$ _____

Ejercicios complementarios

- I. Dados los conjuntos siguientes y las reglas de correspondencia enlistadas Representa la relación como parejas ordenadas y representa los puntos en el plano cartesiano para las relaciones de los ejercicios 1, 3, 5, 6, 7 y 8.

$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, \}$$

$$C = \{x \text{ número entero desde } -10, \text{ hasta } 10\}$$

$$D = \left\{-3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\}$$

$$E = \{\text{números } x \text{ reales tales que } -4 \leq x \leq 4\}$$

$$G = \{\text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes}\}$$

$$H = \{\text{los días de la semana}\}$$

1. Un elemento a de A se relaciona con un elemento c de C si c es la mitad de a .
2. Sea g un elemento de G y h un elemento H , g se relaciona con h si el nombre de h empieza con la misma letra que el nombre de g .
3. Dado x elemento de B , y elemento de E , x se relaciona con y si y es el doble de x .
4. Sea $x \in G$ (x pertenece a G), $y \in H$ (y pertenece a H), x se relaciona con y si y es consecutivo de x
5. Un elemento a de A se relaciona con un elemento c de C si $c^2 = a$
6. Un elemento a de A se relaciona con un elemento c de C si $c = a^2$
7. Un elemento c de C se relaciona con un elemento d de D si d es la mitad de c .
8. Sea $x \in B$ (x pertenece a B), $y \in E$ x se relaciona con y si $y = x + 1.3$

- II. Responde las siguientes preguntas

- a) ¿Es la relación del ejercicio 1 una función? Explica tu respuesta
- b) ¿Cuál (es) es (son) el (los) elemento (s) que se relaciona con *martes* en el ejercicio 4?
- c) ¿Cuál (es) es (son) el (los) elemento (s) que se relaciona con *martes* en el ejercicio 2?
- d) ¿Indica si la relación del ejercicio 5 representa a una función o no? Explica tu respuesta
- e) Considera la relación del ejercicio 6, ¿representa una función?

- f) Describe una tabla con los valores dados por los conjuntos B y E que ilustra la relación del ejercicio 3
- g) La relación del ejercicio 8 representa a una función, describe por qué es cierto.
- h) Indica el dominio y el rango de la función del ejercicio 8

III. Tabla de especificaciones

En el programa de estudios correspondiente a esta asignatura se enuncia: *El curso busca profundizar y ampliar el concepto de función*. Ya que este concepto se menciona por última vez en la Unidad 2 de matemáticas 2, esta afirmación sobre *profundizar* requiere de retomar y distinguir tal concepto para observar si se ha definido y se han descrito elementos que lo caractericen.

A partir de esta segunda unidad de matemáticas 2 no vuelve a tratarse este concepto como una relación con ciertas características y por ello se sugiere como evaluación un ejercicio o examen que permita apreciar al docente las habilidades del alumno para distinguir el concepto, su uso y las formas de representación que conoce y se deja para las unidades posteriores el rubro correspondiente a las aplicaciones.

La tabla de especificaciones siguiente ilustra esta propuesta.

| Evaluación compuesta de 10 reactivos | | | | |
|---|---|---|---|------------|
| <i>Analizar cualitativamente las relaciones entre los parámetros de la representación algebraica, numérica. Registros de representación: numérico (tabla)</i> | | | | |
| Aprendizajes Temática | Conocimiento 30% | Comprensión 35% | Desarrollo 35% | Aplicación |
| Concepto de relación entre conjuntos Representación de funciones y relaciones | <i>Explora diferentes relaciones,</i> | <i>...consolida su manejo del plano cartesiano.</i> | <i>Registros de representación: (tabla) y gráfico</i> | |
| | (2)(1)=2 2 | (2)(1)=2 2 | (2) (0.75) = 1.5 2 | |
| Identificación de una función | <i>reconociendo las condiciones necesarias para determinar si una relación es función</i> | | <i>... distingue el dominio y el rango</i> | |
| | 1(1) = 1 1 | (1)1.5 = 1.5 1 | 2(1) = 2 2 | |
| Número de preguntas 10 | 3 | 3 | 4 | |

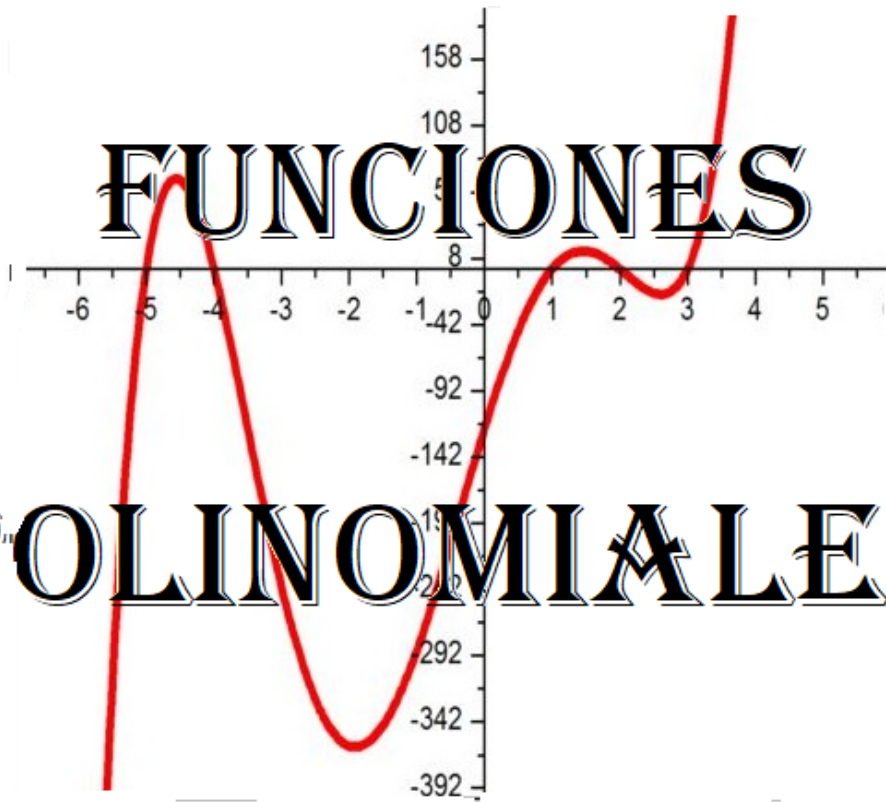
EXAMEN. Ejercicio evaluativo

1. Considera los siguientes conjuntos $G = \{\text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes}\}$ $H = \{\text{los días de la semana}\}$ y la relación: Sea $x \in G$ (x pertenece a G), $y \in H$ (y pertenece a H), x se relaciona con y si y es consecutivo de x , ¿Cuál (es) es (son) el (los) elemento (s) que se relaciona (n) con *martes*? **(1 punto)**
2. Dados los conjuntos $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{x \text{ número entero desde } -10, \text{ hasta } 10\}$, un elemento a de A se relaciona con un elemento c de C si c es la mitad de a .
 - a) Describe una tabla con los valores dados para ilustrar esta relación **(0.75 puntos)**
 - b) Si un elemento a de A se relaciona con un elemento c de C cuando $c = a^2$, ¿es esta relación una función? Explica tu respuesta **(1 punto)**
 - c) Representa en el plano cartesiano los valores de la tabla realizada en a) **(0.75 puntos)**
3. Muestra que la relación: Sea $x \in B$ (x pertenece a B), $y \in E$ x se relaciona con y si $y = x + 1.3$ es una función **(1.5 puntos)**
4. Muestra las parejas de puntos (x, y) que se obtienen de la función del ejercicio anterior **(1 punto)**
5. Representa en el plano cartesiano la relación del ejercicio 1 **(1 punto)**
6. Indica el dominio de la función del ejercicio 3 **(1 punto)**
7. Indica el rango de la función del ejercicio 3 **(1 punto)**

UNIDAD 1

FUNCIONES

POLINOMIALES



FUNCIONES POLINOMIALES

Apéndice

| | | |
|----|---|--|
| 1. | Introducción. Relaciones | |
| 2. | Función de variable real | |
| 3. | Propiedad de tricotomía | |
| 4. | Gráfica de una función. Dominio y Rango | |
| 5. | Ejercicio para evaluar una expresión algebraica | |
| 6. | Ejercicios Generales | |
| 7. | Tabla de especificaciones | |
| 8. | Examen para evaluación | |

Unidad 1

Introducción. Una vez realizada la introducción anterior a esta sección, denominada funciones polinomiales. Trabajo, en el cual se estableció una definición de lo que es y significa una relación. Se detalló la regla de correspondencia y los conjuntos denominados, Dominio, Contradominio y Rango. Se establecieron diferentes tipos de funciones algebraicas, entre ellas las polinomiales, las racionales y las irracionales, las cuales se detallarán a partir de este momento. Iniciamos con

Funciones polinomiales

En esta unidad se hace un tratamiento de las funciones polinomiales, se introducen de manera gradual conceptos de funciones que no se han tratado anteriormente, por ejemplo, se introduce el concepto de función creciente y decreciente, el manejo de la expresión "cero o raíz de una función", su interpretación geométrica y la obtención de la expresión algebraica a partir de la representación tabular o gráfica de la función, también se le da sentido a las expresiones dominio y rango de la función y se introduce al alumno a las funciones a través de problemas que las generan.

Inicialmente se trabaja con problemas que generan funciones lineales, funciones cuadráticas y de grado mayor a dos, se trabajan ejercicios de graficación con el fin de observar el comportamiento de la gráfica de acuerdo con su expresión algebraica.

En la unidad también, se hace una breve introducción al manejo del álgebra superior a través del conocimiento de teoremas que permiten manipular los polinomios en forma analítica y en particular para obtener los ceros de un polinomio de grado mayor a dos.

Se maneja la representación tabular, gráfica y algebraica de funciones polinomiales; se establecen propiedades del comportamiento de una gráfica de acuerdo con su expresión algebraica. Se introducen los máximos y mínimos locales.

Los aprendizajes de este capítulo son:

- ✓ Resolver problemas que generan una función polinomial.
- ✓ Distinguir la expresión algebraica que corresponde a función polinomial.
- ✓ Comprender que las variables x e y corresponden a una pareja ordenada que satisface la expresión polinomial.
- ✓ Dibujar la gráfica de una función polinomial a partir de su expresión algebraica.
- ✓ Interpretar en el modelo gráfico (función creciente, decreciente y máximo o mínimo) de la función polinomial.
- ✓ Obtener el dominio y rango de una función polinomial a partir de su gráfica.
- ✓ Factorizar una función polinomial.

- ✓ Obtener los ceros de una función polinomial.
- ✓ Comprender el significado de "el cero o raíz de una función polinomial".
- ✓ Visualizar las transformaciones de una función polinomial.
- ✓ Obtener la expresión algebraica de una función polinomial a partir de sus raíces.

En la unidad, se estudian los pares ordenados obtenidos de la representación tabular y se verifica el concepto de función a través de "pares ordenados en los cuales no se repite el primer elemento y todos tienen una imagen; y en la representación gráfica se hace uso de la "prueba de la vertical" para verificar que se trabaja con una función.

Una recomendación importante, es trabajar el plano cartesiano con la escala adecuada en cada uno de los ejes. Es fundamental la orientación del Profesor.

El tiempo mínimo para el capítulo es de 27 hrs., las cuales se pueden reducir a 22 horas, si el alumno ya tiene el sustento de las funciones lineales y cuadráticas

Para trabajar esta unidad se requieren los siguientes materiales:

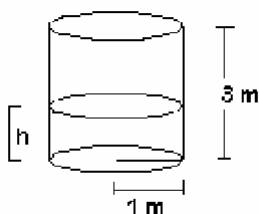
- ▶ Cuaderno de Trabajo
- ▶ Plumas de colores
- ▶ Lápiz y goma
- ▶ Calculadora
- ▶ Cuaderno para anotaciones extras

Trabajaremos inicialmente con problemas para introducir las funciones polinomiales

a) Problemas para introducir una función lineal

Con los problemas 1.1, 1.2 y 1.3, que se presentan a continuación, se manejan las representaciones tabulares, gráfica y algebraica de una función lineal.

Problema 1.1 Un tinaco cilíndrico de 1 m de radio y 3 m de altura se llena a razón de 500 litros de agua por hora.



Nota: $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ lts}$; $1 \text{ lt} = 1000 \text{ cm}^3$

a) ¿Cuál es la capacidad (volumen) del tinaco en litros? $V = \underline{\hspace{2cm}}$

b) ¿En cuánto tiempo se llena el tinaco? $t = \underline{\hspace{2cm}}$

c) ¿En dos horas que altura tiene el agua en el tinaco? $h = \underline{\hspace{2cm}}$

d) Llenar la siguiente tabla que relaciona la altura h que alcanza el agua en el tinaco, en función del tiempo t .

| | | | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|------|------|
| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 10 | 14 | 16 | 18 | 18.5 | 18.8 |
| h | | | | | | | | | | | | |

e) Obtener la expresión algebraica que expresa la relación de la altura h en función del tiempo t .

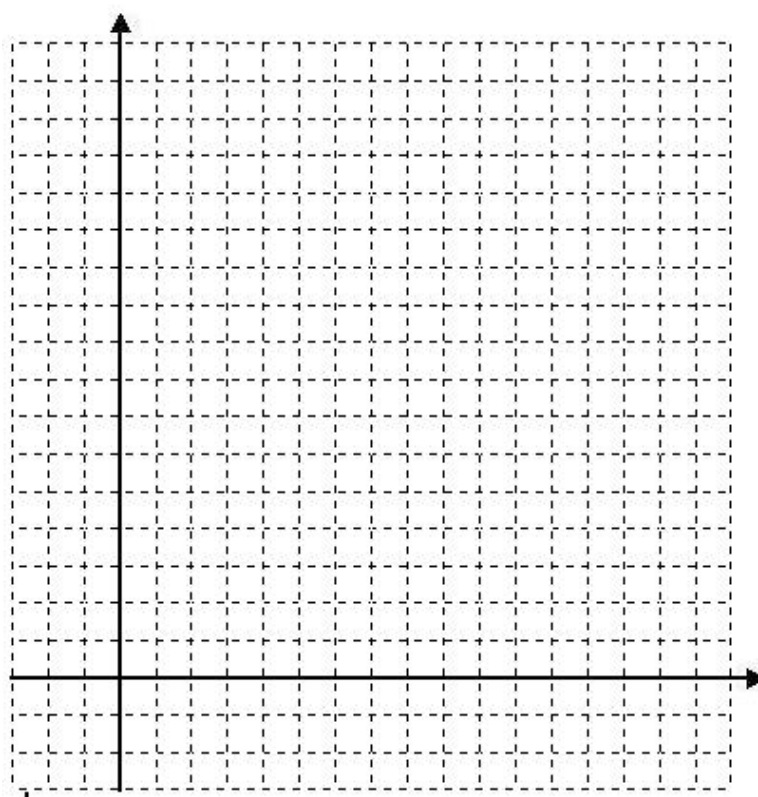
Función $\underline{\hspace{4cm}}$

f) En la expresión algebraica determinar la variable independiente y la variable dependiente. Hay que indicar que representa cada una.

Variable dependiente _____ representa _____

Variable independiente _____ representa _____

g) Localizar los puntos en el plano cartesiano y trazar la gráfica. Elegir la escala adecuada en cada eje coordenado.



h) Identificar de acuerdo con los datos, el dominio y rango de la función.

Dominio de la función h _____ Rango de la función h _____

i) Indicar si cada función es creciente o decreciente ¿Por qué?

Problema 1.2 La empresa telefónica "UNiTEL", cobra \$ 200 mensuales más 40 centavos por minuto. La empresa "EXTRATEL", cobra \$ 128 mensuales más 80 centavos por minuto.

a) Llenar la siguiente tabla, para el pago que se le debe hacer a la empresa "UNiTEL", en función del número de minutos que se utiliza el teléfono durante un determinado mes.

| | | | | | | | | | | | |
|-----|---|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| t | 0 | 10 | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 | 180 | 210 | 240 | 270 |
| P | | | | | | | | | | | |

b) Obtener la expresión algebraica del pago mensual P a la empresa "UNiTEL" en función del número de minutos t .

Función _____

c) Llenar la siguiente tabla, para el pago mensual P que se le debe hacer a la empresa "EXTRATEL", en función del número minutos que se utiliza el teléfono t .

| | | | | | | | | | | | |
|-----|---|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| t | 0 | 10 | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 | 180 | 210 | 240 | 270 |
| q | | | | | | | | | | | |

d) Obtener la expresión algebraica del pago q a la empresa "EXTRATEL" en función del número de minutos t .

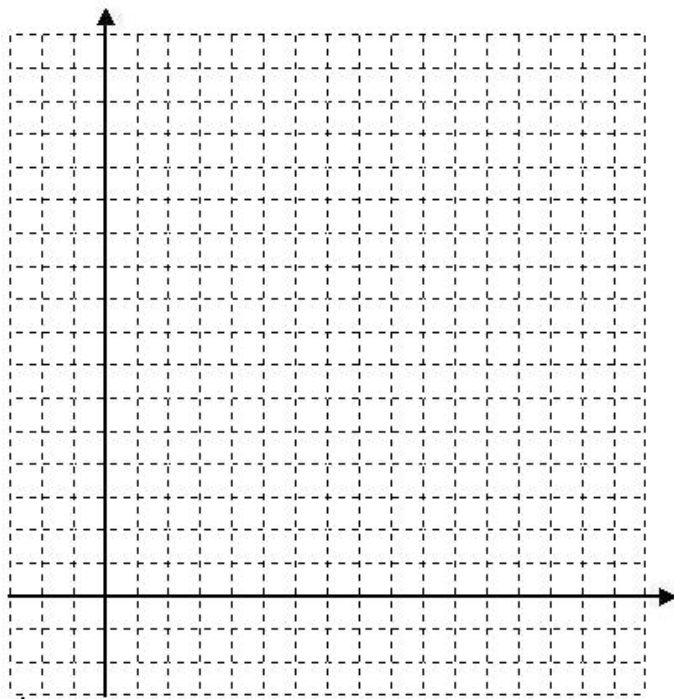
Función _____

e) Identificar las variables dependiente e independiente. Hay que expresar que representa cada una.

Variables dependientes _____ representa _____

Variables independientes _____ representa _____

- f) Graficar en un mismo plano cartesiano los pagos a las dos empresas. Encontrar el punto de intersección. Elegir la escala adecuada en cada eje coordenado.



- g) Identificar de acuerdo a los datos, el dominio y rango de cada función.

Dominio de la función p _____ Rango de la función p _____

Dominio de la función q _____ Rango de la función q _____

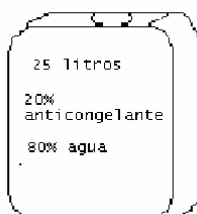
- h) Indicar si cada función es creciente o decreciente ¿Por qué?

Función $p(x)$ _____

Función $q(x)$ _____

- i) En qué condiciones conviene contratar la empresa "EXTRATEL".

Problema 1.3. Un sistema de enfriamiento contiene 20 litros de una solución con porcentajes; 20% de anticongelante y 80% de agua. Se extraen X litros de la solución y se sustituye por anticongelante (es decir se agregan X litros al sistema de enfriamiento). Manejar la función cantidad de agua en la nueva solución en términos de la cantidad sustituida.



a) ¿Cuál es la cantidad de agua inicialmente? $V_{ol. \text{ agua.}} =$ _____

b) Si se extraen 4 litros de solución y después se agregan 4 litros de anticongelante. ¿Cuánta agua existe ahora en el sistema de enfriamiento?

$$V_{ol. \text{ Agua}} = V = \underline{\hspace{2cm}}$$

c) Llenar la siguiente tabla que muestra la cantidad de agua en la nueva solución en función de la cantidad sustituida.

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 10 | 12 | 15 | 18 | 20 | 22 | 25 |
|--------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| $V(x)$ | | | | | | | | | | | | |

d) Obtener la expresión algebraica de la cantidad de agua de la nueva solución $V(x)$ en el sistema en función de la cantidad de solución sustituida x .

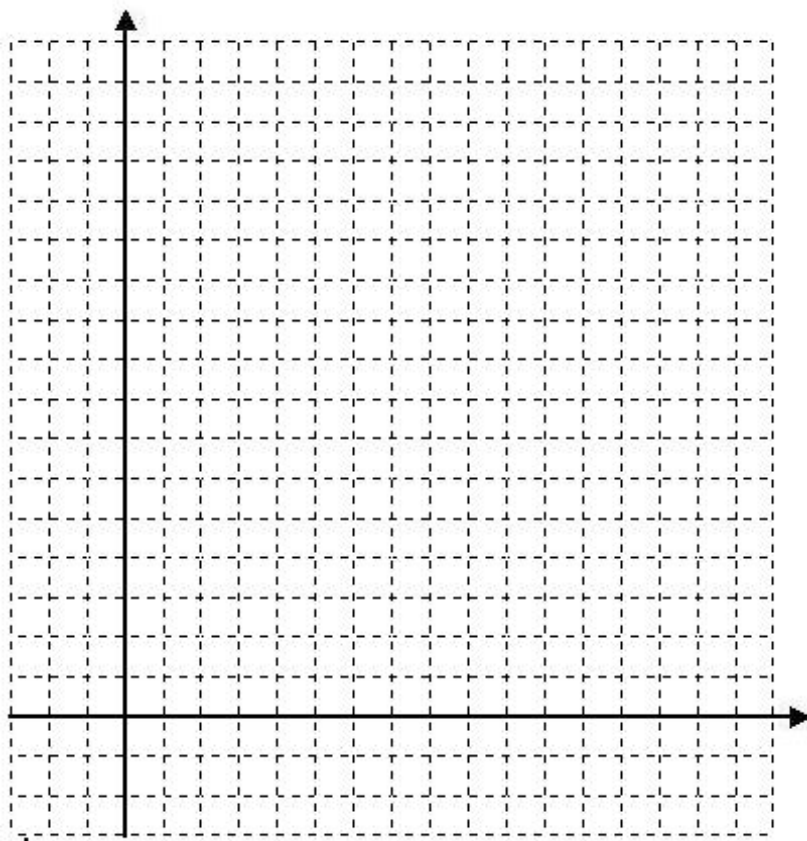
Función _____

e) Identificar la variable independiente y la variable dependiente e indicar que representa cada una.

Variable dependiente _____ representa _____

Variable independiente _____ representa _____

- f) Dibujar la *gráfica* $V(x)$ vs. x . Elegir la escala adecuada para cada eje coordenado.



- g) ¿La función $V(x)$ es creciente o decreciente?

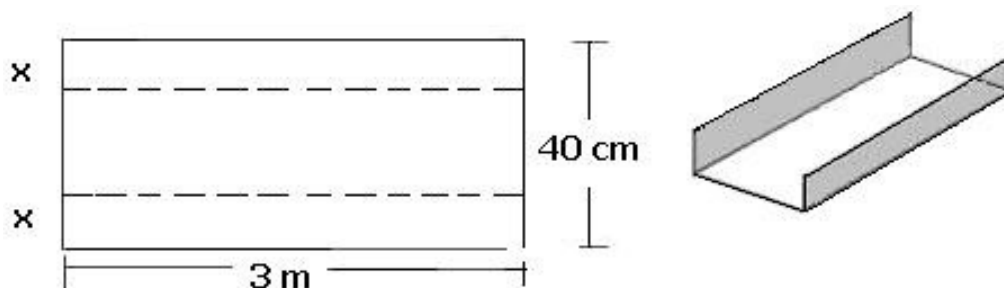
- h) Identificar su dominio y rango de la función

Dominio de la función $V(x)$ _____

Rango de la función $V(x)$ _____

b) Problemas para introducir la función cuadrática

Problema 1.4 De una pieza de metal de 40 cm de ancho por 3 m de largo, se va construir un canal para la lluvia doblando la lámina como se muestra en la figura.



a) Llenar la siguiente tabla para obtener el volumen (capacidad) del canal en términos de la medida x de la parte doblada.

| | | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| x | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| V | | | | | | | | | | | |

Las unidades de x son centímetros.

b) Obtener la expresión algebraica para encontrar el volumen V en términos de la medida x de la parte doblada.

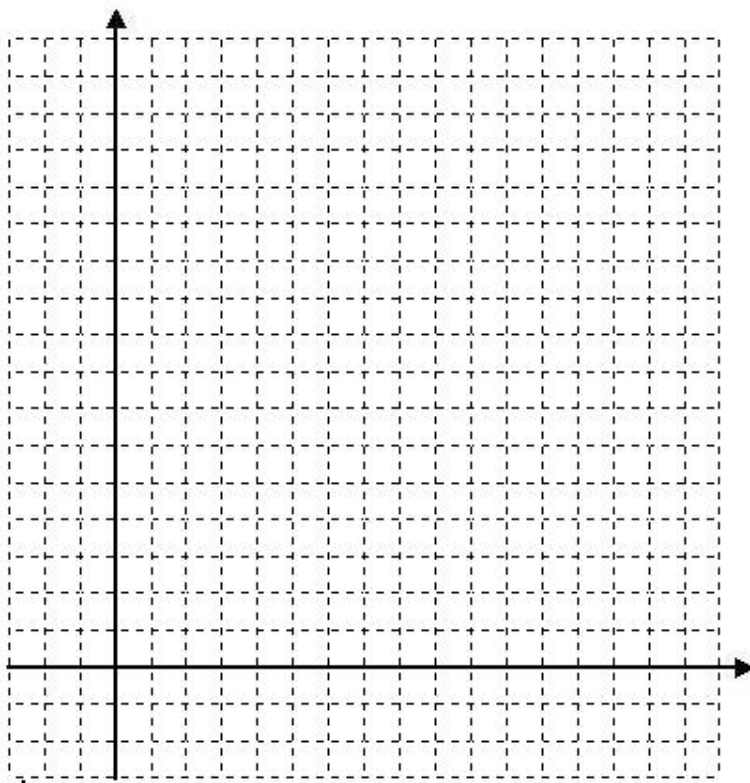
Función _____

c) En la expresión algebraica determinar la variable independiente y la variable dependiente. Identificar que representa cada una.

Variable dependiente _____ representa _____

Variable independiente _____ representa _____

d) Graficar de la función obtenida en el inciso b). Utilizar la escala adecuada en los ejes coordenados.



e) El Intervalo en el cual la curva es creciente es _____.

f) El Intervalo en el cual la curva es decreciente _____.

g) ¿Cuál es el valor de x donde el volumen es máximo?

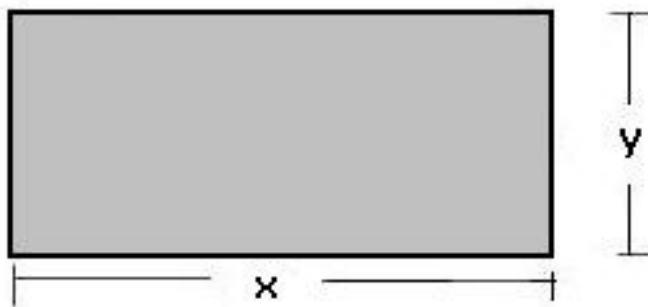
$x =$ _____

h) ¿Cuál es el dominio y rango de la función?

Dominio de la función $V(x)$ _____

Rango de la función $V(x)$ _____

Problema 1.5 Pedro tiene 100 metros de malla de alambre y va a cercar un terreno rectangular para usarlo como espacio de juegos.



a) Llenar la siguiente tabla, en la cual se obtiene el área de la región en función de las dimensiones del largo y del ancho.

| | | | | | | | | | | | | |
|-------|-----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Largo | x | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 48 | 50 |
| Ancho | y | | | | | | | | | | | |
| Area | A | | | | | | | | | | | |

b) Obtener la expresión algebraica del área $A(x)$ de la región en función del largo x del terreno.

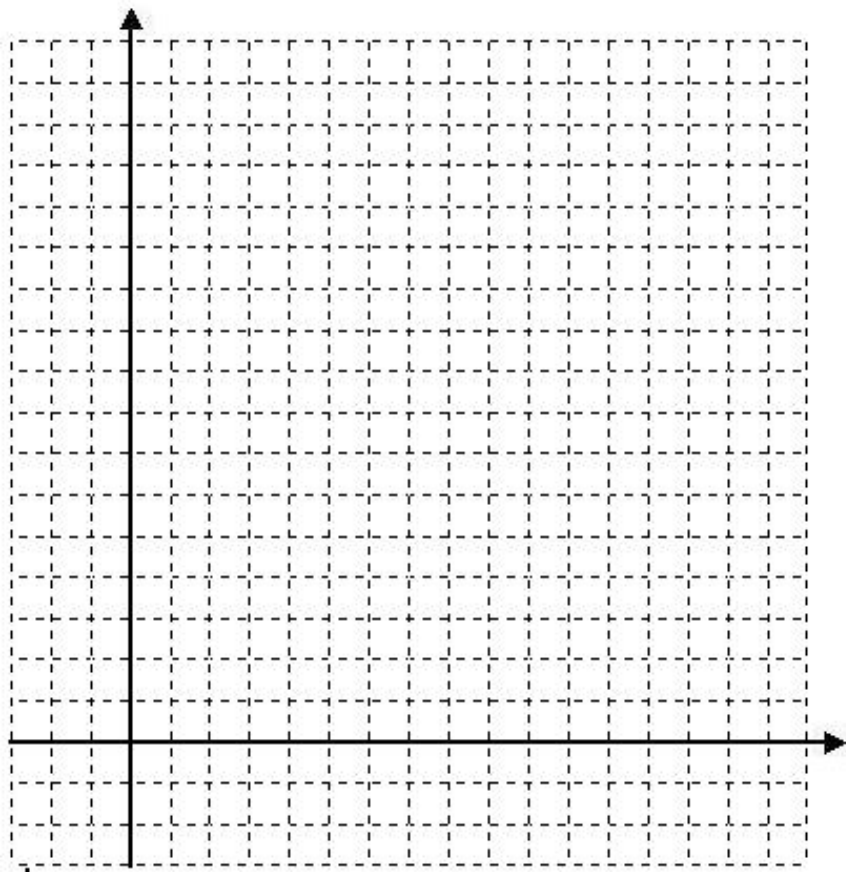
Función _____

c) Identificar la variable independiente y la variable dependiente. Indicar que representa cada una.

Variable dependiente _____ representa _____

Variable independiente _____ representa _____

d) Graficar la función del área $A(x)$ vs. x . Utilizar la escala adecuada.



e) Escribir el intervalo en el cual la curva es creciente _____.

f) Escribir el intervalo en el cual la curva es decreciente _____.

g) ¿Cuál es el dominio y rango de la función?

Dominio de la función $A(x)$ _____

Rango de la función $A(x)$ _____

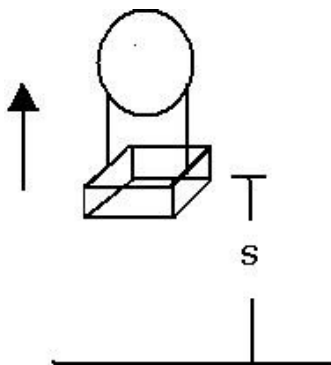
h) ¿Cuáles son las dimensiones del terreno a fin de que el área encerrada sea la mayor posible?

Valor de x para área máxima $x =$ _____

Valor de y para área máxima $y =$ _____

El siguiente problema se trabaja con la expresión de la función dada.

Problema 1.6 Un globo aerostático que sube verticalmente, a las t horas, su altura S medida desde el suelo, está dada por la formula $S(t) = 9t - 3t^2$, en donde S se mide en kilómetros.



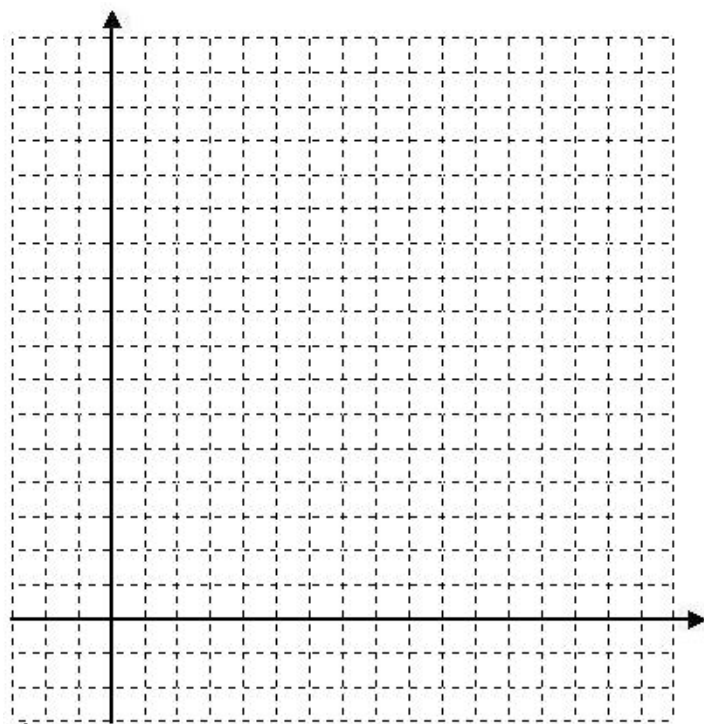
a) ¿La expresión algebraica dada corresponde a una expresión cuadrática?

¿Por qué? _____

b) Llenar la siguiente tabla que proporciona la altura S del globo en función del tiempo t transcurrido.

| | | | | | | | | | | | | |
|--------|-----|---|------|-----|------|---|------|-----|------|---|-----|---|
| Tiempo | t | 0 | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1 | 1.25 | 1.5 | 1.75 | 2 | 2.5 | 3 |
| Altura | S | | | | | | | | | | | |

c) Graficar la función $S(t)$. Utilizar la escala adecuada en los ejes coordenados.



d) Con la gráfica determinar ¿Qué altura máxima alcanza el globo?

$$S(t) = \underline{\hspace{2cm}}$$

e) ¿En qué intervalo de tiempo el globo baja? _____

f) Identificar la variable independiente y la variable dependiente. Indicar que representa cada variable.

Variable dependiente _____ representa _____

Variable independiente _____ representa _____

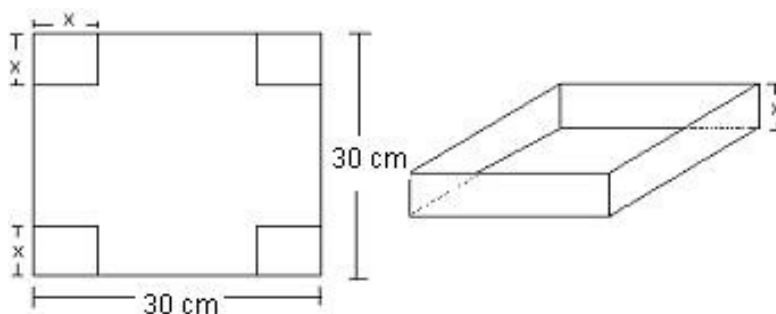
g) Escribir el dominio y rango de la función.

Dominio de la función $S(t)$ _____

Rango de la función $S(t)$ _____

c) Problemas para introducir funciones de grado mayor a dos

Problema 1.7. Se tiene una lámina cuadrada de 30 cm por lado. Se desea construir una caja abierta cortando en las cuatro esquinas, cuadrados iguales y doblando los lados hacia arriba (construirla con una hoja de cartón).



a) Llenar la siguiente tabla en la cual se obtiene el volumen V de la caja en función de la longitud x de los cuadrados que se cortan.

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| L | | | | | | | | | | |
| V | | | | | | | | | | |

Nota: L significa la longitud del lado de la caja.

b) Obtener la expresión para el volumen de la caja V en función de la longitud de los lados de los cuadrados x que han sido cortados. Desarrollar los productos requeridos.

c) En la expresión obtenida en b indicar ¿cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente? Escribir que representa cada una de ellas.

Variable dependiente _____ Representa _____

Variable independiente _____ Representa _____

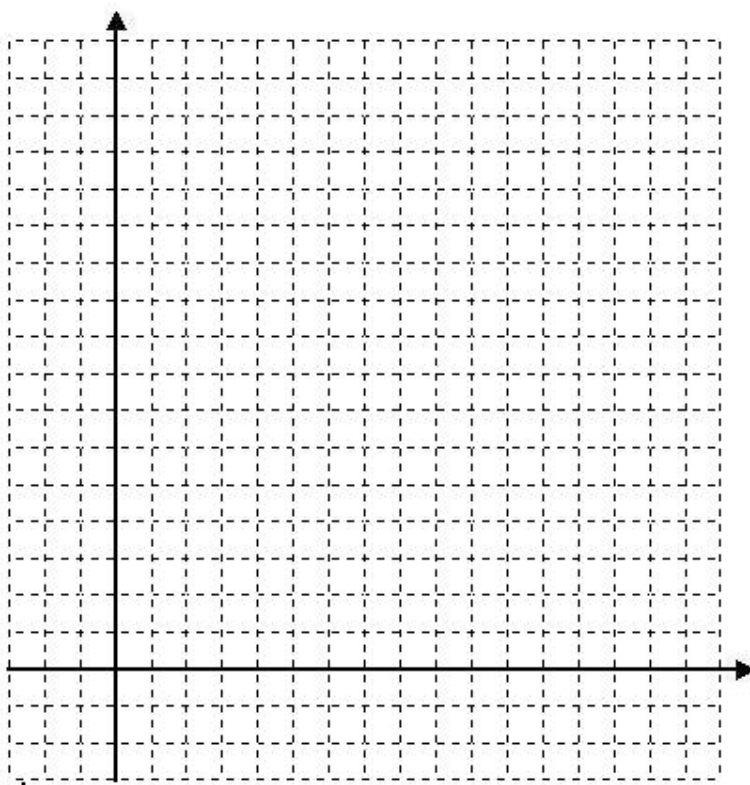
d) Observar que en la expresión algebraica el volumen es igual a un polinomio.

¿Cuál es el grado del polinomio? _____

e) Utilizando la tabla determinar la longitud del lado x de los cuadrados cortados para que el volumen V de la caja sea máximo.

Valor de x para volumen máximo $x =$ _____

f) Graficar la función $V(x)$



g) Escribir el dominio y rango de la función.

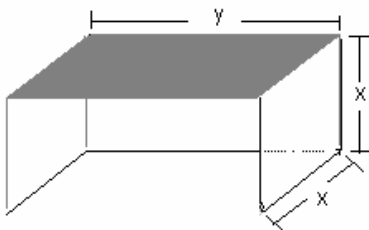
Dominio de la función $V(x)$ _____

Rango de la función $V(x)$ _____

h) Escribir el intervalo donde la función es creciente. _____

i) Escribir el intervalo donde la función es decreciente. _____

Problema 1.8. Se quiere construir en la playa un local para la venta de refrescos éste será hecho de lona con un techo, dos paredes laterales cuadradas y una parte posterior, se tienen 96 metros cuadrados de lona.



a) Llenar la siguiente tabla en la cual se obtiene el valor de y así como el volumen V del local en función del valor x .

Sugerencia: Para encontrar el valor de y considere el área de las paredes, el techo y la cantidad de material utilizado.

| | | | | | | | | | |
|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|
| x | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 3.5 | 4 |
| y | | | | | | | | | |
| V | | | | | | | | | |

b) Encontrar la expresión de la función lineal para obtener y en términos de x . Indicar que tipo de expresión se obtiene.

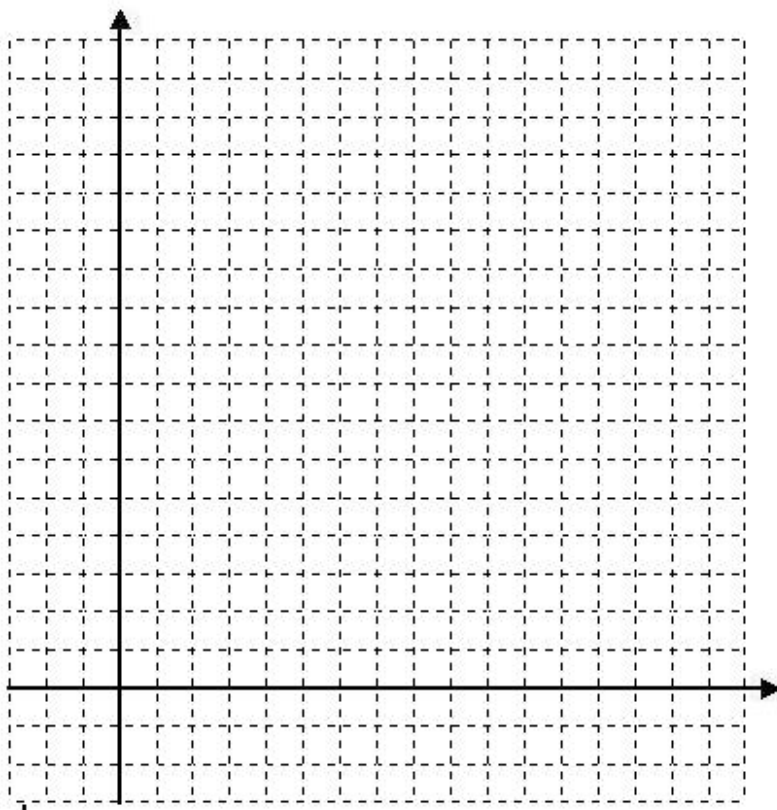
c) Encontrar la expresión algebraica para obtener el valor del volumen V en función del valor de x . Indicar que tipo de expresión se obtiene.

d) ¿Cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente?

Variable dependiente _____ Representa _____

Variable independiente _____ Representa _____

d) Graficar la función del volumen V en términos de la variable x .



e) Escribir el dominio y rango de la función.

Dominio de la función _____

Rango de la función _____

f) Escribir el intervalo donde la función es creciente. _____

g) Escribir el intervalo donde la función es decreciente. _____

h) A partir de la tabla o de la gráfica. Determine el valor de x para que el cual el volumen V es máximo.

Valor de x para volumen máximo $x =$ _____

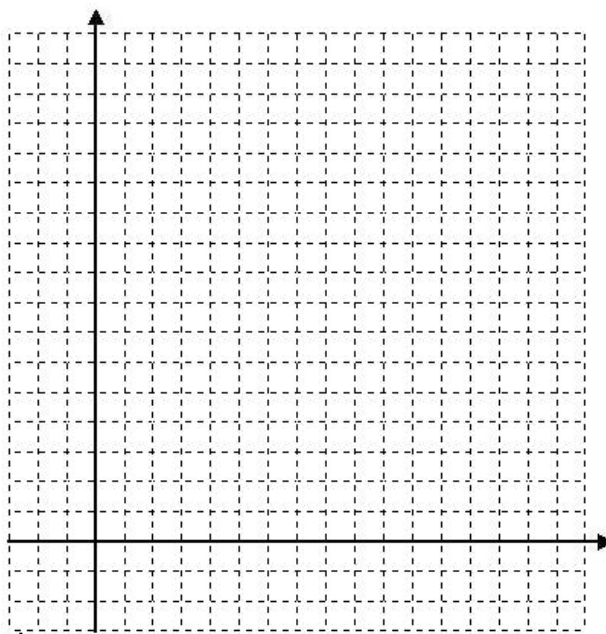
Problema 1.9. Durante una epidemia de gripe que dura 30 días el número de personas contagiadas transcurridos t días es $N(t) = 288 + 30t^2 - t^3$

a) Llenar la siguiente tabla donde se obtiene el número de personas enfermas hasta el día treinta.

| | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|---|----|
| t | 0 | 1 | 2 | 6 | 8 | 10 |
| $N(t)$ | | | | | | |

| | | | | | | | |
|--------|----|----|----|----|----|----|----|
| t | 12 | 15 | 18 | 20 | 22 | 28 | 30 |
| $N(t)$ | | | | | | | |

b) Graficar la función $N(t)$, recordar que los valores que se pueden asignar son de 0 a 30. ¿Es posible trabajar con números fraccionarios (no enteros)? ¿Por qué?



c) ¿Cuál es el dominio de la función? _____ ¿Cuál es su rango? _____

d) ¿En que intervalo la epidemia crece? _____

e) ¿Cuál es el número máximo de personas contagiadas? _____

Manejo numérico y gráfico de las funciones polinomiales

Representación tabular y gráfica de funciones polinomiales, a partir de ellas, revisar las características de las mismas (dominio, rango, intervalos de crecimiento y decrecimiento, intersección con los ejes coordenados, y máximos y mínimos locales cuando así corresponda).

a) Ejercicios de repaso de la función lineal

Ejercicio 1.10. Con la función $f(x) = 7x - 8$ contestar lo siguiente:

a) ¿La expresión corresponde a una función lineal? _____

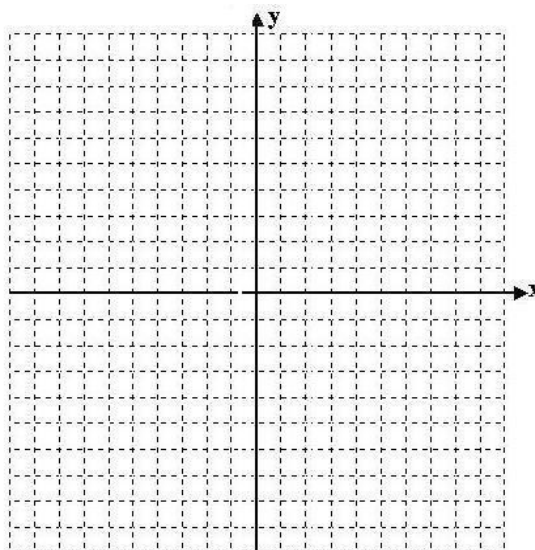
¿Por qué? _____

b) ¿Cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente?

Variable dependiente _____ variable independiente _____

c) Graficar la función en el intervalo $[-4, 6]$. Utilizar la misma escala en cada eje coordenado.

| x | f(x) |
|---|------|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |



d) Con el intervalo dado, indicar su dominio y rango.

Dominio _____ rango _____

e) ¿Cuál es el ángulo de inclinación? Medirlo con un transportador.

$\alpha =$ _____

f) ¿Cuál es su pendiente? $m =$ _____

g) ¿Cuál es su ordenada al origen? _____ ¿Qué representa? _____

h) De acuerdo a la gráfica, la intersección con el eje X es: $a =$ _____

i) Utilizar la condición de que en la intersección con el eje X, la ordenada del punto es Igual a 0 ($y = 0$) para encontrar el valor de la abscisa en forma analítica.

$a =$ _____

j) Comparar los resultados obtenidos en los incisos (h) e (i).

k) La función ¿es creciente o decreciente? _____

Ejercicio 1.11. La expresión $f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{7}{8}$.

¿Corresponde a una función lineal? _____

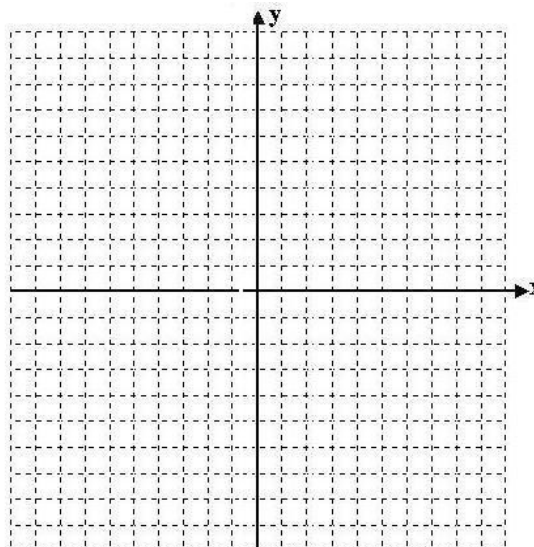
¿Por qué? _____

a) ¿Cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente?

Variable dependiente _____ variable independiente _____

b) Graficar la función en el intervalo $[-7,6]$. Utilizar la misma escala en los ejes coordenados.

| X | f(x) |
|---|------|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |



c) Con el intervalo dado, indicar su dominio y rango.

Dominio de la función _____

Rango de la función _____

d) ¿Cuál es el ángulo de inclinación? Medirlo con un transportador.

$\alpha =$ _____

e) ¿Cuál es su pendiente? $m =$ _____

f) ¿Cuál es su ordenada al origen? _____ ¿Qué significa? _____

g) De acuerdo con la gráfica, la intersección con el eje X es: $a =$ _____

h) Utilizar la condición de que en la intersección con el eje X, la ordenada del punto es 0 ($y = 0$) para encontrar el valor de la abscisa en forma analítica.

$a =$ _____

i) Comparar los resultados obtenidos en los incisos (h) e (i).

j) La función ¿es creciente o decreciente? _____

b) Ejercicios de repaso de función cuadrática

Con los ejercicios 1.12, 1.13 y 1.14 el alumno repasa las representaciones algebraicas, tabular y gráfica de la función cuadrática mediante las siguientes actividades:

- ✓ **Realiza una tabulación con el objeto de que se practique la evaluación de una expresión algebraica y la operatividad.**
- ✓ **Grafica utilizando su representación tabular.**
- ✓ **Con la observación de la expresión algebraica y de la gráfica, así como la definición del vértice, debe manejar los siguientes resultados:**
 - ✓ Sí en la expresión $y = ax^2 + bx + c$, el coeficiente a es mayor que cero la parábola se abre hacia arriba y la gráfica tiene un mínimo en el vértice.
 - ✓ Sí en la expresión $y = ax^2 + bx + c$, el coeficiente a es menor que cero la parábola se abre hacia abajo y la gráfica tiene un máximo en el vértice.
 - ✓ Indicar en los ejercicios el (los) intervalo(s) en donde la curva es creciente y el (los) intervalo(s) donde la curva es decreciente.
 - ✓ Escribir el intervalo que corresponde al rango de la función.

Ejercicio 1.12. Utilizar la función $y = 2x^2 + 6x + 3$ para realizar lo siguiente:

a) Identificar la variable dependiente y la variable independiente

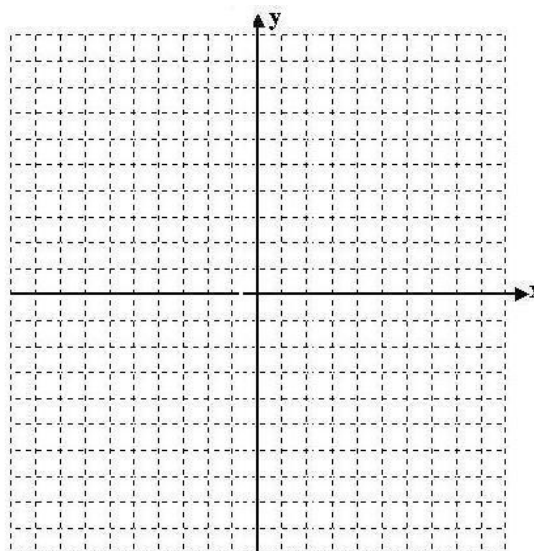
Variable dependiente _____ Variable independiente _____

b) ¿Cuál es el signo del coeficiente de x^2 ? _____

c) ¿Hacia dónde abre la gráfica de la función? _____

d) Hacer una tabulación y graficar la curva en el intervalo $[-6,3]$. Utilizar la escala adecuada en los ejes coordenados.

| X | f(x) |
|---|------|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |



e) Escribir el dominio y rango de la función.

Dominio de la función _____ Rango de la función _____

f) ¿Cuál es el punto que corresponde a su vértice? _____

¿Es máximo o mínimo? _____

g) El intervalo donde la curva es creciente es _____.

h) El intervalo donde la curva es decreciente es _____.

Ejercicio 1.13. Utilizar la función $f(x) = 2x^2 - 14x + 12$ para realizar lo siguiente:

a) ¿Cuál es el signo del coeficiente de x^2 ? _____

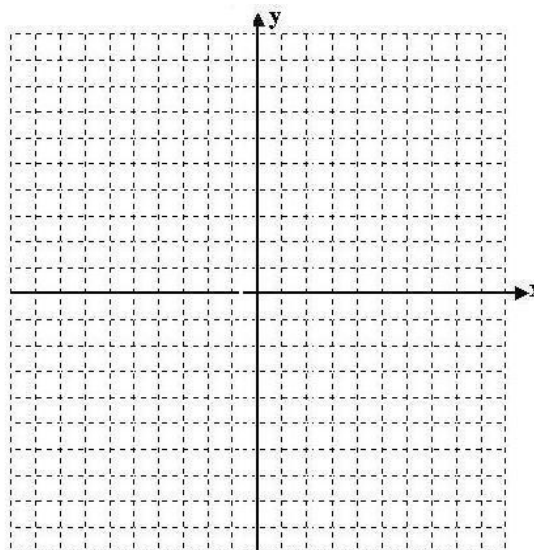
b) ¿Hacia dónde abre la gráfica de la función? _____

c) Identificar la variable dependiente y la variable independiente.

Variable dependiente _____ variable independiente _____

d) Graficar la función en el intervalo $[-8, 8]$, use incrementos de 1.5. Utilizar la escala adecuada en los ejes coordenados.

| x | f(x) |
|---|------|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |



e) Escribir el dominio y rango de la función.

Dominio de la función _____ Rango de la función _____

f) El intervalo donde la curva es creciente es _____.

g) El intervalo donde la curva es decreciente es _____.

h) ¿Cuál es el punto que corresponde a su vértice? _____

¿Es máximo o mínimo? _____.

Ejercicio 1.14. Utilizar la función $y = -2x^2 - 4x + 16$ para realizar lo siguiente:

a) ¿Cuál es el signo del coeficiente de x^2 ? _____

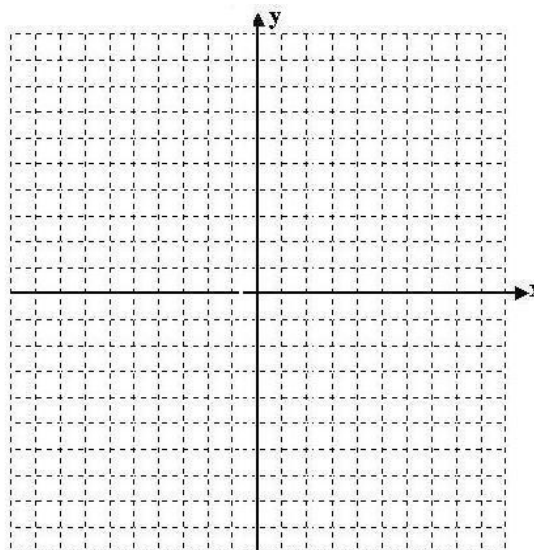
b) ¿Hacia dónde abre la gráfica de la función? _____

c) Identificar la variable dependiente y la variable independiente.

Variable dependiente _____ variable independiente _____

d) Graficar la función en el intervalo $[-8, 8]$, use incrementos de 1.2. Utilizar la escala adecuada en los ejes coordenados.

| x | f(x) |
|---|------|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |



e) Escribir el dominio y rango de la función.

Dominio de la función _____ Rango de la función _____

f) El intervalo donde la curva es creciente es _____.

g) El intervalo donde la curva es decreciente _____.

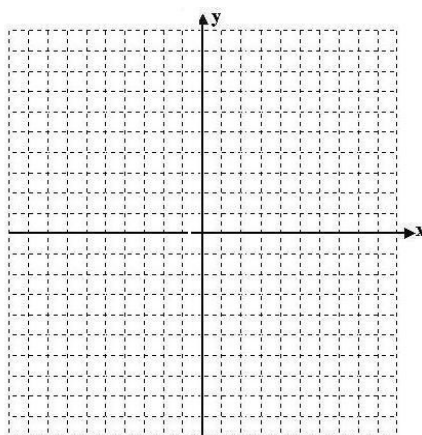
h) ¿Cuál es el punto que corresponde a su vértice? _____

¿Es máximo o mínimo? _____

c) Gráficas de funciones polinomiales de grado mayor que dos**Ejercicio 1.15.** Usar la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ para efectuar lo siguiente:

- a) Realizar una tabulación en el intervalo $[-3,5]$ con incrementos $\Delta x = 0.5$ y graficar la función en el intervalo dado.

| x | f(x) |
|----------|-------------|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |



- b) Obtener de la gráfica las intersecciones con los ejes coordenados.

Intersecciones con el eje X _____Intersecciones con el eje Y _____

- c) Obtener de la gráfica los valores de x donde existen puntos mínimos.

 $x =$ _____ valores mínimos de y _____

- d) Obtener de la gráfica los valores de x donde existen puntos máximos.

 $x =$ _____ valores máximos de y _____

- e) Escribir el dominio y rango de la función.

Dominio de la función _____

Rango de la función _____

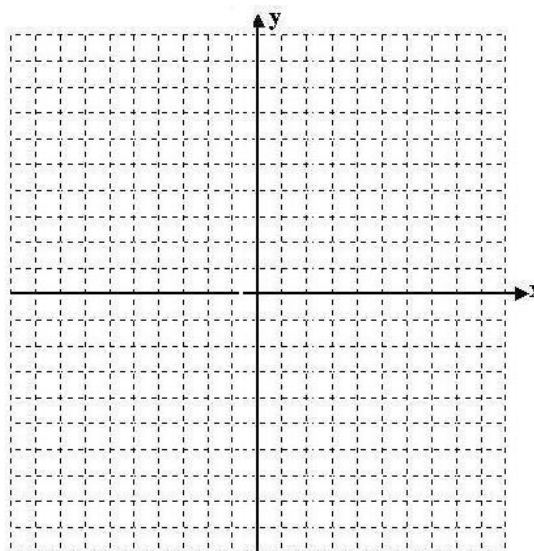
f) Escribir el intervalo o intervalos donde la función es creciente.

g) Escribir el intervalo o intervalos donde la función es decreciente.

Ejercicio 1.16. Usar la función $f(x) = x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 32$ para efectuar lo siguiente:

a) Realizar una tabulación en el intervalo $[-5,5]$ con incrementos $\Delta x = 0.5$ y graficar la función en el intervalo dado. Utilizar la escala adecuada.

| x | f(x) |
|---|------|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |



b) Obtener de la gráfica las intersecciones con los ejes coordenados.

Intersecciones con el eje X _____

Intersecciones con el eje Y _____

c) Obtener de la gráfica los valores de x donde existen puntos mínimos.

$x =$ _____ valores mínimos de y _____

d) Obtener de la gráfica los valores de x donde existen puntos máximos.

$x =$ _____ valores máximos de y _____

e) Escribir el dominio y rango de la función.

Dominio de la función _____

Rango de la función _____

f) Escribir el intervalo o intervalos donde la función es creciente.

g) Escribir el intervalo o intervalos donde la función es decreciente.

Se sugiere analizar la función en el intervalo $[2.5, 3]$ utilizando incrementos de $\Delta x = 0.1$

Definición y propiedades de la función polinomial

Definición. Una **función polinomial** tiene como dominio máximo el conjunto de los *números reales* y es de la forma:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Algunas propiedades de las funciones polinomiales:

Propiedad 1. Cuando x toma valores cada vez más grande (es decir $x \rightarrow \infty$) o x

se aleja cada vez más del cero hacia la izquierda (esto es $x \rightarrow -\infty$), las imágenes de la función polinomial se comportan de manera similar a su término de mayor grado $a_n x^n$.

Por lo tanto, para saber el signo de la imagen de la función polinomial para valores de x "muy alejados del cero" es suficiente analizar el signo de $a_n x^n$.

Propiedad 2. La gráfica de una función polinomial de *n-ésimo grado* no puede intersectar (cruzar) al eje X más de n -veces, en otras palabras, la gráfica intersecta al eje X a lo más n -veces.

Propiedad 3. La gráfica de una función polinomial de grado impar intersecta al menos una vez al eje X .

Propiedad 4. La gráfica de una función polinomial de grado n puede tener a lo más $n - 1$ máximos o mínimos locales.

Aplicación de las propiedades

Ejercicio 1.17. Con la función polinomial $f(x) = -2x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 32$ realizar lo siguiente:

Utilizar la propiedad 1 contestar los incisos a), b), c) y d).

a) ¿Cuál es la potencia del término de mayor grado? _____ ¿par o impar?

b) ¿Qué signo tiene el coeficiente del término de mayor grado? _____

c) ¿Cómo es la función cuando x es negativo? _____

d) ¿Cómo es la función cuando x es positivo? _____

A continuación, utilizar la propiedad 2 para los incisos e), f) y g)

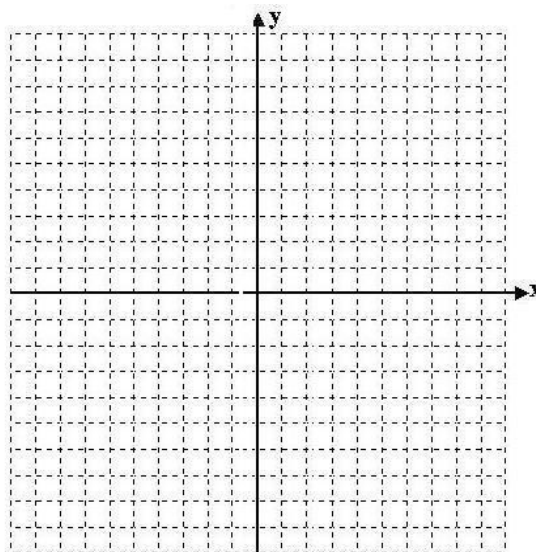
e) ¿En cuántos puntos a lo más la gráfica interseca al eje X? _____

f) ¿Cuáles son los puntos de intersección con el eje X? Utilizar el hecho de que $y = 0$ en los puntos de intersección. Escribir la ecuación resultante.

g) Identificar y resolver la ecuación que resulta.

h) Ante la imposibilidad de resolver, se sugiere hacer una tabulación en el intervalo $[-10,5]$ y trazar la gráfica. Utilizar la escala adecuada.

| x | $f(x)$ |
|-----|--------|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |



i) Con la gráfica ¿Cuáles son las intersecciones con el eje X?

En el caso de no tener raíces enteras, se sugiere utilizar la siguiente propiedad:

Propiedad 5. Si una función polinomial está definida en el intervalo $[a, b]$ y se cumple que: $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$ o $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ entonces existe un número c en el intervalo $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Una forma de tener la raíz aproximada es:

$$c = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)}$$

j) Utilizar las tablas y la expresión anterior. para obtener en forma aproximada las raíces de la función polinomial

k) Escribir el intervalo o intervalos donde la función es creciente.

l) Escribir el intervalo o intervalos donde la función es decreciente.

m) Indicar los puntos máximos y/o mínimos de la curva.

Ejercicio 1.18. Con la función polinomial $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 7x - 8$ realizar lo siguiente:

Utilizar la propiedad 1 contesta las preguntas a), b), c) y d).

a) ¿Cuál es la potencia del primer término? _____ ¿par o impar? _____

b) ¿Qué signo tiene el coeficiente del primer término? _____

c) ¿Cómo es la función cuando x es negativo? _____

d) ¿Cómo es la función cuando x es positivo? _____

Utilizar la propiedad 2 para contestar e).

e) ¿En cuántos puntos a lo más la gráfica intersecta al eje X? _____

y la propiedad 3 para contestar f) y g).

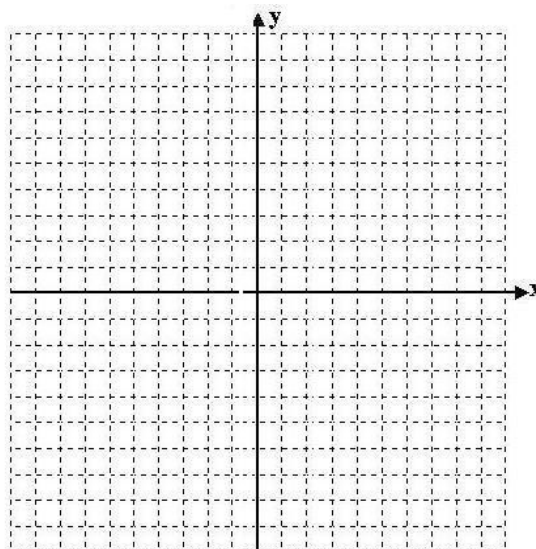
f) ¿En cuántos puntos al menos la gráfica intersecta al eje X? _____

g) ¿Cuáles son los puntos de intersección con el eje X? Utilizar el hecho de que $y = 0$ en los puntos de intersección. Escribir la ecuación que resulta.

h) Identificar y resolver la ecuación del inciso g).

i) Ante la imposibilidad de resolver, se sugiere hacer una tabulación y la gráfica.

| x | $f(x)$ |
|-----|--------|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |



j) Con la gráfica ¿Cuáles son las intersecciones con el eje X?

Utilizar la propiedad 5 para contestar el inciso k).

k) Utilizar las tablas y la expresión anterior. para obtener en forma aproximada las raíces de la función polinomial

l) Escribir en forma aproximada el intervalo o intervalos donde la función es creciente. _____

m) Escribir en forma aproximada el intervalo o intervalos donde la función es decreciente. _____

n) Indicar en forma aproximada los puntos máximos y/o mínimos de la curva.

Método para obtener las posibles raíces reales (las intersecciones de la gráfica con el eje X) y complejas de una función polinomial.

Teorema fundamental del álgebra

Cualquier polinomio de grado n $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ tiene n -raíces

reales o complejas (las raíces múltiples se cuentan como el número de su multiplicidad).

Al hacer $y = 0$ se obtiene una ecuación de grado n .

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

la ecuación, en general, cumple con las siguientes reglas

Regla de los signos de Descartes

El número de soluciones reales depende de los cambios de signo que tenga la ecuación al recorrer la ecuación de izquierda a derecha.

a) El número de soluciones reales positivas de la ecuación es igual al número de variaciones de signo de $f(x)$ o es igual a este número menos un número entero par.

b) El número de soluciones reales negativas de la ecuación es igual al número de variaciones de signo de $f(-x)$ o es igual a este número menos un número entero par.

Consecuencia de la regla de los signos de Descartes

Si los coeficientes de una ecuación son todos positivos, entonces la ecuación no tiene raíces positivas.

Si los coeficientes de las potencias pares de x son todos del mismo signo y los coeficientes de las potencias impares son todos de signo contrario a las potencias pares, la ecuación no tiene raíces negativas.

Toda ecuación de grado par cuyo término constante es negativo tiene como mínimo dos raíces reales, una positiva y una negativa.

Ejercicio 1.19. Dada la función $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 10x + 24$ analizar sus intersecciones con el eje X. Raíces de la función.

- a) ¿Cuál es el número máximo de intersecciones de la gráfica de la función con el eje x? _____
- b) ¿Cuál es el número mínimo de intersecciones de la gráfica de la función con el eje X? _____
- c) ¿Cuántos cambios de signo tiene la función $f(x)$? _____
- d) ¿Cuántas probables raíces positivas tiene la función? _____
- e) ¿Cuál es la función $f(-x)$? _____
- f) ¿Cuántos cambios de signo tiene la función $f(-x)$? _____
- g) ¿Cuántas probables raíces negativas tiene la función? _____
- h) La siguiente tabla muestra el número de combinaciones de raíces para la función dada. Llenar la tabla.

Las combinaciones probables son:

| Raíces | 1ª. opción | 2ª. opción |
|-----------|------------|------------|
| Positivas | | |
| Negativas | | |
| Complejas | | |

Para escribir el número de raíces complejas utilice el teorema fundamental del álgebra.

Cálculo de las raíces de funciones polinomiales.

Una vez que se tiene el análisis anterior, utilizamos los teoremas del residuo y del factor para calcular las raíces de la función.

Teorema del residuo

Si se divide un polinomio $p(x) = f(x)$, entre el binomio $x - a$, entonces el residuo R está dado por $R = p(a)$.

Teorema del factor

El número c es raíz del polinomio $p(x) = 0$, esto es, c es solución de la ecuación $p(x) = 0$ si y solo si $p(x)$ es divisible entre $x - c$. En otros términos $p(c) = 0$.

Ejercicio 1.20. Hallar la intersección con el eje X de la función $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 10x + 24$.

Nota: Usar ensayo y error

a) Dividir el polinomio de la función entre $x - 1$. ¿Por qué $x - 1$?

b) ¿Cuál es el cociente de la división realizada? _____

c) ¿Cuál es el residuo en la división realizada? _____

d) ¿Utiliza el teorema del factor para determinar si $x = 1$ es una raíz del polinomio? _____ ¿Por qué? _____

Nota: Lo anterior lo podemos realizar en forma sintética.

Procedimiento para la división sintética

Escribir los coeficientes del polinomio, en caso de no tener alguna potencia escribir cero.

Como ejemplo, utilizamos nuestro ejercicio, para $x = 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -7 & -10 & 24 \\ & & 2 & -5 & -15 \\ \hline & 2 & -5 & -15 & 9 \end{array}$$

[1 los coeficientes y el valor de $x = 1$
los productos realizados

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & -15 & 9 \\ \hline & 2 & -5 & -15 & 9 \end{array}$$

la suma de los renglones

Observamos el último número del último renglón, corresponde al residuo obtenido en nuestra división y los números de las primera tres columnas son los coeficientes del polinomio cociente, que corresponde a un polinomio de grado $n - 1$.

$$2x^2 - 5x - 15$$

Para encontrar las raíces se sugiere realizar el ejercicio con ensayo y error con los valores divisores del término independiente, en nuestro ejercicio utilizar $x = 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 8$ y -8 .

e) Algunos de los valores utilizados ¿son unas raíces del polinomio? _____

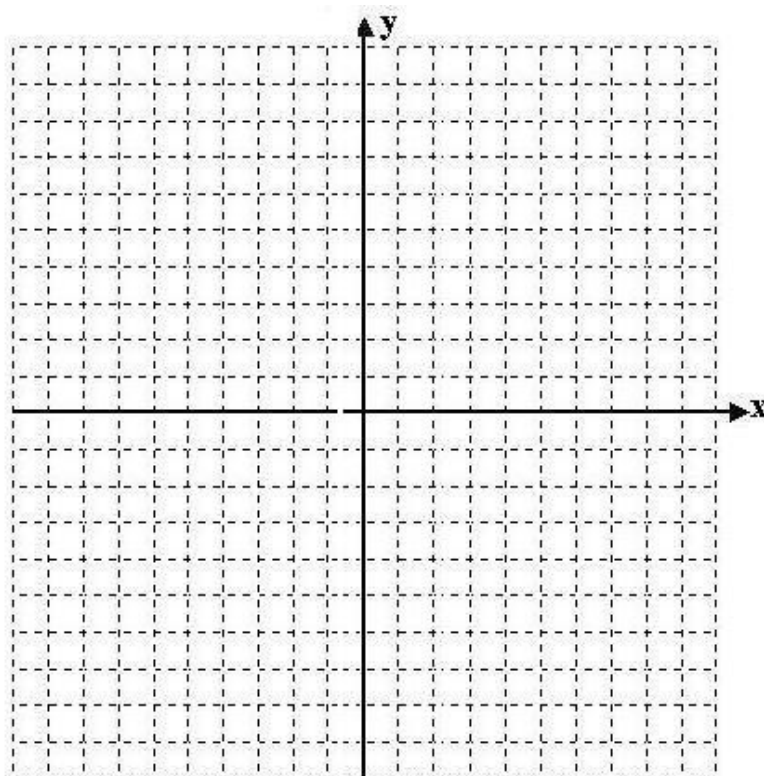
¿Cuál o cuáles? _____

f) Encuentre las otras dos raíces. $X =$ _____

g) ¿Cuáles son los puntos donde la gráfica de la función intersecta al eje X ?

Cuando se logra reducir a un polinomio de grado dos, se sugiere resolverlo por la fórmula de la ecuación de segundo grado.

h) Graficar la función en el intervalo donde se encuentran las raíces.



Relacionar la expresión algebraica de una función polinomial con su gráfica.

Ejercicio 1.21. Relaciona las siguientes funciones polinomiales con las gráficas dadas

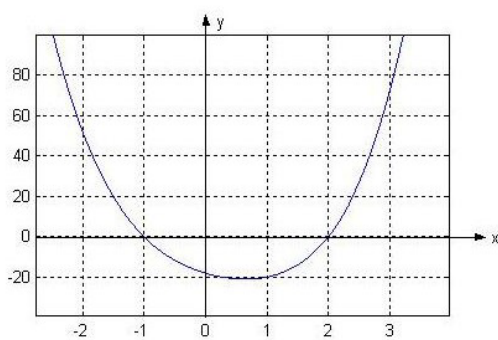
a) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 10x + 24$

b) $f(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18$

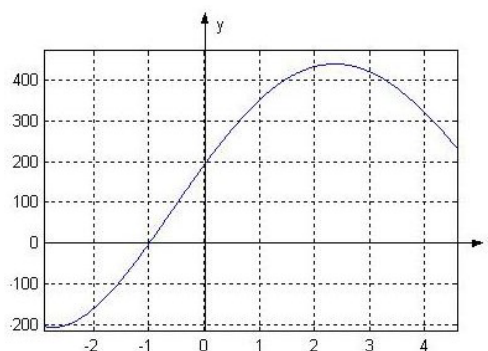
c) $f(x) = x^4 - 9x^3 - 18x^2 + 184x + 192$

d) $f(x) = -x^4 + 3x^3$

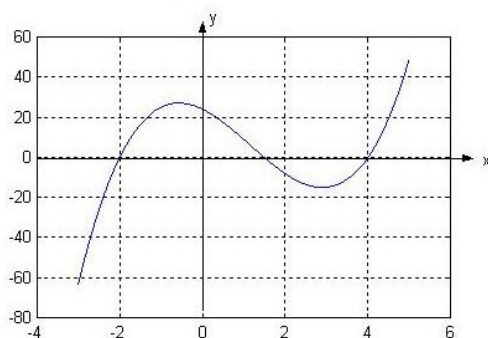
La expresión algebraica del inciso a) ya fue analizada en ejercicios anteriores, identificar su gráfica.



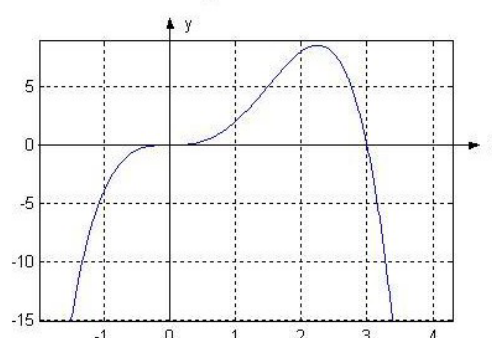
I



II



III



IV

Análisis de la función del inciso b) $f(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18$

a) ¿Cuál es el número máximo de intersecciones de la gráfica de la función con el eje x? _____

b) ¿Cuál es el número mínimo de intersecciones de la gráfica de la función con el eje X? _____

c) ¿Cuántos cambios de signo tiene la función $f(x)$? _____

d) ¿Cuántas probables raíces positivas tiene la función? _____

e) ¿Cuál es la función $f(-x)$? _____

f) ¿Cuántos cambios de signo tiene la función $f(-x)$? _____

g) ¿Cuántas probables raíces negativas tiene la función? _____

h) La siguiente tabla muestra el número de combinaciones de raíces para la función dada. Llenar la tabla.

| Raíces | 1ª. opción | 2ª. opción |
|-----------|------------|------------|
| Positivas | | |
| Negativas | | |
| Complejas | | |

i) Utilizar la división sintética para encontrar las raíces

Las raíces de la función son:

j) ¿Cuáles son los puntos donde la gráfica de la función intersecta al eje X ?

k) ¿Cuál es la gráfica correspondiente? _____

Analizar la función del inciso c) $f(x) = x^4 - 9x^3 - 18x^2 + 184x + 192$

a) ¿Cuál es el número máximo de intersecciones de la gráfica de la función con el eje x ? _____

b) ¿Cuál es el número mínimo de intersecciones de la gráfica de la función con el eje X ? _____

c) ¿Cuántos cambios de signo tiene la función $f(x)$? _____

d) ¿Cuántas probables raíces positivas tiene la función? _____

e) ¿Cuál es la función $f(-x)$? _____

f) ¿Cuántos cambios de signo tiene la función $f(-x)$? _____

g) ¿Cuántas probables raíces negativas tiene la función? _____

h) La siguiente tabla muestra el número de combinaciones de raíces para la función dada. Llenar la tabla.

| Raíces | 1ª. opción | 2ª. opción |
|-----------|------------|------------|
| Positivas | | |
| Negativas | | |
| Complejas | | |

i) Utilizar la división sintética u otro método para encontrar las raíces de la función

Las raíces de la función son:

j) ¿Cuáles son los puntos donde la gráfica de la función intersecta al eje X?

k) ¿Cuál es la gráfica correspondiente? _____

Analizar la función del inciso d) $f(x) = -x^4 + 3x^3$

a) ¿Cuál es el número máximo de intersecciones de la gráfica de la función con el eje x? _____

b) ¿Cuál es el número mínimo de intersecciones de la gráfica de la función con el eje X? _____

c) ¿Cuántos cambios de signo tiene la función $f(x)$? _____

d) ¿Cuántas probables raíces positivas tiene la función? _____

e) ¿Cuál es la función $f(-x)$? _____

f) ¿Cuántos cambios de signo tiene la función $f(-x)$? _____

g) ¿Cuántas probables raíces negativas tiene la función? _____

h) La siguiente tabla muestra el número de combinaciones de raíces para la función dada. Llenar la tabla.

| Raíces | 1ª. opción | 2ª. opción |
|-----------|------------|------------|
| Positivas | | |
| Negativas | | |
| Complejas | | |

i) Utilizar la división sintética u otro método para encontrar las raíces de la función

Las raíces de la función son:

j) ¿Cuáles son los puntos donde la gráfica de la función intersecta al eje X?

k) ¿Cuál es la gráfica correspondiente?_____

Expresión algebraica de la función polinomial cuando se conocen sus raíces. Resultado importante del Teorema Fundamental del álgebra:

Si las raíces de un polinomio son $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ entonces:

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n).$$

Utilizar el resultado anterior para resolver lo siguiente:

Ejercicio 1.22. Encontrar los ceros de la función $f(x) = (2x + 1)(x - 5)(3x - 4)$

a) Igualar la expresión con cero. _____

¿Por qué se iguala a cero?_____

b) Utilizando las propiedades de los productos nulos obtener los valores de las raíces

$x_1 =$ _____; $x_2 =$ _____; $x_3 =$ _____; $x_4 =$ _____;

Ejercicio 1.23. Con la función $f(x) = x^3 - 7x^2 - 14x + 48$ realizar lo siguiente:

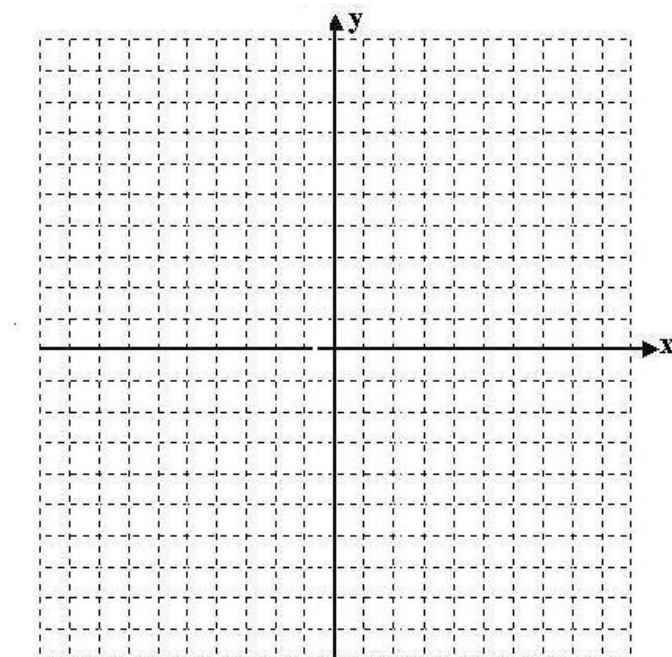
a) Encontrar los ceros de la función.

b) Escribirla en la forma $f(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)$

c) Demostrar que al realizar los productos en la expresión anterior se obtiene la función polinomial dada.

Traslación vertical

Ejercicio 1.24. Graficar la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-5, 5]$, parábola con vértice en el origen y que abre hacia arriba. Utilizar la escala adecuada.



a) Llenar la tabla para la función $f(x)$.

| x | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | |
| $g(x)$ | | | | | | | | | | | |
| $h(x)$ | | | | | | | | | | | |

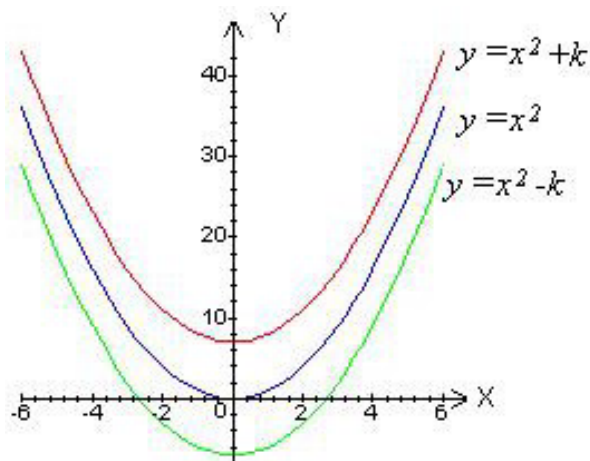
b) Llenar las tablas para las funciones $g(x) = x^2 + 4$ y $h(x) = x^2 - 4$.

c) Sobre la gráfica anterior, graficar las funciones $g(x) = x^2 + 4$ y $h(x) = x^2 - 4$.

c) Hacer la comparación con la curva original y anotar las observaciones.

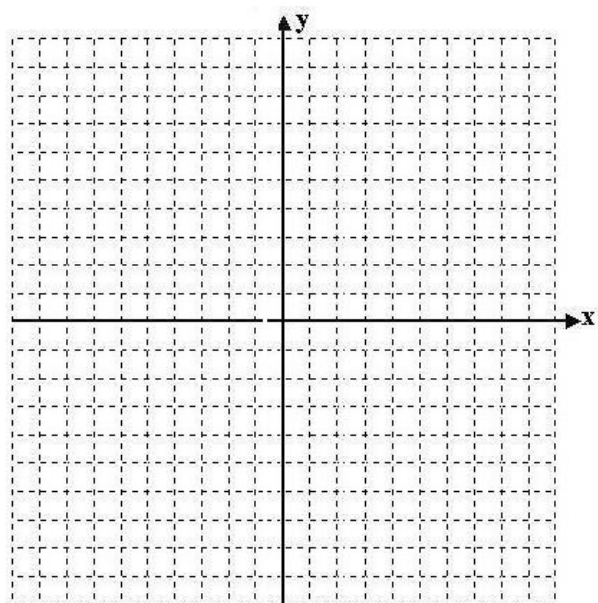
Resumen: Al transformar la función $f(x) = x^2$ por la función

$g(x) = f(x) + k = x^2 + k$, la curva se desplaza hacia arriba una distancia k si $k > 0$ y una distancia k hacia abajo si $k < 0$.



Traslación horizontal

Ejercicio 1.25 Graficar la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-5, 5]$, parábola con vértice en el origen y que abre hacia arriba. Utilizar la escala adecuada.



a) Llenar la tabla para la función $f(x)$ y las tablas para las funciones $g(x) = (x - 3)^2$ y $h(x) = (x + 3)^2$.

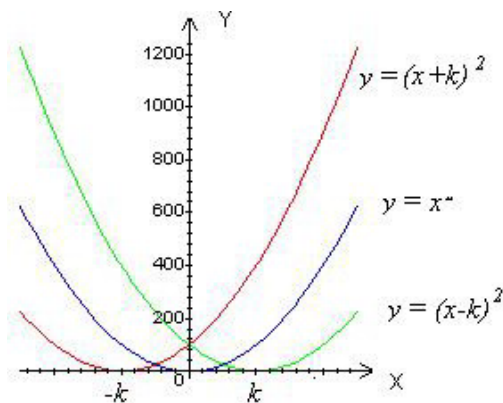
| x | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | |
| $g(x)$ | | | | | | | | | | | |
| $h(x)$ | | | | | | | | | | | |

b) Sobre la gráfica anterior, graficar las funciones $g(x) = (x - 3)^2$ y $h(x) = (x + 3)^2$.

c) Hacer la comparación con la curva original y anotar las observaciones.

Resumen: Al transformar la función $f(x) = x^2$ por la función

$g(x) = f(x+h) = (x+h)^2$, la curva se desplaza hacia la derecha una distancia h si $h > 0$ y una distancia h hacia la izquierda si $h < 0$.

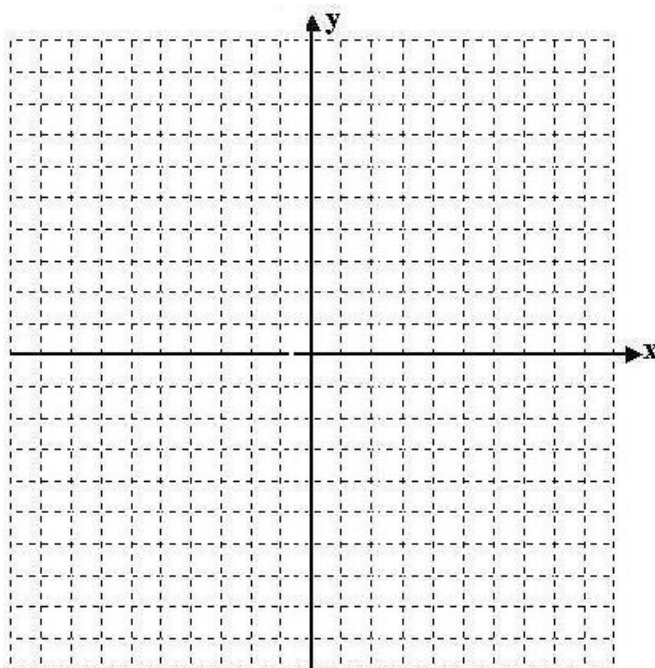


Si el desplazamiento es a la vez horizontal y vertical, la expresión algebraica es:

$$g(x) = (x - h)^2 + k$$

Dilatación y contracción de una función

Ejercicio 1.26. Graficar la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-5,5]$, parábola con vértice en el origen y que abre hacia arriba. Utilizar la escala adecuada.



- a) Llenar la tabla para la función $f(x)$ y las tablas para las funciones $g(x) = 6x^2$ y $h(x) = \frac{4}{5}x^2$.

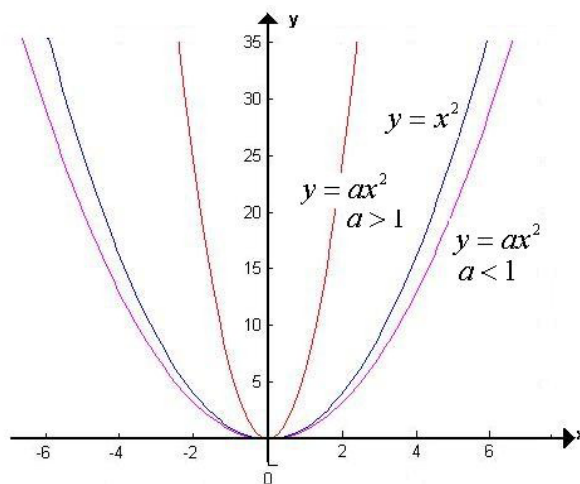
| x | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | |
| $g(x)$ | | | | | | | | | | | |
| $h(x)$ | | | | | | | | | | | |

- b) Sobre la gráfica anterior, graficar las funciones $g(x) = 6x^2$ y $h(x) = \frac{4}{5}x^2$.

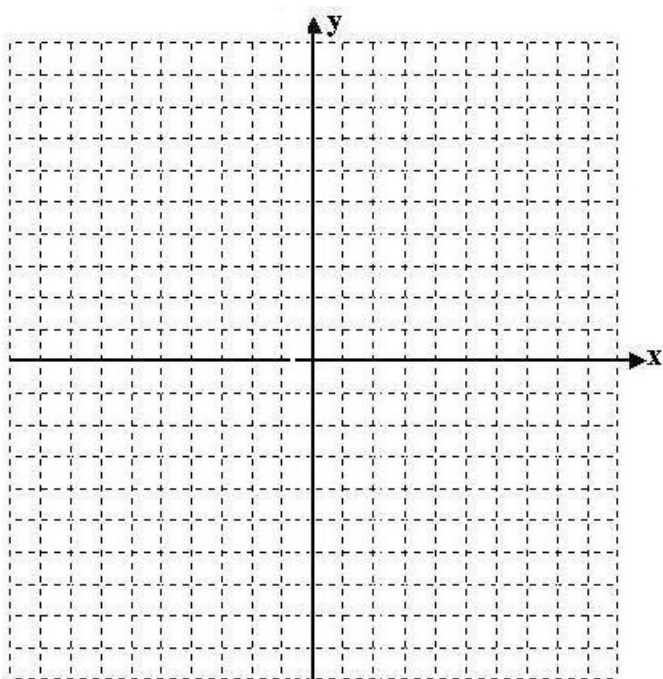
- c) Hacer la comparación con la curva original y anotar las observaciones.

Resumen: Al transformar la función $f(x) = x^2$ por la función $g(x) = af(x) = ax^2$,

la curva se dilata si $a > 1$ o se contrae si $a < 1$ respecto al eje Y.



Ejercicio 1.27. Graficar la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-5, 5]$, parábola con vértice en el origen y que abre hacia arriba. Utilizar la escala adecuada.



a) Llenar la tabla para la función $f(x)$ y las tablas para las funciones

$$f(x) = \left(\frac{4}{5}x\right)^2 \quad \text{y} \quad g(x) = (6x)^2$$

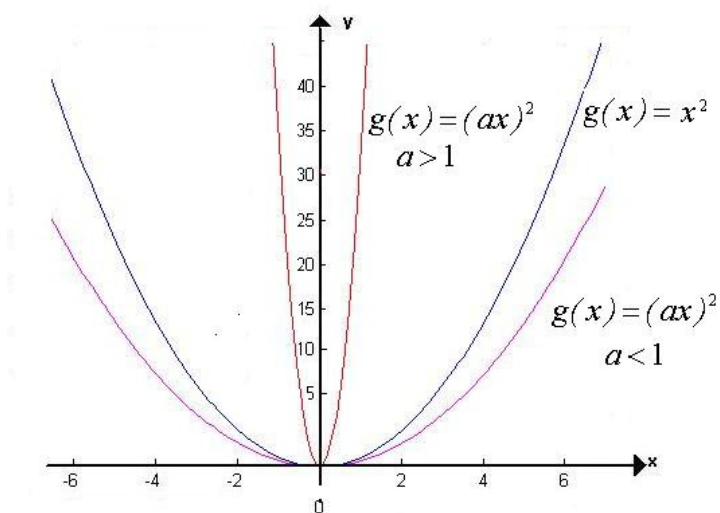
| x | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | | | | | | | | | | |
| g(x) | | | | | | | | | | | |
| h(x) | | | | | | | | | | | |

b) Sobre la gráfica anterior, graficar las funciones $f(x) = \left(\frac{4}{5}x\right)^2$ y $g(x) = (6x)^2$

c) Hacer la comparación con la curva original y anotar las observaciones.

Resumen: Al transformar la función $f(x) = x^2$ por la función

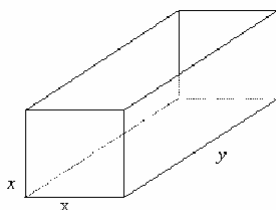
$g(x) = f(ax) = (ax)^2$, la curva se contrae si $a > 1$ o se dilata si $a < 1$ con respecto al eje X.



Problemas y ejercicios propuestos

1) Se va a construir una caja rectangular (paralelepípedo) con bases cuadradas. Se tienen 96 centímetros cuadrados de material. Construir las cajas en los casos siguientes: $(x = 2, y = 11)$, $(x = 4, y = 4)$, $(x = 6, y = 1)$ y calcular el área de la caja en cada caso.

Sugerencia: Para resolver este problema obtener el área de la caja con los datos de la figura, igualar el área obtenida con el área dada (96 centímetros cuadrados) y despejar el valor de y .



a) Llenar la tabla en la cual se obtiene el volumen V de la caja en función del valor de x .

| | | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|---|---|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|-----|
| x | 0.5 | 1 | 2 | 2.5 | 3 | 3.5 | 4 | 4.5 | 5 | 5.5 | 6 | 6.5 |
| V | | | | | | | | | | | | |

b) ¿Qué ocurre si $x \geq 7$?

c) Obtener la expresión algebraica del volumen V en función del valor de x y graficar.

d) ¿Para qué valor de x se obtiene el volumen máximo?

Para cada una de las siguientes funciones, tabular y trazar su gráfica, obtener las intersecciones con los ejes de coordenadas, los puntos máximos y mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

2) $f(x) = x^3 - 3x^2$

3) $f(x) = x^4 - 4x^3$

4) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

5) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

6) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

7) $f(x) = 3x^5 - 5x^4$

8) $f(x) = x^3 - 12x + 16$

9) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 36x$

10) $f(x) = x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 32$

11) $f(x) = x^4 + 4x^2 - 5$

12) $f(x) = x^4 - 2x^3$

13) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 5$

Graficar las siguientes funciones y obtener los puntos de intersección (aproximadamente) con el eje X.

14) $f(x) = 8x - 4x^2 - 2x + 25$

17) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$

15) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 12x - 3$

18) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16$

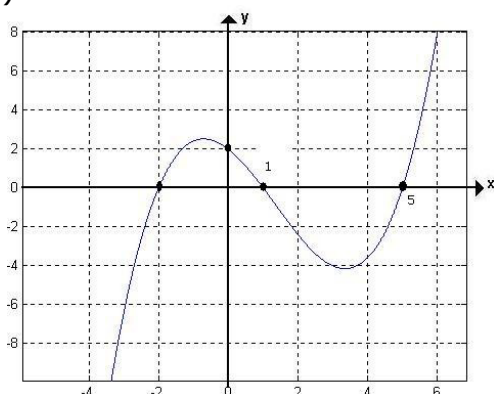
16) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$

19) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 5$

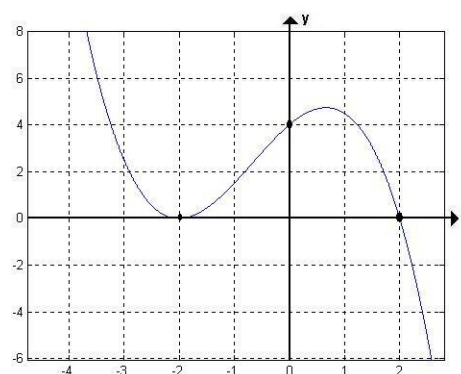
Dadas las siguientes gráficas obtener su expresión algebraica

Funciones cúbicas

19)

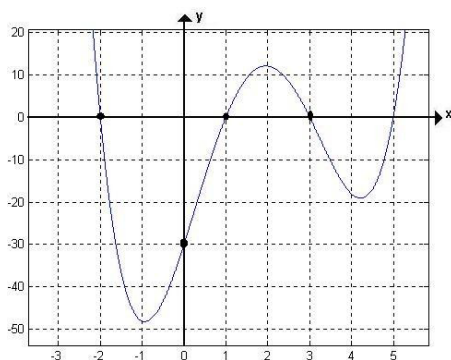


20)

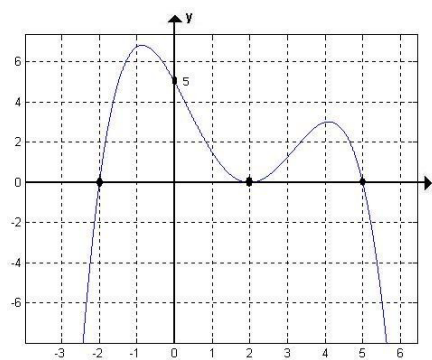


Funciones de grado cuatro

21)



22)



Relacionar las siguientes funciones polinomiales con las gráficas

23) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

24) $f(x) = 1 + 4x - x^3$

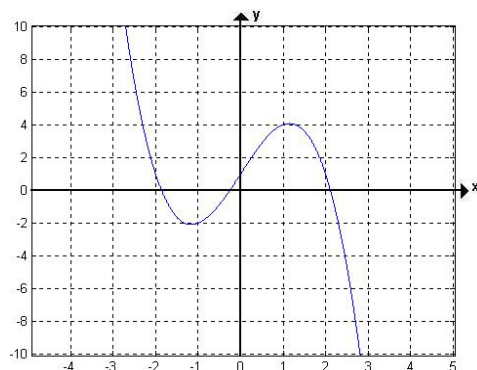
25) $f(x) = 3x^3 - x^4$

26) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 13x + 1$

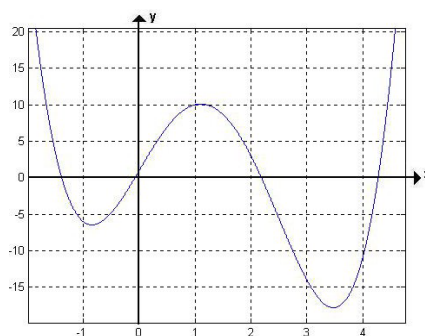
27) $f(x) = 2x^5 - 10x^3 + 6x - 1$

28) $f(x) = x^5 + 2x^4$

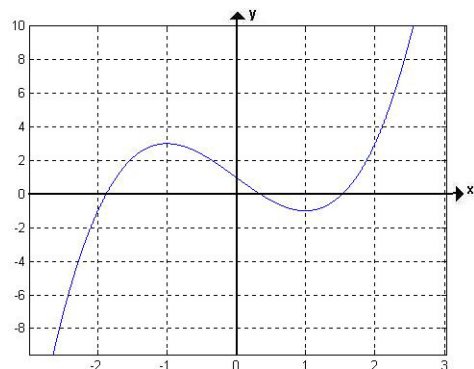
a)



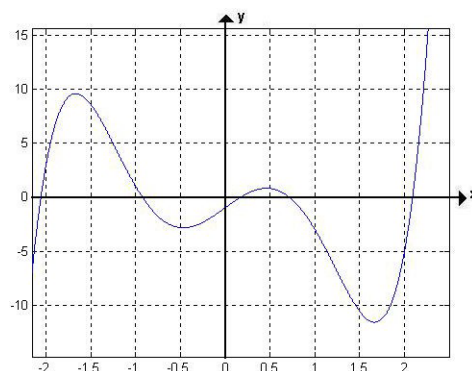
b)



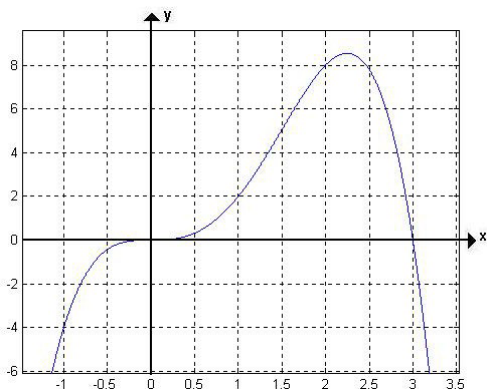
c)



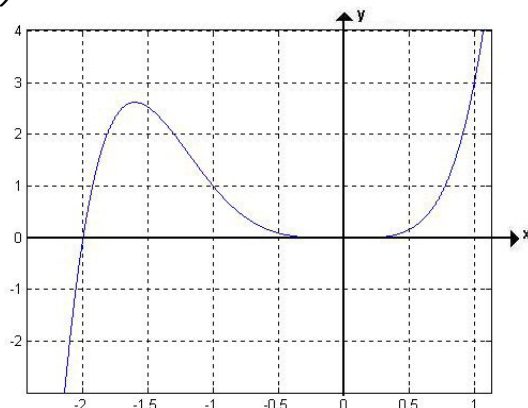
d)



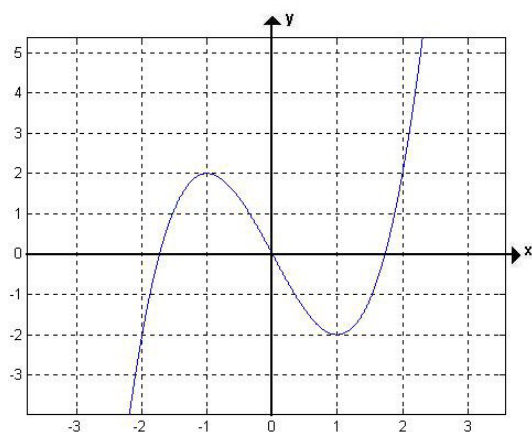
e)



f)



La gráfica de $f(x) = x^3 - 3x$ esta dada en la siguiente figura



Graficar las siguientes funciones:

29) $g(x) = x^3 - 3x + 5$

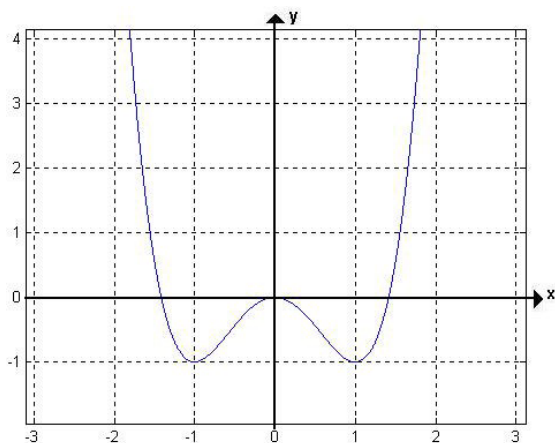
30) $g(x) = x^3 - 3x - 5$

31) $g(x) = (x - 2)^3 - 3(x - 2)$

32) $g(x) = (x + 3)^3 - 3(x + 3)$

33) $g(x) = (x - 3)^3 - 3(x - 3)$

La gráfica de $f(x) = x^4 - 2x^2$ se muestra en la figura



Graficar las siguientes funciones:

34) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

35) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$

36) $f(x) = (x + 2)^4 - 2(x + 2)^2$

37) $f(x) = (x + 3)^4 - 2(x + 3)^2 + 4$

38) $f(x) = (x + 1)^4 - 2(x + 1)^2$

UNIDAD 1 EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

- A.** Considera las siguientes ecuaciones de primer grado con 2 incógnitas. Despeja a la variable y de cada una de las ecuaciones siguientes y simplifica para indicar si la expresión resultante corresponde a una función polinomial o no.

| | | |
|--------------------------|---------------------------|-------------------------|
| 1. $x^2 + 3y - 6 = 0$ | 2. $6x - 5y = 0$ | 3. $8x + 4y + 12 = 0$ |
| 4. $7xy - 7y = 0$ | 5. $5x^3 - 6x^2 - 5y = 0$ | 6. $8x^2 + 8y + 24 = 0$ |
| 7. $4x^2 - 6 + 3y^2 = 0$ | 8. $3x^3 - 3y = 0$ | 9. $7xy - 7 = 0$ |

- B.** Indica si la expresión corresponde o no a una función polinomial.

a) $y = 3x + 4$

b) $y^2 = 3x^2 - 2x + 4$

c) $y^2 = x - 1$

d) $y = x^3 + 4x^2$

e) $y = \frac{3x+4}{x+2}$

f) $y = \frac{2x}{3} - 7$

- C.** Escribe en notación $y = f(x)$ las expresiones del ejercicio anterior que sí representan a una función y elige aquéllas que son una función polinomial

- D.** Considera las funciones descritas en los incisos subsecuentes y escribe los valores que corresponden a la variable $y = f(x)$ en la tabla dada

| | | | | | | | | | |
|------------|----|----|----|----|---|---|---|---|---|
| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y = f(x)$ | | | | | | | | | |

i. $y = f(x) = 8 - 4x$

ii. $y = f(x) = 5x - x^3$

iii. $y = f(x) = 2x - x^2$

iv. $y = f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

v. $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$

vi. $y = f(x) = 2x + 3$

- E.** Encuentra los valores de $f(x)$ y grafica en el plano cartesiano los puntos descritos por la tabla de valores asociada a cada función polinomial de grado 1 y 2 respectivamente.

| | | | | | | | | | |
|------------------|----|----|----|----|---|---|---|---|---|
| A) x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x) = x - x^2$ | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|-----------------|----|----|----|----|---|---|---|---|---|
| B) x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x) = 2x - 5$ | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|------------------------|----|----|----|----|---|---|---|---|---|
| C) x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x) = x^2 - 2x - 15$ | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|------------------|----|----|----|----|---|---|---|---|---|
| D) x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x) = -3x - 2$ | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|----------------------------|----|----|----|----|---|---|---|---|---|
| E) x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2$ | | | | | | | | | |

F. Factoriza las siguientes expresiones de 2º. grado asociadas a $f(x)$ y escribe la forma factorizada de la función $f(x)$

| Función | Factorización | Expresión factorizada de $f(x)$ |
|------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| $f(x) = x^2 - 2x - 15$ | $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 2)$ | $f(x) = (x - 5)(x + 2)$ |
| $f(x) = 3x^2 - 6x$ | | |
| $f(x) = 10x - 2x^2$ | | |
| $f(x) = x^3 - 7x$ | | |
| $f(x) = x^4 - 3x$ | | |
| $f(x) = x^2 - 4x + 4$ | | |
| $f(x) = 4x^2 + 4x - 1$ | | |
| $f(x) = x^2 - 8x + 16$ | | |
| $f(x) = x^2 - 5x + 6$ | | |
| $f(x) = 2x^3 - 6x^2$ | | |

G. Factoriza la expresión de la función e indica los ceros que puedan observarse de dicha factorización

| Función | Expresión factorizada de $f(x)$ | Ceros de la función o Raíz algebraica de $f(x)$ |
|-----------------------------|--|---|
| $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2$ | $f(x) = x^2(x^2 + 3x - 4) = x^2(x + 4)(x - 1)$ | $x = 0, x = -4, x = 1$ |
| $f(x) = x^2 - 2x + 1$ | | |
| $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ | | |
| $f(x) = x^2 - 10x + 25$ | | |
| $f(x) = 2x^3 - 8x$ | $f(x) = x(2x^2 - 8)$ | $x = 0, x = 4, x = -4$ |
| $f(x) = 4x^2 - 8x + 1$ | | |
| $f(x) = x^2 + 7x + 12$ | $f(x) = (x + 5)(x + 2)$ | $x = -5, x = -2$ |
| $f(x) = 9x^2 - 25$ | | |
| $f(x) = x^2 - 5$ | | |
| $f(x) = x^4 - 9x^2$ | | |
| $f(x) = 9x^4 - 16x^2$ | $f(x) = x^2(9x^2 + 16) = x^2(3x - 4)(3x + 4)$ | $x = 0, x = \frac{4}{3}, x = -\frac{4}{3}$ |
| $f(x) = x^5 - x^2$ | | |
| $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$ | $f(x) = x^2(x^2 - 3x + 2) = x^2(x - 1)(x - 2)$ | $x = 0, x = 1, x = 2$ |
| $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ | | |
| $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$ | | |
| $f(x) = x^5 - 5x^3 + 6x$ | | |

- H. Muestra que $x = 1$ es una raíz algebraica de $f(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2$ y realiza la división

$$x - 1 \overline{) x^4 - 5x^3 + 4x^2}$$

para escribir el valor de $g(x)$ en la factorización de

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 = (x - 1)g(x)$$

- I. Considera las funciones siguientes, encuentra el valor de $f(b)$ y comprueba que este valor coincide con el residuo de la división sintética de $f(x)$ por $x - b$

i. $f(x) = -5x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 4$, $b = 2$

ii. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x + 3$ $b = 4$

iii. $g(x) = 3x^2 - 5x - 2$ $b = 1$

iv. $f(x) = x^3 - 6x + 1$ $b = -1$

v. $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 7x + 2$ $b = 4$

vi. $g(x) = -4x^3 + x^2 + x - 2$ $b = 0$

Ejemplo i)

| | | -5 | -7 | -12 | -25 | |
|---|----|----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | -2 | -5 | 3 | 2 | -1 | 4 |
| | | -5 | +10 | | | |
| | | | -7 | 2 | | |
| | | | -7 | +14 | | |
| | | | | -12 | -1 | |
| | | | | -12 | +24 | |
| | | | | | -25 | 4 |
| | | | | | -25 | +50 |
| | | | | | | -46 |

Además

$$\begin{aligned} f(2) &= -5(2)^4 + 3(2)^3 + 2(2)^2 - (2) + 4 = -5(16) + 3(8) + 8 - (2) + 4 = \\ &= -80 + 24 + 8 - 2 + 4 = -82 + 36 = -46 \end{aligned}$$

Ejemplo v)

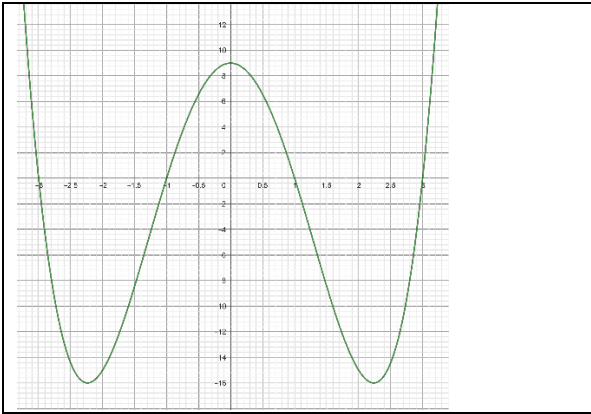
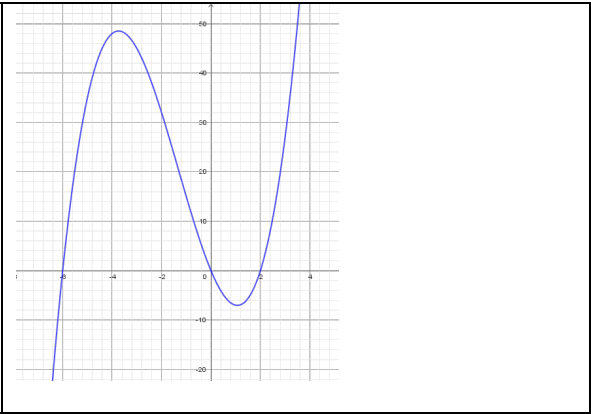
| | | | | | |
|---|----|---|----|-----|------|
| | | 2 | 12 | 41 | |
| 1 | -4 | 2 | 4 | -7 | 2 |
| | | 2 | -8 | | |
| | | | 12 | -7 | |
| | | | 12 | -48 | |
| | | | | 41 | 2 |
| | | | | 41 | -164 |
| | | | | | 166 |

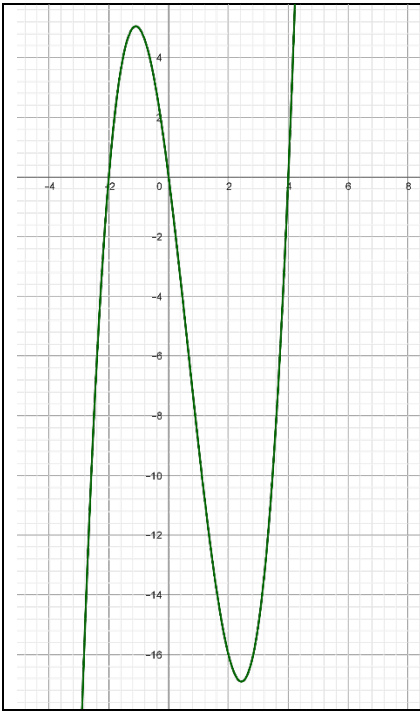
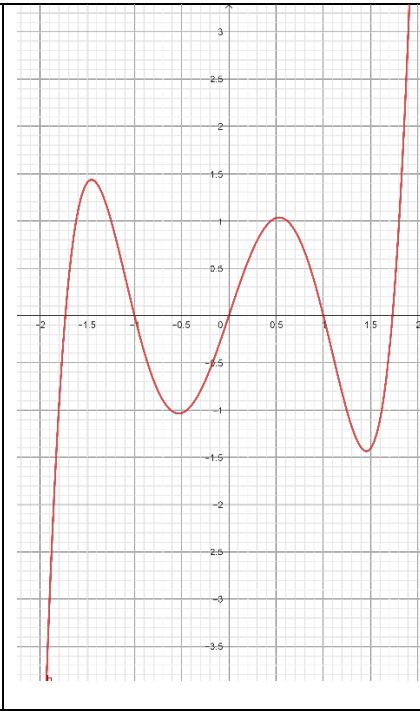
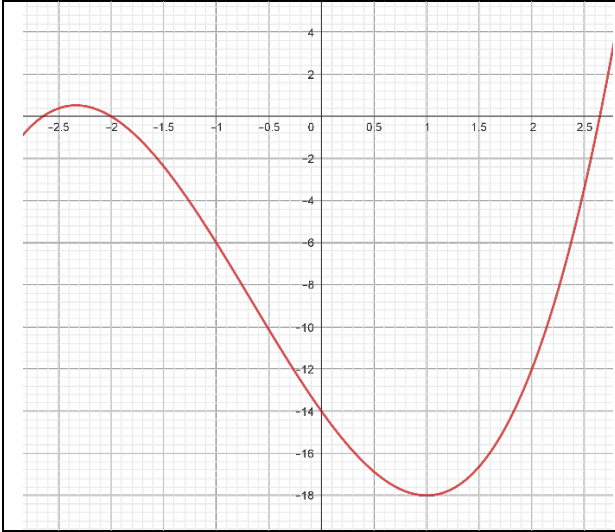
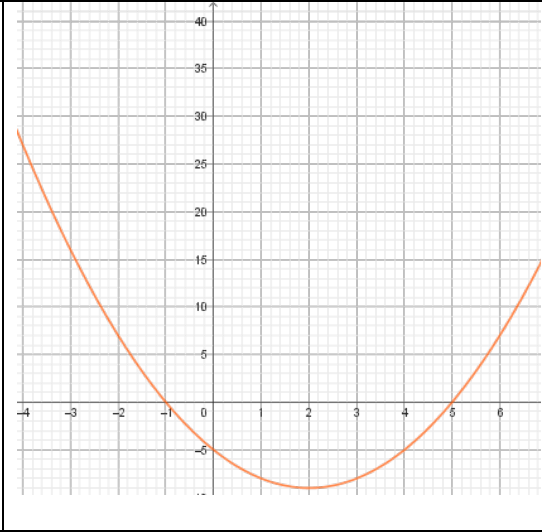
Y puede comprobarse que

$$f(4) = 2(4)^3 + 4(4)^2 - 7(4) + 2 = 2(64) + 4(16) - 28 + 2 = 128 + 64 - 28 + 26 = 166$$

J. Relaciona la gráfica que corresponde a la expresión de la función factorizada

| | |
|--|---|
| (a) $f(x) = (x - 5)(x + 1)$ | (b) $g(x) = x(x + 2)(x - 4)$ |
| (c) $g(x) = (x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7})(x + 2)$ | (d) $g(x) = x(x - 2)(x + 6)$ |
| (e) $f(x) = x(x - 1)(x + 1)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ | (f) $f(x) = (x - 3)(x + 3)(x - 1)(x + 1)$ |

| | |
|---|--|
|  |  |
| () | () |

| | |
|---|--|
|  |  |
| () | () |
|  |  |
| () | () |

- A. Escribe la expresión que corresponde a las raíces algebraicas de cada función que se enlista

| Raíces algebraicas de la función | Función |
|--|---------------------------------------|
| $x = 1, x = -1, x = 2, x = -2$ | |
| $x = 3, x = -3, x = 1$ | |
| $x = 0, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$ | , |
| $x = 5, x = -3, x = 1, x = -1$ | $g(x) = x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15$ |
| $x = \sqrt{5}, x = -\sqrt{5}, x = 2, x = -2, x = 0,$ | |
| $x = -6, x = 3$ | |
| $x = -2, x = 4, x = 1$ | |

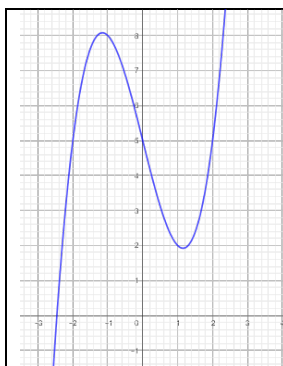
Ejemplo: ya que las raíces algebraicas son

$$x = 5, x = -3, x = 1, x = -1$$

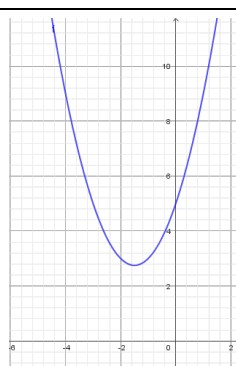
$$\begin{aligned} \text{Entonces } g(x) &= (x - 5)(x + 3)(x - 1)(x + 1) = (x - 5)(x + 3)(x^2 - 1) = \\ &= (x^2 - 2x - 15)(x^2 - 1) = x^4 - 2x^3 - 15x^2 - x^2 + 2x + 15 = \\ &= x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15 \end{aligned}$$

- K. Las siguientes imágenes son gráficas de funciones tales que no tienen solución en los números reales o bien tienen alguna (s) raíz(ces) algebraica(s) real(es) mientras que las otras “soluciones” son imaginarias, es decir no tienen solución en los números reales. Indica la expresión que corresponde a cada una.

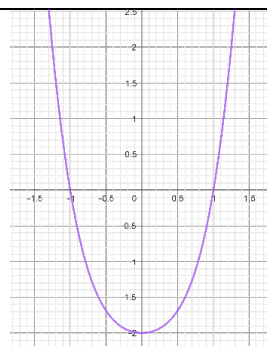
| | | |
|------------------------------|---------------------------------|----------------------------|
| (A) $g(x) = x^2 + 3x + 5$ | (B) $f(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$ | (C) $f(x) = x^4 + x^2 - 2$ |
| (D) $f(x) = -x^3 - 2x^2 - x$ | (E) $g(x) = x^5 - 3x^3 - 4x$ | (F) $f(x) = x^3 - 4x + 5$ |



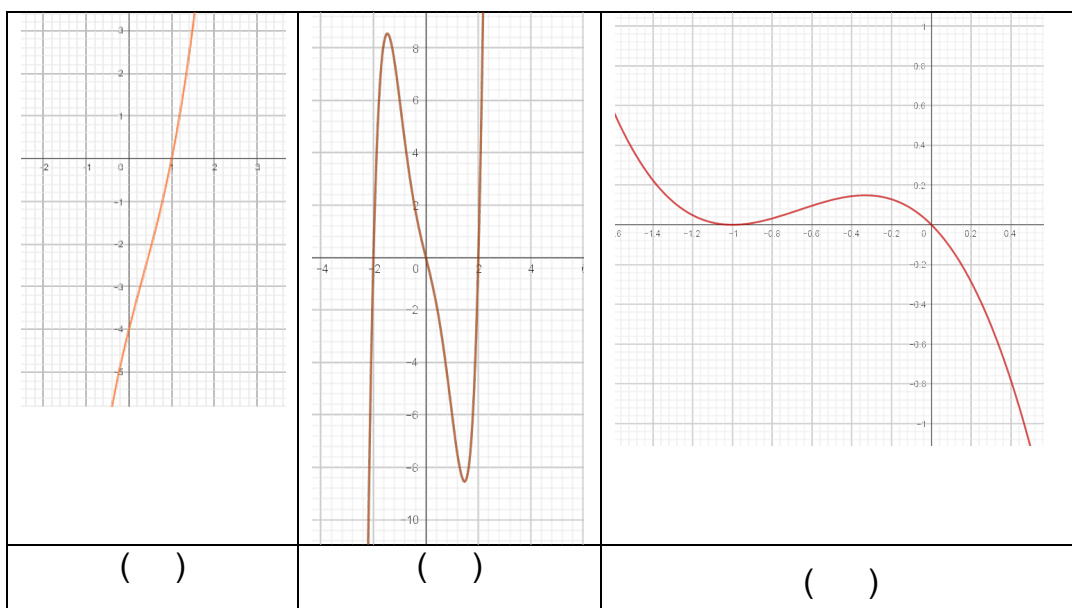
()



()



()



- L. Considera las funciones enlistadas, encuentra los ceros de cada una (raíces algebraicas), haz una tabla de valores en la cual se incluyan estas raíces y grafica en el plano cartesiano. Indica el rango o imagen de la función

| | | |
|---------------------------|------------------------|-----------------------------|
| $G(x) = x^3 - 3x^2 - 10x$ | $f(x) = -6 + 7x - x^2$ | $g(x) = x^4 - 11x^2 + 18$ |
| $h(x) = (x - 3)^3 - 2$ | $f(x) = 4x^2 - 2x$ | $g(x) = -x^5 + 2x^3 + 4x^2$ |

PROPUESTA DE EVALUACIÓN

El propósito general de esta unidad describe que el alumno deberá tener clara la noción de rango y dominio, así como usará la notación $f(x)$ para una función polinomial:

Propósito general

Habrá avanzado en el estudio de las funciones al introducir la notación funcional y la noción de dominio y rango. Relacionando la expresión algebraica de una función polinomial con su gráfica y analizará su comportamiento. Con base en la resolución de problemas y en contexto, usará las gráficas, tablas, expresión matemática para explicar los procesos involucrados.

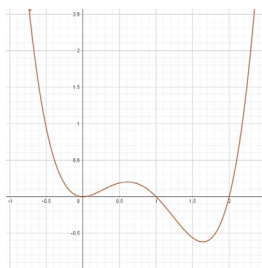
Con base en este propósito y los aprendizajes enunciados en el programa de estudios de la asignatura se propone la siguiente tabla de especificaciones para considerar una evaluación en la que pueden incluirse los ejercicios propuestos. En rojo se propone la puntuación a considerar en el examen propuesto.

Tabla de especificaciones

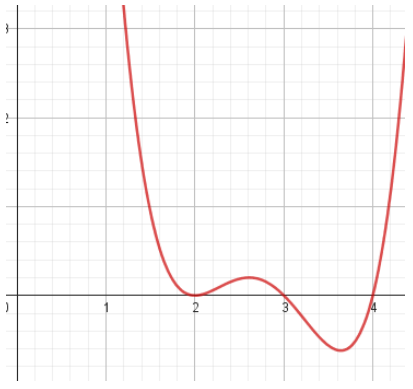
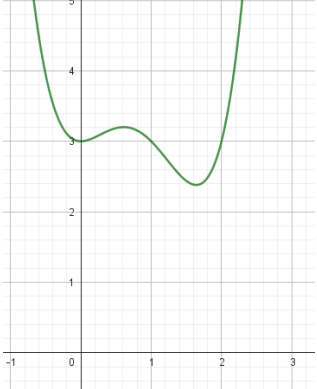
| Evaluación compuesta de 10 reactivos | | | | |
|--|--|--|--|---|
| Aprendizajes Temática | Conocimiento 30% | Comprensión 25% | Desarrollo 25% | Aplicación 20% |
| Concepto de función polinomial, modelos y representación | <i>Distingue la expresión algebraica que corresponde a función polinomial.</i> | <i>Comprende que las variables x e y corresponden a una pareja ordenada que satisface la expresión polinomial.</i> | <i>Dibuja la gráfica de una función polinomial a partir de su expresión algebraica.</i> | <i>Resuelve problemas que generan una función polinomial.</i> |
| | | 1(1.25) | 1 (1) | 1 (2) |
| | <i>Visualiza las transformaciones de una función polinomial.</i> | <i>Comprende el significado de “el cero o raíz de una función polinomial”.</i> | <i>Obtiene el dominio y rango de una función polinomial a partir de su gráfica.</i> | |
| | 1(1.5) | 1 (1.25) | 1 (1) | |
| | <i>Interpretar en el modelo gráfico (función creciente, decreciente y máximo o mínimo) de la función polinomial.</i> | | <i>Obtiene los “ceros” de una función polinomial. Factoriza una función polinomial.</i> | |
| | 1 (1.5) | | 1(0.5) | |
| | | | <i>Obtiene la expresión algebraica de una función polinomial a partir de sus raíces.</i> | |
| Puntuación | 3 | 2.5 | 2.5 | 2 |

Examen- ejercicio de evaluación

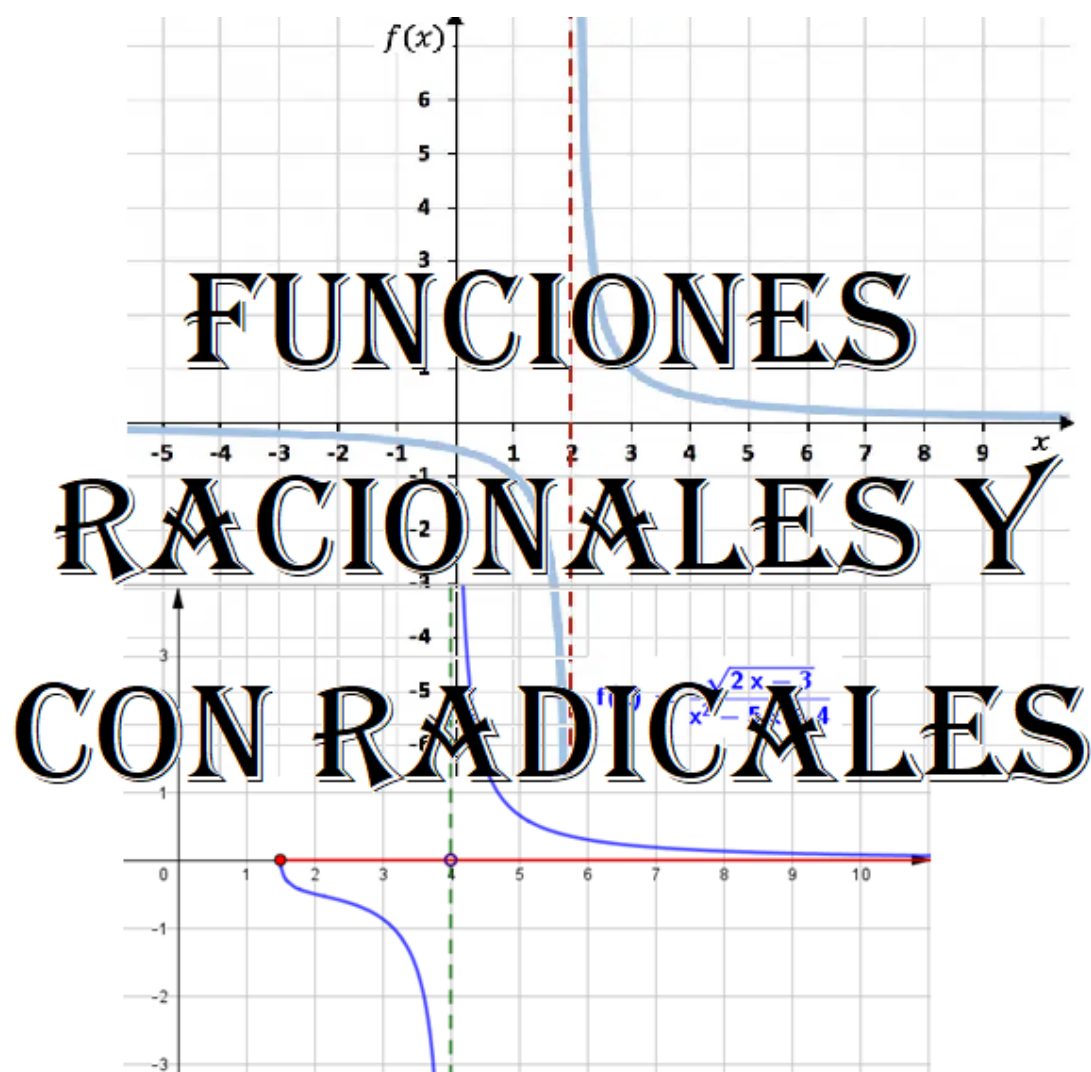
1. Un objeto se lanza hacia arriba y su trayectoria describe una trayectoria de acuerdo con la función $f(x) = 3x - 9x^2$. Grafica e indica el punto en el cual alcanza su máxima altura **(2 puntos)**
2. Considera la expresión $-5x^2 + 10x - 20 - 5y = 0$, despeja a la variable y para determinar si es una función polinomial, explica tu respuesta si es el caso. ¿Cuál es el grado de esta función polinomial? **(1.25 puntos)**
3. Dada la función $f(x) = x^3 - 4x$
 - a) Factoriza y escribe la expresión factorizada de $f(x)$. **(0.5 puntos)**
 - b) Señala los puntos en los cuales $f(x)$ vale cero (ceros de la función), es decir las raíces algebraicas de la expresión de la función **(1.25 puntos)**
 - c) Realiza una tabla de valores, escribe las raíces algebraicas con sus respectivos valores para $f(x)$
 - d) Grafica en el plano cartesiano **(1 punto)**
 - e) Verifica que los valores de los ceros que has encontrado coinciden con la gráfica trazada
 - f) Indica el dominio y el rango (imagen) de la función **(1 punto)**
 - g) Señala las regiones en las cuales la función es creciente, y en las que es decreciente **(1.5 puntos)**
4. Considera la función polinomial $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$ y su gráfica

Indica las gráficas que corresponden a cada expresión **(1.5 puntos)**

| | |
|--|--|
| $h(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5$ <p style="text-align: center;">(A)</p> | $g(x) = (x - 1)^4 - 3(x - 1)^3 + 2(x - 1)^2$ <p style="text-align: center;">(B)</p> |
|--|--|

| | |
|---|--|
|  |  |
| () | () |

UNIDAD 2



Unidad 2

Funciones racionales y con radicales

Introducción

Una función con mayor grado de dificultad es la función racional, con la cual se introduce los conceptos de continuidad y discontinuidad, se aplica la resolución de ecuaciones para buscar el dominio, se trabajan nuevamente los conceptos de crecimiento y decrecimiento y los puntos máximos y mínimos locales, además el comportamiento de la gráfica cuando la variable independiente toma valores muy grandes.

Los aprendizajes del capítulo son:

Para funciones racionales:

- ✓ Resolver problemas que generan una función racional.
- ✓ Distinguir la expresión algebraica que corresponde a una función racional.
- ✓ Comprender que las variables x e y corresponden a una pareja ordenada que satisface la expresión racional.
- ✓ Determinar el dominio de una función racional.
- ✓ Aplicar cálculo de raíces de un polinomio.
- ✓ Obtener la gráfica de una función racional.
- ✓ Interpretar en el modelo gráfico (función creciente, decreciente, discontinuidad, continuidad y máximo o mínimo) de la función racional.
- ✓ Determinar las asíntotas de una función racional. Comportamiento de la gráfica al infinito.
- ✓ Visualizar las transformaciones de una función racional.
- ✓

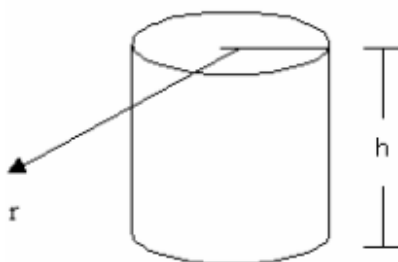
Para funciones con radicales

- ✓ Resolver problemas que generen una función con radical
- ✓ Distinguir la expresión algebraica que corresponde a una función con radicales.
- ✓ Determinar el dominio de una función con radical siendo su radicando una función lineal.
- ✓ Determinar el dominio de una función con radical siendo su radicando una función cuadrática
- ✓ Obtener la gráfica de una función con radicales.

El tiempo mínimo para el capítulo es de 20 hrs.

En la unidad se requieren los siguientes materiales:

- | | |
|------------------------------------|---------------------|
| ✓ Cuaderno de trabajo. | ✓ Plumas de colores |
| ✓ Calculadora | ✓ Lápiz y goma |
| ✓ Cuaderno para anotaciones extras | |

Funciones racionales**Iniciamos con problemas que generan una función racional****Problema 2.1.** La fábrica "LATA, S. A." va a construir latas cilíndricas con tapa de 1 litro de capacidad.a) Obtener la relación para la altura h del cilindro en términos de su radio r

b) ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente? ¿Qué representa cada una?

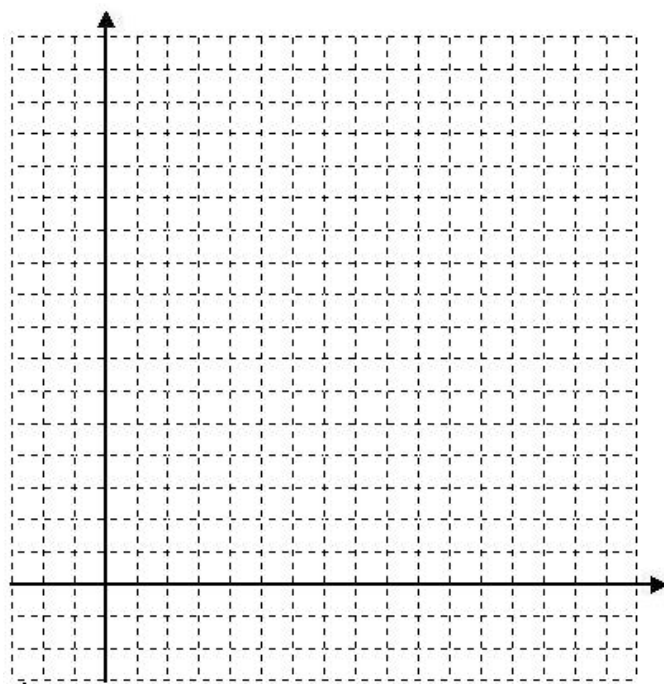
Variable dependiente _____ Representa _____

Variable independiente _____ Representa _____

c) Llenar la siguiente tabla que muestra la dependencia entre la altura del cilindro h en función del radio de la base. Las medidas de r están dadas en cm.**Nota:** No olvidar transformar que se debe transformar 1 litro a centímetros cúbicos.

| | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|---|-----|---|-----|---|---|---|----|----|----|
| r | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 4 | 5 | 10 | 15 | 20 |
| h | | | | | | | | | | | |

d) Graficar r vs h



e) Obtener la expresión algebraica, para el área A de la superficie total del cilindro en términos del radio r .

f) ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente? ¿Qué representa cada una?

Variable dependiente _____ Representa _____

Variable independiente _____ Representa _____

g) Indicar en que intervalo la función es decreciente y en cual creciente

Creciente _____ Decreciente _____

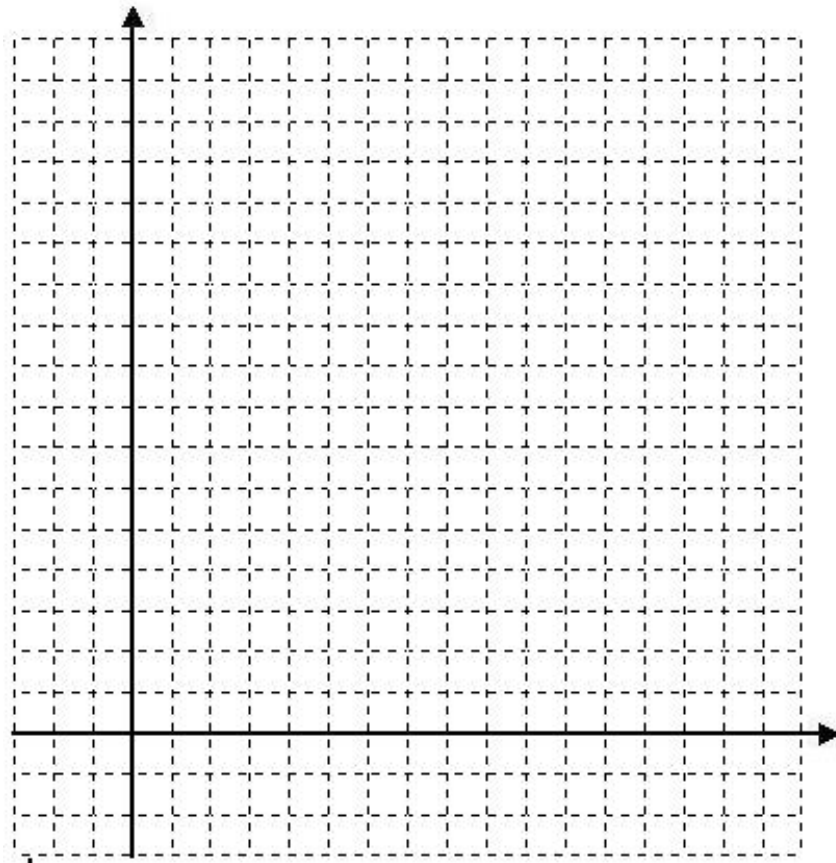
h) Llenar la siguiente tabla para obtener el área A de la superficie del cilindro en términos del radio r .

| | | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|---|---|---|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|
| r | 0.5 | 1 | 2 | 3 | 3.5 | 4 | 4.5 | 5 | 5.5 | 6 | 6.5 | 7 |
| A | | | | | | | | | | | | |

i) ¿Por qué no se utiliza el valor de $r = 0$?

Explicar. _____

j) Graficar A vs. r .



k) Indicar en que intervalo la función es decreciente y en cual creciente.

l) Escribir el dominio y rango de la función.

Dominio de $A(r)$ _____ Rango de $A(r)$ _____

Problema 2.2. En un depósito, en el que inicialmente existen 50 litros de agua pura se le agrega agua salada cuya concentración es del 10%.

a) Llenar la siguiente tabla, en la que se obtiene la cantidad de litros y la concentración de sal en la función de la cantidad de litros de agua que se han agregado x .

| Litros de agua agregados x | 1 | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 | 70 | 80 | 100 |
|-------------------------------|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| Total de litros en recipiente | | | | | | | | | | | |
| Concentración de sal $C \%$ | | | | | | | | | | | |

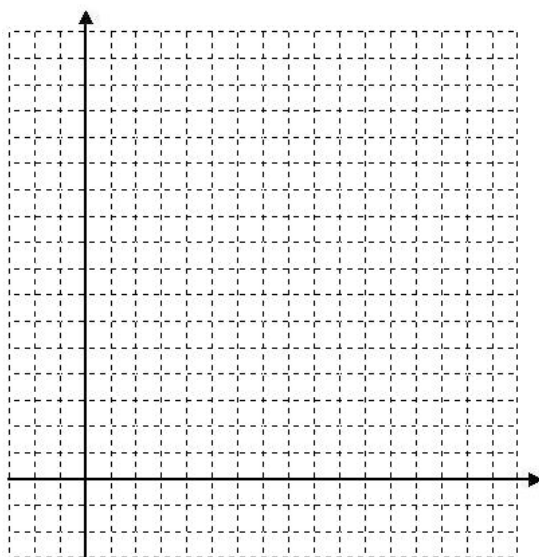
b) Obtener la expresión algebraica para concentración de sal $\% C$ cuando se han agregado x litros de agua.

c) Indicar cual es la variable dependiente y cual es la variable independiente.

Variable dependiente _____ Representa _____

Variable independiente _____ Representa _____

d) Trazar la gráfica de la función concentración de sal $C \%$ en términos de los litros agregados x .



e) Indicar los intervalos de crecimiento y decrecimiento

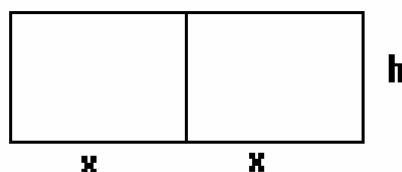
Creciente _____ Decreciente _____

f) Escribir su dominio y su rango

Dominio de $\%C(x)$ _____

Rango de $\%C(x)$ _____

Problema 2.3. Un terreno rectangular se va a cercar con malla y se va a dividir en dos partes iguales mediante un área paralela a dos lados, como se muestra en la figura. El área que debe abarcarse es de 216 m^2 .



a) ¿Cuál es el área total del rectángulo en términos de x y h ?

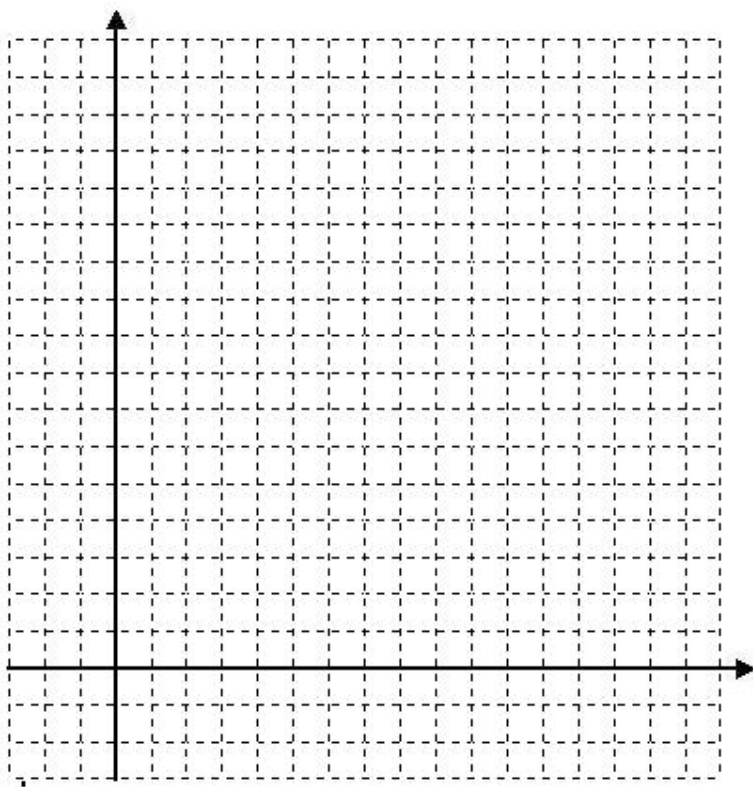
b) ¿Cuál es la longitud de malla a utilizarse en términos de x y h ?

c) Llenar la siguiente tabla en la cual se obtiene el valor de h y la longitud P de malla utilizada.

| | | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|-----|---|-----|----|----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 8 | 8.5 | 9 | 9.5 | 10 | 15 |
| h | | | | | | | | | | | |
| P | | | | | | | | | | | |

d) Escribir la expresión algebraica que representa la longitud de malla P a utilizar en términos del valor x .

e) Trazar la gráfica de la longitud de malla P en términos de la longitud x . Utilizar la escala adecuada.



f) ¿Para qué valor de x se requiere la cantidad mínima de material?

g) Indicar dominio y rango de la función.

Dominio de $P(x)$ _____ Rango de $P(x)$ _____

h) Indicar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Creciente _____ Decreciente _____

Definición de la función racional y las características de su gráfica.

La **función racional** es de la forma:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales.

Nota: La **función racional** no está definida para las raíces de $q(x)$, es decir $f(x)$ no está definida para aquellos números en donde $q(x) = 0$. Por lo tanto, el dominio (máximo) de este tipo de funciones está dado por:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}.$$

Ejercicio 2.4. Utilizar la función $f(x) = \frac{6}{x-3}$ efectuando lo siguiente:

a) Obtener la solución de la ecuación $x - 3 = 0$ _____ ¿Por qué? _____

b) Escribir el dominio de la función. Dominio de $f(x)$ _____

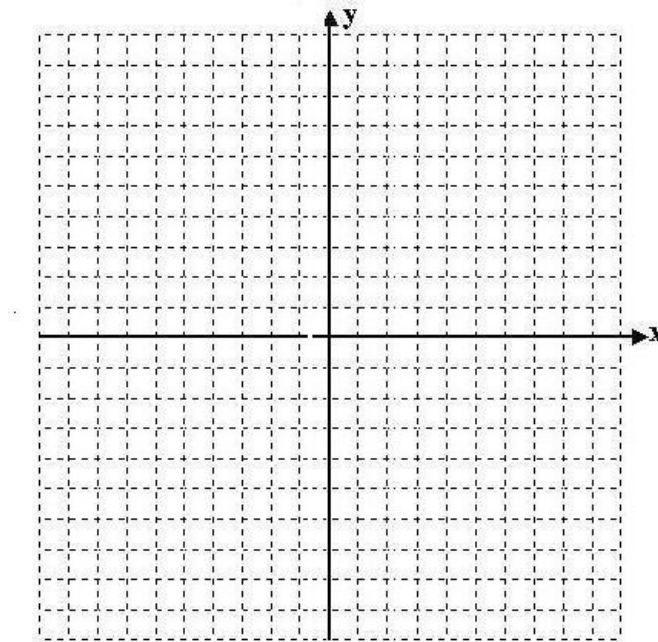
c) Realizar la siguiente tabulación

| | | | | | | | | | | | | |
|--------|-----|----|----|----|----|---|---|---|-----|-----|-----|------|
| x | -10 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 2.5 | 2.8 | 2.9 | 2.99 |
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|--------|------|-----|-----|-----|---|---|---|---|----|
| x | 3.01 | 3.1 | 3.2 | 3.5 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 |
| $f(x)$ | | | | | | | | | |

d) ¿Qué ocurre cuando $x = 3$? _____

e) Trazar la gráfica en el intervalo $[-6, 10]$



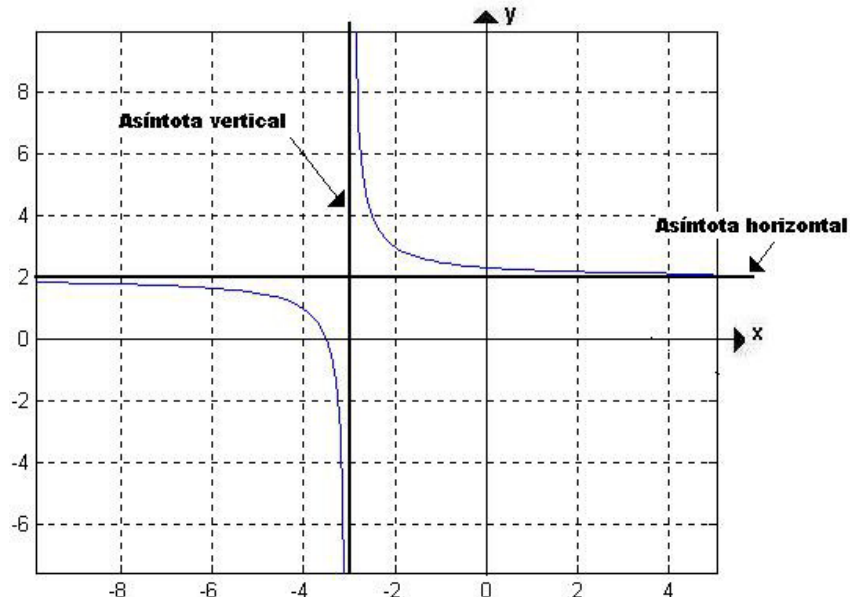
f) Indicar donde la función es creciente y donde decreciente.

Creciente _____ Decreciente _____

g) ¿Qué ocurre en $y = 0$? _____

Asíntotas

Definición. Cuando un punto se aleja del origen siguiendo (recorriendo) una curva y si la distancia entre el punto y una recta se aproxima cada vez más a cero (de otra forma el punto se encuentra cada vez más cercano a la recta), entonces a dicha recta le llamaremos asíntota de la curva.



Las **asíntotas verticales** de la función:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

son rectas paralelas al eje Y , que pasan por los puntos que son soluciones de $q(x) = 0$, pero que no son soluciones de $p(x) = 0$.

Por ejemplo, supongamos que si en la función $f(x)$ se factoriza el numerador y el denominador de la siguiente manera

$$f(x) = \frac{(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)}{(x - b_1)(x - b_2)(x - a_3)}$$

entonces, las **asíntotas verticales** de la función son las rectas:

$$x = b_1 \quad y \quad x = b_2$$

Observemos que $x = a_3$ no puede ser asíntota de la función $f(x)$ porque es raíz tanto de numerador como del denominador.

Asíntotas horizontales

La función $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, tiene **asíntotas horizontales**, si el grado del polinomio $q(x)$ es mayor o igual al grado del polinomio $p(x)$, esto es, si

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

y $m > n$, entonces **la asíntota horizontal** es del tipo $y = b$.

Asíntotas oblicuas

La función $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ tiene una **asíntota oblicua** cuando el grado del polinomio $p(x)$ es mayor en uno que el grado del polinomio $q(x)$.

Esto es, si en

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

$n = m + 1$, entonces al efectuar la división se tiene:

$$f(x) = mx + b + \frac{r(x)}{q(x)}$$

donde $mx + b$ es el cociente y $r(x)$ es el residuo.

Y la recta $y = mx + b$ es la **asíntota oblicua**.

Ejercicio 2.5. Utilizar la función $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 4}$ para efectuar lo siguiente:

a) Igualar numerador y denominador con cero:

b) Obtener las soluciones de las ecuaciones obtenidas en el punto anterior

c) Obtener el dominio de la función. Dom $f(x)$ _____

d) Obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales.

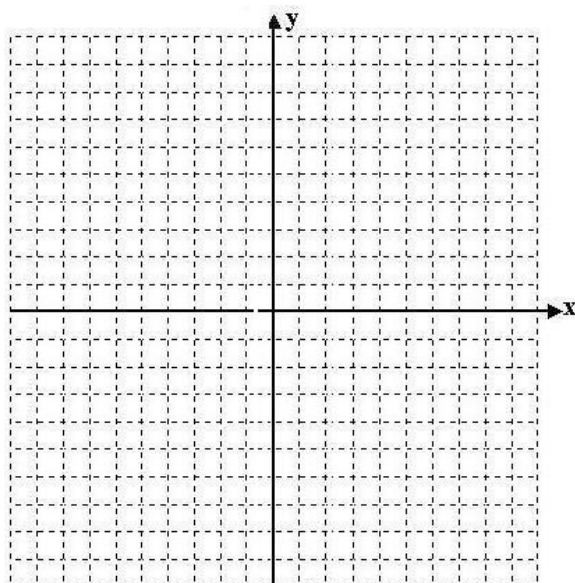
e) Obtener la ecuación de la asíntota horizontal. _____

f) Completar las siguientes tablas.

| | | | | | | | | | | | |
|--------|-----|----|----|----|------|------|-------|-------|------|------|----|
| x | -10 | -5 | -4 | -3 | -2.5 | -2.1 | -2.01 | -1.99 | -1.9 | -1.5 | -1 |
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | |
|--------|---|---|-----|-----|------|------|-----|-----|---|---|----|
| x | 0 | 1 | 1.5 | 1.9 | 1.99 | 2.01 | 2.1 | 2.5 | 3 | 4 | 10 |
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | |

g) Trazar las asíntotas verticales y horizontales y la gráfica de la función.



h) Indicar donde la función es creciente y donde decreciente.

Creciente _____ Decreciente _____

i) Escribir el rango de la función. $Ran f(x)$ _____

Ejercicio 2.6. Utilizar la función: $f(x) = \frac{6}{x^3 - x^2 - 6x}$ para realizar lo siguiente:

a) Igualar numerador y denominador con cero:

b) Obtener las soluciones de las ecuaciones obtenidas en el punto anterior

c) Obtener el dominio de la función. $Dom f(x)$ _____

d) Obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales.

e) Obtener la ecuación de la asíntota horizontal.

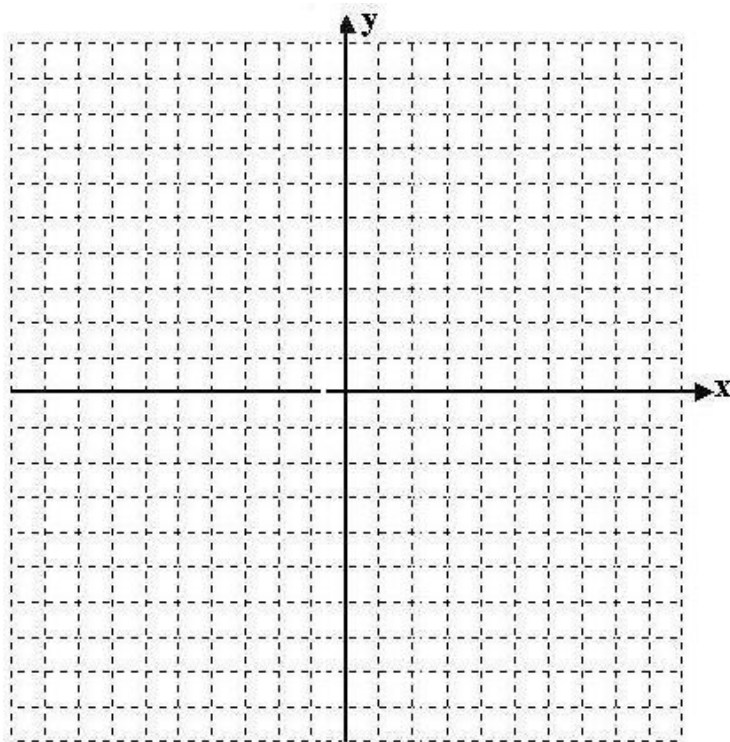
f) Completar las siguientes tablas.

| | | | | | | | | | | | |
|--------|-----|----|----|----|------|------|-------|-------|------|------|----|
| x | -10 | -5 | -4 | -3 | -2.5 | -2.1 | -2.01 | -1.99 | -1.9 | -1.5 | -1 |
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | |
|--------|------|------|-------|------|-----|-----|---|---|-----|-----|------|
| x | -0.5 | -0.1 | -0.01 | 0.01 | 0.1 | 0.5 | 1 | 2 | 2.5 | 2.9 | 2.99 |
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | |
|--------|------|-----|-----|---|-----|---|-----|---|---|---|----|
| x | 3.01 | 3.1 | 3.5 | 4 | 4.5 | 5 | 5.5 | 6 | 8 | 9 | 10 |
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | |

g) Trazar las asíntotas verticales y horizontales y la gráfica de la función.



h) Indicar donde la función es creciente y donde decreciente.

Creciente _____ Decreciente _____

i) Escribir el rango de la función. $\text{Ran } f(x)$ _____

Ejercicio 2.7. Utilizar la función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1}$

Realizar lo siguiente

a) Igualar numerador y denominador con cero:

b) Obtener las soluciones de las ecuaciones obtenidas en el punto anterior

c) Obtener el dominio de la función. $\text{Dom } f(x)$ _____

d) Obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales.

e) Obtener la ecuación de la asíntota horizontal. _____

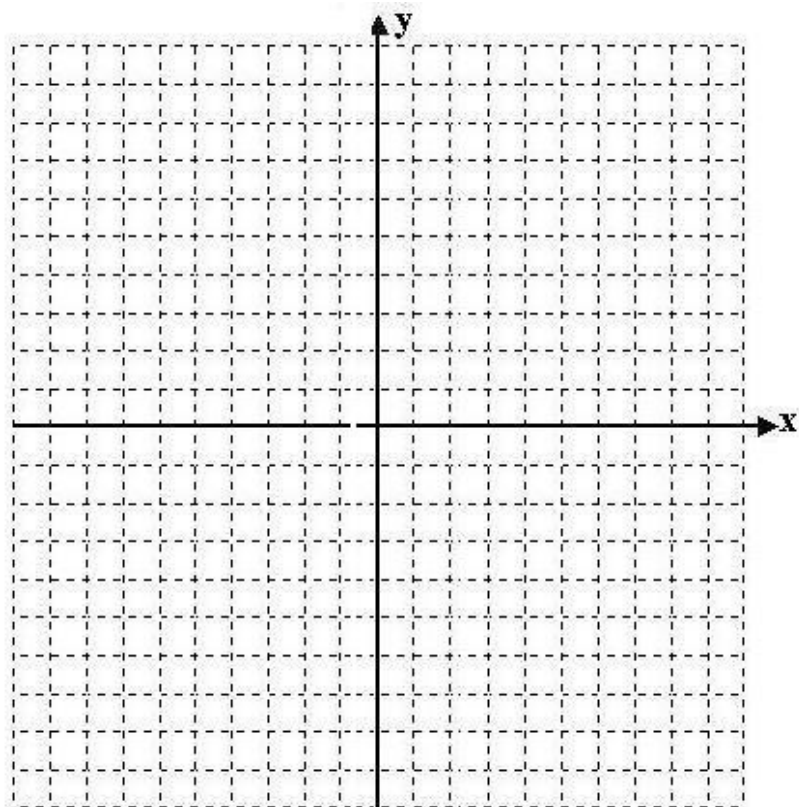
f) Completar las siguientes tablas.

| | | | | | | | | | | | |
|--------|-----|----|----|----|------|----|------|----|---|-----|-----|
| x | -10 | -5 | -4 | -3 | -2.5 | -2 | -1.5 | -1 | 0 | 0.5 | 0.6 |
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | |
|--------|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| x | 0.8 | 0.9 | 0.91 | 0.93 | 0.97 | 0.98 | 0.99 | 1.01 | 1.02 | 1.04 | 1.05 |
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | |
|--------|------|-----|-----|-----|---|-----|-----|-----|---|---|----|
| x | 1.08 | 1.2 | 1.5 | 1.9 | 2 | 2.5 | 3.0 | 3.5 | 4 | 5 | 10 |
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | |

g) Trazar las asíntotas verticales y horizontales y la gráfica de la función.



h) Indicar donde la función es creciente y donde decreciente.

Creciente _____ Decreciente _____

i) Escribir el rango de la función. Ran $f(x)$ _____

Ejercicio 2.8. Relaciona las siguientes funciones racionales con las gráficas dadas en las figuras.

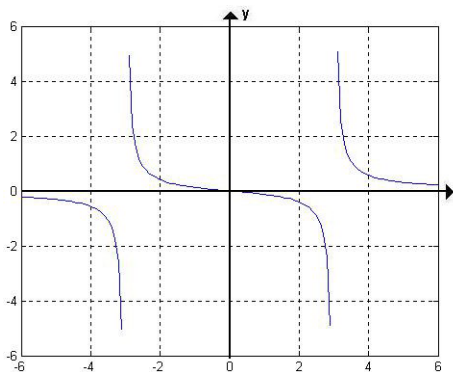
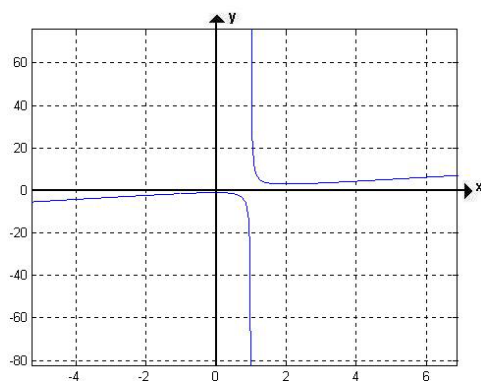
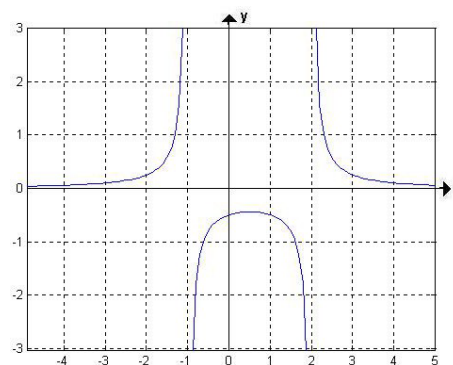
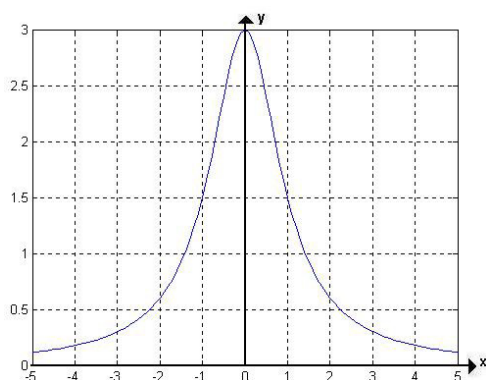
a) $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$

c) $f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$

d) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

Sugerencia: Buscar su dominio y asíntotas



Traslación horizontal y vertical

Ejercicio 2.9. La gráfica de $f(x) = \frac{4x^2}{x^2 + 1}$ está representada en la figura 1

a) Graficar $g(x) = \frac{4x^2}{x^2 + 1} + 3$ y obtener su rango.

b) Graficar $g(x) = \frac{4x^2}{x^2 + 1} - 2$ y obtener su rango.

c) Graficar $g(x) = \frac{4(x - 2)^2}{(x - 2)^2 + 1}$ y obtener su rango.

d) Graficar $g(x) = \frac{4(x + 3)^2}{(x + 3)^2 + 1} - 3$ y obtener su rango.

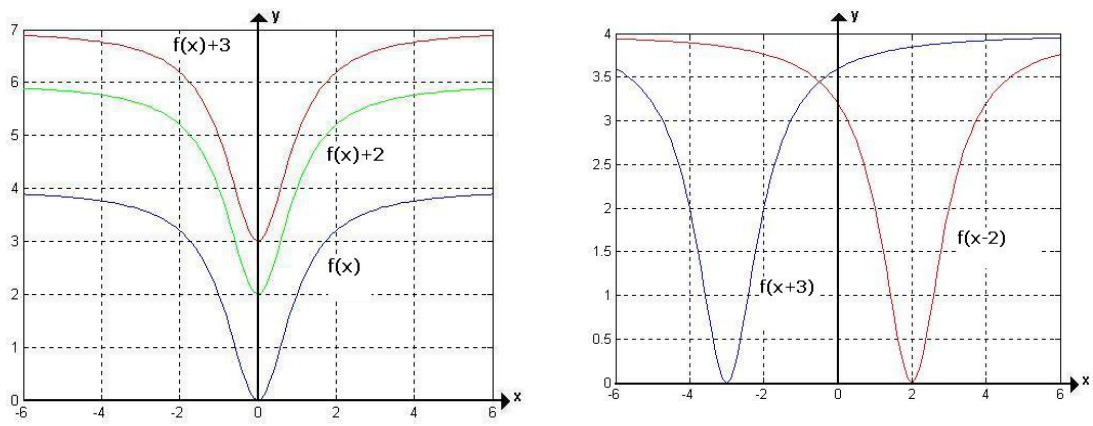


Figura 1

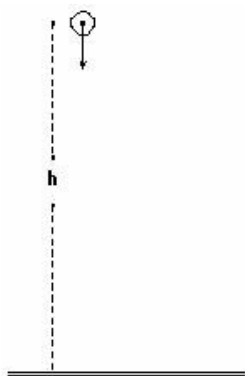
Segunda Parte

Funciones con radicales

Problemas que generan una función irracional

Con los problemas 2.10, 2.11 y 2.12 donde se generan funciones irracionales, se manejan representaciones tabulares, gráfica y algebraica de una función con radicales y a partir de ellas el Profesor determina dominio, rango, crecimiento y decrecimiento de la curva, puntos de discontinuidad, etc.

Problema 2.10. Un objeto se deja caer libremente desde una altura h , queremos obtener el tiempo que tarda en llegar al suelo dependiendo de la altura desde que se deja caer el objeto. Despreciar la resistencia del aire.



La posición del objeto se obtiene de la fórmula del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

donde $S = h$, $S_0 = 0$ y en el caso de caída libre $V_0 = 0$ y a es la aceleración de la gravedad, es decir $a = g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$

a) La expresión para el tiempo t , que tarda en llegar al suelo el objeto en función de la altura h es:

b) ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente? ¿Qué representa cada una?

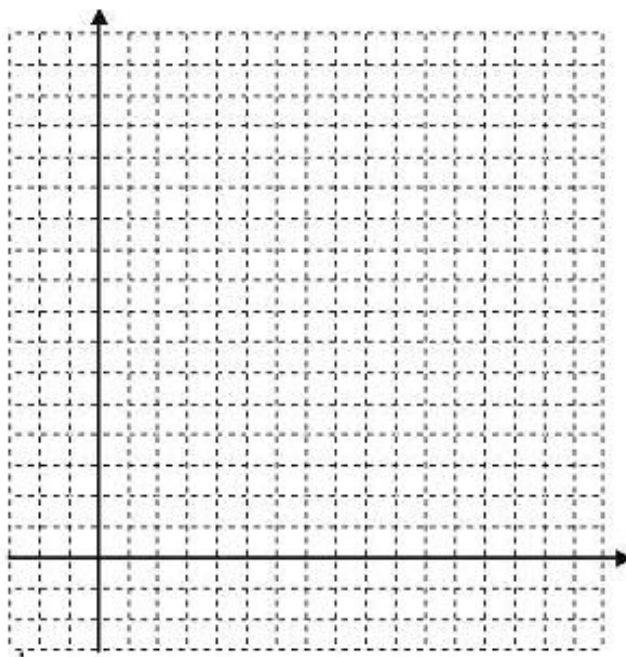
Variable dependiente _____ Representa _____

Variable independiente _____ Representa _____

c) Llena la siguiente tabla, en donde se obtiene el tiempo t en función de la altura h

| | | | | | | | | | |
|--------|---|-----|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| h | 0 | 4.9 | 19.6 | 44.1 | 78.4 | 112.5 | 176.4 | 240.1 | 313.6 |
| $t(h)$ | | | | | | | | | |

d) Trazar la gráfica, utilizar la escala adecuada.



e) Escribir el dominio y rango de la función $t(h)$

Dominio _____ Rango _____

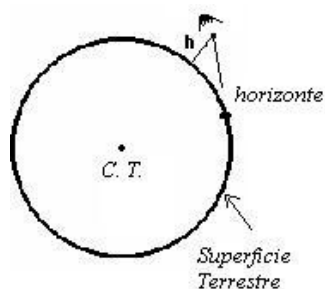
f) Indica en que intervalo la función es creciente y en donde es decreciente

Creciente _____ Decreciente _____

g) Los puntos de intersección con los ejes X e Y son

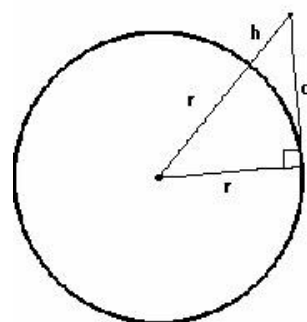
Intersección con el eje X _____ Intersección con el eje Y _____

Problema 2.11 Una persona está observando el horizonte en el mar, desde diferente altura h , queremos obtener la distancia hasta la que logra ver sobre la superficie terrestre, en base a la altura desde la que observa.



h es la altura a partir de la superficie terrestre desde la que se observa el horizonte

unimos el punto de observación con el centro de la tierra $C.T.$ y trazamos el segmento tangente a la circunferencia que nos representa a la superficie terrestre.



observemos que se observa un triángulo rectángulo.

En donde d es la distancia visible y r es el radio terrestre (aproximadamente $10^7\text{m} = 10000 \text{ km.}$)

Usando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$(r + h)^2 = r^2 + d^2$$

a) La expresión para d en términos de la altura h es:

$$d(h) = \underline{\hspace{10cm}}$$

b) ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente? ¿Qué representa cada una?

Variable dependiente _____ Representa _____

Variable independiente _____ Representa _____

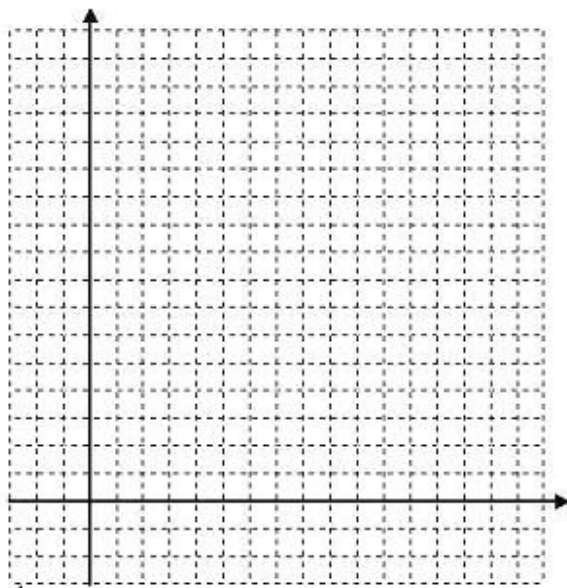
c) Llena la siguiente tabla, en donde se obtiene la distancia d en función de la altura h

Nota: La distancia h está dada en metros, primero transformar km para usar la expresión y obtener la distancia d en kilómetros.

| | | | | | | | | | |
|-----|---|---|-----|-----|-----|-----|---|-----|---|
| h | 0 | 1 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2 | 2.5 | 3 |
| d | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|-----|-----|---|---|-----|---|-----|---|-----|---|
| h | 3.5 | 4 | 5 | 5.5 | 6 | 6.5 | 7 | 7.5 | 8 |
| d | | | | | | | | | |

d) Trazar la gráfica. Utilizar la escala adecuada.



e) Escribir el dominio y rango de la función $d(h)$

Dominio _____ Rango _____

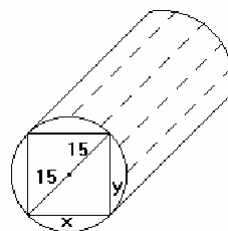
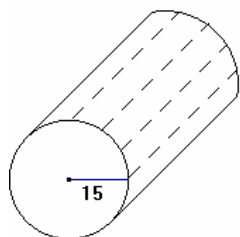
f) Indica en que intervalo la función es creciente y en donde es decreciente

Creciente _____ Decreciente _____

g) Las intersecciones con los ejes son

Intersección con el eje x _____ Intersección con el eje y _____

Problema 2.12 De un tronco cilíndrico de madera hay que cortar una viga de sección rectangular, si el radio de la sección del tronco es de 15 cm, obtener el valor del ancho (y) y el área de la sección rectangular (A), en función de la longitud de x .



a) Obtener la expresión de la longitud del ancho y en función del largo x .

$$y(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

b) ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente? ¿Qué representa cada una?

Variable dependiente _____ Representa _____

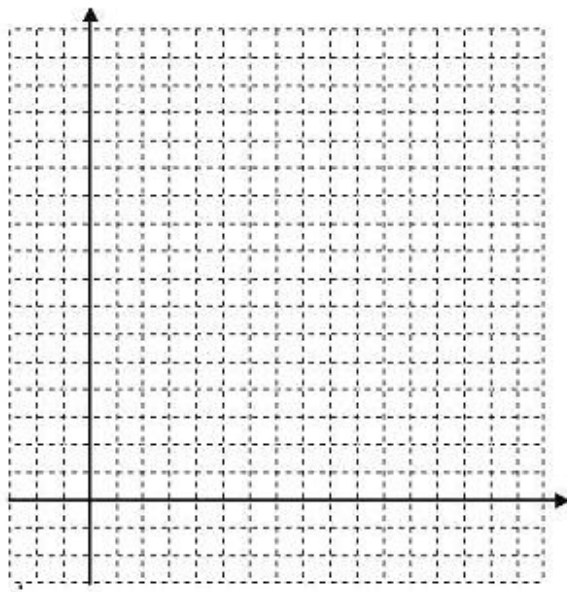
Variable independiente _____ Representa _____

c) Llena la siguiente tabla, se obtiene el ancho y en función del largo x

| | | | | | | | |
|---|---|---|----|----|----|----|----|
| x | 0 | 5 | 10 | 15 | 18 | 20 | 22 |
| y | | | | | | | |

| | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|
| x | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| y | | | | | | | |

d) Trazar la gráfica. Utilizar la escala adecuada



e) Escribir el dominio y rango de la función y

Dominio _____ Rango _____

f) Indica en que intervalo la función es creciente y en donde es decreciente

Creciente _____ Decreciente _____

g) Las intersecciones con los ejes coordenados son

Intersección con el eje X _____ Intersección con el eje Y _____

Para el área A de la sección rectangular se tiene:

a) Obtener la expresión del área A en función del largo x .

b) ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente? ¿Qué representa cada una?

Variable dependiente _____ Representa _____

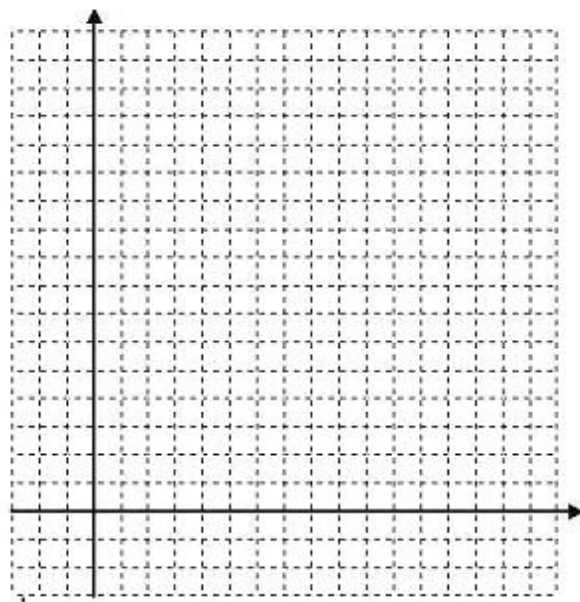
Variable independiente _____ Representa _____

c) Llena la siguiente tabla, en donde se obtiene el área A en función del largo x

| | | | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|---|----|----|----|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 8 | 10 | 15 | 18 |
| $A(x)$ | | | | | | | | |

| | | | | | | | | |
|--------|----|-------|----|----|----|----|----|----|
| x | 21 | 21.21 | 22 | 24 | 25 | 27 | 29 | 30 |
| $A(x)$ | | | | | | | | |

d) Trazar la gráfica. Utilizar la escala adecuada.



e) Escribir el dominio y rango de la función $A(x)$

Dominio _____ Rango _____

f) Indica en que intervalo la función es creciente y en donde es decreciente

Creciente _____ Decreciente _____

g) Las intersecciones con los ejes son

Intersección con el eje vertical _____ Intersección con el eje X _____

Definición de función irracional y sus características

Definición. Las funciones irracionales son aquellas funciones en donde intervienen radicales y la variable independiente aparece dentro del radical.

Por ejemplo, las siguientes funciones:

$$f(x) = \sqrt{8x-3}, \quad g(x) = \sqrt{3x^2-5x+2}, \quad s(x) = x\sqrt{4x-2}$$

$$h(x) = \sqrt[3]{x^5-6x^2+5}, \quad l(x) = \sqrt[5]{5x^3+8x^2-9}, \quad q(x) = x^2\sqrt[4]{x^9-3x-5}$$

son irracionales.

En este documento sólo se consideran funciones radicales en donde interviene la raíz cuadrada y en donde el radicando (la expresión dentro del radical) es un polinomio a lo más de segundo grado, es decir solo se trabajan radicales de la forma:

$$\sqrt{ax+b} \quad y \quad \sqrt{ax^2+bx+c}$$

Nota: Como la raíz cuadrada en los números reales solo existe para números mayores o iguales a cero, entonces:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{ax+b} & \text{el resultado existe en los números reales cuando } ax+b \geq 0 \\ \sqrt{ax^2+bx+c} & \text{y en este caso, el resultado existe en los números reales cuando} \\ & ax^2+bx+c \geq 0 \end{array}$$

Como podemos observar para obtener el dominio de las funciones con radicales en donde intervienen raíces cuadradas se deben resolver desigualdades.

Propiedades de las desigualdades: a, b y c son números reales

Propiedad 1. Si $a < b$ entonces $a+c < b+c$ para todo c .

Propiedad 2. Si $a < b$ entonces $ac < bc$ para todo $c > 0$.

Propiedad 3. Si $a < b$ entonces $ac > bc$ para todo $c < 0$

Propiedad 4. $ab > 0$ cuando i) $a > 0$ y $b > 0$ o ii) $a < 0$ y $b < 0$

Propiedad 5. $ab < 0$ cuando i) $a > 0$ y $b < 0$ o ii) $a < 0$ y $b > 0$

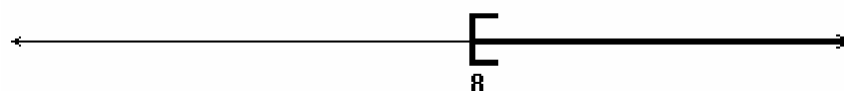
Solución de una desigualdad de primer grado en una variable***Ejemplo 2.1 Resolver la desigualdad de primer grado***

$$4(x - 2) + 20 \geq 2(5 - x) + 50$$

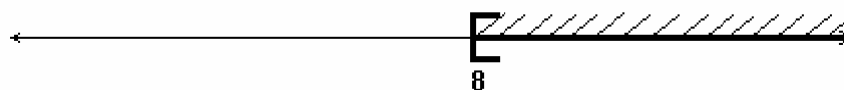
El procedimiento es de manera similar al que utilizamos para resolver ecuaciones de primer grado.

| | |
|---------------------------------|---|
| $4x - 8 + 20 \geq 10 - 2x + 50$ | Desarrollamos los productos indicados. |
| $4x + 12 \geq 60 - 2x$ | Reducimos términos semejantes en ambos miembros de la desigualdad. |
| $4x + 2x \geq 60 - 12$ | Agrupamos los términos que contienen a la variable en el lado izquierdo de la desigualdad (de preferencia), los independientes en el otro lado de la desigualdad. |
| $6x \geq 48$ | Reducimos términos semejantes. |
| $x \geq 8$ | Dividimos entre el coeficiente de la variable, la desigualdad \geq se preserva por el signo del coeficiente. |

La solución es el intervalo semicerrado $[8, \infty)$ y en la recta real, la solución se representa como:



O de esta otra forma



Ejercicio 2.13. Con la función irracional $f(x) = \sqrt{x+3}$ realiza lo siguiente:

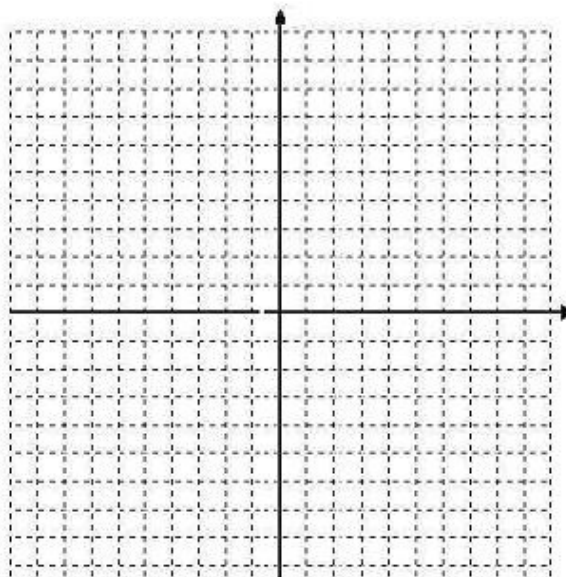
a) Para que exista la raíz cuadrada expresada en la función (en los números reales) se debe cumplir que:

b) Escribir el dominio de la función _____

c) Completar la siguiente tabla

| | | | | | | |
|------|----|----|---|---|----|----|
| x | -3 | -2 | 1 | 6 | 13 | 22 |
| f(x) | | | | | | |

d) Trazar la gráfica. Utilizar la escala adecuada.



e) Escribir el rango de la función f _____

f) Indica en que intervalo la función es creciente y en donde es decreciente

Creciente _____ Decreciente _____

g) Las intersecciones con los ejes son

Intersección con el eje X _____ Intersección con el eje Y _____

Ejercicio 2.14. Con la función irracional $f(x) = \sqrt{8-2x}$ realiza lo siguiente:

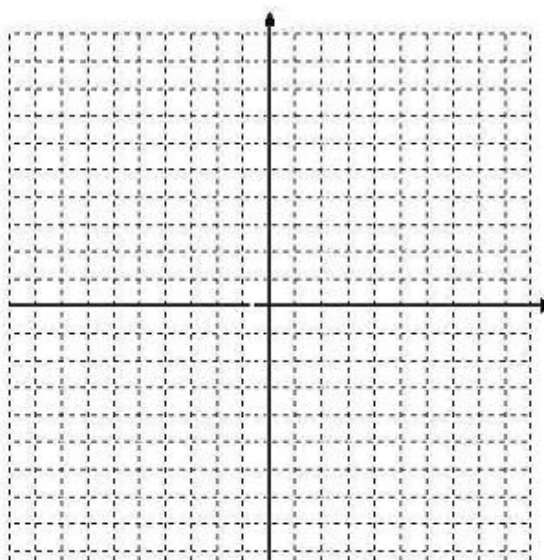
a) Para que exista la raíz cuadrada expresada en la función (en los números reales) se debe cumplir que:

b) Escribir el dominio de la función _____

c) Completa la siguiente tabla

| | | | | | | | | | |
|------|-----|-----|-----|-------|-----|------|---|-----|---|
| x | -14 | -12 | -10 | - 8.5 | - 4 | -0.5 | 2 | 3.5 | 4 |
| f(x) | | | | | | | | | |

d) Trazar la gráfica. Utilizar la escala adecuada.



e) Escribir el rango de la función f. _____

f) Indica en que intervalo la función es creciente y en donde es decreciente

Creciente _____ Decreciente _____

g) Las intersecciones con los ejes son

Intersección con el eje X _____ Intersección con el eje Y _____

Solución de una desigualdad de segundo grado en una variable. Se presentan dos métodos.

Para resolver una desigualdad de segundo grado, primero procedemos a agrupar todos los términos en la parte izquierda de la desigualdad, de tal manera que la desigualdad quede en la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$ (o en la forma $ax^2 + bx + c \leq 0$).

Ejemplo 2.2 Resolver la desigualdad $2(x - 3)^2 + 15x \geq 7x + 48$

Método analítico

Primero, transformamos la expresión a la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$

| | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|
| Desarrollamos los productos indicados | $2x^2 - 12x + 18 + 15x \geq 7x + 48$ |
| Reducimos términos semejantes | $2x^2 + 3x + 18 \geq 7x + 48$ |
| Agrupamos del lado izquierdo | $2x^2 + 3x + 18 - 7x - 48$ |
| Reducimos términos semejantes | $2x^2 - 4x - 30 \geq 0$ |

Una forma de resolver las desigualdades de segundo grado consiste en factorizar el trinomio cuadrático, en nuestro ejemplo, el trinomio queda factorizado como:

$$2(x - 5)(x + 3) \geq 0$$

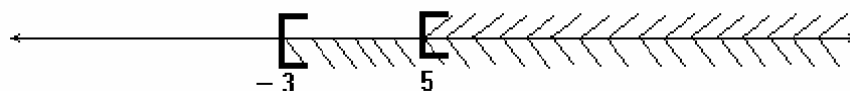
Usando la propiedad 4 de las desigualdades tenemos dos casos

$$\text{i) } x - 5 \geq 0 \text{ y } x + 3 \geq 0 \quad \text{o} \quad \text{ii) } x - 5 \leq 0 \text{ y } x + 3 \leq 0$$

Al resolver las desigualdades lineales, se tiene:

$$\text{en el caso i) } x \geq 5 \text{ y } x \geq -3$$

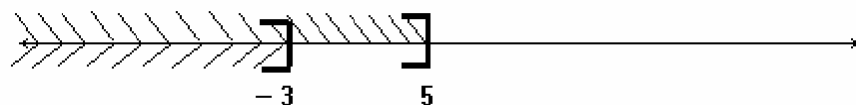
Representamos en la recta numérica ambas soluciones:



La solución para este primer caso, es la parte común (intersección) de los dos intervalos solución, por lo tanto, la solución en este caso es el intervalo $[5, \infty)$.

Para el caso ii), al resolver las desigualdades lineales, tenemos: $x \leq 5$ y $x \leq -3$

Representamos en la recta numérica ambas soluciones:



La solución para este segundo caso, es la parte común (intersección) de los intervalos solución, por lo tanto la solución en este caso es el intervalo $(-\infty, 3]$

Finalmente, la solución de la desigualdad del ejemplo es la unión de las soluciones de los dos casos i) y ii), por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad es $(-\infty, 3] \cup [5, \infty)$

Método Gráfico.

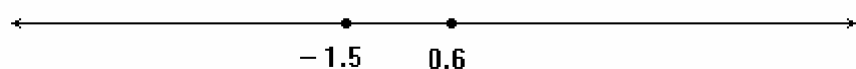
Resolver la desigualdad de segundo grado $ax^2 + bx + c \geq 0$ en forma gráfica

Primero, resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y después analizar los signos de la expresión en las diferentes regiones determinadas por las soluciones encontradas.

Ejemplo 2.3. Resolver la desigualdad $-10x^2 - 9x - 9 \geq 0$

Resolvemos la ecuación $-10x^2 - 9x - 9 = 0$; las soluciones son: $x_1 = -1.5$ y $x_2 = 0.6$

Representamos estos números en la recta numérica



Los números dividen en tres intervalos a la recta, $(-\infty, -1.5)$, $(-1.5, 0.6)$ y $(0.6, \infty)$

Seleccionamos números en cada uno de los intervalos y evaluamos la expresión dada $-10x^2 - 9x - 9 \geq 0$ el signo que se obtiene para cada uno de los números seleccionados será el signo que tiene la expresión cuadrática en el intervalo al cual pertenece el número.

Lo anterior es válido, ya que, en cada intervalo el trinomio no puede cambiar de signo, porque si esto sucediera, entonces en dicho intervalo la ecuación cuadrática tendría otra solución, pero recordemos que la ecuación cuadrática solamente tiene dos soluciones.

Para el intervalo $(-\infty, -1.5)$ escogemos, por ejemplo, $x = -2$, que al sustituir en la expresión $-10x^2 - 9x - 9$, obtenemos:

$$-10(-2)^2 - 9(-2) + 9 = -40 + 18 + 9 = -13 < 0$$

lo cual quiere decir que en este intervalo la expresión es negativa.

Para el intervalo $(-1.5, 0.6)$ seleccionamos el número $x = 0$ y al sustituir en la expresión, tenemos:

$$-10(0)^2 - 9(0) + 9 = 9 > 0$$

Por lo tanto en este intervalo la expresión $-10x^2 - 9x - 9$ es positiva

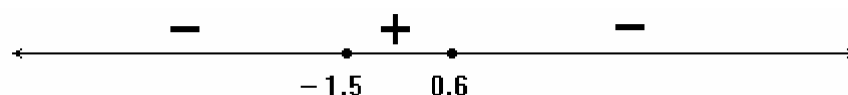
Y para el intervalo $(0.6, \infty)$, escogemos $x = 1$, al sustituir, obtenemos:

$$-10(1)^2 - 9(1) + 9 = -10 - 9 + 9 = -10 < 0$$

la expresión $-10x^2 - 9x - 9$ es negativa en este intervalo.

En la recta esto lo veríamos de la siguiente manera.

Signo de la expresión $-10x^2 - 9x - 9$ en las diferentes regiones



Como queremos obtener la solución de la desigualdad $-10x^2 - 9x - 9 \geq 0$, entonces, observemos que en la figura, el intervalo deseado es $(-1.5, 0.6)$ y además, la expresión es cero en -1.5 y 0.6 , por lo que la solución es el intervalo cerrado $[-1.5, 0.6]$

Ejercicio 2.15. Con la función irracional $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$ realiza lo siguiente:

a) Para que exista la raíz cuadrada expresada en la función (en los números reales) se debe cumplir que:

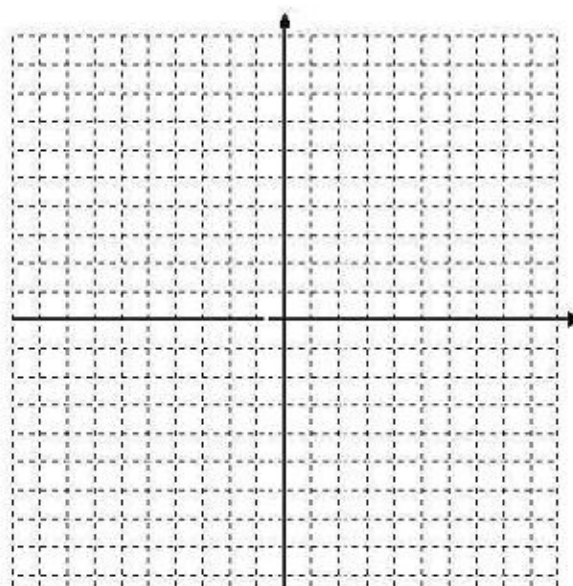
b) Escribir el dominio de la función _____

c) Completar las siguientes tablas

| | | | | | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| x | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| f(x) | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|
| x | - 3 | - 4 | - 5 | - 6 | - 7 | - 8 | - 9 | - 10 | - 11 |
| f(x) | | | | | | | | | |

d) Trazar la gráfica. Utilizar la escala adecuada.



e) Escribir el rango de la función _____

f) Indica en que intervalo la función es creciente y en donde es decreciente

Creciente _____ Decreciente _____

g) Las intersecciones con los ejes son

Intersección con el eje X _____ Intersección con el eje Y _____

Ejercicio 2.16. Con la función irracional $f(x) = \sqrt{11+10x-x^2}$ realiza lo siguiente:

a) Para que exista la raíz cuadrada expresada en la función (en los números reales) se debe cumplir que:

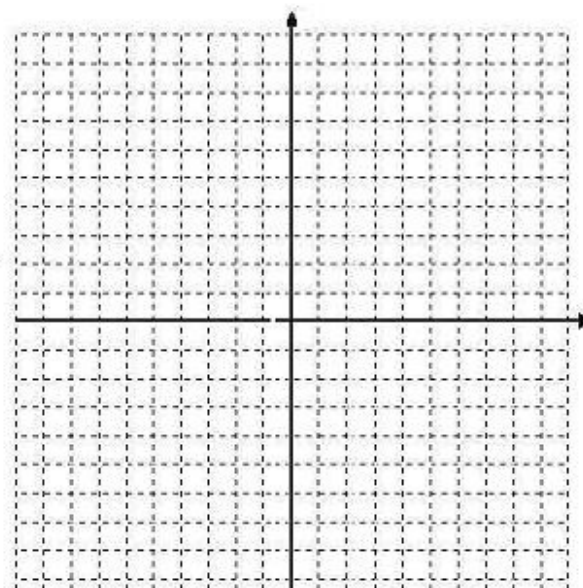
b) Escribir el dominio de la función _____

c) Completa las siguientes tablas

| | | | | | | | | | |
|------|-----|-------|---|---|---|---|---|-----|---|
| x | - 1 | - 0.5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4.5 | 5 |
| f(x) | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|------|-----|---|-----|---|---|---|----|------|----|
| x | 5.5 | 6 | 6.5 | 7 | 8 | 9 | 10 | 10.5 | 11 |
| f(x) | | | | | | | | | |

d) Trazar la gráfica. Utilizar la escala adecuada



e) Escribir el rango de la función f. $\text{Ran } f =$ _____

f) Indica en que intervalo la función es creciente y en donde es decreciente

Creciente _____ Decreciente _____

g) Las intersecciones con los ejes son

Intersección con el eje X _____ Intersección con el eje Y _____

Ejercicio 2.17 Con la función irracional $f(x) = 1 - \sqrt{\frac{7+6x-x^2}{4}}$ realiza lo siguiente:

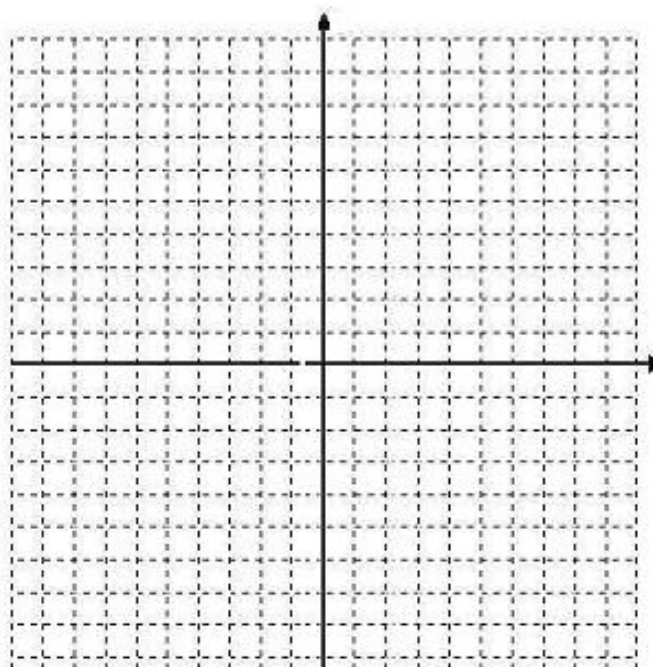
a) Para que exista la raíz cuadrada expresada en la función(en los números reales) se debe cumplir que:

b) Escribir el dominio de la función _____

c) Completar la siguiente tabla

| x | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|------|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | | | | | | | | |

d) Trazar la gráfica. Utilizar la escala adecuada.



e) Escribir el rango de la función f _____

f) Indica en que intervalo la función es creciente y en donde es decreciente

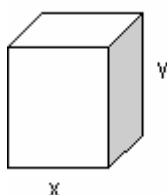
Creciente _____ Decreciente _____

g) Las intersecciones con los ejes son

Intersección con el eje X _____ Intersección con el eje Y _____

Problemas y ejercicios propuestos

1) Una caja rectangular de fondo cuadrado y con tapa debe tener un volumen de 48 ft^3 . El material de los lados y fondo cuesta \$ 40 por ft^2 y el de la tapa cuesta \$ 20 por ft^2 .



Nota: 1 ft. equivale a .305 m.

El volumen de la caja es

$$V = x^2 y$$

El costo de la producción es

$$C = 20x^2 + 40(x^2 + 4xy)$$

a) Llenar la siguiente tabla en el que se obtiene el valor de y y del costo C en función del valor de x .

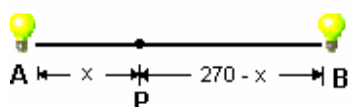
| | | | | | | | | | | |
|-----|-----|---|---|---|-----|---|-----|---|---|-----|
| x | 0.5 | 1 | 2 | 3 | 3.5 | 4 | 4.5 | 5 | 6 | 6.5 |
| y | | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | | |

b) Obtener la expresión algebraica para el costo C en función del valor x .

c) Graficar la función costo C en términos de la longitud x .

d) ¿Para qué valor de x el costo es mínimo?

2) Las potencias luminosas de los focos situados en los puntos A y B son $a = 125$ watts y $b = 64$ watts. La distancia entre los puntos es $d = 270$ cm. La intensidad luminosa I varía en razón inversa del cuadrado de la distancia.



La intensidad luminosa que recibe P será la correspondientes a la del foco A más la correspondiente a la del foco B esto es:

$$I = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(270 - x)^2}$$

a) Completar la siguiente tabla en la que se obtiene la intensidad luminosa en el punto P en función de su distancia x al punto A.

| | | | | | | | | | | |
|-----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | 25 | 50 | 70 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 225 | 250 |
| I | | | | | | | | | | |

b) Trazar la gráfica de la intensidad luminosa en el punto P en función de la distancia x .

c) ¿A qué distancia del punto A la intensidad es mínima? y ¿cuánto vale dicha intensidad?

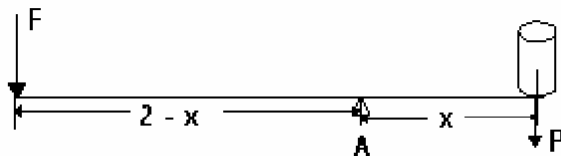
Principio de la palanca

La fuerza F necesaria para levantar un peso P que se encuentra a una distancia d del punto de apoyo es inversamente proporcional a la distancia x a la que se encuentra la fuerza sobre el punto de apoyo.



la física muestra que se cumple que $Fx = Pd$. (Igualación de los Torques)

3) Un tambo de 300 kg se va a levantar por medio de una palanca, para ello se utiliza una tabla de 2 metros de largo (ver figura)



- a) Obtener la expresión algebraica para la fuerza F en términos de la distancia x .
- b) Llenar la tabla para obtener la fuerza que se requiere para levantar dicho tambo en función de la distancia x a la que se encuentra el punto de apoyo del tambo.

Nota: El valor de x está dado en centímetros por lo que primero transforma los metros en centímetros.

| x | 1 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 190 |
|--------|---|---|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| $F(x)$ | | | | | | | | | | | | |

- c) Construir la gráfica.
- 4) En un recipiente se tiene 60 ml de una solución ácida al 70%, se va a agregar agua destilada para bajar la concentración de ácido.
- a) Llenar la siguiente tabla en la que se obtiene la cantidad de solución y el porcentaje de ácido en función de la cantidad de mililitros agregados.

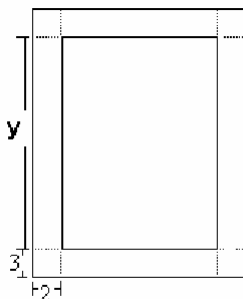
| Agua agregada (ml.) | 5 | 10 | 15 | 20 | 40 | 60 | 80 | 140 | 240 | 360 |
|---------------------|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| Total de ml | 65 | | | | | | | | | |
| % de ácido | | | | | | | | | | |

- b) Obtener la expresión algebraica para el porcentaje de ácido como función del número de mililitros agregados.
- c) ¿La función es creciente? ¿porqué?

5) Aplicando la Ley de Boyle-Mariott hallar la expresión algebraica para el volumen

de un gas en función de la presión a una temperatura constante si se sabe que a una presión de 760 mm de Hg el volumen es de 2.3 litros. Dibujar la gráfica.

6) Un impresor debe preparar un poster rectangular de cartón con una superficie impresa de 96 pulgadas cuadradas los márgenes superior e inferior deberán medir tres pulgadas y los lados dos pulgadas.



- Obtener la expresión algebraica del área total en función del valor de y .
- Dibujar la gráfica para el área total A vs. y .
- ¿Para que valor de y el área total es mínima?

7) Al usar una técnica particular puede purificarse una sustancia química al

$$\frac{95t^2}{t^2 + 25} \% \text{ en } t \text{ horas de proceso}$$

- ¿Qué porcentaje de purificación lleva en el tiempo $t = 10$ hrs ?
- ¿Qué porcentaje de purificación lleva en el tiempo $t = 100$ hrs ?
- ¿Llegará al 100% de purificación?

8) Para trazar la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x - 2}$ realizar lo siguiente:

Factorizar el numerador y el denominador y resolver las ecuaciones

$$2x^2 - x - 3 = 0 \quad \text{y} \quad x - 2 = 0$$

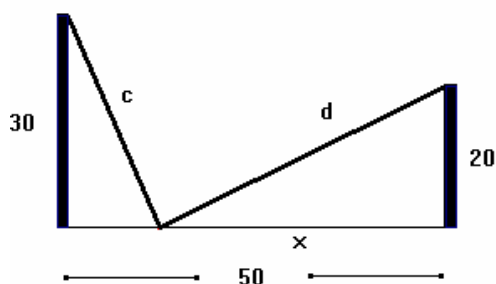
- Obtener el dominio de la función.
- Obtener la ecuación de la asíntota vertical.
- Obtener la ecuación de la asíntota oblicua.
- Completar las siguientes tablas

| | | | | | | | | | | | |
|--------|-----|----|----|----|---|---|-----|-----|-----|-----|------|
| x | -10 | -5 | -3 | -1 | 0 | 1 | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.9 | 1.99 |
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | |
|--------|------|-----|-----|---|-----|-----|-----|---|---|---|----|
| x | 2.01 | 2.1 | 2.5 | 3 | 3.1 | 3.2 | 3.5 | 4 | 5 | 6 | 10 |
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | |

- Trazar las asíntotas vertical y oblicua. Trazar la gráfica de la función.

9) Dos postes de 20 y 30 pies de altura serán clavados en la tierra, con cables que van de la parte superior de cada uno de ellos hasta un punto que esta entre los dos postes, la separación entre los postes es de 50 pies. La figura muestra la situación.



$$L = c + d$$

Por el teorema de Pitágoras

$$c^2 = (30)^2 + (50 - x)^2$$

$$c^2 = 900 + (50 - x)^2 \text{ por lo tanto}$$

de la misma manera

$$d^2 = x^2 + (20)^2$$

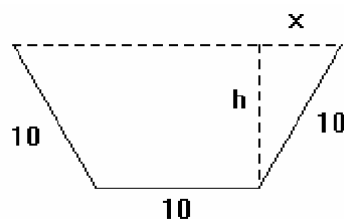
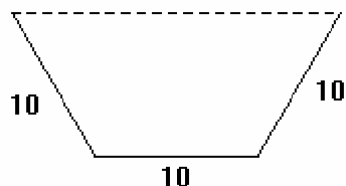
- Obtener una fórmula para L en términos de la variable x
- Llena la siguiente tabla que muestra la relación entre la suma de las longitudes L y la distancia x .

| | | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| x | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| L | | | | | | | | | | | |

c) Traza la gráfica

d) ¿Para que valor de x es mínima la longitud L ?

10) Con una lámina metálica de 30cm de ancho, se va a construir un canal para la lluvia, cuya sección transversal deberá ser un trapecio isósceles, cuya base menor sea igual al lado, como se muestra en la siguiente figura



a) Obtener La expresión algebraica para el área A del trapecio en función del valor de x

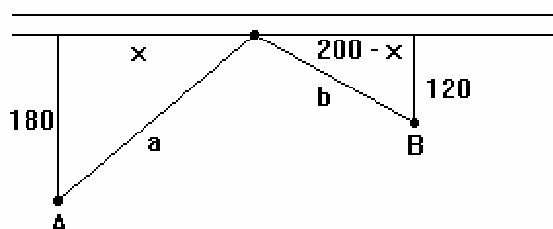
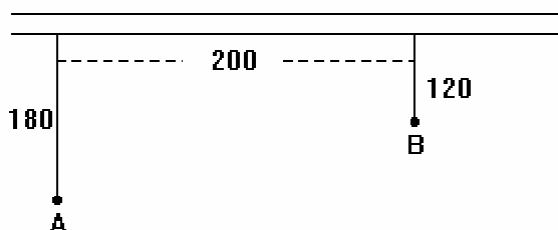
b) Llena la siguiente tabla que muestra la relación entre el área A y el valor de x .

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| A | | | | | | | | | | | |

c) Traza la gráfica

d) ¿Para qué valor de x es máxima el área A ?

11) Los propietarios de dos casas, una a 180 m del camino y la otra a 120 m del camino y 200 m más adelante. Deciden compartir un solo buzón que debe colocarse a la orilla del camino y entre ellos, la siguiente figura describe la situación



a) Obtener la formula para la suma **S** de las distancias que deben recorrer las personas en términos de **x**: $S = a + b$

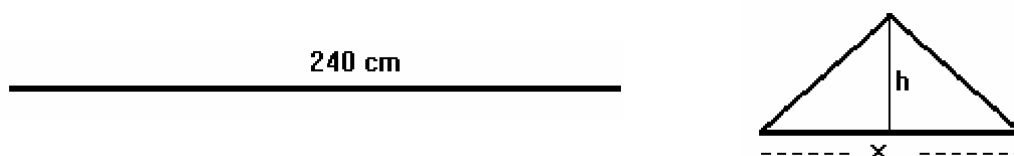
b) Llena la siguiente tabla que muestra la relación entre S y x.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 | 140 | 160 | 180 | 200 |
| S | | | | | | | | | | | |

c) Trazar la gráfica

d) ¿Para qué valor de x es mínima la distancia **L**?

12) Se va a construir una ventana, cuya forma será de un triángulo isósceles, para esto se tienen 240 cm de material. Como se muestra en la figura.



a) Obtener la expresión algebraica para el área **A** de la ventana en términos de la longitud de la base **x**

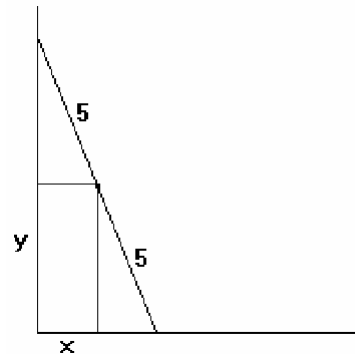
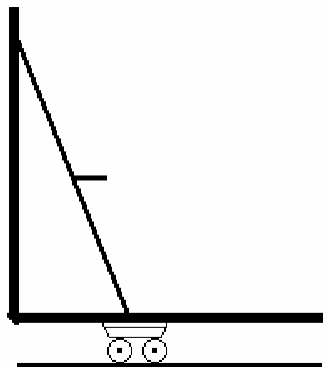
b) Llena la siguiente tabla que muestra la relación entre A y x.(x esta dado en centímetros)

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| x | 0 | 10 | 20 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 |
| A | | | | | | | | | | | |

c) Traza la gráfica

d) ¿Para qué valor de **x** es mínima la distancia **L**?

13) Un juego Infantil consiste en una barra de 10 metros de longitud, que se desliza sobre dos rieles perpendiculares y una canastilla situada en el punto medio de la barra, como se muestra en la figura.



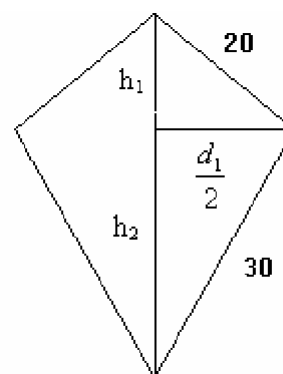
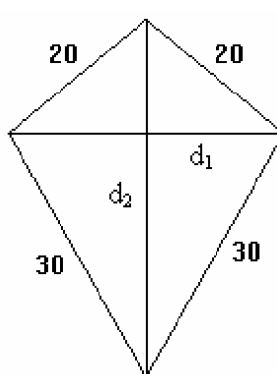
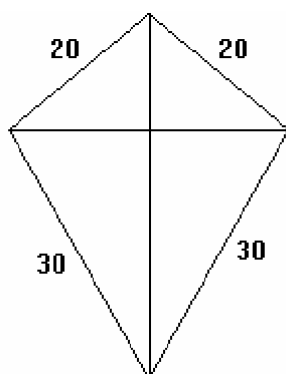
a) Obtener la expresión algebraica para la altura y a la que se encuentra el punto medio de la barra en función del desplazamiento horizontal x .

b) Llena la siguiente tabla que muestra la relación entre y , x . (x está dado en centímetros)

| | | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| y | | | | | | | | | | | |

c) Trazar la gráfica

14) Se va a construir el armazón de un cometa (papalote) a partir de seis trozos de madera. Se han cortado los seis trozos exteriores con las longitudes que se indican en la figura.



las longitudes de las diagonales son d_1 y d_2

a) Obtener la expresión algebraica para el área **A** del cometa en términos de la longitud de la diagonal **d₁** (recuerda que el área de un cometa se obtiene multiplicando las longitudes de las diagonales es decir $A = d_1 d_2$)

b) Llena la siguiente tabla que muestra la relación entre A y x. (x está dado en centímetros)

| | | | | | | | | | | | |
|----------------|---|---|----|----|----|----|-------|----|----|----|----|
| d ₁ | 0 | 5 | 10 | 20 | 30 | 32 | 33.28 | 34 | 36 | 38 | 40 |
| A | | | | | | | | | | | |

c) Traza la gráfica

d) ¿Para que valores de **d₁** y **d₂** es máxima el área **A**?

Graficar las siguientes funciones

15) $f(x) = \frac{10x}{x^2 + 1}$

16) $f(x) = \frac{10x}{x^2 - 4}$

17) $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x^3 + 16}$

18) $f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$

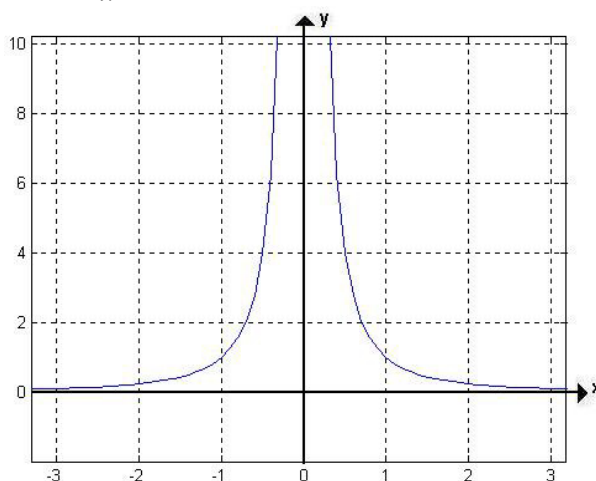
19) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$

20) $f(x) = \frac{x^2}{x^2}$

21) $f(x) = \frac{x^3}{x - 2}$

22) $f(x) = \frac{2x}{(x + 2)^2}$

23) La gráfica de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ está representada en la siguiente figura



a) Graficar $g(x) = \frac{1}{x^2} + 5$ Obtener dominio y rango

b) Graficar $g(x) = \frac{1}{x^2} - 2$ obtener dominio y rango

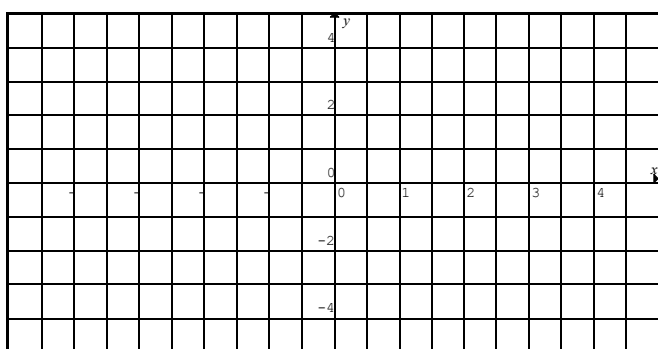
c) Graficar $g(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ obtener dominio y rango

d) Graficar $g(x) = \frac{1}{(x-3)^2} + 5$ obtener dominio y rango

Para cada una de las siguientes funciones, obtener su dominio, elaborar una tabla de valores, trazar la gráfica, obtener el rango, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los puntos de intersección con los ejes.

| | |
|-------------------------------|---|
| 24) $f(x) = \sqrt{4x-18}$ | 28) $f(x) = \sqrt{\frac{400-16x^2}{16}}$ |
| 25) $f(x) = \sqrt{15-6x}$ | 29) $f(x) = \sqrt{\frac{30x-3x^2+27}{4}}$ |
| 26) $f(x) = 4 - \sqrt{5x+30}$ | 30) $\sqrt{x^3-12x}$ |
| 27) $f(x) = \sqrt{16+6x-x^2}$ | |

La gráfica de la función $f(x) = x\sqrt{8-x^2}$ esta dada en la siguiente figura



Graficar las siguientes funciones

31) $g(x) = f(x) + 5$

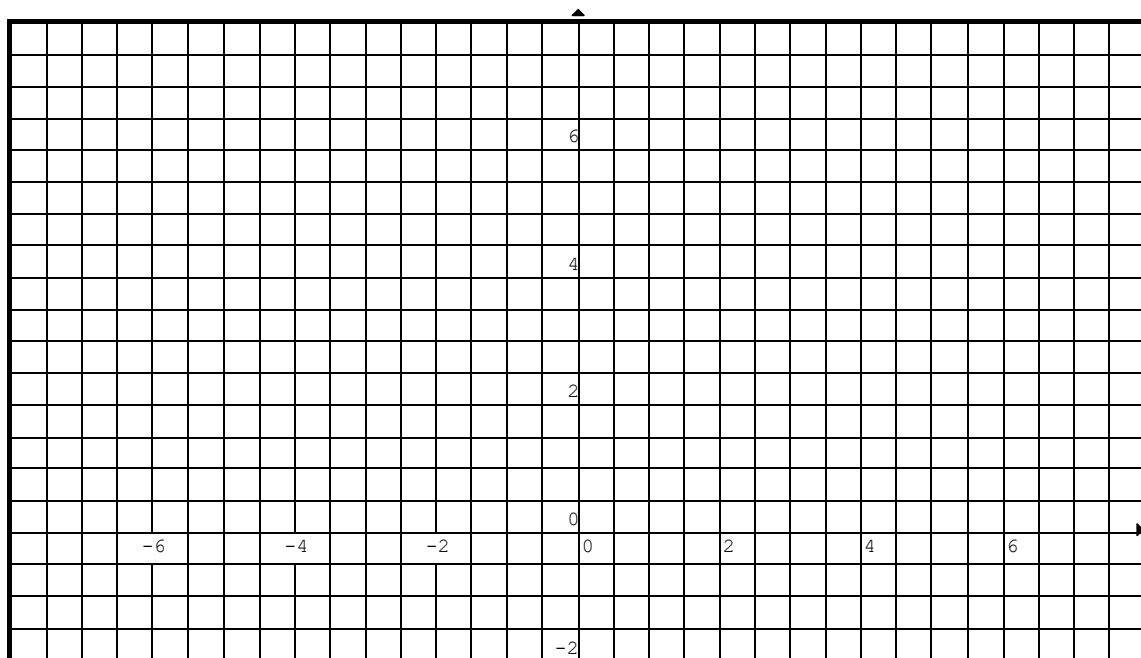
32) $g(x) = f(x - 4)$

33) $g(x) = f(x + 3) - 5$

34) $g(x) = -f(x)$

35) $g(x) = f(-x)$

36) La gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2 \sqrt{24 - x^2}}{10}$ esta dada en la siguiente figura



Las intersecciones de la función con el eje x son $x_1 \approx -4.9$ y $x_2 \approx 4.9$

Graficar las siguientes funciones

- a. $g(x) = f(x) + 5$
- b. $g(x) = f(x - 4)$
- c. $g(x) = f(x + 3) - 5$
- d. $g(x) = -f(x)$
- e. $g(x) = f(-x)$

Ejercicios complementarios funciones racionales

1. Encuentra los puntos donde el polinomio que se encuentra en el denominador de las siguientes funciones racionales vale cero.

| Función racional | Expresión algebraica por resolver (factorización si es el caso) | Puntos donde la función polinomial del denominador vale cero |
|------------------------------------|---|---|
| $f(x) = \frac{3-x}{2+x}$ | | |
| $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$ | $2x-4 = 2(x-2) = 0$ $x-2 = 0$ | $x = 2$ |
| $g(x) = \frac{3-x}{x-3}$ | | |
| $f(x) = \frac{3-x}{3+9x}$ | | |
| $h(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$ | $x^2-1 = 0$ $x^2 = 1$ | $x = \pm\sqrt{1}$ $x = 1, x = -1$ |
| $h(x) = \frac{3-x}{6x^2+x}$ | | |
| $g(x) = \frac{x^2+3x+4}{x^2-9}$ | $x^2-9 =$ $= (x-3)(x+3) = 0$ | $x-3 = 0, \quad \text{ó}$ $x+3 = 0$ $x = 3, \quad x = -3$ |
| $f(x) = \frac{16-x^2}{x^2-8x+16}$ | | |
| $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+4x-5}$ | | |
| $f(x) = \frac{3-x}{2+x}$ | | |

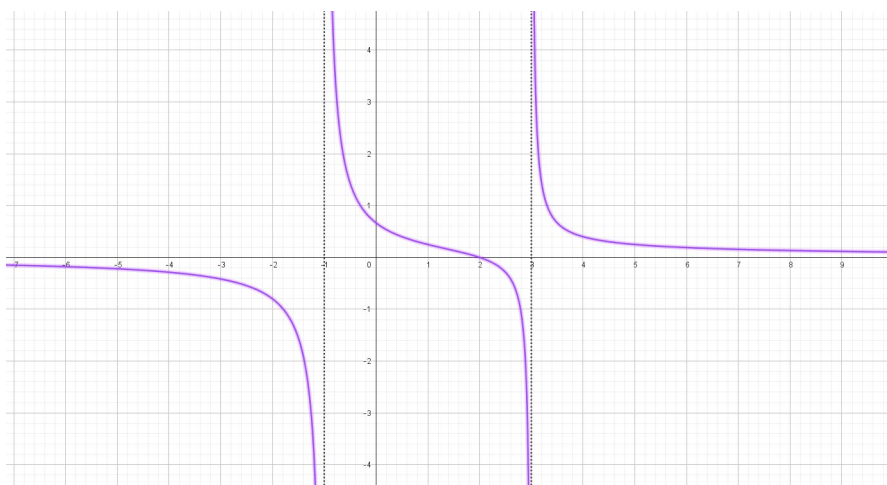
2. Considera las siguientes funciones racionales, indica el dominio que corresponde a cada una

| Función racional | Puntos donde el denominador vale cero | Dominio de la función |
|------------------------------------|--|--|
| $f(x) = \frac{5-x}{x+3}$ | | |
| $g(x) = \frac{4x-3}{6-2x}$ | | |
| $g(x) = \frac{7x}{9-4x}$ | | |
| $f(x) = \frac{x}{25-x^2}$ | $25 - x^2 =$ $= (5-x)(5+x) = 0$ Entonces $5-x=0, 5+x=0$ | Todos los números reales excepto $x=5, x=-5$ $Dom f = \mathbb{R} - \{5, -5\}$ |
| $f(x) = \frac{5x}{10x^2-5x}$ | | |
| $h(x) = \frac{3x}{6x-6x^2}$ | $6x - 6x^2 = 0$ $6x(1-x) = 0$ $6x=0, 1-x=0$ | Todos los números reales excepto $x=0, x=1$ $Dom h = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ |
| $g(x) = \frac{2-x}{2x^2-4x}$ | | |
| $h(x) = \frac{12x-6}{-2x^2-5x+3}$ | $-2x^2 - 5x + 3 = 0$ $-(2x^2 - 5x - 3) = 0$ $-(2x-1)(x+3) = 0$ | Todos los números reales excepto $x = \frac{1}{2}, x = -3$ $Dom h = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}, -3\right\}$ |
| $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4x+3}$ | | |
| $h(x) = \frac{x^2-25}{x^2-10x+25}$ | | |
| $h(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$ | | |
| $f(x) = \frac{x^4-81}{x^2-9}$ | | |
| $(x) = \frac{x^3-4x^2}{2-x^2}$ | | |

3. Indica el dominio y los ceros que corresponden a cada una de las funciones siguientes.

| Función | Dominio de la función | "Ceros" de la función |
|--|--|---|
| $G(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 8}$ | | |
| $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^3 - 9x}$ | $x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = 0$ $x = 0, x = -3, x = 3$ Dom $f = \mathbb{R} - \{0, -3, 3\}$ | $x^2 - 3x = 0,$ $x^2 - 3x = x(x - 3)$ $= 0$ $x = 0, x = 3$ |
| $f(x) = \frac{x + 1}{4 - x}$ | | |
| $h(x) = \frac{2x - 4x^2}{2x^2 + 5x + 2}$ | | |

4. Una función racional $f(x)$ es tal que $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3, -1\}$, tiene un "ceros" en $x=2$ y tiene asíntotas verticales en $x = 3, x = -1$, su gráfica es la siguiente:

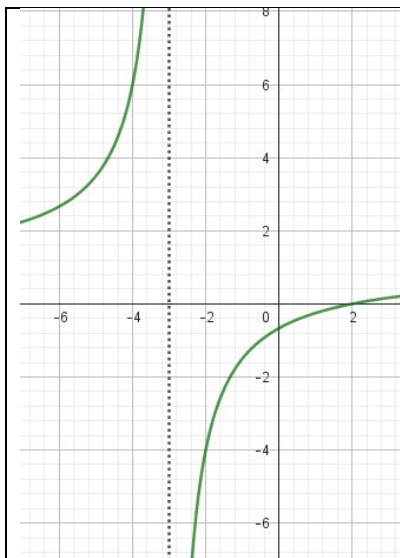


Indica cuál es la expresión racional de $f(x)$

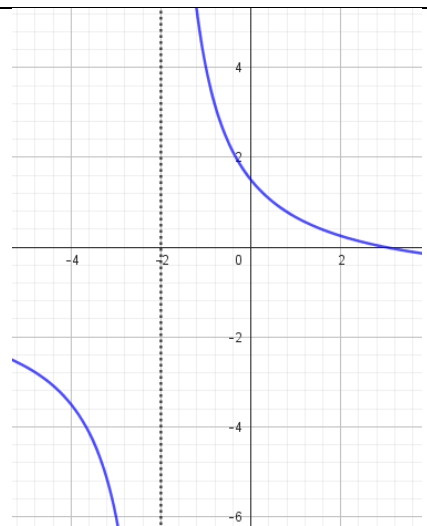
| | | |
|---------------------------------------|--|---|
| $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 9}$ (A) | $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 2x - 3}$ (B) | $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 9}$ (C) |
|---------------------------------------|--|---|

5. Asocia la gráfica a la función que corresponde

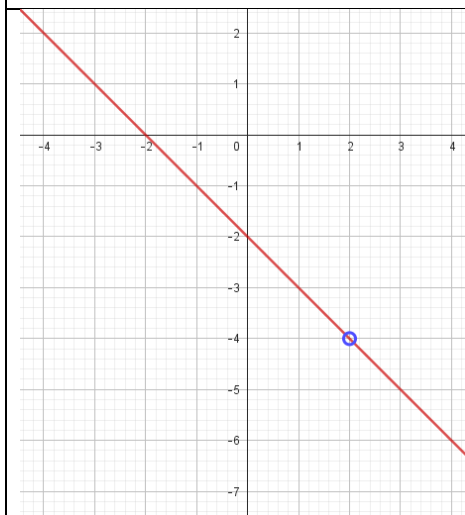
| | |
|--|--|
| $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{4 - x^2}$ <p>(A)</p> | $h(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 2x}$ <p>(B)</p> |
| $t(x) = \frac{x - 2}{x + 3}$ <p>(c)</p> | $u(x) = \frac{x^2 - 4}{2 - x}$ <p>(D)</p> |



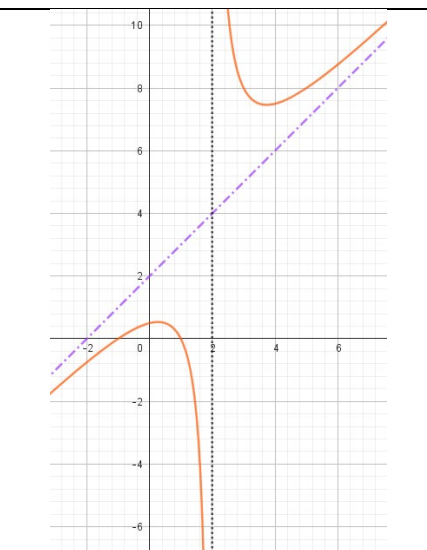
()



()



()



()

TABLA DE ESPECIFICACIONES

La tabla de especificaciones que se muestra a continuación tiene como base el propósito general de la unidad y los aprendizajes. La temática incluye conceptos y algoritmos que no se han tratado antes por el estudiante, por ello se da una ponderación igual a cada rubro.

Propósito general:

Modelará algunas situaciones que dan lugar a funciones racionales y con radicales, analizará una gráfica para identificar su dominio, rango, asíntotas y relacionar estas características con la situación problemática planteada

| Aprendizajes Temática | Conocimiento 25% | Comprensión 25% | Desarrollo 25% | Aplicación 25% |
|---|---|---|--|--|
| FUNCIONES RACIONALES | | | | |
| <i>Explora situaciones que se modelan con funciones racionales</i> | Distinguir la expresión algebraica que corresponde a una función racional. | Comprende que las variables x e y corresponden a una pareja ordenada que satisface la expresión racional. | Determinar el dominio de una función racional. Calcula raíces de un polinomio | Resolver problemas que generan una función racional. |
| <i>Elementos de una función racional: ceros, asíntotas verticales</i> | En la gráfica identifica continuidad, discontinuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos | Visualizar las transformaciones de una función racional. | Obtener la gráfica de una función racional. | |
| <i>Gráficas de funciones con asíntota horizontal diferente al eje de las x</i> | Determinar las asíntotas de una función racional. Comportamiento de la gráfica al infinito. | | | |
| FUNCIONES CON RADICALES | | | | |
| <i>Resuelve problemas de aplicación.</i> | Distinguir la expresión algebraica que corresponde a una función con radicales. | | Determina el dominio de una función radical (su radicando función lineal o función cuadrática) | Resolver problemas que generen una función con radical |
| <i>Identifica los elementos de la función: dominio, rango, ceros y traza su gráfica.</i> | | | Obtener la gráfica de una función con radicales | |

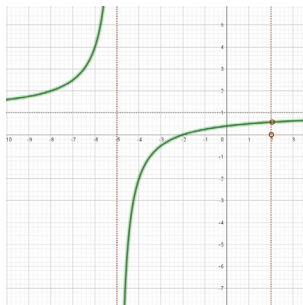
EXAMEN-EJERCICIO DE EVALUACIÓN

- 1) Un avión de pasajeros mantiene una velocidad constante cuando se encuentra a una cierta altura. La velocidad del viento en contra de la dirección del avión merma su avance y por tanto aumenta los tiempos estimados de llegada. Si la velocidad constante de un avión que se encuentra a una altura de 10 km es de 180 km/hora, indica en una tabla el tiempo que invierte el avión en recorrer una distancia de 500 km si la velocidad del viento en contra aumenta o disminuye.

Nota: La velocidad del viento a una altura de 10 km se considera pequeña y se estima que oscila entre 3 y 7 kilómetros por hora.

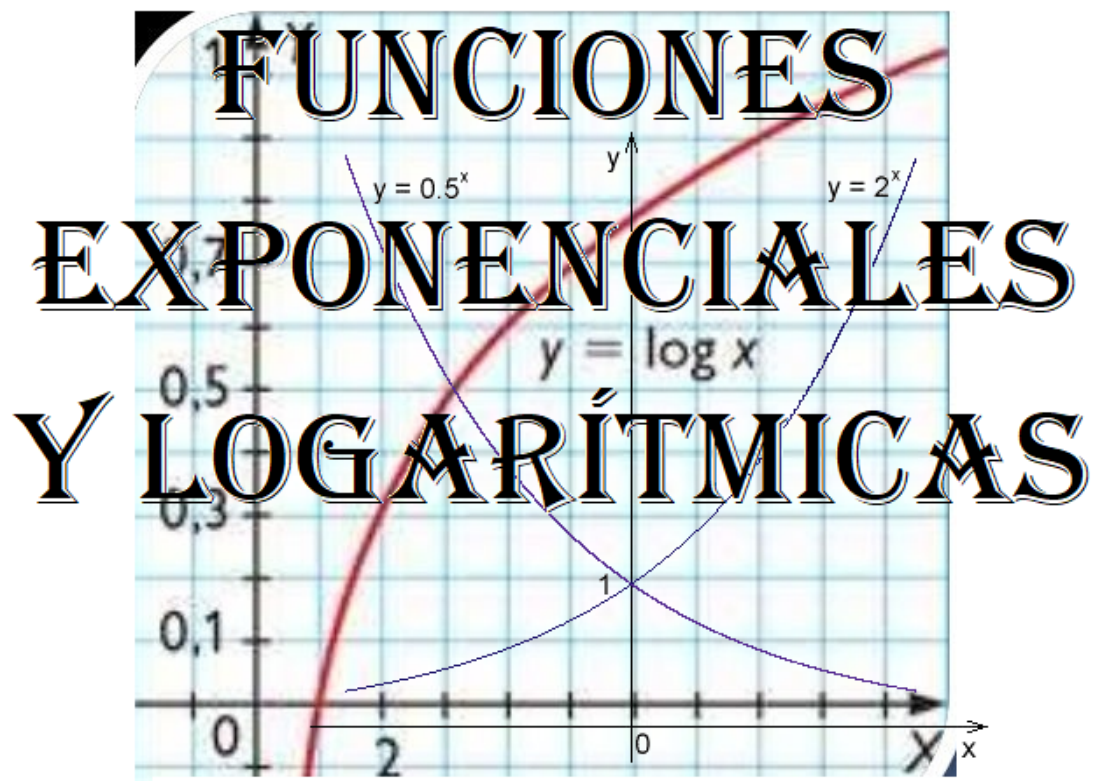
| | | | | | | | | | |
|-------------------------------|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Velocidad del viento | v | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Tiempo utilizado por el avión | $T(v)$ | | | | | | | | |

- i. Escribe la expresión que permite calcular el tiempo que invierte el avión en recorrer 500 km en función de la velocidad v del viento en contra **(2.5 puntos)**
- 2) Encuentra el dominio y los "ceros" de la función $f(x) = \frac{3x-x^2}{x^2-1}$ **(1.25 puntos)**
- i. Indica si la función $f(x)$ es continua o no. **(1.25 puntos)**
- ii. Factoriza el numerador y el denominador. Determina las asíntotas **(1.25 p)**
- iii. Grafica en el plano cartesiano **(1.25 puntos)**
- 3) Dada la función $g(x) = \frac{3x}{4-x^2}$, explica lo que ocurre si x toma valores muy grandes, es decir si x se va a $+\infty$ y también cuando x se va a $-\infty$. **(1.25 p)**
- 4) Considera la gráfica de $h(x) = \frac{x^2-4}{x^2+3x-10}$,



traza las gráficas de $u(x) = \frac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2+3(x-1)-10}$, y de $h(x) = \frac{x^2-4}{x^2+3x-10} + 3$ **(1.25 p)**

UNIDAD 3



Unidad 3

Funciones Exponenciales y Logarítmicas

Introducción

Las funciones exponenciales y logarítmicas son funciones trascendentes, diferentes al tipo de funciones algebraicas ya que la variable aparece en el exponente para el caso de las funciones exponenciales y en la función logarítmica es la función inversa de la función exponencial.

En la unidad se estudian estas funciones, en la primera parte la función exponencial y en la segunda parte la función logarítmica.

Las funciones exponenciales y logarítmicas son importantes en Matemáticas y tienen gran aplicación en materias tales como Química, Biología, Física e Ingeniería entre otras.

En la unidad, se reafirman los conceptos de dominio, rango, función creciente y decreciente, a través de las representaciones, tabular, gráfica y expresión simbólica de la función,

El manejo de conceptos como base numérica y exponente adquieren gran relevancia, por lo que, es importante que el alumno comprenda lo que es una base numérica y el manejo adecuado de las leyes de los exponentes.

El tiempo mínimo sugerido para este capítulo es de 25 hrs.

Los aprendizajes en el capítulo son:

- ✓ Resolver problemas que generan una función exponencial o logarítmica.
- ✓ Distinguir la expresión que corresponde a una función exponencial o logarítmica.
- ✓ Reafirmar que las variables x e y corresponden a una pareja ordenada que satisface este tipo de expresiones.

- ✓ Graficar correctamente una función exponencial y una función logarítmica.
- ✓ Distinguir en una función exponencial o logarítmica cuando es creciente o decreciente observando la base.
- ✓ Comprender la traslación vertical de la función exponencial o logarítmica al sumar un parámetro b a la función.
- ✓ Comprender la traslación horizontal de una función exponencial o logarítmica al sumar un parámetro b a su argumento.
- ✓ Comprender la contracción o expansión de una función exponencial o logarítmica al multiplicar su argumento por un parámetro b .
- ✓ Manejar adecuadamente las leyes de exponentes y logaritmos.
- ✓ Analizar problemas que involucren una función exponencial o logarítmica.
- ✓ Resolver ecuaciones exponenciales o logarítmicas.

En esta unidad, el manejo adecuado de las escalas en cada uno de los ejes del plano cartesiano adquiere gran relevancia, de no hacerlo así, se tiene el riesgo de no tener una gráfica adecuada. Es fundamental la orientación y supervisión del profesor y el uso de escalas exponenciales y logarítmicas.

Para trabajar la presente unidad, el alumno requiere los siguientes materiales:

- ✓ Cuaderno de trabajo.
- ✓ Plumas de colores
- ✓ Calculadora científica
- ✓ Lápiz y goma
- ✓ Regla
- ✓ Cuaderno para anotaciones extras

Primera parte**Función exponencial con base a** **Problemas de introducción de la función exponencial**

Problema 4.1. A nivel experimental se observa que el número de bacterias de cultivo se duplica cada día. Existen 100 bacterias al inicio.

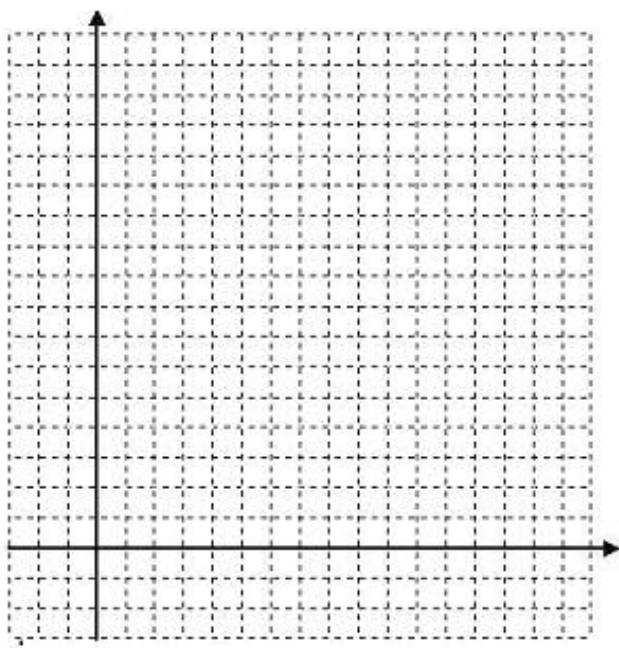
a) Llenar la siguiente tabla con los datos del problema

| t (días) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|--------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N (num. de bacterias) | | | | | | | | | |

b) La expresión matemática correspondiente a la variación de bacterias N respecto al número de días t es

_____.

c) Trazar la gráfica de la función correspondiente.



- d) Escribir el dominio de la función _____
- e) Escribir el rango de la función _____
- f) Escribir si la función es creciente o decreciente _____ ¿Porqué? _____

Problema 4.2. El isótopo del Polonio ^{210}Po tiene una vida media de 140 días, es decir, dada cualquier cantidad de esa sustancia, la mitad se desintegrará en 140 días. Existen 600 mgrs. de Polonio ^{210}Po al inicio.

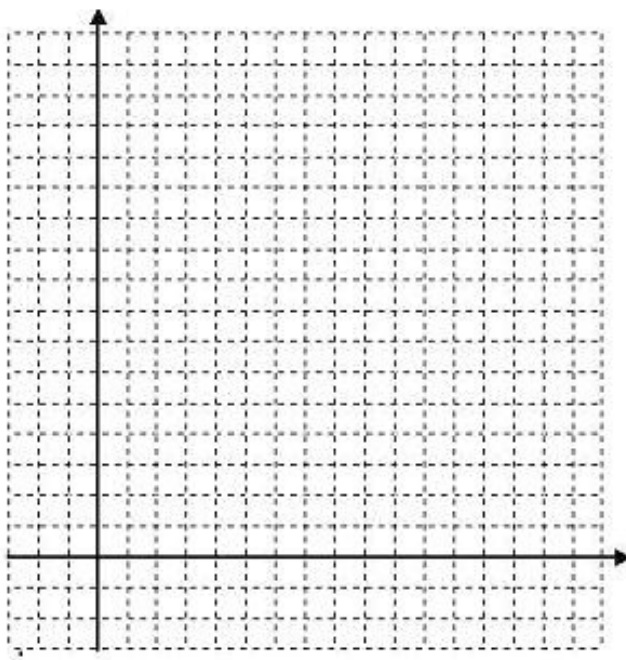
- a) Llenar la siguiente tabla con los datos del problema

| t (días) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M(cant. en mgrs.) | | | | | | | | | |

- b) La expresión matemática correspondiente a la variación de bacterias N respecto al número de días t es

_____.

- c) Trazar la gráfica de la función correspondiente.



- d) Escribir el dominio de la función _____
- e) Escribir el rango de la función _____
- f) Escribir si la función es creciente o decreciente _____ ¿Porqué? _____

Definición. La función exponencial con base a se define como $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$ o bien para $a > 1$ y para cualquier número real x .

La función exponencial con base a son de gran importancia en matemáticas y tiene aplicaciones en la Química, la Biología y la Física e Ingeniería entre otras, donde contribuyen a describir como crecen o decrecen las magnitudes de la naturaleza.

La gráfica de la función exponencial depende del valor de la base a .

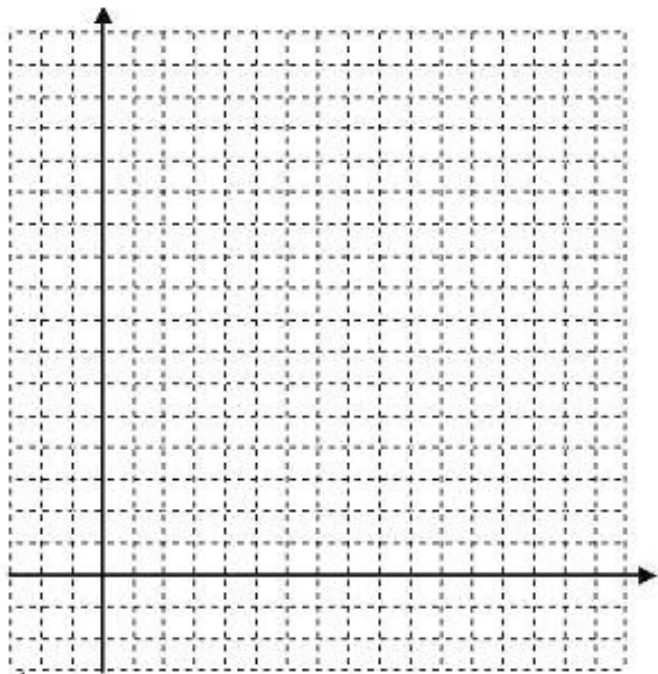
Para conocer la forma de este tipo de gráficas, a continuación graficaremos algunas con diferente valor de la base a .

Ejercicio 4.3. Con la función exponencial $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ realizar lo siguiente:

- a) Llenar la tabla

| x | -3 | -1 | 0 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|--------|----|----|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | |

b) Trazar la gráfica. Utilizar la escala adecuada



c) Escribir el dominio de la función _____

d) Escribir el rango de la función _____

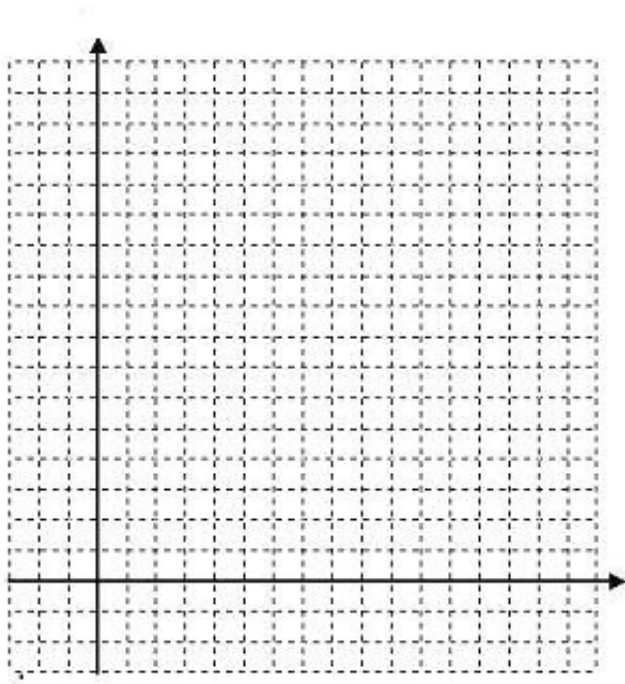
e) Escribir si la función es creciente o decreciente _____ ¿Porqué? _____

Ejercicio 4.4. Con la función exponencial $f(x) = \left| \begin{matrix} 4 \\ - \\ 3 \end{matrix} \right|^x$ realizar lo siguiente:

a) Llenar la siguiente tabla

| | | | | | | | | | |
|--------|----|----|---|---|---|---|---|----|----|
| x | -3 | -1 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| $f(x)$ | | | | | | | | | |

b) Trazar la gráfica. Utilizar la escala adecuada



c) Escribir el dominio de la función _____

d) Escribir el rango de la función _____

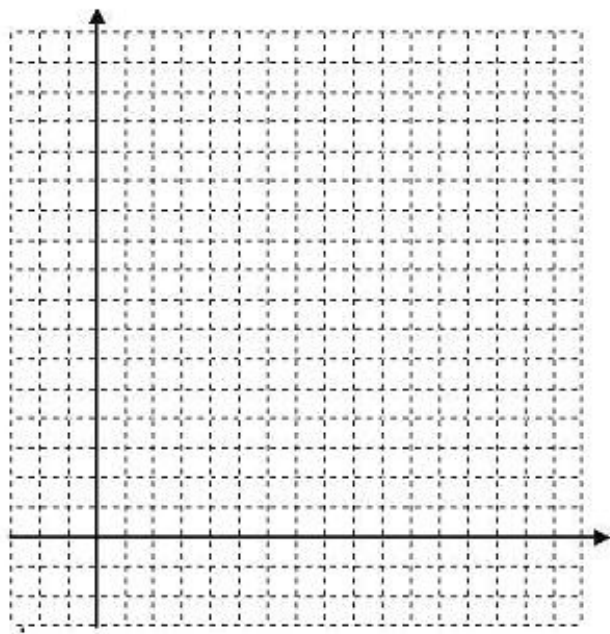
e) Escribir si la función es creciente o decreciente _____ ¿Porqué? _____

Ejercicio 4.5. Con la función exponencial $f(x) = 4^{-x}$ realizar lo siguiente

a) Llenar la siguiente tabla

| | | | | | | | | | |
|--------|----|----|----|---|---|-----|---|-----|---|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2.5 | 3 | 3.5 | 4 |
| $f(x)$ | | | | | | | | | |

b) Trazar la gráfica. Utilizar la escala adecuada



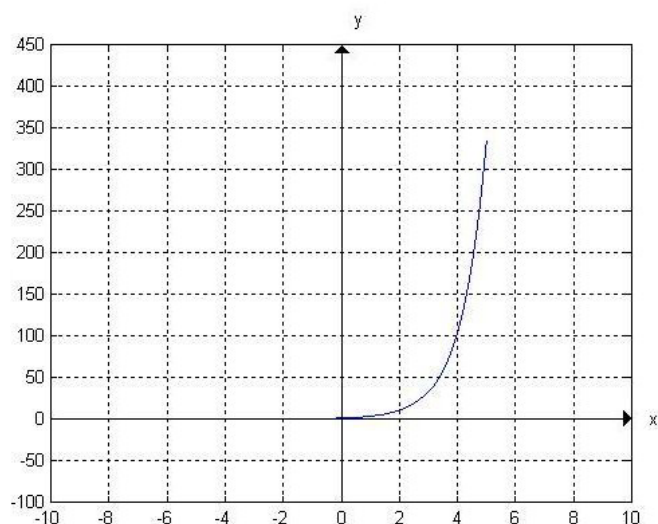
c) Escribir el dominio de la función _____

d) Escribir el rango de la función _____

e) Escribir si la función es creciente o decreciente _____ ¿Porqué? _____

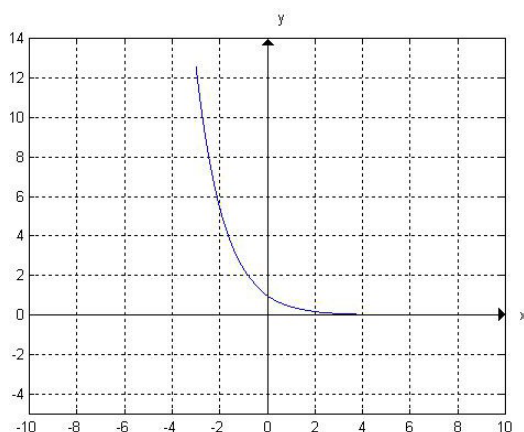
Con los ejercicios anteriores, podemos observar lo siguiente:

Si se tiene la función exponencial $f(x) = a^x$ con $a > 1$, la gráfica tiene la forma:



A este tipo de función exponencial se le conoce como **función de crecimiento**.

Si se tiene la función exponencial $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$, la gráfica tiene la forma:



A este tipo de función se le conoce como **función de decaimiento**.

Observar que el dominio de la función exponencial son todos los números reales \mathbb{R} y su rango son todos los números positivos $\{x|x > 0\}$

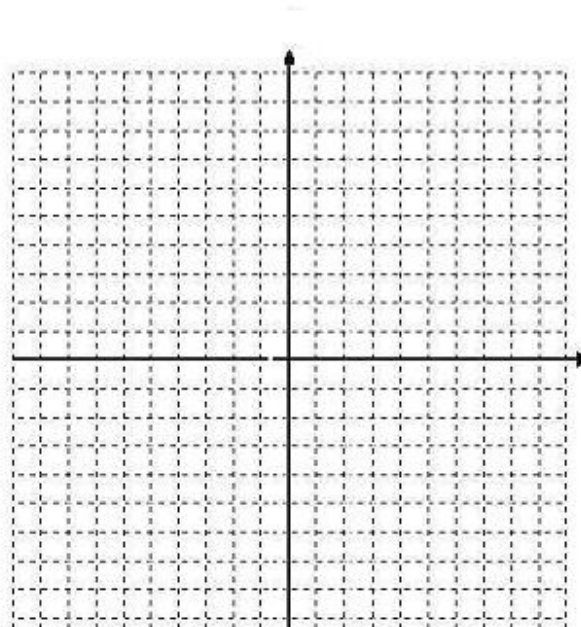
Ejercicios de funciones exponenciales con diferente argumento

Ejercicio 4.6. Con la función exponencial $f(x) = 5^{|x|}$ realizar lo siguiente

a) Llenar la siguiente tabla

| | | | | | | | | | |
|--------|----|----|------|----|---|-----|---|-----|---|
| x | -3 | -2 | -1.5 | -1 | 0 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| $f(x)$ | | | | | | | | | |

b) Trazar la gráfica. Utilizar la escala adecuada



c) Escribir el dominio de la función _____

d) Escribir el rango de la función _____

e) Escribir en que intervalo la función es creciente

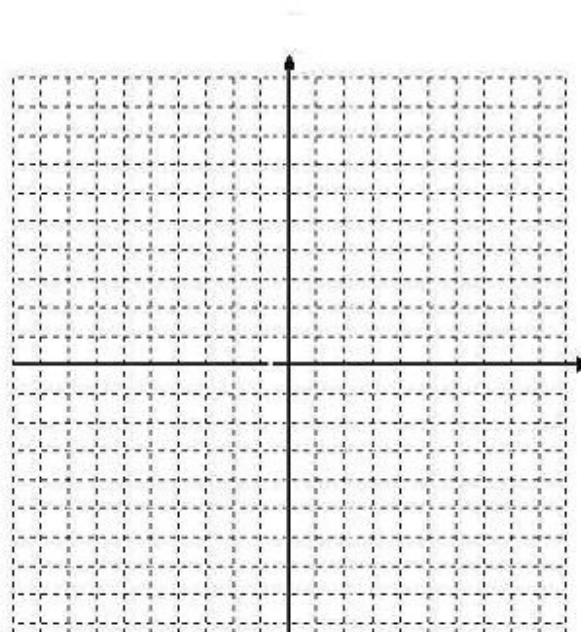
f) Escribir en que intervalo la función es decreciente

Ejercicio 4.7. Con la función exponencial $f(x) = 6^{-x}$ realizar lo siguiente

a) Llenar la siguiente tabla

| | | | | | | | | | |
|--------|----|----|------|----|---|-----|---|-----|---|
| x | -3 | -2 | -1.5 | -1 | 0 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| $f(x)$ | | | | | | | | | |

b) Trazar la gráfica. Utilizar la escala adecuada



c) Escribir el dominio de la función _____

d) Escribir el rango de la función _____

e) Escribir en que intervalo la función es creciente

f) Escribir en que intervalo la función es decreciente

Traslación de una gráfica exponencial

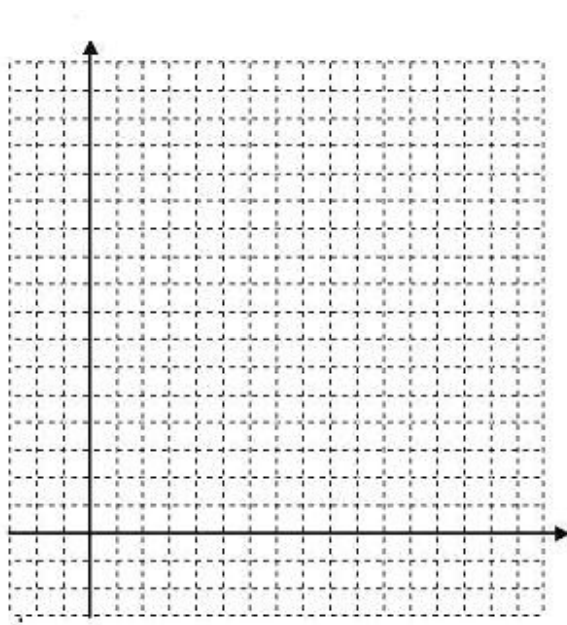
Ejercicio 4.8. Tabular y graficar las funciones exponenciales en un mismo plano cartesiano (utilizar diferente color para cada una de ellas) $f(x) = 3^x$ y $g(x) = 3^{x+2}$

y $h(x) = 3^{x-2}$.

a) Llenar la siguiente tabla

| x | 0 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| $f(x)$ | | | | | | | | | |
| $g(x)$ | | | | | | | | | |
| $h(x)$ | | | | | | | | | |

b) Trazar las gráficas en un mismo plano cartesiano. Utilizar la escala adecuada.



c) Escribir el dominio de $f(x)$ _____ y su rango_____.

d) Escribir el dominio de $g(x)$ _____ y su rango_____.

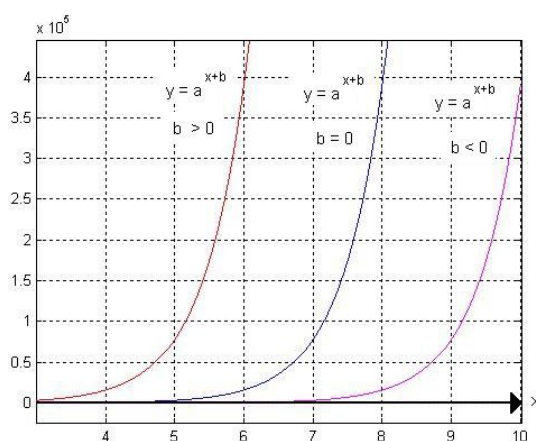
e) Escribir el dominio de $h(x)$ _____ y su rango _____.

f) ¿qué ocurre con la gráfica $g(x)$ con respecto a la gráfica $f(x)$?

g) ¿qué ocurre con la gráfica $h(x)$ con respecto a la gráfica $f(x)$?

Con el ejercicio anterior, observamos lo siguiente:

Si se tiene la función exponencial $f(x) = a^{x+b}$ con $a > 1$, la gráfica se traslada en forma horizontal con respecto a la gráfica $f(x) = a^x$.

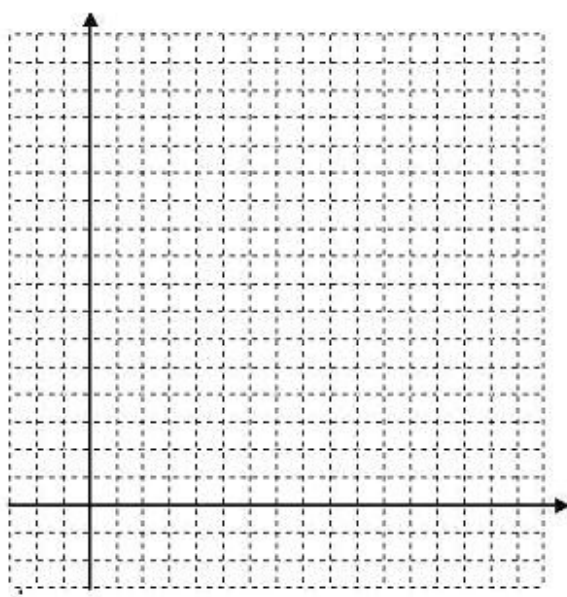


Ejercicio 4.9. Tabular y graficar las funciones exponenciales en un mismo plano cartesiano (utilizar diferente color para cada una de ellas) $f(x) = 5^x$ y $g(x) = 5^x + 3$ y $h(x) = 5^x - 3$.

a) Llenar la siguiente tabla

| x | 0 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| $f(x)$ | | | | | | | | | |
| $g(x)$ | | | | | | | | | |
| $h(x)$ | | | | | | | | | |

b) Trazar las gráficas en un mismo plano cartesiano. Utilizar la escala adecuada.



c) Escribir el dominio de $f(x)$ _____ y su rango_____.

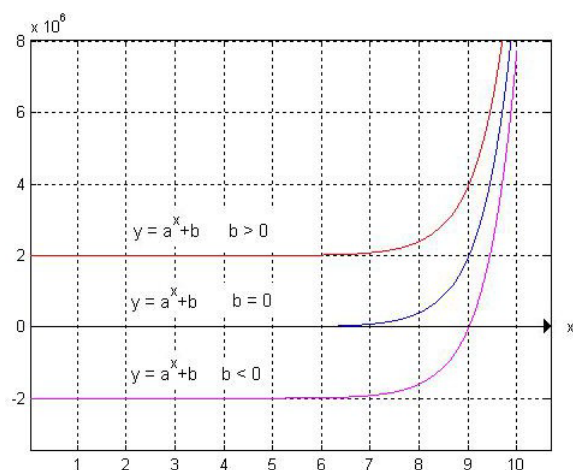
d) Escribir el dominio de $g(x)$ _____ y su rango_____.

e) Escribir el dominio de $h(x)$ _____y su rango_____.

g) ¿Qué ocurre con la gráfica $g(x)$ con respecto a la gráfica $f(x)$?

g) ¿qué ocurre con la gráfica $h(x)$ con respecto a la gráfica $f(x)$?

Con el ejercicio anterior, se observa que si se tiene la función exponencial $f(x) = a^x + b$ con $a > 1$, la gráfica se traslada en forma vertical con respecto a la gráfica $f(x) = a^x$.



Contracción de una gráfica exponencial

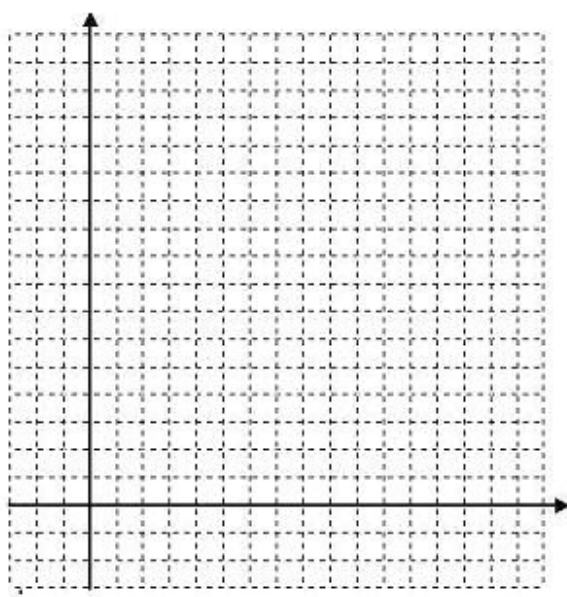
Ejercicio 4.10 Tabular y graficar las funciones exponenciales en un mismo plano cartesiano (utilizar diferente color para cada una de ellas) $f(x) = 5^x$ y $g(x) = 5^{1,2x}$

y $h(x) = 5^{0,8x}$.

a) Llenar la siguiente tabla

| x | 3 | 4.5 | 5 | 5.5 | 6 | 6.5 | 7 | 7.5 | 8 |
|--------|---|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | |
| $g(x)$ | | | | | | | | | |
| $h(x)$ | | | | | | | | | |

b) Trazar las gráficas en un mismo plano cartesiano. Utilizar la escala adecuada.



c) Escribir el dominio de $f(x)$ _____ y su rango_____.

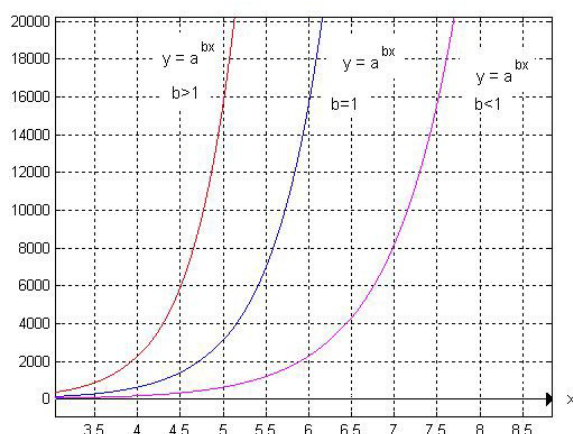
d) Escribir el dominio de $g(x)$ _____ y su rango_____.

e) Escribir el dominio de $h(x)$ _____y su rango_____.

h) ¿qué ocurre con la gráfica $g(x)$ con respecto a la gráfica $f(x)$?

g) ¿qué ocurre con la gráfica $h(x)$ con respecto a la gráfica $f(x)$?

En el ejercicio anterior, observamos que si se tiene la función exponencial $f(x) = a^{bx}$ con $a > 1$, la gráfica tiene la forma:



y si $b > 1$ la gráfica se contrae y si $b < 1$ la gráfica se expande.

Función exponencial natural $f(x) = e^x$

La función exponencial natural, es un caso particular de la función exponencial con base a . Escrita en símbolos es:

$$f(x) = e^x$$

En este caso la base es el número e y su valor se obtiene con una expresión que contiene un nuevo concepto denominado límite.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 2.71828.....$$

en donde n es un número entero positivo.

Problema de aplicación a cálculos financieros. Interés compuesto.

Cuando se tiene un capital inicial **C** y este se invierte en el banco a un cierto número de períodos de tiempo **n**, y a una tasa de Interés anual **T**, el modelo matemático tiene la forma:

$$M = C(1 + t)^n$$

donde **M** es el monto (capital más intereses al final de la inversión), **t** es la tasa de interés en el período capitalizable, esto es, $\frac{T}{n}$ escrita en forma decimal y como

ya se dijo, **n** es el número de períodos capitalizables.

Problema 4.11. Se tiene una cantidad de \$10000.00, se invierte a 12% anual capitalizable mensualmente.

a) ¿Cuál es el capital inicial? $C =$ _____

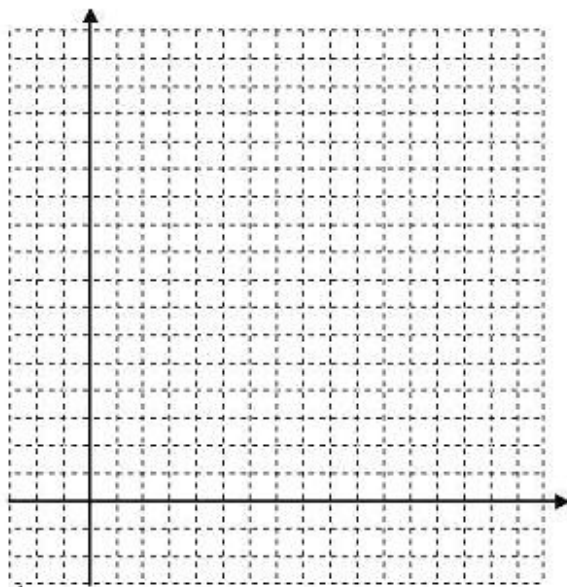
b) ¿Cuál es la tasa de interés mensual por mes expresada en forma decimal?

$t =$ _____

c) Complete la siguiente tabla, en la cual se expresa el Monto al final de cada número de meses indicado.

| n (núm. de meses) | 10 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 130 | 160 | 200 |
|-------------------|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| M (monto) | | | | | | | | | |

- a) Graficar el Monto en función del número de meses transcurridos.



Problema 4.12 Se tiene una cantidad de \$85000.00, se invierte a 10% anual capitalizable bimestralmente.

a) ¿Cuál es el capital? $C =$ _____

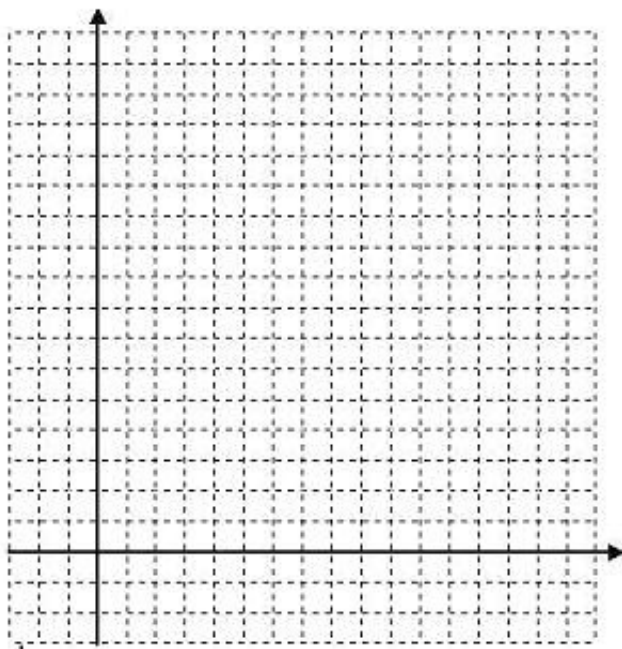
b) ¿Cuál es la tasa de interés por bimestre expresada en forma decimal?

$t =$ _____

c) Complete la siguiente tabla al final del número de bimestres indicados.

| t (núm. de bim.) | 1 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 60 | 70 | 80 |
|------------------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| M (monto) | | | | | | | | | |

d) Graficar el Monto en función del número de bimestres transcurridos.



Problemas que involucran a la función exponencial $f(x) = e^x$

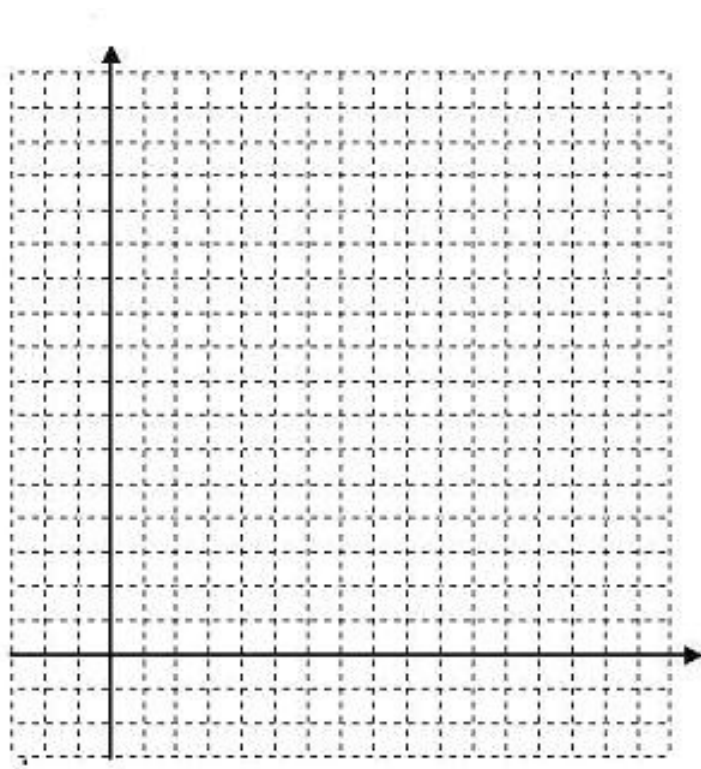
Problema 4.13 La función exponencial $W = W_0 e^{kt}$ describe el crecimiento de cosechas como el maíz, el algodón y el frijol de soya. El valor de la función $W(t)$ es el peso total en miligramos, W_0 es el peso en el día de su aparición y t es el tiempo en días (variable discreta). Considérese el caso particular del frijol de soya, para el cual $k = 0.2$ y $W_0 = 68\text{mgr}$.

a) Llenar la siguiente tabla:

| | | | | | | | | | |
|-----------------|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| t (No. de días) | 1 | 3 | 7 | 10 | 14 | 16 | 20 | 22 | 25 |
|-----------------|---|---|---|----|----|----|----|----|----|

| | | | | | | | | | |
|-------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| W (peso) | | | | | | | | | |
|-------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

b) Graficar $W(t)$

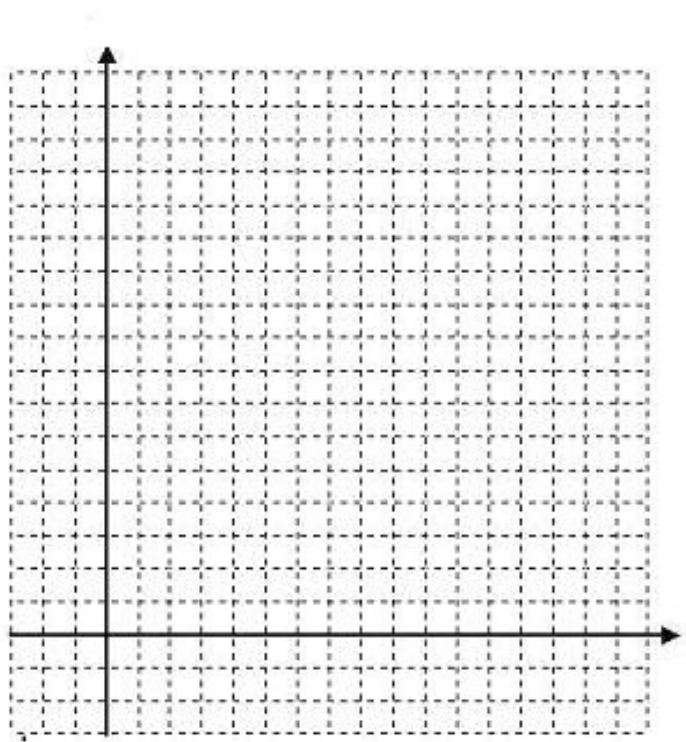


Problema 4.14. En ciertas condiciones, la presión atmosférica P (en lb/pulg²) a una altitud h (ft) esta dada por $P = 29e^{-0.000034h}$. Hallar la presión atmosférica a diferentes altitudes.

a) Llenar la siguiente tabla que indica la presión atmosférica a diferentes altitudes.:

| | | | | | | | | | |
|----------------|-----|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| h (altitud) | 500 | 1000 | 8000 | 15000 | 26000 | 32000 | 38000 | 40000 | 50000 |
| P (presión) | | | | | | | | | |

b) Graficar $P(h)$. Utilizar la escala adecuada en ambos ejes coordenados.



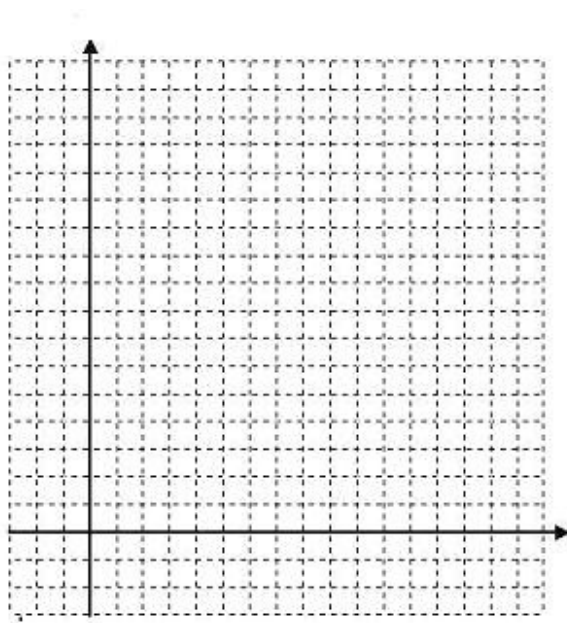
Problema 4.15. Un capacitor es un dispositivo capaz de almacenar carga eléctrica Q . La carga almacenada depende del tiempo de acuerdo a la función $Q = 30(1 - e^{-1.2t}) \mu C$.

Nota: μC significa micro Coulomb y t es el tiempo (variable continua)

a) Llenar la siguiente tabla que indica la carga en el dispositivo (capacitor) a diferentes tiempos.

| | | | | | | | | | |
|---------------|-----|---|-----|-----|---|-----|---|---|-----|
| t (tiempo) | 0.5 | 1 | 1.3 | 1.5 | 2 | 2.1 | 3 | 4 | 4.5 |
| Q (carga) | | | | | | | | | |

b) Graficar la función $Q(t)$. Utilizar la escala adecuada



c) Escribir el dominio y rango de la función.

$DomQ =$ _____ $RanQ =$ _____

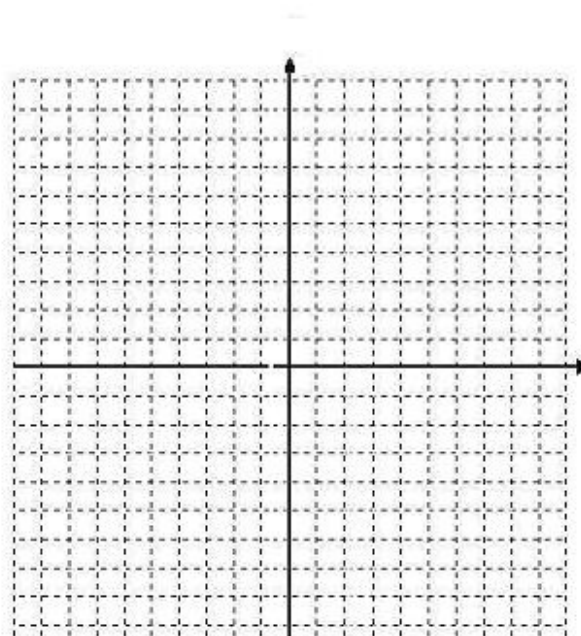
En la materia de PROBABILIDAD la función exponencial se utiliza frecuentemente, algunas de las expresiones que aparecen son:

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL

$$f(x) = A_0 e^{-bx^2}$$

Ejercicio 4.16. Utilice la expresión anterior con los valores $A_0 = 5$ y $b = \frac{1}{2} = 0.5$

a) Graficar la función $f(x)$.



b) Escribir el dominio de la función _____

c) Escribir el rango de la función _____

d) Escribir el intervalo donde la función es creciente _____

e) Escribir el intervalo donde la función es decreciente _____

Nota. A la curva resultante de este ejercicio se le llama *Campana de Gauss*.

Una segunda función que involucra a la función exponencial es la **FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE POISSON**, permite calcular probabilidades para ciertas situaciones y su expresión es:

$$F(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

k es un número entero positivo (variable discreta) y λ es un número real diferente de cero y positivo.

$k!$ se llama factorial de un número y se calcula de la siguiente manera: Por ejemplo

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

$$0! = 1 \text{ por definición.}$$

Ejercicio 4.17 Utilice la expresión anterior con $\lambda = 2$ y llene la siguiente tabla:

| | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| k | 0 | 2 | 3 | 5 | 8 | 9 | 10 | 15 | 20 |
| F | | | | | | | | | |

Observe que los resultados para la función siempre son mayores que cero y menores que uno.

Ecuaciones exponenciales. Leyes de los exponentes

Teorema. La función exponencial con base a , $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$ o bien

para $a > 1$ y para cualquier número real x , es biunívoca (uno a uno y sobre) por lo tanto las siguientes condiciones equivalentes se cumplen para números reales x_1 y x_2 :

1) Si $x_1 \neq x_2 \rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$

2) Si $a^{x_1} = a^{x_2} \rightarrow x_1 = x_2$

Para cualesquiera números reales " x ", " y ", " a " y " b ", se cumple:

$$1) \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad 2) \quad a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \quad 3) \quad \left(\frac{a^x}{a^y} \right) = a^{x-y} \quad 4) \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

En cada uno de los siguientes ejercicios, utilizar el teorema anterior y las reglas de los exponentes para calcular el valor de x .

Ejercicio 4.18. $6^{2x+2} = 6^{5x+6}$, el valor de $x =$ _____.

Ejercicio 4.19. $7^{4x+3} = 7^{x^2}$, el (los) valor(es) de $x =$ _____.

Ejercicio 4.20. $\left(\frac{1}{5}\right)^{-x+6} = 5$ el valor de x es _____

Ejercicio 4.21. $e^{x^2} = e^{7x-12}$, el valor de x es _____ -

Ejercicio 4.22 $e^{3x} = e^{2x-1}$, el valor de x es _____ -

Los siguientes ejercicios son una aplicación para encontrar las raíces de funciones donde se involucra una función exponencial y una función polinomial.

Ejercicio 4.23 Encontrar las raíces (ceros) de la función $f(x) = x^2 e^x + e^x$

Las raíces son: _____

Ejercicio 4.24. Encontrar las raíces (ceros) de la función

$$f(x) = x^2 e^x + e^x$$

Las raíces son: _____

Ejercicio 4.25. Encontrar las raíces (ceros) de la función $f(x) = 4x^3 e^{4x} + 3x^2 e^{4x}$

Las raíces son; _____ -

Ejercicio 4.26. Encontrar las raíces (ceros) de la función

$$f(x) = 2x^2 e^{2x} + x e^{2x} - 3e^{2x}$$

Las raíces son _____

Segunda parte

Función Logarítmica con base a

Introducir la función logarítmica como función inversa de la función exponencial.

Notación. La función logarítmica con base a se denota por \log_a y tiene una relación con la función exponencial abordada anteriormente, a través del concepto de función inversa, que a continuación se expresa.

Definición. Si f una función biunívoca, entonces se cumple que:

$$y = f^{-1}(x) \quad \text{si y solo si} \quad x = f(y)$$

Concepto. Sea a un número real positivo diferente de cero. El logaritmo de x con base a se define como:

$$f(x) = y = \log_a(x) \quad \text{si y solo si} \quad x = a^y$$

se cumple para todo $x > 0$ y todo número real y .

La función logarítmica con base a , al igual que la función exponencial, es una función trascendente debido a que no se puede definir sólo en términos de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y potencias racionales de una variable x , como en el caso de funciones algebraicas.

Estas funciones logarítmicas con base a son de gran importancia en matemáticas y tienen aplicaciones en la Química, Biología, Física e Ingeniería donde contribuyen a describir como crecen o decrecen las magnitudes en la naturaleza.

La gráfica de la función logarítmica con base a depende de los valores que tenga a y x .

Logaritmo base 10 (logaritmo vulgar) y logaritmo natural

El logaritmo de base 10 se denota por $\log(x)$ y define como $\log(x) = \log_{10}(x)$.

El logaritmo de base $e = 2.71828182845904523536028747135266$ se denota por $\ln(x)$ y se define como $\ln(x) = \log_e(x)$.

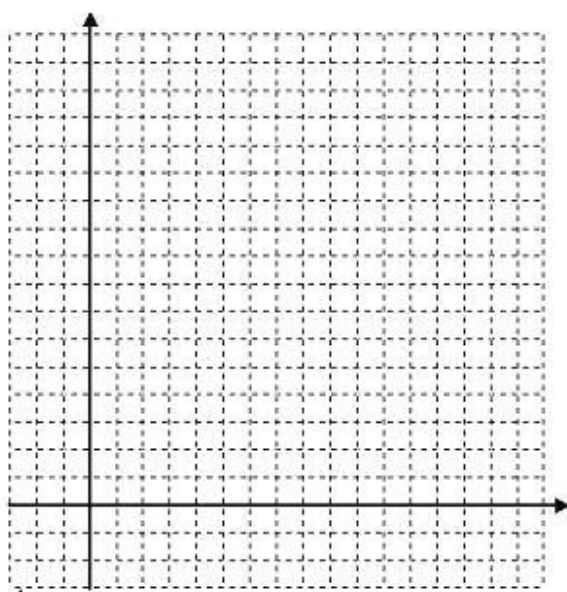
Dadas las siguientes funciones logarítmicas de base a , realiza los siguientes ejercicios:

Ejercicio 4.28. Con la función logarítmica $f(x) = \log(x)$, $a = 3$

a) Llenar la tabla siguiente

| | | | | | | | | | |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|---|---|
| x | 0.1 | 0.3 | 0.6 | 0.8 | 0.9 | 1.0 | 2 | 4 | 6 |
| $f(x)$ | | | | | | | | | |

b) Trazar la gráfica de $f(x)$. Utilizar la escala adecuada



c) Escribir el dominio de la función _____

d) Escribir el rango de la función _____

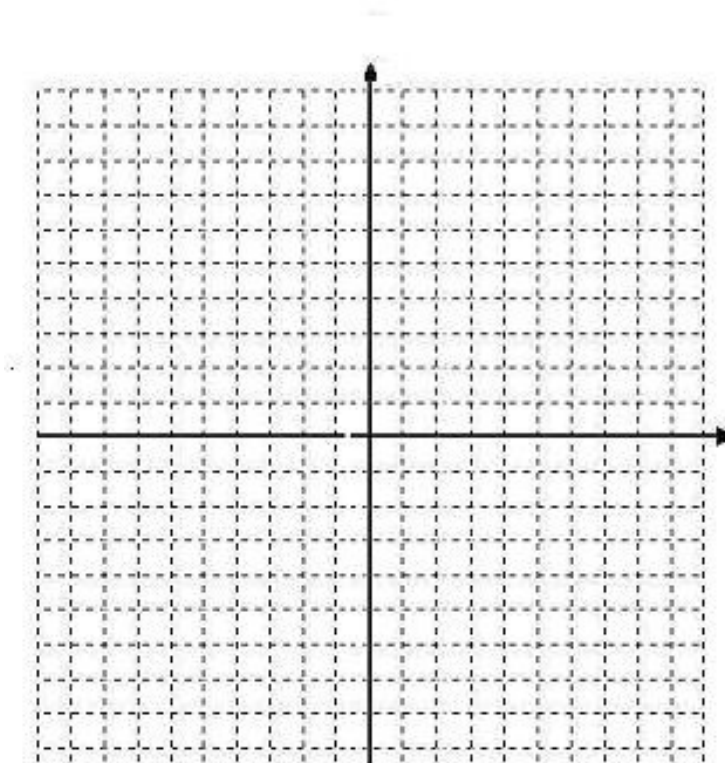
e) Escribir si la función es creciente o decreciente _____ ¿Porqué? _____

Ejercicio 4.29. Con la función logarítmica $f(x) = \log(x)$.

a) Llenar la tabla siguiente

| | | | | | | | | | |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|------|
| x | 0.1 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 1 | 1.01 |
| $f(x)$ | | | | | | | | | |

b) Trazar la gráfica de $f(x)$. Utilizar la escala adecuada



c) Escribir el dominio de la función _____

d) Escribir el rango de la función _____

e) Escribir si la función es creciente o decreciente _____ ¿Porqué? _____

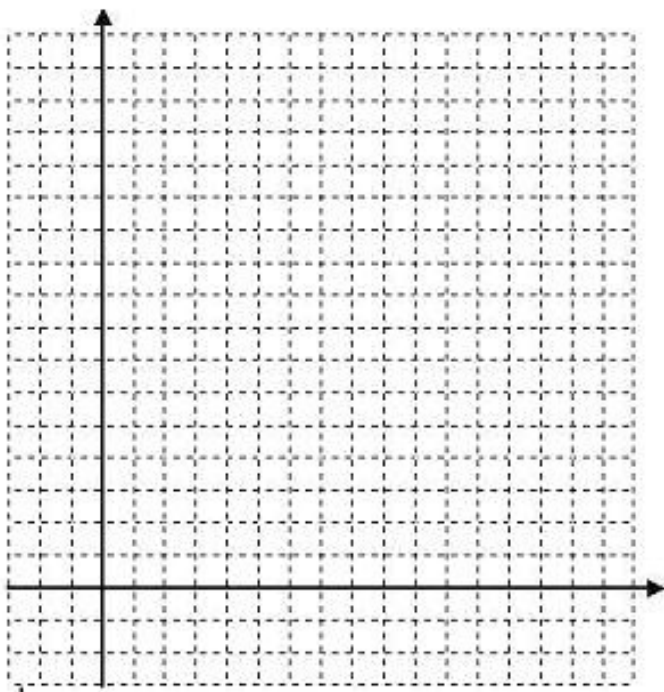
Ejercicios con la base natural e (Logaritmo natural)

Ejercicio 4.30. Con la función logarítmica $f(x) = \ln(x)$.

a) Llenar la tabla siguiente

| | | | | | | | | | |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|---|---|
| x | 0.1 | 0.3 | 0.6 | 0.8 | 0.9 | 1.0 | 2 | 4 | 6 |
| $f(x)$ | | | | | | | | | |

b) Trazar la gráfica de $f(x)$. Utilizar la escala adecuada



c) Escribir el dominio de la función _____

d) Escribir el rango de la función _____

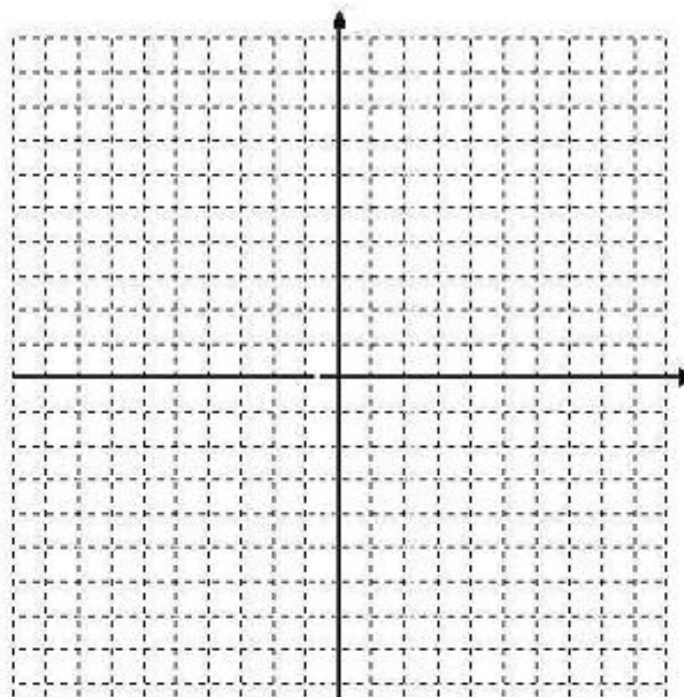
e) Escribir si la función es creciente o decreciente _____ ¿Porqué? _____

Ejercicio 4.31. Con la función logarítmica $f(x) = \ln(x)$.

a) Llenar la tabla siguiente

| | | | | | | | | | |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|------|
| x | 0.1 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 1 | 1.01 |
| $f(x)$ | | | | | | | | | |

b) Trazar la gráfica de $f(x)$. Utilizar la escala adecuada

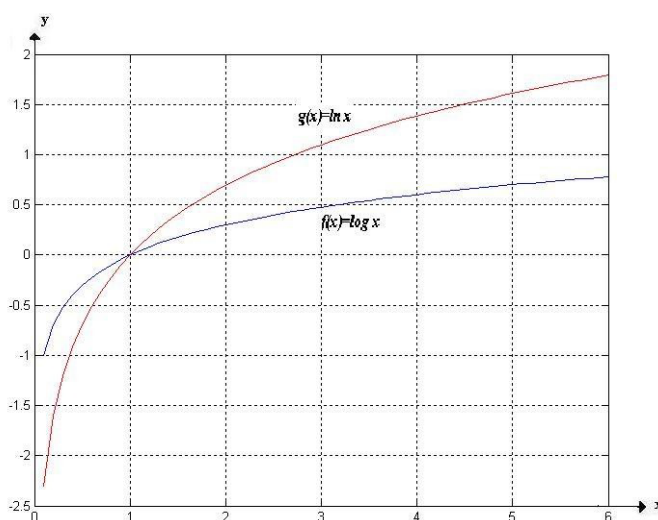


c) Escribir el dominio de la función _____

d) Escribir el rango de la función _____

e) Escribir si la función es creciente o decreciente _____ ¿Porqué? _____

Comparación de las gráficas de función logaritmo; base 10 ($f(x) = \log x$) y base e ($g(x) = \ln x$)



Expresiones para cambio de base numérica

A continuación se trabajan los logaritmos en cualquier base numérica, se presenta la expresión para el cambio de base en términos de logaritmo vulgar (base 10) o de logaritmo natural (base e) con la finalidad de mostrar el comportamiento de las gráficas de este tipo de funciones con diferente base.

Las siguientes expresiones se utilizan generalmente cuando se trabaja con una base diferente de 10 y de la natural (base e).

$$\text{a). } \log_b(a) = \frac{\log a}{\log b} \qquad \text{b). } \log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$$

En los siguientes ejercicios se debe enseñar al alumno a manejar la calculadora.

Dadas las siguientes funciones logarítmicas de base a , realiza los siguientes ejercicios:

Utilizar la expresión para el cambio de base $\log_b(a) = \frac{\log a}{\log b}$; en este ejercicio

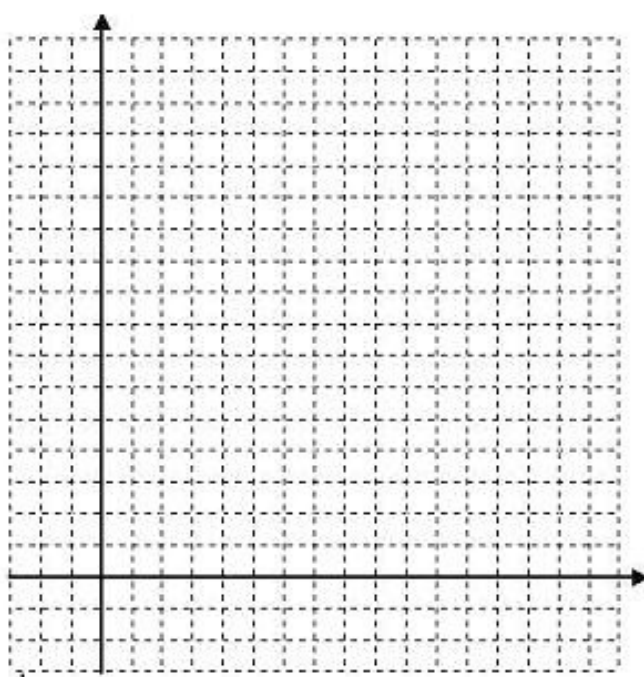
$$f(x) = \log_3(x) = \frac{\log x}{\log 3},$$

Ejercicio 4.32. Graficar las funciones logarítmicas $f(x) = \log_3(x)$, (base $a = 3$), $g(x) = \log_4(x)$. (base $a = 4$) y $h(x) = \log_8(x)$, (base $a = 8$) en el intervalo $[0.1, 6]$.

a) Llenar la siguiente tabla

| x | 0.1 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 3.5 | 5 | 6 |
|--------|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | |
| $g(x)$ | | | | | | | | | |
| $h(x)$ | | | | | | | | | |

b) Trazar las gráficas en un mismo plano cartesiano. Utilizar la escala adecuada.



c) Escribir el dominio de $f(x)$ _____ y su rango _____.

d) Escribir el dominio de $g(x)$ _____ y su rango _____.

e) Escribir el dominio de $h(x)$ _____ y su rango _____.

i) ¿Qué ocurre con la gráfica $g(x)$ con respecto a la gráfica $f(x)$?

g) ¿Qué ocurre con la gráfica $h(x)$ con respecto a la gráfica $f(x)$?

Características de la Gráfica de la función logaritmo

Como se observa en los ejercicios anteriores, la gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log_a(x)$ siempre es una función de crecimiento con dominio el intervalo

$(0, \infty)$ (reales positivos) y rango los números reales.

Traslación y contracción de una gráfica logarítmica

Con los ejercicios 4.33 y 4.34 observaremos las traslaciones vertical y horizontal de la gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log_a(x + b)$ y $f(x) = \log_a x + b$ con

respecto a la gráfica de la función $f(x) = \log_a x$ y con el ejercicio 4.35, como una

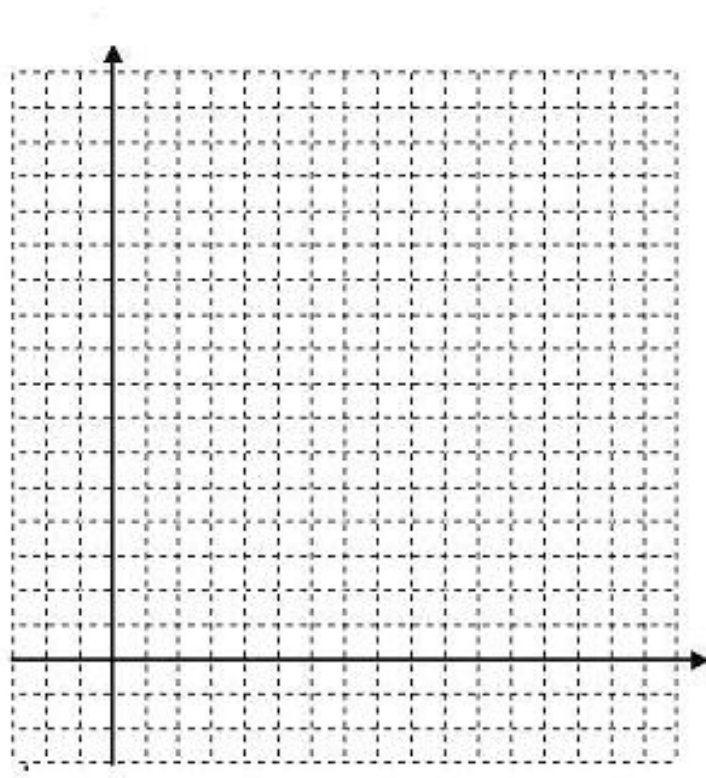
gráfica del tipo $f(x) = \log_a bx$ se expande o se contrae dependiendo del parámetro b .

Ejercicio 4.33. Tabular y graficar las funciones logarítmicas en un mismo plano cartesiano (utilizar diferente color para cada una de ellas) $f(x) = \log x$ y $g(x) = \log(x + 3)$ y $h(x) = \log(x - 3)$.

a) Llenar la siguiente tabla

| x | -4 | -3 | -1 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|--------|----|----|----|---|---|---|---|---|----|
| $f(x)$ | | | | | | | | | |
| $g(x)$ | | | | | | | | | |
| $h(x)$ | | | | | | | | | |

b) Trazar las gráficas en un mismo plano cartesiano. Utilizar la escala adecuada.



c) Escribir el dominio de $f(x)$ _____ y su rango_____.

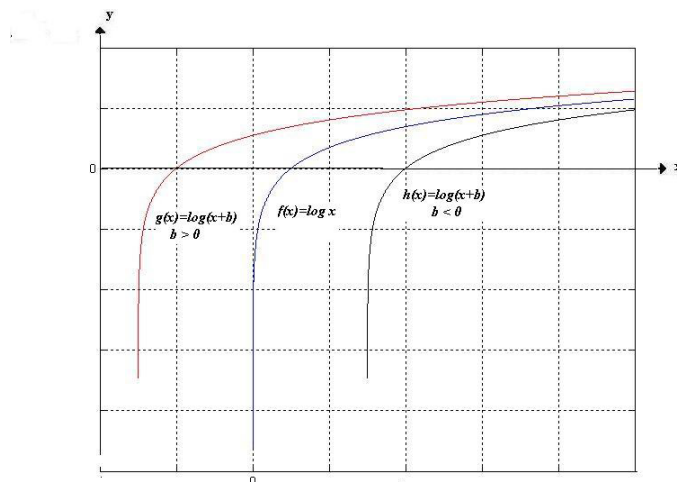
d) Escribir el dominio de $g(x)$ _____ y su rango_____.

e) Escribir el dominio de $h(x)$ _____y su rango_____.

j) ¿qué ocurre con la gráfica $g(x)$ con respecto a la gráfica $f(x)$?

g) ¿qué ocurre con la gráfica $h(x)$ con respecto a la gráfica $f(x)$?

En las gráficas que se obtienen se observa la traslación horizontal.



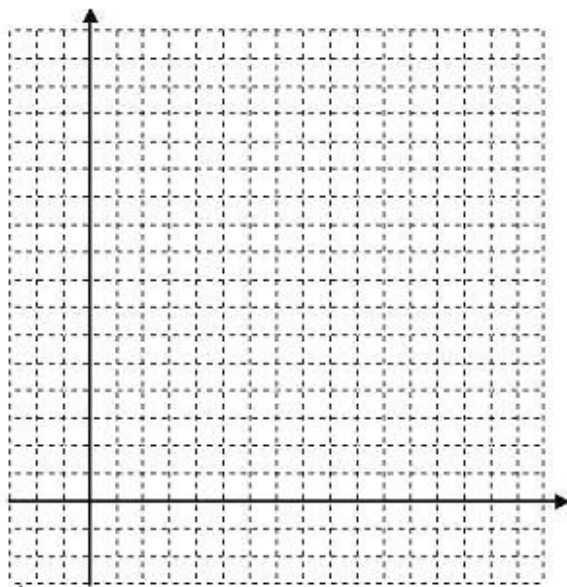
En las gráficas, si la función logarítmica tiene la forma $f(x) = \log_a(x+b)$ con $a > 1$, y la gráfica se traslada en forma horizontal con respecto a la gráfica $f(x) = \log_a x$.

Ejercicio 4.34. Tabular y graficar las funciones logarítmicas en un mismo plano cartesiano (utilizar diferente color para cada una de ellas) $f(x) = \log x$ y $g(x) = \log x + 3$ y $h(x) = \log x - 3$.

a) Llenar la siguiente tabla

| x | 0.1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 |
|--------|-----|---|---|---|---|---|---|---|----|
| $f(x)$ | | | | | | | | | |
| $g(x)$ | | | | | | | | | |
| $h(x)$ | | | | | | | | | |

b) Trazar las gráficas en un mismo plano cartesiano. Utilizar la escala adecuada.



c) Escribir el dominio de $f(x)$ _____ y su rango_____.

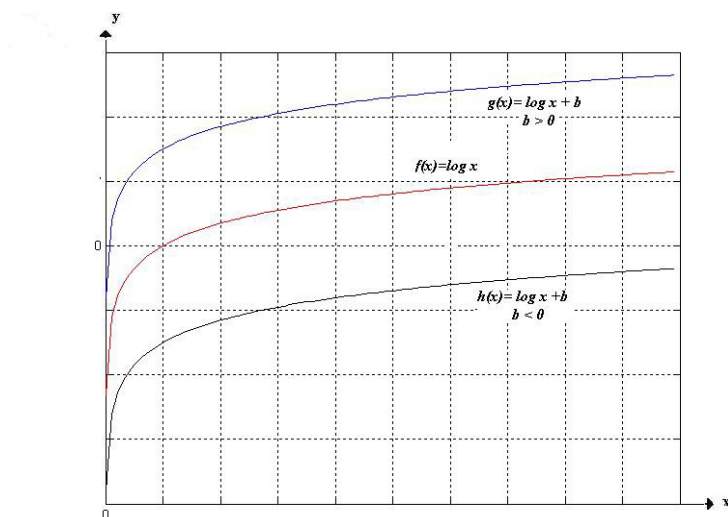
d) Escribir el dominio de $g(x)$ _____ y su rango_____.

e) Escribir el dominio de $h(x)$ _____y su rango_____.

k) ¿qué ocurre con la gráfica $g(x)$ con respecto a la gráfica $f(x)$?

g) ¿qué ocurre con la gráfica $h(x)$ con respecto a la gráfica $f(x)$?

Las gráficas que se obtienen son del tipo:



En ellas se observa que cuando la función logarítmica tiene la forma $f(x) = \log_a x + b$ con $a > 1$, la gráfica se traslada en forma vertical con respecto a

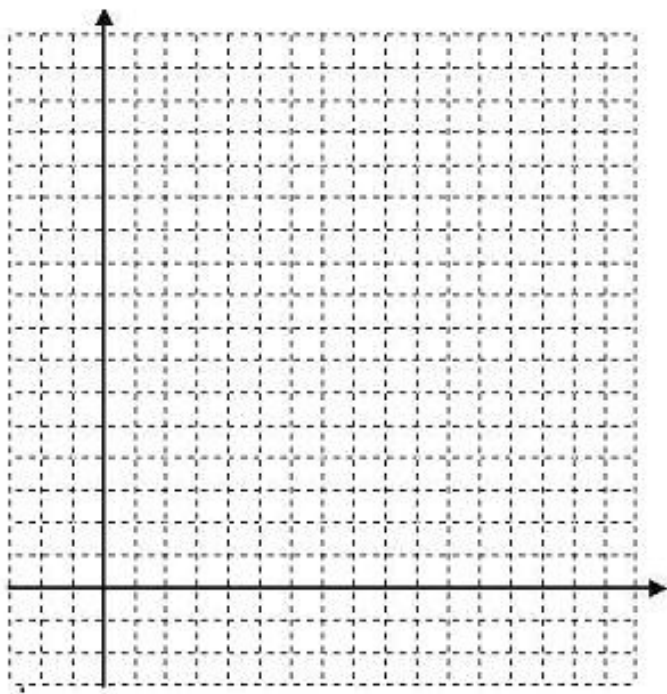
la gráfica $f(x) = \log_a x$.

Ejercicio 4.35. Tabular y graficar las funciones logarítmicas en un mismo plano cartesiano (utilizar diferente color para cada una de ellas) $f(x) = \log x$ y $g(x) = \log(1.2x)$ y $h(x) = \log(0.2x)$.

a) Llenar la siguiente tabla

| x | 0.1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 |
|--------|-----|---|---|---|---|---|---|---|----|
| $f(x)$ | | | | | | | | | |
| $g(x)$ | | | | | | | | | |
| $h(x)$ | | | | | | | | | |

b) Trazar las gráficas en un mismo plano cartesiano. Utilizar la escala adecuada.



c) Escribir el dominio de $f(x)$ _____ y su rango_____.

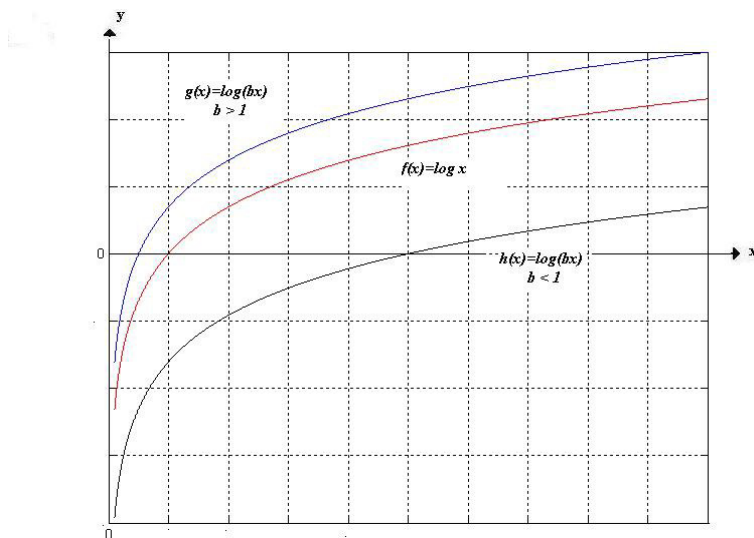
d) Escribir el dominio de $g(x)$ _____ y su rango_____.

e) Escribir el dominio de $h(x)$ _____ y su rango_____.

l) ¿qué ocurre con la gráfica $g(x)$ con respecto a la gráfica $f(x)$?

g) ¿qué ocurre con la gráfica $h(x)$ con respecto a la gráfica $f(x)$?

Las gráficas que se obtienen son las siguientes:



Se observa, que si la función logarítmica $f(x) = \log_a(bx)$ con $a > 1$, la gráfica se expande si $b > 1$ y la gráfica se contrae si $b < 1$.

Problemas de aplicación de la función logaritmo

Problema 4.36 En la escala de Richter, la magnitud R de la intensidad I de un sismo se encuentra dado por

$$R = \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

Donde I_0 es la intensidad mínima.

- a) Si la intensidad de un sismo es de $1100I_0$, encontrar el valor de R .
- b) Expresar I en términos de I_0 y R . Expresión _____
- c) Las magnitudes de los sismos más notables que se han registrado han sido entre 8 y 9 en la escala de Richter. Encuentra las intensidades correspondientes en términos de I_0 .

Para $R=8$ _____ - Para $R=9$ _____ -

Problema 4.37 El nivel de un sonido, como lo capta el oído humano, se basa en su nivel de intensidad (unidad de medida decibeles). Una fórmula para hallar el nivel de intensidad (en decibeles) que corresponde a una intensidad sonora I

es donde $\alpha = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right)$, donde I_0 es un valor especial de I acordado como el sonido más débil perceptible por el oído en ciertas condiciones.

- a) Encuentre α si I es 10 veces más grande que I_0 $\alpha =$ _____
- b) Encuentre α si I es 1000 veces más grande que I_0 $\alpha =$ _____
- c) Encuentre α si I es 10000 veces más grande que I_0 $\alpha =$ _____
(este es el caso de de intensidad de una voz promedio)

Problema 4.38. El isótopo radiactivo del bismuto ^{210}Bi se desintegra según la fórmula $Q = k(2)^{-t/5}$, donde k es la cantidad en gramos de sustancia al inicio del proceso, t es el tiempo en días. Expresar el tiempo en términos de k y Q (cantidad de gramos al día t)

La expresión es _____

Problema 4.39. Cuando se incrementa el control de volumen de un sistema estereofónico, el voltaje que pasa por la bocina cambia de V_1 a V_2 en decibels está dado por la expresión

$db = 20 \log_{10} \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$ en decibels. Se define a la razón $k = \frac{V_2}{V_1}$ x db como la amplificación.

a) Encuentra el aumento de amplificación en decibels si el voltaje cambia de 2 volts a 4.5 volts.

$$db = \underline{\hspace{2cm}}$$

b) ¿Qué razón de voltaje k se necesita para una amplificación de +20 decibels?

$$k = \frac{V_2}{V_1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

a) Encuentra el aumento de amplificación en decibels si el voltaje cambia de 2 volts a 4.5 volts.

$$db = \underline{\hspace{2cm}}$$

b) ¿Qué razón de voltaje k se necesita para una amplificación de +20 decibels?

$$k = \frac{V_2}{V_1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

c) ¿Qué razón de voltaje k se necesita para una amplificación de +40 decibels?

$$k = \frac{V_2}{V_1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Interés Compuesto

Recordemos que cuando se tiene un capital inicial C y este se invierte en el banco a un cierto número de períodos de tiempo n , y a una tasa de Interés anual T , el modelo matemático tiene la forma:

$$M = C(1 + t)^n$$

en donde M es el monto (capital más intereses al final de la inversión), t es la tasa de interés en el período capitalizable, esto es, $\frac{T}{n}$ escrita en forma decimal y

como ya se dijo, n es el número de períodos capitalizables.

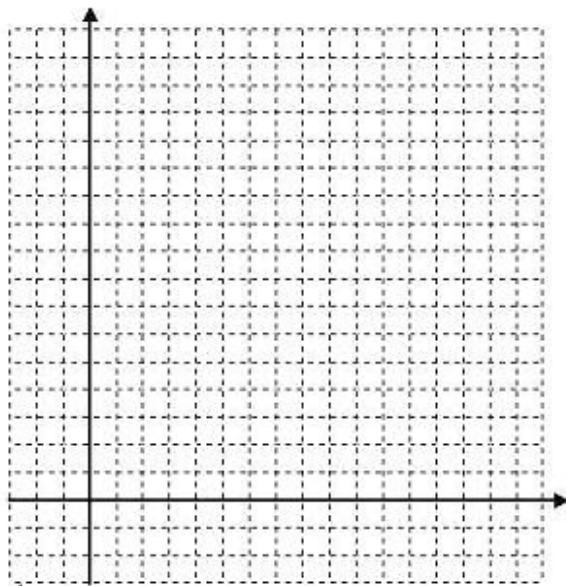
A continuación, se realiza un ejercicio.

Problema 4.40. Se invierte un capital a una tasa de 9% anual capitalizable mensualmente.

a). Calcule cuántos meses se requieren para que un depósito inicial de \$ 6000.00 se convierta en \$ 25 000.00, para ello, completar la siguiente tabla:

| M | 8000 | 12000 | 13000 | 14000 | 16000 | 18000 | 19000 | 24000 | 25000 |
|---|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| n | | | | | | | | | |

b) Trazar la gráfica n vs. M . Utilizar la escala adecuada.



Anotar las observaciones _____

Ecuaciones logarítmicas. Propiedades de los logaritmos

Teorema. La función logarítmica con base a , $f(x) = \log_a(x)$ con $a > 0$, es biunívoca la función $f(x)$ es una función uno a uno y sobre el contradominio de $f(x)$. Luego se satisfacen las siguientes condiciones equivalentes que se cumplen para números reales x_1 y x_2 .

- a) Si $x_1 \neq x_2$; entonces $\log_a(x_1) \neq \log_a(x_2)$
- b) Si $\log_a(x_1) = \log_a(x_2)$; entonces $x_1 = x_2$

Propiedades de los logaritmos

Si α y β denotan números reales positivos, entonces

- 1) $\log_a(\alpha\beta) = \log_a \alpha + \log_a \beta$ 2. $\log_a\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \log_a \alpha - \log_a \beta$ 3. $\log_a(\alpha^r) = r \log_a \alpha$
 r cualquier número real

Utilizando el teorema anterior y/o aplicando las propiedades de los logaritmos, resolver los siguientes ejercicios.

Encontrar el valor de x en cada uno de los siguientes ejercicios

Ejercicio 4.41. $\log (x^2 - 3x + 10) = \log (6).$

10

La ecuación a resolver es _____, los valores de x son: _____

Ejercicio 4.42 $\log (5x^2 + 8x + 9) = \log (3x^2 + 2x + 6).$

10

La ecuación a resolver es _____ los valores de x son _____

Ejercicio 4.43. Encontrar el valor de x en $\log_9 (x^2 - 5x + 6) = \log_9 (x - 3) + 6$

El valor de x es _____

Ejercicio 4.44. Encontrar el valor de x en $\log_5 (x^2 + 9x + 20) = \log (x + 5) - 3$

El valor de x es _____

Ejercicio 4.45. Encontrar el valor de x en $\log_3 (x - 7) = -\log_3 (x + 9) + 7$

Las soluciones para x son aproximadamente _____ y _____

Ejercicio 4.46. Encontrar el valor de x en $\ln(x) = 1 - \ln (x + 2)$

Las soluciones para x son aproximadamente _____ y _____

Ejercicio 4.47. Encontrar el valor de x en $\ln (x) = 1 + \ln (x + 1)$

El valor de x es _____

Ejercicios y Problemas propuestos

En los ejercicios 1 a 14, trace la gráfica de la función exponencial dada. En los ejercicios 9 a 14, utilice una calculadora para obtener las potencias de e .

1. $f(x) = 3^x$

2. $g(x) = 4^x$

3. $F(x) = 3^{-x}$

4. $G(x) = 4^{-x}$

5. $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

6. $f(x) = 10^x$

7. $f(x) = 2^{x+1}$

8. $g(x) = 3^{x-1}$

9. $G(x) = e^{2x}$

10. $F(x) = e^{-x}$

11. $f(x) = 10e^{0.2x}$

12. $g(x) = 100e^{0.1x}$

13. $F(x) = 100e^{-0.1x}$

14. $G(x) = 10e^{-0.2x}$

En los ejercicios 15 a 20 dibuje una gráfica de la función dada.

15. $f(x) = \log_{10} x$

16. $f(x) = \log_2 x$

17. $g(x) = \log_3 x^2$

18. $g(x) = \log_3 2x$

19. $F(x) = \ln(x-1)$

20. $G(x) = \ln(x+1)$

21. La población de cierta ciudad crece a una tasa proporcional a su tamaño. Si la tasa es 6% y la población después de t años es $P(t)$, entonces $P(t) = ke^{0.06t}$ donde

k es una constante. Si la población actual es 10 000, ¿cuál es la población esperada (a) después de 10 años y (b) después de 20 años?

22. La eficiencia de un obrero común de una cierta fábrica está dada por la función definida por $f(t) = 100 - 60e^{-0.2t}$ donde el trabajador puede completar $f(t)$ unidades

por día después de haber trabajado t meses. (a) Trace la gráfica de f y observe su comportamiento cuando t crece sin límite. (b) ¿Cuántas unidades por día puede completar un obrero principiante? (c) ¿Cuántas unidades por día puede completar

un trabajador con un año de experiencia? (d) ¿Cuántas unidades por día puede esperarse que produzca un obrero?

23. Cierta día en una universidad asistieron 5 000 personas, un estudiante se enteró que cierto orador polémico iba a efectuar una presentación no programada. Esta información fue comunicada a algunos amigos quienes a su vez la pasaron a otros, Después de transcurridos t minutos, $f(t)$ personas se habían enterado de

la noticia, donde
$$f(t) = \frac{5000}{1 + 4999e^{-0.5t}}$$

24. En una comunidad en la que A personas eran susceptibles a un virus determinado, dicho virus se propagó de manera que t semanas después de su aparición, $f(t)$ personas se habían contagiado, donde $f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-Akt}}$. Si el 10%

de las personas susceptibles contrajeron inicialmente el virus y el 2% de ellas se habían infectado después de 3 semanas, ¿qué porcentaje se había infectado después de 6 semanas?

25. Si $f(t)$ gramos de una sustancia radiactiva están presentes después de transcurridos t segundos y se tenían 100 gramos inicialmente, entonces $f(t) = 100e^{-0.3t}$. ¿Después de cuántos segundos habrá únicamente 10 gramos de la sustancia?

26. La población actual de una ciudad es 10 000 y se incrementa a una tasa proporcional a su tamaño. Si esta tasa es 6% y si la población después de t años es $P(t)$, entonces $P(t) = 10000e^{0.06t}$. ¿Cuándo se espera que la población sea 45 000?

27. El valor de reventa de una cierta pieza de equipo es $f(t)$, t años después de su adquisición, donde $f(t) = 1200 + 8000e^{-0.25t}$. ¿Cuánto tiempo después de su adquisición el valor de reventa del equipo será de \$2 000?

28. La población en cierta ciudad se triplico de 1900 a 1960. Si la tasa de crecimiento natural de la población es proporcional a la población en cualquier tiempo y la población en 1960 era de 60000. a) Hallar la expresión correspondiente, b) b) llenar la tabla, c) graficar y d) indicar si es una función creciente o decreciente.

| Año | 1970 | 1980 | 1985 | 1990 | 2000 | 2010 | 2020 | 2030 | 2040 |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Población | | | | | | | | | |

29. Una pintura abstracta que ha sido importante históricamente fue comprada en 1934 por \$ 200.00 y su valor se ha duplicado cada 10 años a partir de su compra.

a) Hallar la expresión correspondiente, b) llenar la tabla, c) graficar y d) indicar si es una función creciente o decreciente.

| Año | 1944 | 1954 | 1959 | 1964 | 1970 | 1980 | 1994 | 2000 | 2004 |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Precio | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

30. Indica en cada una de las funciones siguientes si son crecientes o decrecientes

a) $f(x) = 7^x$

b) $f(x) = 4^x$

c) $g(x) = 1.5^x$

d) $f(x) = (0.5)^x$

e) $f(x) = (1.5)^x$

f) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

g) $g(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

h) $h(x) = \left(\frac{7}{4}\right)^x$

i) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

j) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)(2^x)$

k) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)(3^x)$

l) $f(x) = 3^x + 1$

31. Indica en cada una de las funciones si son crecientes o decrecientes

i. $f(x) = \log_3 x$

ii. $f(x) = 3\log_{10} x$

iii. $h(x) = 4\log_3 x$

iv. $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)\log_2 x$

v. $h(x) = 4\log_3 x$

vi. $f(x) = \log_{10} x + 1$

vii. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)\log_2 x - 4$

viii. $h(x) = 3\log_2 x - 1$

ix. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)\log_3 x + 4$

32. Considera las definiciones de exponentes y de logaritmos para encontrar el valor de x que se pide y en los casos respectivos el valor de y

| | | |
|--|--|---|
| $\log_{10} 1 = x$ | $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{16}\right) = x$ | $\log_3 81 = x$ |
| $\log_7 49 = x$ | $\log_5 625 = x$ | $\log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{81}{16}\right) = x$ |
| $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{243}$ | $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{27}{64}$ | $(2)^x = 64$ |
| $\log_{\frac{1}{2}}(y) = 5$ | $\log_{10}(y) = 3$ | $\log_4(y) = 4$ |
| $\log_2 \left(\frac{8}{3}\right) =$ | $\log_{10} \left(\frac{15}{100}\right) =$ | $\log_4(16)(64) =$ |
| $\left(\frac{8}{3}\right)^2 \left(\frac{8}{3}\right)^{-3} =$ | $(7)^2(7)^x =$ | $(x)^2(x)^{-5} =$ |

33. Utiliza las propiedades de exponentes y de logaritmos para resolver las siguientes ecuaciones

| | |
|---------------------------------------|-----------------------|
| $\log_3\left(\frac{x}{27}\right) = 2$ | $\log_4(64x) = 19$ |
| $\log_4(x+1)^3 = 3$ | $\log_2(2x+4)^4 = 16$ |

34. En un cierto cultivo la tasa de crecimiento de bacterias es proporcional a la cantidad presente. Inicialmente se tenían 1000 bacteria y la cantidad se duplicó en 12 minutos. a) Hallar la expresión correspondiente, b) llenar la tabla, c) graficar y d) indicar si es una función creciente o decreciente.

| | | | | | | | | | |
|-----------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| Tiempo (minutos) | 15 | 22 | 28 | 30 | 34 | 38 | 40 | 60 | 120 |
| Cantidad de bacterias | | | | | | | | | |

35. El *factor R* de transmisión de un virus es una variable utilizada para asignar su capacidad de transmisión y representa el promedio de personas que contagia una persona infectada con dicho virus. Si el *factor R* de un virus es 4, significa que una persona infectará a 4 después de pasada una unidad de tiempo¹. En la tabla se indica el número total de personas infectadas después de que han pasado $t = 1, t = 2, t = 3$ unidades de tiempo cuando existe una persona infectada, ¿cuál será el número de personas infectadas en $t=7$? Escribe una expresión general para el número de personas infectadas I que dependa de t

| tiempo | Persona que se han infectado | Número total de personas infectadas | $I(t)$ |
|---------|------------------------------|-------------------------------------|--------|
| $t = 0$ | 1 | 1 | 1 |
| $t = 1$ | 4 | 5 | |
| $t = 2$ | 20 | 25 | |
| $t = 3$ | 100 | 125 | |

36. Si el factor R de transmisión de un virus V es 3, escribe la tabla que indique el número total de personas infectadas en función del tiempo t (que es de 3 días) si la condición inicial que se tiene es que existe una persona infectada

¹ Esta unidad de tiempo también dependerá del virus y de la forma en la cual se tomen los datos sobre las personas infectadas

| tiempo | Personas que se han infectado | Número total de personas infectadas | $I(t)$ |
|------------------|-------------------------------|-------------------------------------|--------|
| $t = 0$ | 1 | 1 | 1 |
| $t = 1$ (3 días) | | | |
| $t = 2$ (6 días) | | | |
| $t = 3$ (9 días) | | | |

37. Indica en el plano cartesiano los puntos que indiquen la función $I(t)$. Si una pequeña región tiene una población aproximada de 879 habitantes y una de ellas se ha infectado con este virus V , ¿a los cuántos días estará contagiada toda la población sino se tienen previsiones?
38. Un virus se presentó en una granja de aves y ha mutado para contagiarse a los humanos, 4 personas se contagiaron de este virus al estar presentes en la granja y se han movilizad del lugar sin saber que se encuentran potencialmente contagiosos. Indica en una tabla el número total de personas contagiadas para $t = 1, t = 2, t = 3$ si el *factor* R es 2

| tiempo | Persona que se han infectado | Número total de personas infectadas | $I(t)$ |
|---------|------------------------------|-------------------------------------|--------|
| $t = 0$ | 4 | 4 | 4 |
| $t = 1$ | 8 | 12 | |
| $t = 2$ | 24 | 36 | |
| $t = 3$ | 72 | 108 | |

39. ¿Cuál es la expresión general para $I(t)$ en el ejercicio 4?
40. Escribe una tabla de valores las funciones exponenciales siguientes y grafica en el plano cartesiano

- m) $f(x) = 3^x$ n) $f(x) = 4^x$ o) $f(x) = 5^x$
- p) $f(x) = 4(2^x)$ q) $f(x) = 4(3^x)$ r) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- s) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ t) $h(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ u) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
- v) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)(2^x)$ w) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)(3^x)$ x) $f(x) = 3^x + 1$

41. ¿Cuál es el valor de x para $f(x) = 4^x$ si $f(x) = 256$?

42. Se tienen registros de que el consumo de pastizales por la depredación que se da en tierras protegidas y donde se sobreexplota la madera es tal que después de 6 meses un área de $k(t)$ hectáreas se vio reducida en un quinto. Si se tiene un estimado de 450 hectáreas indica en la tabla el número de hectáreas que se tienen después de 5 años

| | | | | | | | |
|-----------------------|---|---|----|----|----|----|----|
| t (meses) | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |
| $k(t)$ (hectáreas) | | | | | | | |

PROPUESTA DE EVALUACIÓN

Ya que el propósito general correspondiente a esta unidad describe: *Modelará algunas situaciones que dan lugar a funciones racionales y con radicales, analizará una gráfica para identificar su dominio, rango, asíntotas y relacionar estas características con la situación problemática planteada*, la siguiente tabla de especificaciones describe propuestas de evaluación

| Tabla de especificaciones Unidad 3 | | | | |
|---|---|--|---|--|
| Aprendizajes Temática | Conocimiento 25% | Comprensión 25% | Desarrollo 20% | Aplicación 30% |
| <i>Situaciones que involucran crecimiento o decaimiento exponencial</i> | Distingue la expresión que corresponde a una función exponencial o logarítmica. | Reafirma que las variables x e y corresponden a una pareja ordenada que satisface este tipo de expresiones. | Grafica correctamente una función exponencial y una función logarítmica. | Analizar problemas que involucren una función exponencial o logarítmica. |
| | 1(1.25) | | 1(1) | 1 (3) |
| <i>Estudio analítico y gráfico del comportamiento de funciones del tipo: $f(x) = ab^x$ y relación con su gráfica</i> | Distingue en una función exponencial o logarítmica su crecimiento o decrecimiento observando la base. | Comprende la traslación vertical y horizontal de la función exponencial o logarítmica al sumar un parámetro b a la función. | Maneja adecuadamente las leyes de exponentes y logaritmos. Resuelve ecuaciones exponenciales o logarítmicas | Resolver problemas que generen una función exponencial o logarítmica |
| | 1(1.25) | | 1(1) | |
| la función logaritmo como inversa de la función exponencial. | Comprender la contracción o expansión de una función exponencial o logarítmica al multiplicar su argumento por un parámetro b . | <i>Comprende el concepto de logaritmo de un número base b y las relaciones:</i> $b^y = x \leftrightarrow y = \log_b x$ | | . |
| | | 1(1.25) | | |

EXAMEN-EJERCICIO de evaluación

- 1) El valor de un automóvil nuevo disminuye un 30% una vez que han pasado 2 años. Indica en una tabla el valor de automóvil nuevo cuyo costo es de 210,000 cuando han pasado 8 años **(3 puntos)**

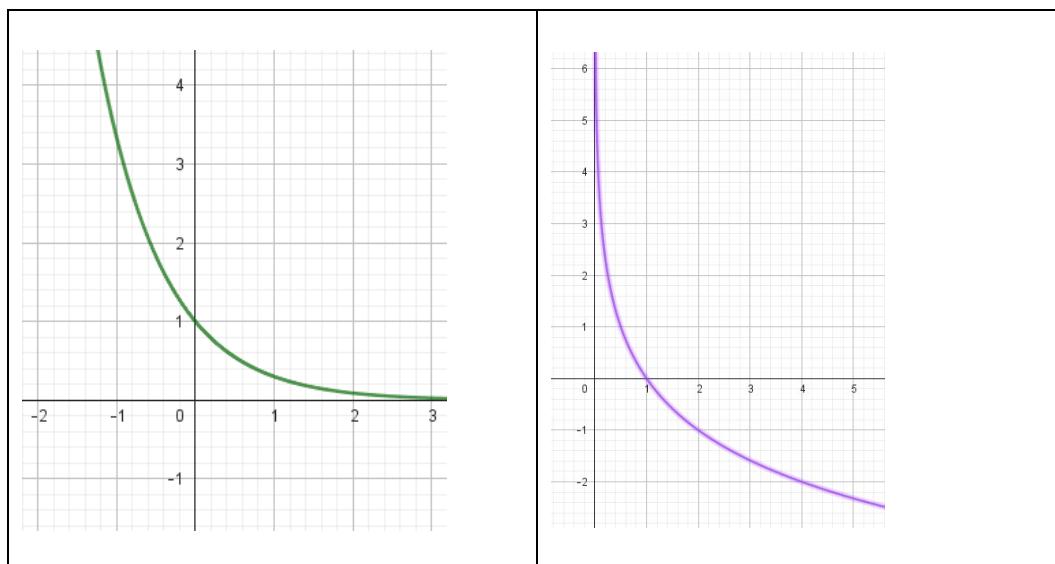
¿después de cuantos años el automóvil tendrá un valor de menos de la mitad?
(1.25 puntos)

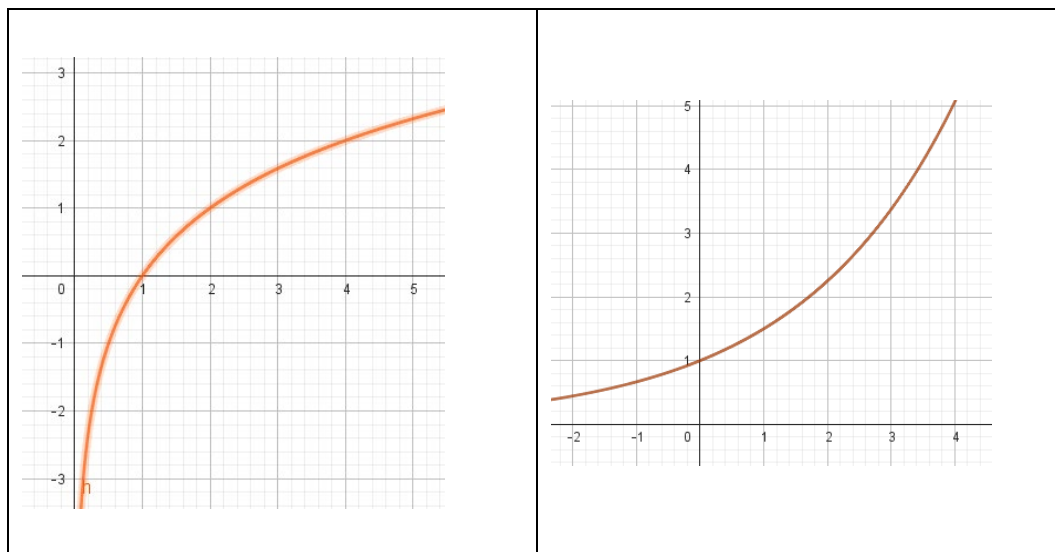
- 2) Grafica en el plano cartesiano la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right) 4^x$. **(1 punto)**

a) Encuentra el valor de x para el cual $f(x) = 2$ **(1 punto)**

- 3) Relaciona las expresiones siguientes con la gráfica que les corresponde **(2.5 puntos)**

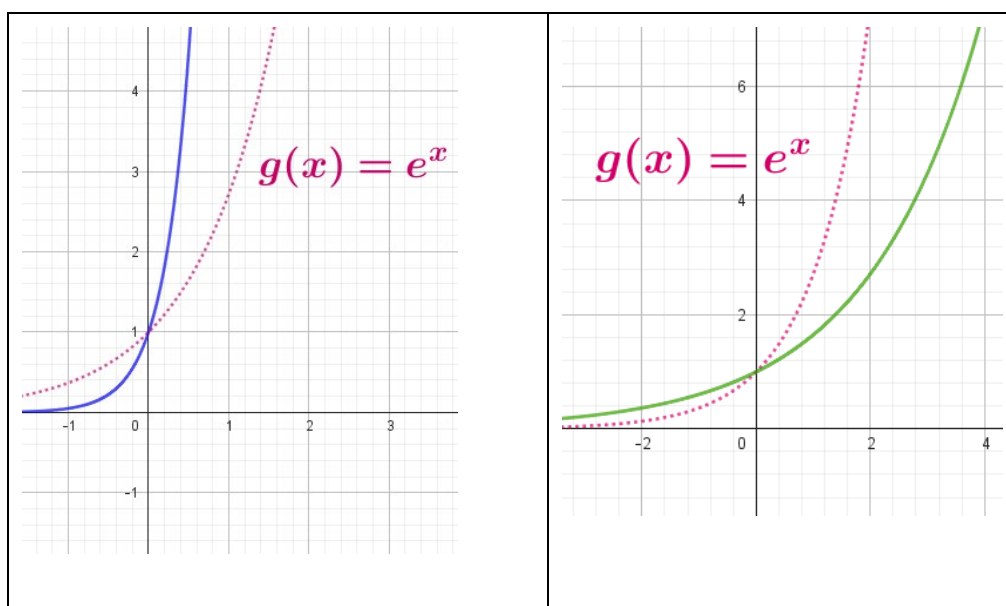
| | | | |
|-------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| $f(x) = \log_2 x$ | $h(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ | $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ | $u(x) = f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ |
| (A) | (B) | (C) | (D) |



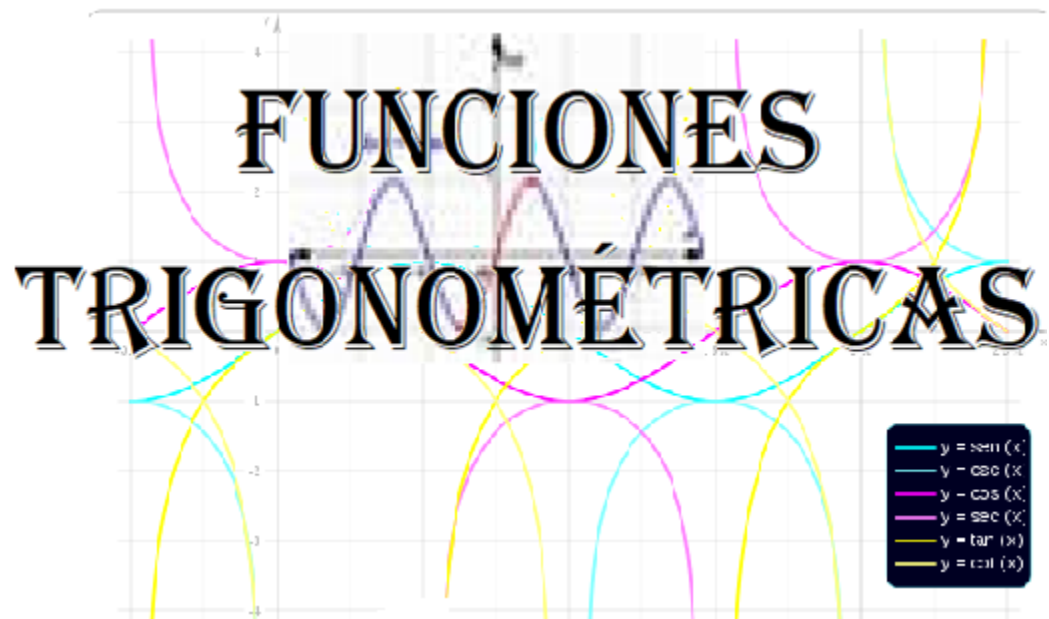


- 4) Considera la función $g(x) = e^x$, asocia las gráficas que corresponden a cada función **(1.25 puntos)**

| | | |
|------------------------|--------------------------|---------------------------------------|
| $h(x) = e^{3x}$ (A) | $f(x) = e^{0.5x}$ (B) | $u(x) = 1.3^x = e^{\ln(1.3)x}$ (C) |
|------------------------|--------------------------|---------------------------------------|



UNIDAD 4



Unidad 3

Funciones Trigonométricas

Introducción

El estudio de funciones trigonométricas es esencial para modelar fenómenos físicos tales como Movimiento armónico simple, ondas electromagnéticas, ondas mecánicas, señales alternas de corriente eléctrica y voltaje, entre otros.

Se definen las funciones trigonométricas en el plano cartesiano y las funciones circulares para generar sus gráficas cartesianas. Sus características periódicas se trabajan en el capítulo, así como su traslación horizontal y vertical, su dilatación y o contracción en el eje X.

Los aprendizajes por alcanzar en el capítulo son:

- ✓ Identificar las razones que corresponden a las expresiones trigonométricas en un triángulo rectángulo.
- ✓ Identificar las razones que corresponden a las expresiones trigonométricas en el plano cartesiano.
- ✓ Identificar las razones que corresponden a las expresiones trigonométricas en el círculo unitario.
- ✓ Manejar la relación biunívoca entre ángulos y recta numérica.
- ✓ Obtener la gráfica de las funciones seno y coseno.
- ✓ Determinar si una función trigonométrica es armónica o no.
- ✓ Manejar los parámetros (Amplitud, período, fase y frecuencia) de una función armónica. Transformaciones.
- ✓ Interpretar en el modelo gráfico (función creciente, decreciente, discontinuidad, continuidad, periodicidad y máximo o mínimo) de funciones trigonométricas.
- ✓ Resolver problemas que genera una función trigonométrica.

El tiempo mínimo para el capítulo es de 9 hrs.

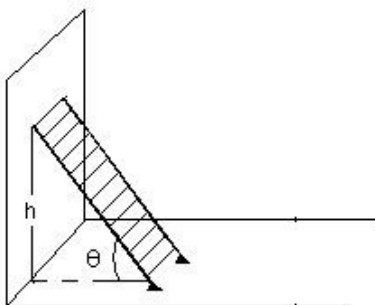
En este capítulo se sugiere utilizar el software tutorial e interactivo de trigonometría (versión 2.0) elaborado por los autores del presente trabajo.

En el capítulo se requieren los siguientes materiales:

- | | |
|------------------------------------|---------------------|
| ✓ Calculadora científica | ✓ Plumas de colores |
| ✓ Cuaderno para anotaciones extras | ✓ Lápiz y goma |

Problemas para introducir las Funciones Trigonométricas

Problema 3.1. Una escalera de 6 m. de largo, se recarga en una pared vertical como se muestra en la figura formando un ángulo con respecto a la horizontal



Si el ángulo cambia, entonces la altura que alcanza la escalera en la pared vertical cambia.

a) Llenar la siguiente tabla para calcular la altura h de la escalera en la pared vertical en términos del valor del ángulo θ (medido en grados).

| θ | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 75° | 80° | 82° | 84° | 85° |
|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| h | | | | | | | | | | | | |

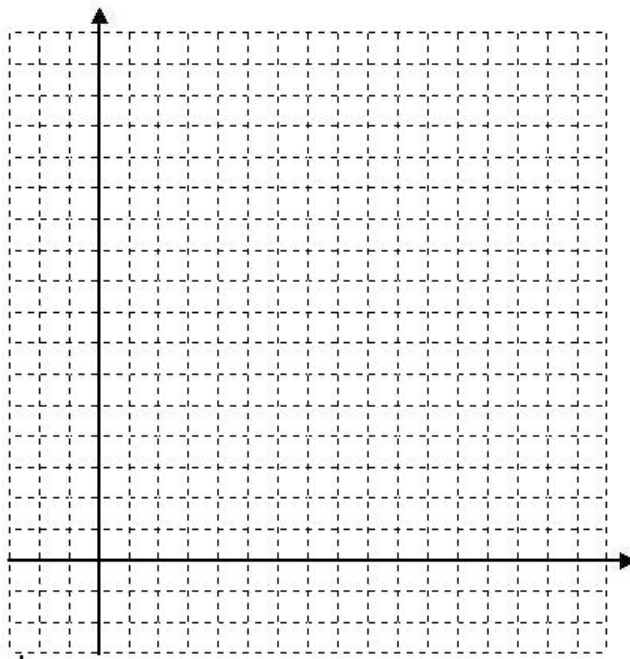
b) Escribir la expresión matemática de la función de la altura en términos del ángulo.

c) En la expresión matemática determinar la variable independiente y la variable dependiente. Indicar que representa cada una.

Variable dependiente _____ representa _____

Variable independiente _____ representa _____

- g) Localizar los puntos en el plano cartesiano y trazar la gráfica. Elegir la escala adecuada en cada eje coordenado.

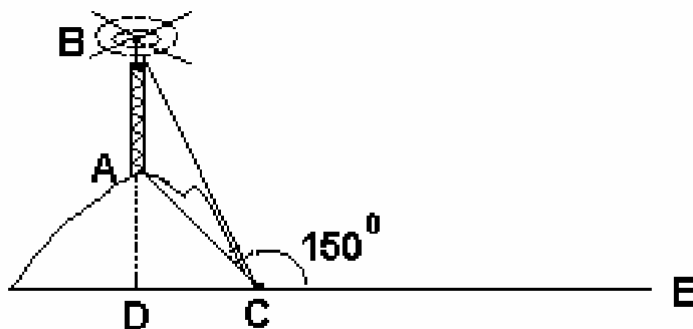


- h) Identificar de acuerdo con los datos, el dominio y rango de la función.

Dominio de la función h _____ Rango de la función h _____

- i) Indicar si la función es creciente o decreciente ¿Por qué?

Problema 3.2 Se quiere colocar una antena en la cima de un peñón (ver figura) para emitir una señal de televisión. La distancia medida para la cuesta AC es de 34 m, el el ángulo entre AC y CE es de 150° y el ángulo de elevación del punto más alto de la antena observado desde el punto C es variable dependiendo de su altura y está comprendido entre 45° y 65° . ¿Cuál es el rango de valores para la altura del poste?

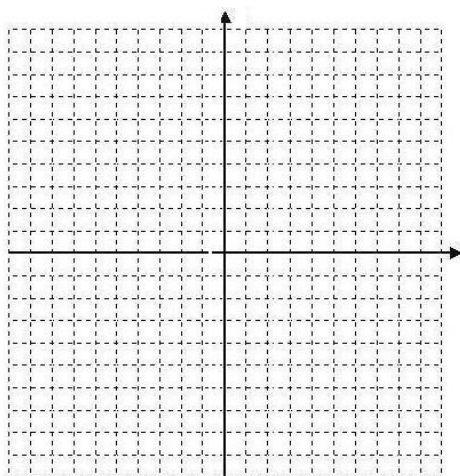


- a) ¿Cuál es la medida del ángulo DCA? _____
- b) ¿Cuál es la altura del peñón? $h = AD =$ _____
- c) ¿Cuánto mide la distancia horizontal CD? _____
- d) La expresión que permite calcular la altura $y = AB$ de la antena para diferentes ángulos de elevación es

- e) Llenar la siguiente tabla:

| θ | 45° | 47° | 49° | 51° | 53° | 55° | 57° | 59° | 62° | 65° |
|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| y | | | | | | | | | | |

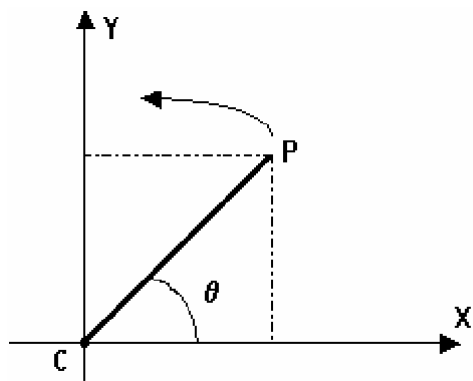
f) Graficar la función trigonométrica obtenida en el intervalo dado.



g) ¿Es una función creciente o decreciente? _____

h) ¿Cuál es el rango de la función? _____

Problema 3.3. Una barra se encuentra sujeta en un punto C , de tal modo que esta puede girar alrededor de dicho punto.



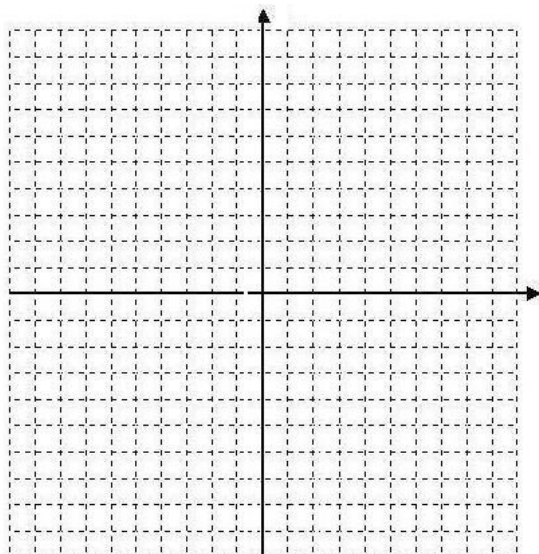
Se establece un sistema de coordenadas rectangulares como se muestra en la figura.

La barra se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj.

La distancia de C a P es de 5 cm .

Al ángulo formado por la barra y el eje X lo representamos por θ

- a) Trazar la trayectoria del punto P al mover la barra en sentido contrario a las manecillas del reloj.



- b) Determinar la expresión para la abscisa x del punto P, en función del ángulo θ .

- c) Determina la expresión para la ordenada y del punto P en función del ángulo θ .

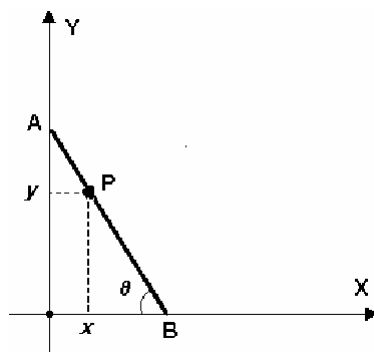
- d) Completa la siguiente tabla para obtener los valores de las coordenadas de P en función θ .

| | | | | | | | | | | | |
|----------|---|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|--|------------------|------------------|------------------|--------|
| θ | 0 | $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | | $\frac{5}{4}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{7}{4}\pi$ | 2π |
| x | | | | | | | | | | | |
| y | | | | | | | | | | | |

- e) Obtener el resultado de $x^2 + y^2$

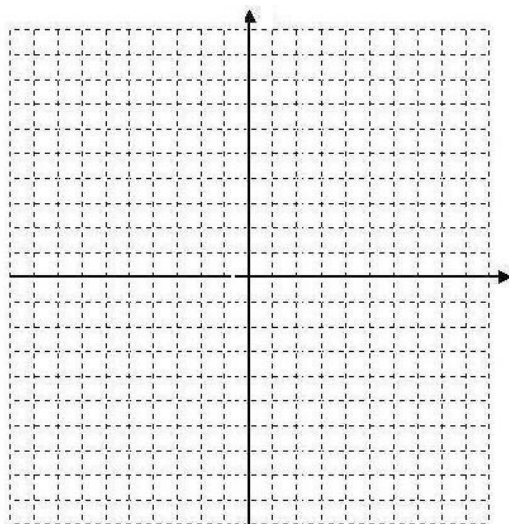
Problema 3.4. Los extremos A y B de una varilla de longitud 8 cm deslizan sobre una ranura horizontal y vertical, la varilla tiene marcado el punto P , de tal manera que la distancia de A a P es 3 cm.

Establecemos un sistema de coordenadas que coincidan con las ranuras horizontal y vertical.



La distancia entre los puntos A y P es 3 cm.

- Trazar las posiciones de la varilla (del segmento AB) en los cuatro cuadrantes, para ello medir la distancia AB e ir simulando que la varilla resbala en los ejes, marcar el punto P .
- Dibujar la trayectoria que sigue el punto P al deslizarse la varilla. Efectuarlo para los cuatro cuadrantes



c) Obtener la expresión para la abscisa x en función del ángulo θ .

d) Obtener la expresión para la ordenada y en función del ángulo θ .

e) Completar la siguiente tabla para obtener los valores de las coordenadas de P en función del ángulo θ .

| | | | | | | | |
|----------|-----|-------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|--|
| θ | 0 | $\frac{1}{12}\pi$ | $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{5}{12}\pi$ | |
| x | | | | | | | |
| y | | | | | | | |

| | | | | | | | |
|----------|--------------------|------------------|------------------|------------------|--------------------|------------------|--------|
| θ | $\frac{13}{12}\pi$ | $\frac{7}{6}\pi$ | $\frac{5}{4}\pi$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $\frac{17}{12}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | 2π |
| x | | | | | | | |
| y | | | | | | | |

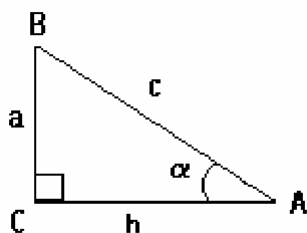
f) Obtener la expresión algebraica en términos de x (eliminar el parámetro θ).

Sugerencia: calcular x^2 y y^2 .

Relaciones elementales trigonométricas

Definición. La trigonometría se encarga del estudio de la relación entre ángulos y lados de un triángulo.

En todo triángulo rectángulo se definen las siguientes relaciones trigonométricas:



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

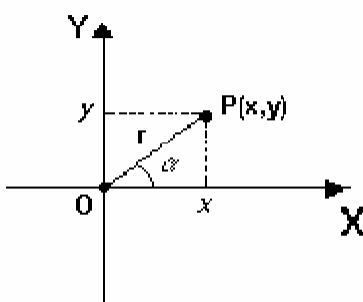
$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sec \alpha = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a}$$

Y en el plano cartesiano tenemos:



El ángulo α se mide a partir del eje +X y en dirección contraria a las manecillas del reloj. OP se denomina radio vector.

Las definiciones de las razones trigonométricas son:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{ordenada}}{\text{distancia } OP} = \frac{y}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{abscisa}}{\text{distancia } OP} = \frac{x}{r}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{y}{x}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \frac{x}{y}$$

$$\sec \alpha = \frac{\text{distancia } OP}{\text{abscisa}} = \frac{r}{x}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{distancia } OP}{\text{ordenada}} = \frac{r}{y}$$

Ejercicio 3.5 Dado el punto $P(-3,7)$ hallar la longitud del radio vector y el ángulo que forma el radio vector OP .

a) ¿Cuál es la abscisa del punto? $x =$ _____

b) ¿cuál es la ordenada del punto? $y =$ _____

c) ¿Cuál es la longitud del radio vector?

d) Llenar la siguiente tabla

| | |
|-------------------------------|---------------------------------|
| $\operatorname{sen} \alpha =$ | $\cot \alpha =$ |
| $\cos \alpha =$ | $\sec \alpha =$ |
| $\tan \alpha =$ | $\operatorname{cosec} \alpha =$ |

e) ¿Cuál es el valor del ángulo? _____

Ejercicio 3.6. Dado el punto $P(5,-9)$ hallar la longitud del radio vector y el ángulo que forma el radio vector OP .

a) ¿Cuál es la abscisa del punto? $X =$ _____

b) ¿cuál es la ordenada del punto? $Y =$ _____

c) ¿Cuál es la longitud del radio vector? _____

d) Llenar la siguiente tabla

| | |
|-------------------------------|---------------------------------|
| $\operatorname{sen} \alpha =$ | $\cot \alpha =$ |
| $\cos \alpha =$ | $\sec \alpha =$ |
| $\tan \alpha =$ | $\operatorname{cosec} \alpha =$ |

e) ¿Cuál es el valor del ángulo? _____

Unidades de medida de los ángulos

Para expresar las medidas de los ángulos planos en geometría y trigonometría se utilizan los grados y los radianes y la relación que existe entre estas medidas está dada por π radianes que es igual a 180° o simplemente $\pi = 180^\circ$.

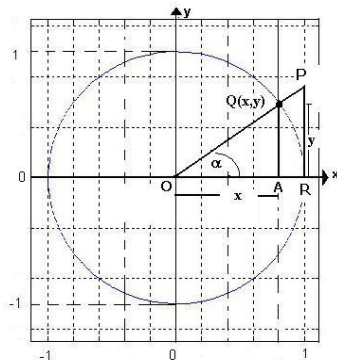
Ejercicio 3.7. Transforma los siguientes grados a radianes (expresarlo en forma decimal) y los radianes a grados.

| Grados | Radianes | Radianes | Grados |
|--------------|----------|----------|--------|
| 125° | | 1.82 | |
| 18° | | 0.78 | |
| 210° | | 2.15 | |
| 78.5° | | 3.9 | |
| 290° | | 4.1 | |

Círculo unitario

Una herramienta útil es el uso del círculo unitario, el cual es un círculo de radio la unidad $r=1$ centrado en el origen, con el definimos las funciones circulares

siguientes:



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{ordenada}}{\text{distancia OQ}} = \frac{y}{1} = y$$

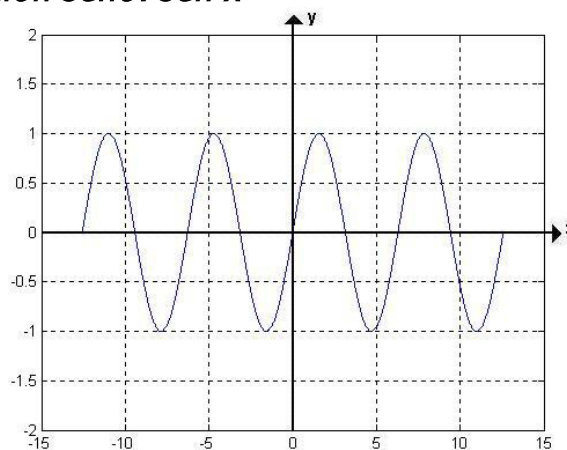
$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{abscisa}}{\text{distancia OQ}} = \frac{x}{1} = x$$

$$\operatorname{tan} \alpha = \frac{PR}{1}$$

observar que el seno del ángulo es la ordenada del punto en el círculo unitario y el coseno del ángulo es la abscisa del punto correspondiente en el círculo unitario.

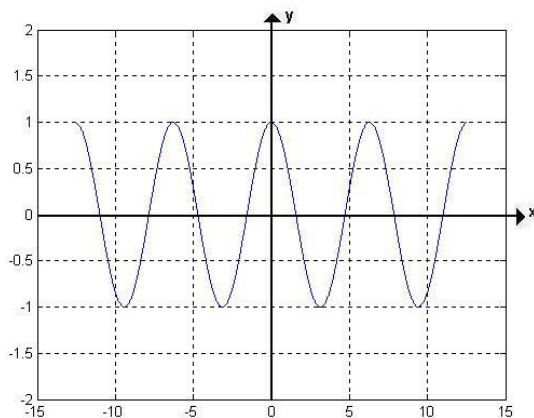
Gráfica de las funciones trigonométricas seno y coseno

Gráfica de la función seno: $\operatorname{sen} x$



La función $\text{sen } x$ tiene las siguientes propiedades

- ✓ El dominio de la función son todos los números reales
- ✓ El rango es el intervalo $[-1, 1]$ es decir $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$.
- ✓ Los ceros de la función son de la forma $x = n$ donde n es un número entero, es decir $\text{sen } x = 0$ para $x = n$ con n número entero.
- ✓ La función es periódica, con periodo 2π ya que se cumple que $\text{sen}(x + 2\pi n) = \text{sen } x$ con n número entero
- ✓ La función es impar, esto es $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$ por lo tanto, la gráfica del $\text{sen } x$ es simétrica con respecto al origen.

Gráfica de la función coseno: $\cos x$ **La función $\cos x$ tiene las siguientes propiedades:**

- ✓ El dominio de la función es el conjunto de los números reales.
- ✓ El rango de la función es el intervalo $[-1, 1]$ es decir $-1 \leq \cos x \leq 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$.
- ✓ La función es par, esto es $\cos(-x) = \cos x$ por lo tanto, la gráfica es simétrica con respecto al eje Y.
- ✓ La función es periódica, con período 2π por lo que se cumple que

$\cos x = \cos(x + 2\pi n)$ donde n es un número entero.

✓ Los ceros de la función son de la forma $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ con n entero.

Como la función trigonométrica $f(x) = \text{sen}x$ es periódica, es decir, se cumple

$f(x + P) = f(x)$, donde P es el período de la función.

Período P de las funciones armónicas utilizando la función seno

Utilizar la función seno para encontrar el período

$$f(x) = \text{sen}(Bx + \alpha) = \text{sen}B\left(x + \frac{\alpha}{B}\right)$$

Por otro lado $f(x + P) = \text{sen}B\left(x + \frac{\alpha}{B} + P\right) =$

$$= \text{sen}(Bx + \alpha + BP) = \text{sen}\left[B\left(x + \frac{\alpha}{B}\right) + P\right]$$

Se observa que $f(x) = f(x + P)$, la función seno tiene un periodo 2π , por lo tanto

$BP = 2\pi$, de donde $P = \frac{2\pi}{B}$ y la frecuencia (el número de veces que se repite la función en un período) es $f = \frac{1}{P}$.

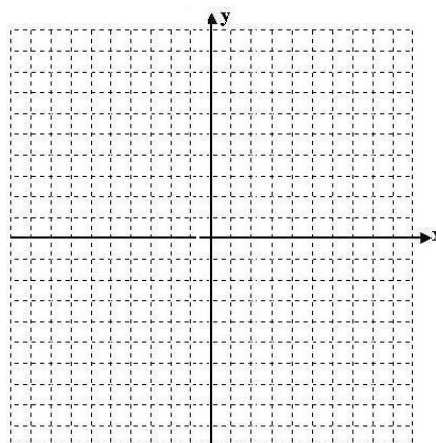
El cambio de fase es $\left|\frac{\alpha}{B}\right|$; la gráfica se recorre a la izquierda si $\frac{\alpha}{B} > 0$ y a la derecha si $\frac{\alpha}{B} < 0$ respecto a la función original.

Un resultado similar se tiene para la función coseno.

Traslación vertical

Ejercicio 3.8. Graficar sobre un mismo plano cartesiano en el intervalo $[0, 2\pi]$ las siguientes funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \sin x + 4$. Utilizar las unidades de los ángulos en radianes. Utilizar incrementos de 0.4 rad .

| x | f(x) | g(x) |
|-----|------|------|
| 0 | | |
| 0.4 | | |
| 0.8 | | |
| 1.2 | | |
| 1.6 | | |
| 2 | | |
| 2.4 | | |
| 2.8 | | |
| 3.2 | | |
| 3.6 | | |

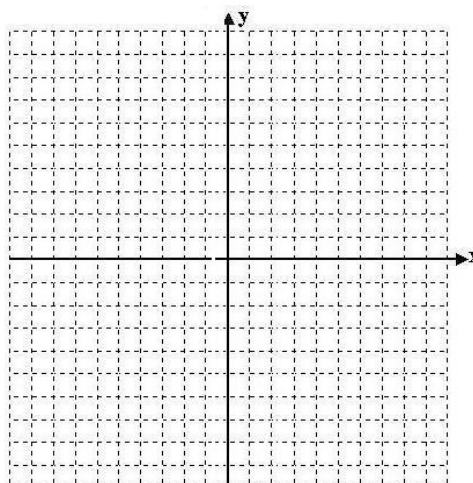


Anotar las observaciones _____

Traslación horizontal

Ejercicio 3.9. Graficar sobre un mismo plano cartesiano en el intervalo $[0, 2\pi]$ las siguientes funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \sin(x - 1.2)$. Utilizar las unidades de los ángulos en radianes. Utilizar incrementos de 0.4 rad .

| x | f(x) | g(x) |
|-----|------|------|
| 0 | | |
| 0.4 | | |
| 0.8 | | |
| 1.2 | | |
| 1.6 | | |
| 2 | | |
| 2.4 | | |
| 2.8 | | |
| 3.2 | | |
| 3.6 | | |

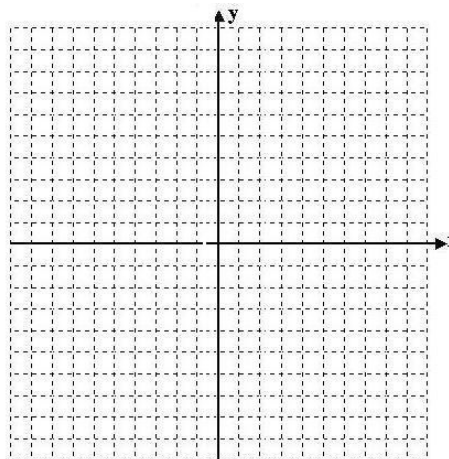


Anotar las observaciones _____

Dilatación y contracción vertical

Ejercicio 3.10. Graficar sobre un mismo plano cartesiano en el intervalo $[0, 2\pi]$ las siguientes funciones $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = 4\text{sen } x$. Utilizar las unidades de los ángulos en radianes. Utilizar incrementos de 0.4.

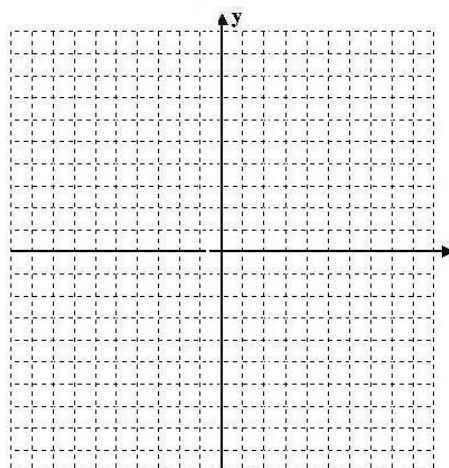
| x | f(x) | g(x) |
|-----|------|------|
| 0 | | |
| 0.4 | | |
| 0.8 | | |
| 1.2 | | |
| 1.6 | | |
| 2 | | |
| 2.4 | | |
| 2.8 | | |
| 3.2 | | |
| 3.6 | | |



Anotar las observaciones _____

Ejercicio 3.11. Graficar sobre un mismo plano cartesiano en el intervalo $[0, 2\pi]$ las siguientes funciones $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = \frac{1}{4}\text{sen } x$. Utilizar las unidades de los ángulos en radianes. Utilizar incrementos de 0.4.

| x | f(x) | g(x) |
|-----|------|------|
| 0 | | |
| 0.4 | | |
| 0.8 | | |
| 1.2 | | |
| 1.6 | | |
| 2 | | |
| 2.4 | | |
| 2.8 | | |
| 3.2 | | |
| 3.6 | | |

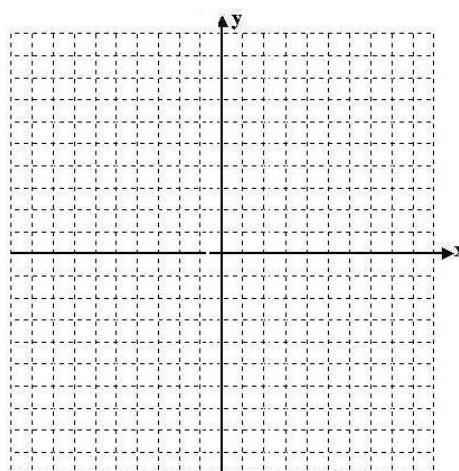


Anotar las observaciones _____

Dilatación y contracción horizontal

Ejercicio 3.12. Graficar sobre un mismo plano cartesiano en el intervalo $[0, 2\pi]$ las siguientes funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \sin 4x$

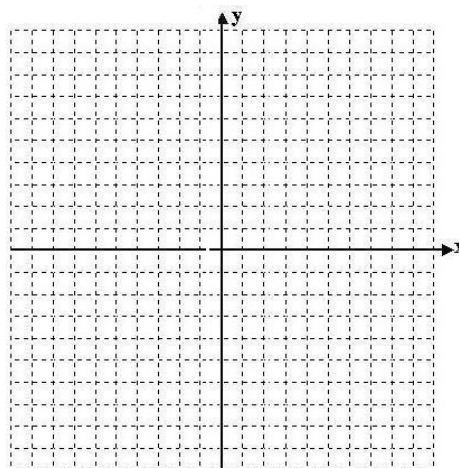
| x | f(x) | g(x) |
|-----|------|------|
| 0 | | |
| 0.4 | | |
| 0.8 | | |
| 1.2 | | |
| 1.6 | | |
| 2 | | |
| 2.4 | | |
| 2.8 | | |
| 3.2 | | |
| 3.6 | | |



Ejercicio 3.13. Graficar sobre un mismo plano cartesiano en el intervalo $[0, 2\pi]$ las siguientes funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \sin \frac{x}{4}$. Utilizar las unidades de los

ángulos en radianes. Utilizar incrementos de 0.4.

| x | f(x) | g(x) |
|-----|------|------|
| 0 | | |
| 0.4 | | |
| 0.8 | | |
| 1.2 | | |
| 1.6 | | |
| 2 | | |
| 2.4 | | |
| 2.8 | | |
| 3.2 | | |
| 3.6 | | |

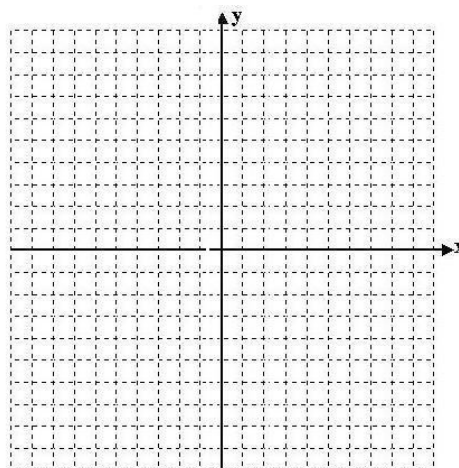


Anotar las observaciones _____

Ejercicio 3.14. En la función $f(x) = -2\sin \pi x$ determinar su Amplitud, Período y fase inicial.

- a) La amplitud de la función es _____
- b) El período de la función es _____
- c) La frecuencia es _____
- d) Trazar la graficar de la función en un período. Utilizar la escala adecuada en radianes y ayudarse con el valor del período.

| x | f(x) |
|---|------|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |



- e) El dominio de la función es _____
- f) El rango de la función es _____ -
- g) Los intervalos donde la función es creciente son:

h) Los intervalos donde la función es decreciente son:

i) Las intersecciones con el eje X son: _____

j) Las intersecciones con el eje Y son: _____

Ejercicio 3.15. En la función $f(x) = 3\cos 2x$ determinar su Amplitud, Período y fase inicial. **Sugerencia:** utilizar submúltiplos de π .

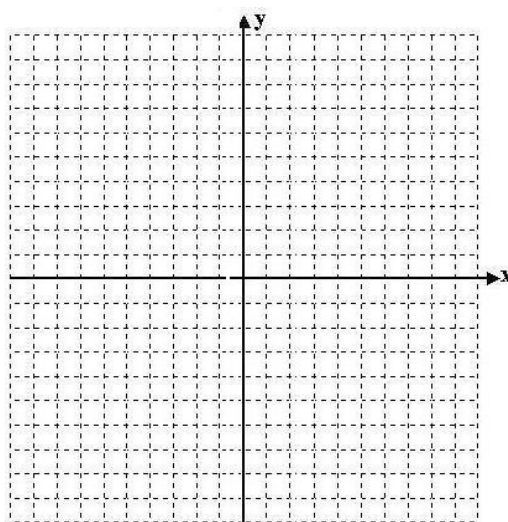
a) La amplitud de la función es _____

b) El período de la función es _____

c) La frecuencia es _____

d) Trazar la graficar de la función en un período. Utilizar la escala adecuada en radianes y ayudarse con el valor del período.

| x | f(x) |
|---|------|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |



e) El dominio de la función es _____

f) El rango de la función es _____ -

g) Los intervalos donde la función es creciente son:

h) Los intervalos donde la función es decreciente son:

i) Las intersecciones con el eje X son: _____

j) Las intersecciones con el eje Y son: _____

Ejercicio 3.16. En la función $f(x) = \frac{1}{2} \cos(4x - \pi)$ determinar su Amplitud,

Período y fase inicial. **Sugerencia: utilizar submúltiplos de** .

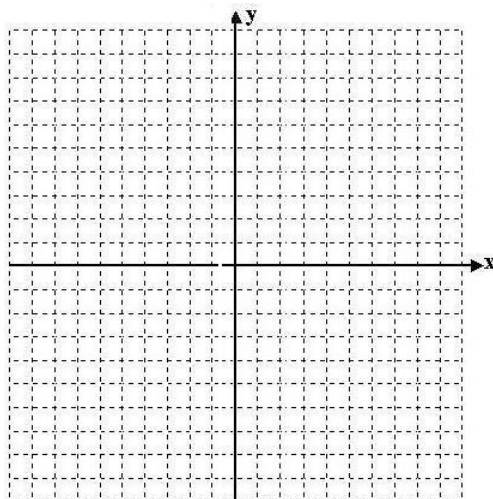
a) La amplitud de la función es _____

b) El período de la función es _____

c) La frecuencia es _____

d) Trazar la graficar de la función. Utilizar la escala adecuada en radianes y ayudarse con el valor del período.

| x | f(x) |
|----------|-------------|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |



e) El dominio de la función es _____

f) El rango de la función es _____

g) Los intervalos donde la función es creciente son:

h) Los intervalos donde la función es decreciente son:

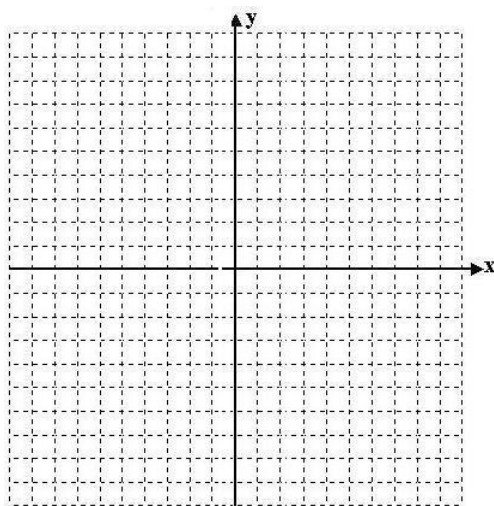
i) Las intersecciones con el eje X son: _____

j) Las intersecciones con el eje Y son: _____

Ejercicio 3.17. En la función $f(x) = 3\cos(\pi x + \frac{\pi}{2})$ determinar su Amplitud, Período y fase inicial.

- a) La amplitud de la función es _____
- b) El período de la función es _____
- c) La frecuencia es _____
- d) Trazar la graficar de la función. Utilizar la escala adecuada en radianes y ayudarse con el valor del período.

| x | f(x) |
|---|------|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |



- e) El dominio de la función es _____
- f) El rango de la función es _____ -
- g) Los intervalos donde la función es creciente son:

- h) Los intervalos donde la función es decreciente son:

i) Las intersecciones con el eje X son: _____

j) Las intersecciones con el eje Y son: _____

Problema 3.18. Un peso de 5 Kgf cuelga de un resorte y es estirado 0.5 m desde su posición de equilibrio, para luego soltarlo. Si se desprecia la fricción del aire, la posición del peso en función del tiempo (en seg) esta dada por $x = 0.5\cos 8t$.

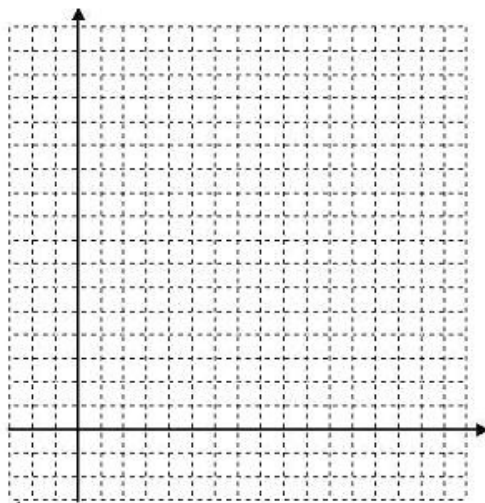
a) La amplitud de la función es _____

b) El período de la función es _____

c) La frecuencia es _____

d) Trazar la graficar de la función. Utilizar la escala adecuada en radianes y ayudarse con el valor del período. **Sugerencia: utilizar submúltiplos de** .

| t | f(t) |
|---|------|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |



e) El dominio de la función es _____

f) El rango de la función es _____ -

g) Los intervalos donde la función es creciente son:

h) Los intervalos donde la función es decreciente son:

Problema 3.19. Un generador de corriente alterna genera corriente eléctrica de acuerdo a la expresión $I = 30\text{sen}120t$ Amperes (Amp), donde t es el tiempo en segundos.

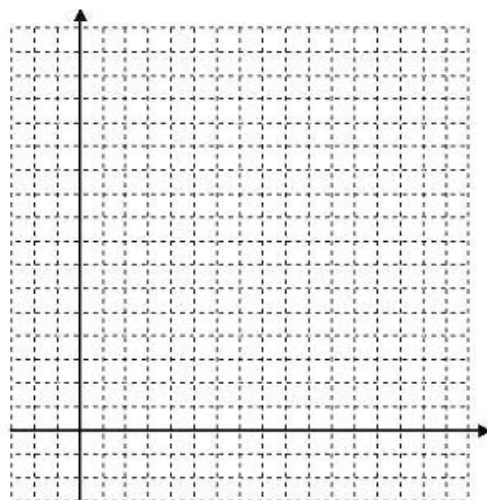
a) La amplitud de la función es _____

b) El período de la función es _____

c) La frecuencia es _____

d) Trazar la graficar de la función. Utilizar la escala adecuada en radianes y ayudarse con el valor del período. **Sugerencia: utilizar submúltiplos de π .**

| t | f(t) |
|---|------|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |



- e) El dominio de la función es _____
- f) El rango de la función es _____
- g) Los intervalos donde la función es creciente son _____
- h) Los intervalos donde la función es decreciente son _____

Función Tangente $f(x) = \tan x$ ó $f(x) = \operatorname{tg} x$

- 1) El dominio de la función tangente son todos los números, excepto los de la forma

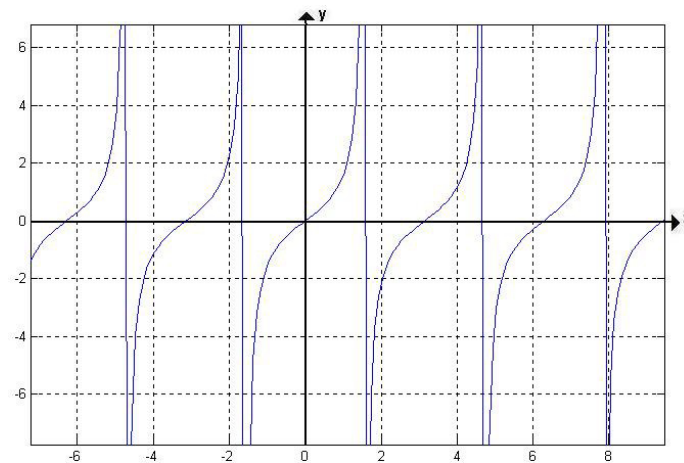
$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ con } n \text{ número entero}$$

- 2) El rango de la función $f(x) = \tan x$ son los números reales
- 3) La función es impar, se cumple $\tan(-x) = -\tan x$. Por lo tanto, la función $f(x) = \tan x$ es simétrica respecto al origen.
- 4) Los ceros de la función son de la forma $n\pi$, donde n es número entero

5) las asíntotas verticales. Son las rectas cuyas ecuaciones están dadas por:

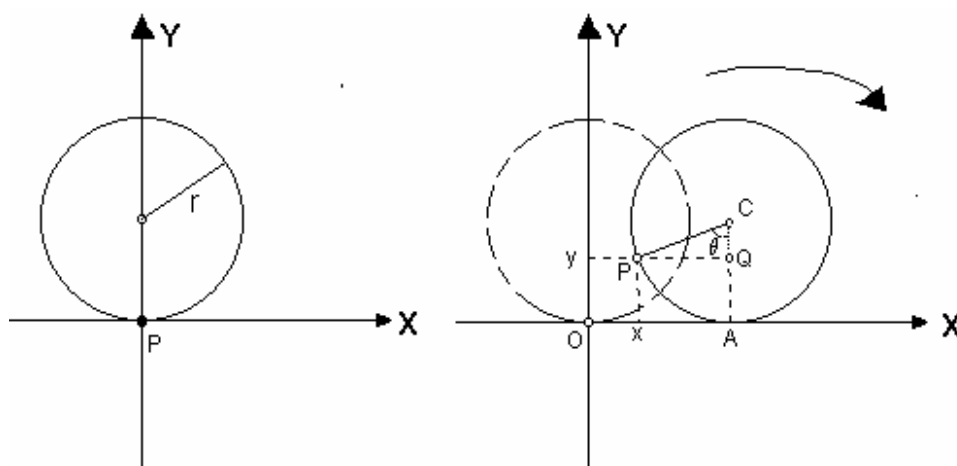
$$x = -\frac{1}{2}\pi + n\pi \quad \text{con } n \text{ número entero}$$

6) La gráfica de la función $f(x) = \tan x$ es:



Problemas y ejercicios propuestos de trigonometría

1) Un punto P marcado en el bordo de un aro circular de radio 10 cm se encuentra en el origen cuando el diámetro del aro este situado sobre el eje y . El aro rueda a lo largo del eje X en la dirección positiva.



$$q = PCQ$$

La distancia del punto A al punto O es igual al arco AP.

La medida del arco AP es igual al producto de CP por el ángulo θ

a) Dibujar la trayectoria del punto P cuando el aro rueda.

Sugerencia: realizarlo con un círculo de cartón sobre una regla.

b) Determinar la ecuación paramétrica para la abscisa x del punto P.

c) Determinar la ecuación paramétrica para la ordenada y del punto P.

d) Completa la siguiente tabla para obtener los valores de las coordenadas del punto P

| | | | | | | | | | | | |
|----------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|--|------------------|------------------|------------------|--------|
| θ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | 2π |
| x | | | | | | | | | | | |
| y | | | | | | | | | | | |

Utilizar el siguiente enunciado para resolver el problema No. 2

Si un objeto tiene un movimiento armónico simple su desplazamiento Z desde la posición de equilibrio es una función del tiempo de la forma

$$Z = A \operatorname{sen}(Bt - C) \quad \text{o} \quad Z = A \cos(Bt - C)$$

Una pelota pequeña suspendida de un hilo cuya longitud es L se desvía de su posición de equilibrio en un ángulo α como se muestra en la figura



Como el desplazamiento angular α es pequeño el movimiento de la pelota está dado por la expresión

$$\alpha = A \cos \omega t$$

donde A es el desplazamiento inicial y la frecuencia angular ω está dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Con g aceleración de la gravedad igual a $32.2 \text{ ft}/\text{seg}^2$ en el sistema inglés y $9.81 \text{ m}/\text{seg}^2$ en el sistema internacional; l es la longitud del péndulo

2) Un péndulo de 2.45 m de longitud se suelta con un desplazamiento angular inicial de 15° .

a) Determina la expresión algebraica para el desplazamiento angular del péndulo.

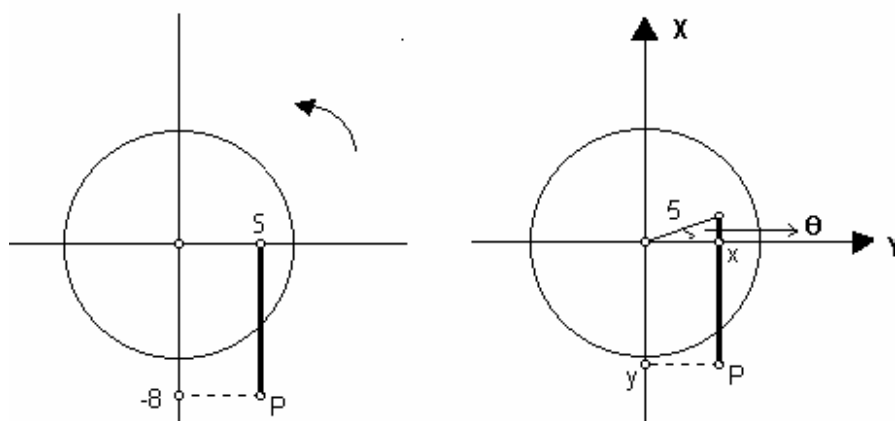
b) Obtener el período

c) Llenar la siguiente tabla en la que se obtiene el desplazamiento angular en función del tiempo t .

| t | 0 | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° |
|-----|---|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| | | | | | | | | | |

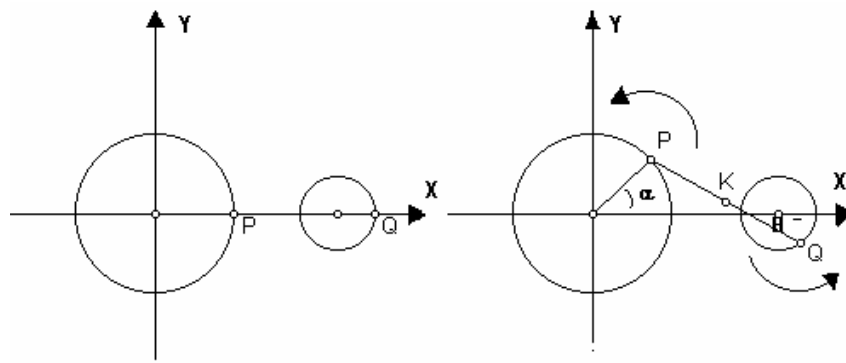
d) Dibujar la gráfica de vs. t .

3) Una varilla de 8 cm de largo está colgada de una rueda que esta girando en el sentido contrario a las manecillas del reloj, la varilla siempre se mantiene vertical



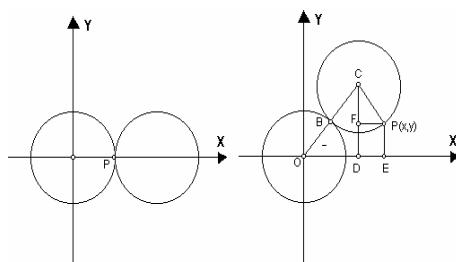
Obtener las ecuaciones paramétricas de las coordenadas del punto $P(x, y)$ en función del ángulo θ que ha girado la rueda.

- 4) Una rueda de radio 3 centrada en el origen gira en sentido contrario de las manecillas del reloj, el punto P se encuentra en $(3, 0)$ cuando $\theta = 0$. Otra rueda de radio 1 y centrada en $(8, 0)$ está girando el mismo ángulo que la primera y en el sentido de las manecillas del reloj. El punto Q en su borde está en $(9, 0)$ cuando el ángulo $\alpha = 0 = -\varphi$



Obtener las ecuaciones paramétricas para las coordenadas del punto medio (K) del segmento que une a P y Q .

- 5) Sobre una rueda fija con centro el origen de coordenadas rueda sin deslizarse otra rueda del mismo radio $r = 4$ cm



En principio el punto P se encuentra en $(4, 0)$

- Dibujar la trayectoria que sigue el punto P .
- Obtener las ecuaciones paramétricas de las coordenadas del punto $P(x, y)$.

Sugerencia: Considerar que el ángulo "COD tiene la misma medida que el ángulo "OCP. Además, para obtener x , utilizar

$$x = OD + DE \quad y \quad DE = FP$$

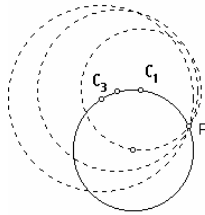
En el DCFP se puede obtener FP.

Demostrar que si $b = \text{PCF}$ entonces $b = 2q - p$.

Y en el DOCD se puede obtener OD.

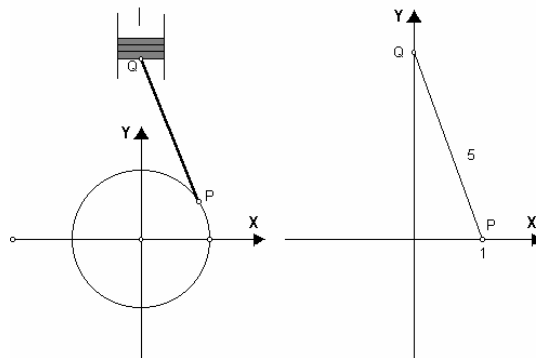
Por otro lado, como $y = EP = DF = CD - CF$, en el DOCD se puede obtener CD y en el DCFP se puede obtener CF.

c) Construir la siguiente figura con una circunferencia de radio 4

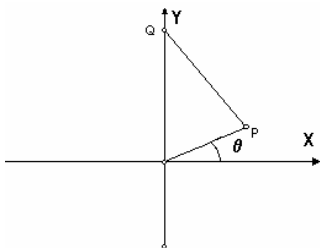


Construir circunferencias con centro sobre la circunferencia y que pasen por el punto P.

6) Se tiene un ensamble de rueda – pistón la rueda tiene radio de un pie (1 ft) y gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, la varilla de conexión tiene 5 pies de largo y el punto P esta inicialmente en (1, 0)

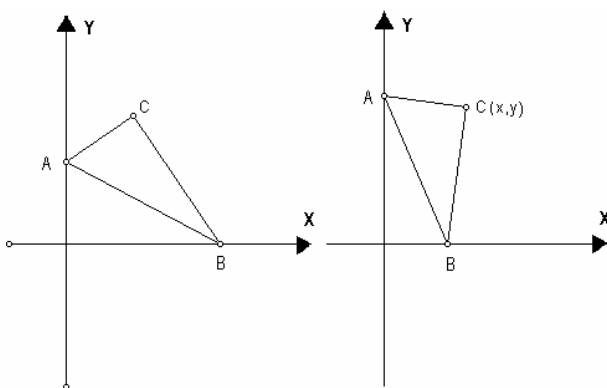


Después de un cierto tiempo la situación es como se indica:



a) Obtener la ecuación paramétrica para la ordenada y del punto Q en función del ángulo q .

7) Un triángulo rectángulo de madera se traslada por el plano de tal manera que los vértices de sus ángulos agudos se mueven sobre los ejes de un plano cartesiano.



- Dibujar la trayectoria del punto C . **Sugerencia: Construir un triángulo de cartón y deslizarlo.**
- Obtener las ecuaciones paramétricas de las coordenadas del punto C .
- Dibujar la trayectoria del centro de gravedad.
- Dibujar la trayectoria del incentro.
- Dibujar la trayectoria del circuncentro.

Obtener la amplitud, el período y la gráfica correspondiente a un ciclo, empezando desde $x = 0$ en cada una de las siguientes funciones.

8) $f(x) = 2\sin 3x$

9) $f(x) = 3\sin(2x + \pi)$

10) $f(x) = -2\sin 5x$

11) $f(x) = 2\cos(3x - \pi)$

12) $f(x) = 4\cos 4x$

13) $f(x) = -2\sin(3x - \pi)$

14) $f(x) = 4\cos \frac{x}{2}$

15) $f(x) = -2\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$

16) $f(x) = 4\cos \frac{2x}{3}$

17) $f(x) = -4\cos(2x + 2\pi)$

18) $f(x) = 2\cos(x - \pi)$

19) $f(x) = \tan 3x$

20) $f(x) = -2\tan 3x$

21) $f(x) = 2\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Dibujar la gráfica de las siguientes funciones

22) $f(x) = 4 + \sin x$

27) $f(x) = \cos x + 3\sin x$

23) $f(x) = -3 + \cos x$

28) $f(x) = 2\cos x + 3\sin x$

24) $f(x) = -2 - \sin 2x$

29) $f(x) = 2\sin x - \cos 2x$

25) $f(x) = 4 - \cos 3x$

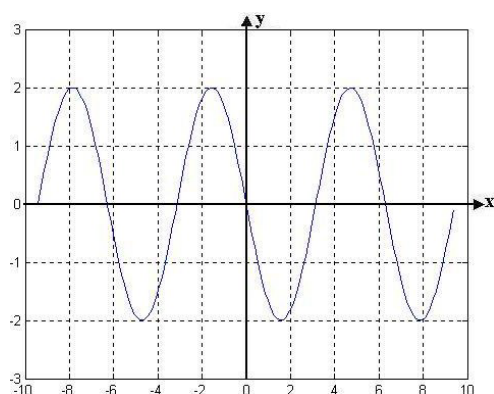
30) $f(x) = 3\sin 2x - 2\cos 3x$

26) $f(x) = \sin x + \cos x$

31) $f(x) = 3 + \sin 2x - \cos 2x$

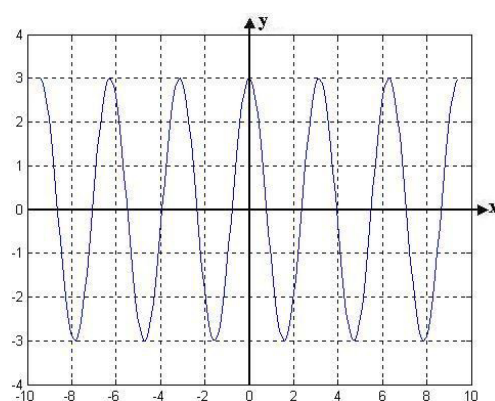
Obtener la expresión algebraica de las funciones representadas en las siguientes gráficas

32)



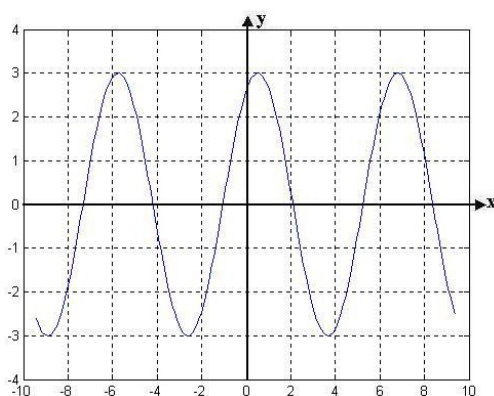
Respuesta:

33)



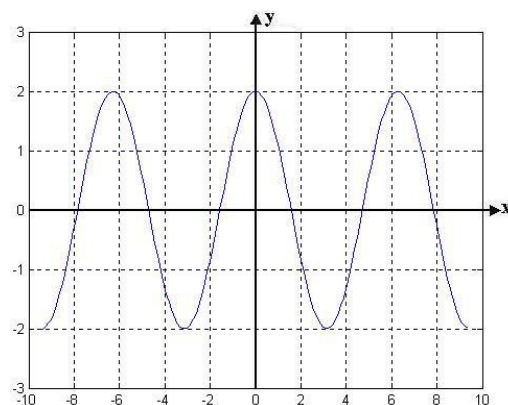
Respuesta:

34)



Respuesta:

35)



Respuesta:

Figuras de Lissajous

Cuando se tienen movimientos armónicos simples en direcciones perpendiculares, las frecuencias para el movimiento de las partículas en las dos direcciones x e y no necesitan ser iguales, así que en el caso general llegan a ser las ecuaciones paramétricas

$$x = A \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \quad \text{y} \quad y = B \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

la trayectoria de la partícula no es más larga que una elipse, pero es llamada curva de Lissajous.

a) Si $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ es un número racional (por ejemplo $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$), la curva es cerrada y el

movimiento se repite en intervalos iguales de tiempo.

b) Si $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ no es un número racional entonces la curva es abierta.

36) Construir la figura de **Lissajous** cuando las ecuaciones paramétricas del punto $P(x, y)$ están dadas por

$$x = \cos t \quad y = \sin 3t.$$

contestando los siguientes incisos

a) Llenar las siguientes tablas en donde se obtiene los valores de x e y en función del parámetro t

| | | | | | | | |
|-----|---|-------|------|------|-------|------|---|
| t | 0 | .15 p | .3 p | .45p | .60 p | .75p | p |
| x | | | | | | | |
| y | | | | | | | |

| | | | | | | | |
|-----|-------|--------|--------|-------|-------|-------|-----|
| t | 1.15p | 1.30 p | 1.45 p | 1.60p | 1.75p | 1.90p | 2 p |
| x | | | | | | | |
| y | | | | | | | |

b) Marcar en un sistema de coordenadas rectangulares los puntos $P(x, y)$ y dibujar la figura de Lissajous

37) Construir la figura de Lissajous cuando las ecuaciones paramétricas del punto $P(x, y)$ están dadas por

$$x = \text{sen } t \quad y = \text{sen } 2t$$

a) Llenar las siguientes tablas en donde se obtiene los valores de x e y en función del parámetro t

| | | | | | | | |
|-----|---|-------|------|------|-------|------|---|
| t | 0 | .15 p | .3 p | .45p | .60 p | .75p | p |
| x | | | | | | | |
| y | | | | | | | |

| | | | | | | | |
|-----|-------|--------|--------|-------|-------|-------|-----|
| t | 1.15p | 1.30 p | 1.45 p | 1.60p | 1.75p | 1.90p | 2 p |
| x | | | | | | | |
| y | | | | | | | |

b) Graficar en un sistema de coordenadas rectangulares los puntos $P(x, y)$ y dibujar la figura de Lissajous

38) Construir la figura de Lissajous, cuando las ecuaciones paramétricas del punto $P(x, y)$ están dadas por

$$x = \text{sen } 2t \quad y = \cos 3t.$$

a) Llenar las siguientes tablas en donde se obtiene los valores de x e y en función del parámetro t

| | | | | | | | |
|-----|---|-------|------|------|-------|------|---|
| t | 0 | .15 p | .3 p | .45p | .60 p | .75p | p |
| x | | | | | | | |
| y | | | | | | | |

| | | | | | | | |
|-----|-------|--------|--------|-------|-------|-------|-----|
| t | 1.15p | 1.30 p | 1.45 p | 1.60p | 1.75p | 1.90p | 2 p |
| x | | | | | | | |
| y | | | | | | | |

b) Marcar en un sistema de coordenadas rectangulares los puntos $P(x, y)$ y dibujar la figura de Lissajous

39) Una curva tiene ecuaciones paramétricas

$$x = 6\operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad y = 2\cos\theta$$

a) Completar la siguiente tabla y posteriormente dibuja la curva en un plano cartesiano.

| | | | | | | | | | |
|----------|---|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|--|------------------|------------------|--------|
| θ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{9\pi}{5}$ | 2π |
| x | | | | | | | | | |
| y | | | | | | | | | |

Ejercicios complementarios

1. Indica en cada tabla de valores los números reales que corresponde a cada ángulo

| | | | | | | | |
|----------|----|-----|-----|-----|------|------|------|
| ángulos | 0° | 30° | 60° | 90° | 120° | 150° | 180° |
| radianes | | | | | | | |

| | | | | | | | |
|----------|----|-----|-----|------|------|------|------|
| ángulos | 0° | 45° | 90° | 135° | 180° | 225° | 270° |
| radianes | | | | | | | |

| | | | | | | | |
|----------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ángulos | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° |
| radianes | | | | | | | |

2. Representa en el eje real los valores que corresponde a los grados de las tablas dadas

| | | | | | | | |
|---------------------------------|----|-----|------|------|------|------|------|
| ángulos | 0° | 90° | 180° | 270° | 360° | 450° | 340° |
| Radianes (números reales) | | | | | | | |

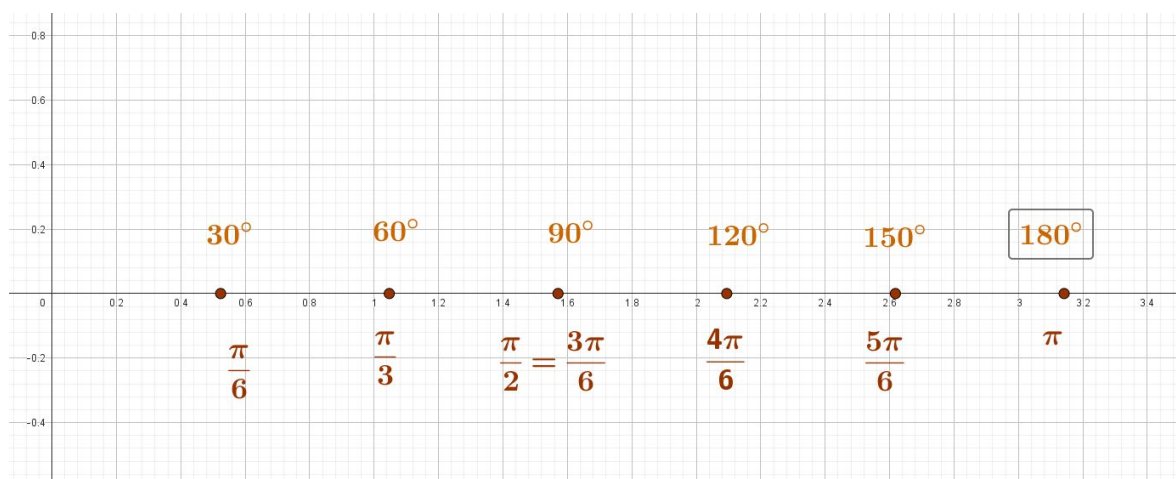
| | | | | | | | | |
|---------------------------------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ángulos | 0° | 20° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° |
| Radianes (números reales) | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|----------|----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|
| ángulos | 0° | 30° | 60° | 90° | 120° | 150° | 180° | 210° | 240° |
| radianes | | | | | | | | | |

| | | | | | | | |
|----------|----|-----|-----|------|------|------|------|
| ángulos | 0° | 45° | 90° | 135° | 180° | 225° | 270° |
| radianes | | | | | | | |

Ejemplo

| | | | | | | | | | |
|----------|----|-----------------|-----------------|--|------------------|------------------|------------------------|------------------|--|
| ángulos | 0° | 30° | 60° | 90° | 120° | 150° | 180° | 210° | 240° |
| radianes | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6}$ $\approx 1.5707..$ | $\frac{4\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{6\pi}{6} = \pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{8\pi}{6}$ $= \frac{4\pi}{3}$ |



3. Considera la función $t(x) = \operatorname{ctg} x$. Indica el dominio de la función, recuerda que $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, se trata de una expresión racional. Realiza una tabla de valores para graficarla en el plano cartesiano

Enlistar los demás valores que no estarán en el dominio. Indica las asíntotas y el rango.

Indicar también el periodo de la curva que describe esta gráfica

Indica si hay puntos máximos y/o mínimos

4. Considera la función $t(x) = \sec x$. Indica el dominio de la función, recuerda que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, se trata de una expresión racional. Realiza una tabla de valores para graficarla en el plano cartesiano

Ejemplo

| | | | | | | | | | |
|----------|-----------------------|------|------|----|-----|-----|-----------------------|------|------|
| ángulos | -90° | -60° | -30° | 0° | 30° | 60° | 90° | 120° | 150° |
| radianes | No está en el dominio | | | | | | No está en el dominio | | |
| $\sec x$ | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|----------|------|------|------|-----------------------|------|------|------|------|------|
| ángulos | 180° | 210° | 240° | 270° | 300° | 330° | 360° | 390° | 410° |
| radianes | | | | No está en el dominio | | | | | |
| sec x | | | | | | | | | |

i. Enlista los demás valores que no estarán en el dominio

ii. Indica las asíntotas

Las asíntotas (verticales) se encuentran en

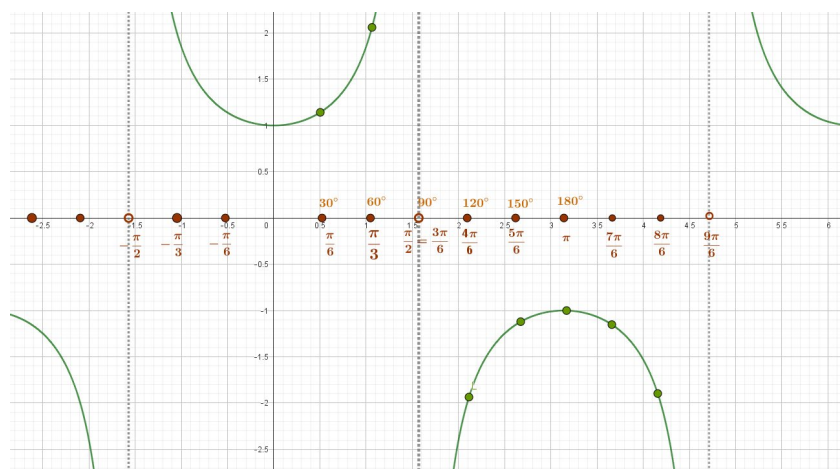
, ..., $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{2}$, ... que en general se escriben

$x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, donde k es un número entero cualquiera

iii. Indica el rango

El rango o imagen de la función es prácticamente todo el eje y , excepto un pedazo desde -1 hasta 1. Observemos que ambos valores, $y=1$, $y=-1$ sí se tocan por la función

Así $\text{rango } t(x) = \mathbb{R} - (-1,1)$



iv. El periodo de esta curva es 2π . Cada 2π se repite

v. Los máximos son locales, pues la curva crece hasta infinito, pero en un pedazo o en una localidad de ella, como es el caso de $x = 0$, $x = 2\pi$, $x = 4\pi$, ... hay un mínimo. Mientras que en $x = \pi$, $x = 3\pi$, $x = 5\pi$, ... hay un máximo. En general hay un mínimo local en los puntos $x = 2k\pi$ y hay un máximo local en los puntos $x = (2k + 1)\pi$ para cualquier número entero k .

5. Considera las gráficas de las funciones $f(x) = \sen x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \tan x$ y grafica las funciones siguientes. Indica el periodo de la curva y si existen *valles* o *crestas*.

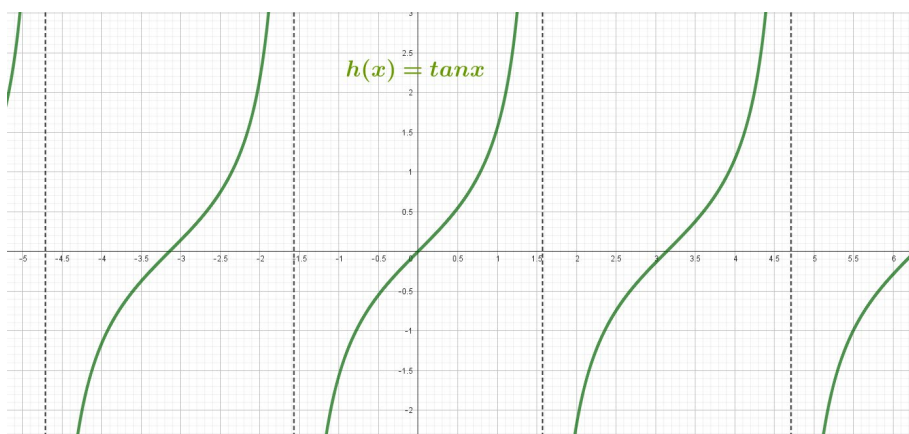
| | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---|
| $t(x) = \cos(x - 3)$ | $q(x) = \tan(x + 4)$ | $q(x) = \tan(x + 4)$ |
| $t(x) = \sen(4x)$ | $r(x) = \sen(2x - 3)$ | $r(x) = \cos(2x)$ |
| $u(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ | $p(x) = \sen\left(\frac{x}{2}\right)$ | $r(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right) - 4$ |
| $q(x) = \tan(x) - 2$ | $r(x) = 2 \tan(x)$ | $t(x) = \frac{\tan(x)}{3}$ |
| $u(x) = \frac{\sen(x + 2)}{2}$ | $u(x) = \frac{\cos(x + 2)}{2} + 3$ | $p(x) = \frac{\tan(x + 1)}{3}$ |

Ejemplo. Mostramos el ejercicio cuya función es

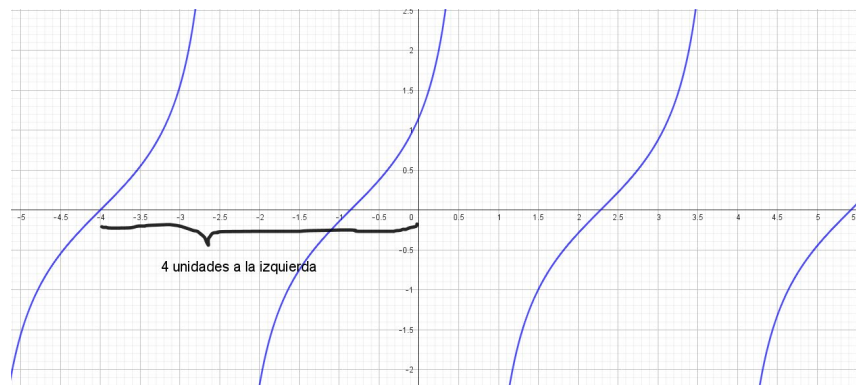
$$q(x) = \tan(x + 4)$$

Ya que antes de aplicar tangente, a la variable x se le suma 4, significa que la gráfica que se conoce para, $h(x) = \tan x$ se recorre hacia la izquierda

Gráfica de $\tan x$



Gráfica de $q(x) = \tan(x + 4)$



El periodo de la curva es de $2\pi - 4$, y no existen *valles* o *crestas*.

Propuesta de evaluación

Tanto los ejercicios como la tabla de especificaciones y la propuesta de examen de evaluación toman como base el propósito general de la unidad. En este sentido se consideran como temáticas estructurales de la unidad

- *modelar situaciones de comportamiento periódico*
- *extensión del concepto de razón trigonométrica a función trigonométrica*
- Dominio real y radianes en las gráficas de funciones trigonométricas

Por esta razón la introducción de un concepto como es el caso de una *función armónica* se omite en los ejercicios pues requiere de conceptos que no se relacionan con el propósito general y con los aprendizajes previos. Si bien una de las aplicaciones más relevantes y que destacan el uso de funciones trigonométricas son la transformadas de Laplace, se evidenciaría una carencia para dar sustento y validez a la introducción de esta temática con el marco teórico propuesto por el Colegio que es el uso de modelos de situaciones reales, ya que se requiere de un análisis más exhaustivo al respecto para valorar distintas estrategias que permitan este sustento. Por otro lado, es importante distinguir que la razón descrita por la longitud de los lados un triángulo rectángulo, es el medio por el cual se establece una relación entre un ángulo y un valor real dado que se describe como función trigonométrica, de aquí la relevancia que toma la descripción de valores reales asociados a ángulos que se miden en grados y por ello en la evaluación se propone que el alumno reflexione en torno a estas nuevas funciones y su utilidad más allá de observar la relación con un triángulo rectángulo, pues esto restringe el uso de tales funciones a números reales positivos.

Es importante entonces enunciar aquí el propósito de la unidad descrito en el Programa de Estudios

Propósito general

Comprender la extensión del concepto de razón trigonométrica a función trigonométrica. Estudiar las funciones seno y coseno en su forma característica de variación y el análisis de sus parámetros. Modelar situaciones de comportamiento periódico para resolver problemas

Tabla de especificaciones

| <div> <div>Aprendizajes</div> <div>Temática</div> </div> | Conocimiento 30% | Comprensión 25% | Desarrollo 20% | Aplicación 25% |
|--|--|---|--|--|
| | Identificar las razones que corresponden a las expresiones trigonométricas en el círculo unitario | Identificar las razones que corresponden a las expresiones trigonométricas en el plano cartesiano. | Y en un triángulo rectángulo | . |
| | Manejar la relación biunívoca entre ángulos y recta numérica. Obtener la gráfica de las funciones seno y coseno. | Manejar los parámetros (Amplitud, período, fase y frecuencia) de una función armónica . Transformaciones. | Interpretar en el modelo gráfico (función creciente, decreciente, discontinuidad, continuidad, periodicidad y máximo o mínimo) de funciones trigonométricas. | Resolver problemas que genera una función trigonométrica |
| | 1 (1.5 puntos) | 1 (1.25 puntos) | 1 (2puntos) | 1 (2.5 puntos) |
| | Establece la relación entre los ángulos medidos en grados y los valores reales en el eje x | Reflexiona respecto a las traslaciones y contracciones que se hacen en una función y los cambios en amplitud y periodo de una curva periódica | | |
| | 1 (1.5 puntos) | 1 (1.25 puntos) | | |

EXAMEN-EJERCICIO DE EVALUACIÓN

1) Una onda de sonido tiene un comportamiento descrito por la función $h(x) = \frac{\sin(x+3)}{2}$. Indica la región su amplitud y su periodo **(2.5 puntos)**

2) Grafica la función $F(x) = \cos(x - 2) - 3$ **(1.5 puntos)**
Representa en el plano cartesiano los valores siguientes y los radianes que le corresponden **(1.5 puntos)**

| | | | | | | | | | | |
|----------|------|------|----|-----|-----|------|------|------|------|------|
| ángulos | -90° | -45° | 0° | 45° | 90° | 135° | 180° | 225° | 270° | 315° |
| radianes | | | | | | | | | | |

i. Indica el dominio de la función **(0.5 puntos)**

ii. Indica el rango o imagen de la función **(0.5 puntos)**

iii. Indica si existen valles o crestas **(1. puntos)**

3) Dado que la gráfica de $f(x) = \sec x$ es la siguiente

a) Grafica la función $t(x) = 2 \sec(x + 1) - 3$ **(1.25 puntos)**

b) Señala el periodo de esta función **(1.25 puntos)**

Bibliografía

- Angel, A. R. (1994). *Álgebra intermedia*. Edo de México, México: Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM. (2016). *Programas de estudio Cálculo Diferencial e Integral*. Ciudad de México: CCH, UNAM.
- Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM. (2020). *Protocolo de equivalencias*. Ciudad de México: CCH, UNAM.
- Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM. (2016). *Programa de Estudios, área de matemáticas, Matemáticas I a IV*. Cd Mx: UNAM.
- Consejo Académico del Bachillerato. (2012). *Aprendizajes esenciales del Bachillerato en la UNAM*. Ciudad de México: CAB, UNAM.
- Florence M. Lovaglia, Merritt A. Elmore, Donald Conway:. (1994). *Álgebra*. Ciudad de México: Harla.
- Gordon Fuller, Walter L Wilson, Henry C Miller. (1986). *Álgebra Universitaria*. Ciudad de México: Compañía Editorial Continental.
- José L Abreu, N Patricia Apodad, Javier Bracho Carpizo. (2016). *Estándares de Matemáticas para el Bachillerato en la UNAM*. Ciudad de México: SEcretaria de Desarrollo Institucional UNAM, .
- Kline, M. (2009). *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*. Ciudad de Mexico: Fondo de Cultura Económica.
- Leithold, L. (1992). *Matemáticas previas al cálculo*. Ciudad de México: Harla S.A.de C.V.
- Swokowsky, E. (1990). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Ciudad de México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Swokowsky, E. (1991). *Álgebra universitaria*. Ciudad de México: CECSA.
- Talizina, N. F. (2001). *La formación de las habilidades del pensamiento matemático*. San Luis Potosí, México: Universidad Autónoma de San Luis Potosí.