Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades
Informe de trabajo de los profesores de tiempo completo
para el periodo 2018-2019

1. DATOS GENERALES

Nombre:	MEJIA RAMOS MARTIN		
Área:	Matemáticas	**Adscripción:**	Oriente
Categoría:	Profesor de Carrera Titular "A" de Tiempo Completo Definitivo		

2. INFORME GLOBAL 2018-2019

2.1. ÁREA BÁSICA

Perfil de enseñanza:

Horario de clase:	LUNES Y MIERCOLES 17:00 A 19:00; MARTES Y JUEVES 15:00 A 19:00; VIERNES 16:00 A 19:00
Asignatura en la cual desarrolló su proyecto de enseñanza:	
· Matemáticas I Álgebra y Geometría · Matemáticas II Álgebra y Geometría	

2.2. ÁREA COMPLEMENTARIA

Perfil de enseñanza o comisionado:

Título completo del proyecto:	Paquete para la evaluación extraordinaria de la asignatura de Matemáticas I
Producto (con base en el Protocolo de equivalencias):	· Paquete para la evaluación extraordinaria de un curso. (Rubro I, Nivel C, Numeral 13)
Inserción en el Campo de Actividad aprobado por el H. Consejo Técnico para el proyecto de trabajo del periodo 2018-2019.	
Campo 3. Diseño y elaboración de materiales didácticos para la aplicación de los Programas de Estudio Actualizados	

3. Actividad individual o grupal:

Tipo de proyecto:			Grupal	
Participación en un grupo de trabajo institucional:			Coordinador	
Integrantes del grupo de trabajo				
Nombre	**RFC**	**Categoría académica**	**Correo electrónico**	**Plantel de adscripción**
AGUILAR PASCUAL LETICIA (Coordinador)	AUPL6607286B8	Profesor Asignatura "A" Definitivo	leticia.aguilar@cch.unam.mx	Oriente
MEJIA RAMOS MARTIN (Coordinador)	MERM690530TE5	Profesor de Carrera Titular "A" de Tiempo Completo Definitivo	mejiarmartin@yahoo.com.mx	Oriente
CABRERA ORTIZ ARACELI (Integrante)	CAOA590530MS9	Profesor Asignatura "A" Interino	araceli.cabrera@cch.unam.mx	Oriente
GOMEZ PEREZ MARIA ELENA (Integrante)	GOPE5012263R3	Profesor Asignatura "B" Definitivo	maria.gomez@cch.unam.mx	Oriente
MARTINEZ ABRAJAN PEDRO LUIS (Integrante)	MAAP510217JF7	Profesor Asignatura "A" Interino	pemaabra@hotmail.com	Oriente
MARTINEZ ALVARADO NOEMI (Integrante)	MAAN760804216	Profesor Asignatura "B" Definitivo	abinma7@hotmail.com	Oriente
MOLINA GUZMAN FRANCISCO MARIO (Integrante)	MOGF6610107R8	Profesor Asignatura "A" Interino	fmario2006@yahoo.com.mx	Oriente
OLIVERA MARTINEZ MARIA DEL CARMEN (Integrante)	OIMC650622LP0	Profesor Asignatura "B" Definitivo	mcom_olivera@yahoo.com.mx	Oriente
SOSA GOMEZ VICTOR AGUSTIN (Integrante)	SOGV510514GN4	Profesor Asignatura "A" Interino	victor_sosag@yahoo.com.mx	Oriente
WALDO HERNANDEZ JOSE LUIS (Integrante)	WAHL5810192K6	Profesor Asignatura "A" Definitivo	jose.waldo@cch.unam.mx	Oriente
Periodicidad y horario de las reuniones:		Mensual, las reuniones se programan a las 13 horas		

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
CONSEJO TÉCNICO

OFICIO CCH/CT/6195/2018
Número de Acta: CT/CCH/18/2018
Asunto: *Notificación sobre Proyecto de Trabajo*

MEJÍA RAMOS MARTÍN
PROFESOR DE CARRERA TITULAR "A" DE TIEMPO COMPLETO DEFINITIVO
PLANTEL ORIENTE
ÁREA DE MATEMÁTICAS
P R E S E N T E

Por medio de la presente, me es grato comunicar a usted que el H. Consejo Técnico del Colegio de Ciencias y Humanidades, en su sesión celebrada el día de hoy, con fundamento en los artículos 56, 60 y 61 del Estatuto del Personal Académico de la Universidad Nacional Autónoma de México así como en las Prioridades y Lineamientos Institucionales para Orientar los Planes y Programas de Trabajo de las Instancias de la Dirección y los Proyectos e Informes del Personal Académico de Carrera de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades para el Ciclo Escolar 2018-2019 y en la Normatividad para la Presentación y Evaluación de Proyectos e Informes Anuales del Personal Académico de Carrera; aprobados por el Consejo Técnico en sesión extraordinaria del 03 de mayo de 2018, tomó el siguiente:

ACUERDO

Considerar Aceptado su Proyecto de Trabajo 2018-2019:
Área Básica del 06/08/2018 al 05/08/2019. Enseñanza
Área Complementaria del 06/08/2018 al 05/08/2019. Coordina Actividad Grupal
Campo: 3. Diseño y elaboración de materiales didácticos para la aplicación de los Programas de Estudio Actualizados.
Título: *PAQUETE PARA LA EVALUACIÓN EXTRAORDINARIA DE LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICAS I*
Producto: *Paquete para la evaluación extraordinaria de un curso*

Fundamentación:

Su Proyecto de Docencia o Área Básica 2018-2019 SE ACEPTA porque:

a) Fundamenta su actividad docente tomando como referencia los parámetros institucionales de pertinencia, calidad y trascendencia.
b) Presenta la planeación general de las principales actividades que realizarán el profesor y los alumnos durante el curso de las asignaturas de Matemáticas I y II. Álgebra y Geometría.
c) Describe la evaluación diagnóstica que realizará para conocer los conocimientos previos de los alumnos.
d) Expone las actividades académicas con las que atenderá a los alumnos que presenten dificultades para lograr los aprendizajes propuestos.
e) Presenta el diseño de dos estrategias o secuencias didácticas que aplicará en su curso, una por semestre, de acuerdo con la definición institucional.
f) Justifica cómo estas estrategias o secuencias didácticas permitirán a los alumnos alcanzar los aprendizajes propuestos.
g) Especifica las formas y/o los instrumentos de evaluación de los aprendizajes esperados.
h) Describe de manera general la relación entre su Proyecto de Área Básica y su Proyecto de Área Complementaria.
i) Incluye las fuentes consultadas en las que apoya su proyecto.

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
CONSEJO TÉCNICO

OFICIO CCH/CT/6195/2018
Número de Acta: CT/CCH/18/2018
Asunto: *Notificación sobre Proyecto de Trabajo*

Su Proyecto de Apoyo a la Docencia o Área Complementaria 2018-2019 SE ACEPTA, dado que:

a) En la introducción indica el Campo de Actividad, los objetivos, la fundamentación y los alcances del Proyecto.
b) Explica cómo, a través del producto(s) o actividad(es), atenderá el propósito general del Campo de Actividad seleccionado.
c) Presenta la(s) actividad(es) y/o producto(s) que se compromete a desarrollar de acuerdo con las definiciones institucionales.
d) Menciona los resultados esperados del Proyecto, indicando la pertinencia, calidad y trascendencia de la(s) actividad(es) y/o producto(s).
e) Presenta el calendario o cronograma de actividades que precisa las formas de organización del trabajo.
f) Indica los compromisos, las responsabilidades y actividades a realizar por cada uno de los integrantes del grupo de trabajo (coordinadores y participantes).
g) Especifica los recursos humanos y materiales requeridos para el desarrollo del proyecto.
h) Incluye las fuentes consultadas que apoyan su proyecto.
i) Anexa las cartas-compromiso actualizadas y firmadas por los profesores de asignatura, que trabajarán de forma voluntaria en el proyecto.

Por lo anteriormente expuesto, se emite una evaluación de **ACEPTADO** sobre su Proyecto de Trabajo.

(El proyecto que por su naturaleza y/o campo de actividad requiera ser revisado y avalado por el comité de pares, tendrá que ser enviado a la instancia correspondiente para que sea sancionado).

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 4 de octubre de 2018.

LA SECRETARIA DEL CONSEJO TÉCNICO

DRA. MARÍA LETICIA DE ANDA MUNGUÍA

c.c.p. Lic. Víctor Efraín Peralta Terrazas.- Director del Plantel Oriente.
Consejo Académico del Área
Archivo del Consejo Técnico.
Expediente del Interesado.

Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades
Ficha de identificación del proyecto de trabajo de los profesores de tiempo completo para el periodo 2018-2019

1. DATOS GENERALES

Nombre:	MEJIA RAMOS MARTIN		
Área:	Matemáticas	**Adscripción:**	Oriente
Categoría:	Profesor de Carrera Titular "A" de Tiempo Completo Definitivo		

2. PROYECTO GLOBAL DEL PROFESOR

2.1. ÁREA BÁSICA

Perfil de enseñanza:

Horario de clase:	LUNES Y MIERCOLES 17:00 A 19:00; MARTES Y JUEVES 15:00 A 19:00; VIERNES 16:00 A 19:00
Asignatura en la cual desarrollará su proyecto de enseñanza:	
· Matemáticas I Álgebra y Geometría · Matemáticas II Álgebra y Geometría	

2.2. ÁREA COMPLEMENTARIA

Perfil de enseñanza o comisionado:

Título completo del proyecto:	Paquete para la evaluación extraordinaria de la asignatura de Matemáticas I
Producto (con base en el Protocolo de equivalencias):	· Paquete para la evaluación extraordinaria de un curso. (Rubro I, Nivel C, Numeral 13)
Inserción en el Campo de Actividad aprobado por el H. Consejo Técnico para el proyecto de trabajo del periodo 2018-2019.	
Campo 3. Diseño y elaboración de materiales didácticos para la aplicación de los Programas de Estudio Actualizados	

Acepto el compromiso de cubrir 40 horas de formación docente.

3. Actividad individual o grupal:

Tipo de proyecto:			Grupal	
Participación en un grupo de trabajo institucional:			Coordinador	
Integrantes del grupo de trabajo				
Nombre	**RFC**	**Categoría académica**	**Correo electrónico**	**Plantel de adscripción**
AGUILAR PASCUAL LETICIA (Coordinador)	AUPL6607286B8	Profesor Asignatura "A" Interino	leticia.aguilar@cch.unam.mx	Oriente
MEJIA RAMOS MARTIN (Coordinador)	MERM690530TE5	Profesor de Carrera Titular "A" de Tiempo Completo Definitivo	mejiarmartin@yahoo.com.mx	Oriente
CABRERA ORTIZ ARACELI (Integrante)	CAOA590530MS9	Profesor Asignatura "A" Interino	araceli.cabrera@cch.unam.mx	Oriente
GOMEZ PEREZ MARIA ELENA (Integrante)	GOPE5012263R3	Profesor Asignatura "B" Definitivo	maria.gomez@cch.unam.mx	Oriente
MARTINEZ ABRAJAN PEDRO LUIS (Integrante)	MAAP510217JF7	Profesor Asignatura "A" Interino	pemaabra@hotmail.com	Oriente
MARTINEZ ALVARADO NOEMI (Integrante)	MAAN760804216	Profesor Asignatura "B" Definitivo	abinma7@hotmail.com	Oriente
MOLINA GUZMAN FRANCISCO MARIO (Integrante)	MOGF6610107R8	Profesor Asignatura "A" Interino	fmario2006@yahoo.com.mx	Oriente
OLIVERA MARTINEZ MARIA DEL CARMEN (Integrante)	OIMC650622LP0	Profesor Asignatura "B" Definitivo	mcom_olivera@yahoo.com.mx	Oriente
SOSA GOMEZ VICTOR AGUSTIN (Integrante)	SOGV510514GN4	Profesor Asignatura "A" Interino	victor_sosag@yahoo.com.mx	Oriente
WALDO HERNANDEZ JOSE LUIS (Integrante)	WAHL5810192K6	Profesor Asignatura "A" Definitivo	jose.waldo@cch.unam.mx	Oriente
Periodicidad y horario de las reuniones:		Mensual, las reuniones se programan a las 13 horas		

México, D. F., a 22 de junio de 2018

Lic. Víctor Efraín Peralta Terrazas
Director del Plantel Oriente del CCH
Presente

Por este medio nos dirigimos a Usted con el fin de presentarle nuestro proyecto de trabajo, los que suscriben Profesores Martín Mejía Ramos y Leticia Aguilar Pascual coordinaremos el grupo de trabajo, denominado Grupo 401C de acuerdo al apartado C del cuadernillo “Orientaciones para el desarrollo de los proyectos de apoyo a la docencia o área complementaria 2018-2019” del suplemento especial de la Gaceta del CCH (Número 13) de fecha 4 de mayo de 2018.

a) Introducción donde se indique el Campo de Actividad, los objetivos, la fundamentación y los alcances del Proyecto

Desarrollaremos nuestro trabajo en el Campo 3. Diseño y elaboración de materiales didácticos para la aplicación de los Programas de Estudio Actualizados.

Este Campo de Actividad tiene como propósito apoyar la puesta en práctica de los Programas de Estudio Actualizados mediante el diseño de materiales didácticos innovadores, congruentes con los postulados del Modelo Educativo del Colegio.

Este proyecto forma parte de las prioridades del Colegio y pretende llenar un vacío existente por la falta de materiales para apoyar a los profesores y estudiantes con material adecuado a los nuevos programas de estudio, específicamente el de la asignatura de Matemáticas I. Se pretende que este material, esté disponible tanto para profesores, como para alumnos que, de manera autodidacta, quieran estudiar para acreditar la asignatura o para mejorar la comprensión de algún aprendizaje en particular.

b) Explicación de cómo, a través de los productos o actividades, atenderá el propósito general del Campo de Actividad seleccionado

Uno de los elementos importantes que se reiteran en el proceso de enseñanza aprendizaje es la necesidad de contar con guías que contribuyan al trabajo del docente en el aula. En esta labor del docente es relevante integrar al Profesorado de asignatura del Colegio, ya que el Profesor de Carrera asume dicha práctica en el marco de una organización y participación académica, misma que contribuye a la formación docente al integrar la discusión, participación y retroalimentación de la experiencia que se da en el aula, al mismo tiene elementos de suma importancia en la reflexión de la práctica docente.

La intención de trabajar en un proyecto de estas características para la asignatura de Matemáticas I, es apoyar el seguimiento y evaluación de los Programas de Matemáticas

c) Actividades y/o productos que se compromete a desarrollar de acuerdo con

las definiciones institucionales

El Proyecto es un **"Paquete para la evaluación extraordinaria del curso de Matemáticas I".** Que, de acuerdo con el protocolo, pertenece al RUBRO I, nivel C, numeral 13 y que a la letra dice**:** Es el conjunto estructurado de lineamientos, criterios e instrumentos para la evaluación extraordinaria que permite evaluar los aprendizajes que se señalan para el curso. Incluye: a) Guía para el examen extraordinario, b) Banco de reactivos, c) tres modelos de examen, generados del banco de reactivos. El paquete debe estar revisado y avalado por un comité de pares, la guía publicada y los exámenes aplicados.

d) Resultados esperados del Proyecto, indicando la pertinencia, calidad y trascendencia de la actividad o producto

Consideramos que el trabajo es ***pertinente***, ya que toma como referencia el plan de estudios y los programas del CCH, así como su modelo educativo, el centro de los programas de matemáticas son los aprendizajes de los alumnos, donde los saberes se construyen, sus conceptos y métodos surgen de un proceso ligado a la resolución de problemas. La actividad fundamental para lograr un ser analítico, lógico y crítico, toma en cuenta las tecnologías digitales, pensamos que no desplazan a las ya existentes, ni son la solución mágica del problema del aprendizaje; se concibe a la matemática como una disciplina con un carácter dual[1], la tecnología cuenta con el potencial para apoyar algunos procesos de enseñanza y aprendizaje. dadas las características del mismo, esto es, un material didáctico donde el Profesor y los alumnos tendrán un material adecuado a las características del Colegio y al nuevo programa de estudios de la asignatura; La ***calidad*** se concretará en las características del producto, su a) coherencia entre los propósitos y sus aprendizajes y estrategias. en b) en el grado de claridad y presentación completa de las estrategias y actividades de aprendizaje, c) En la especificidad y grado de profundidad de los materiales de apoyo, d) en las propuestas de los instrumentos y las estrategias utilizadas para la evaluación del aprendizaje elaborados por Profesores de asignatura y su revisión por los Profesores de Carrera. Respecto a la ***trascendencia***, se pretende alcanzarla cumpliendo en su totalidad los puntos anteriores respecto a la pertinencia y a su calidad, agregando una componente: la innovación en la medida que los Profesores y alumnos lo reflejen en su labor cotidiana, y esta componente respecto a la trascendencia se intentará sistematizarla a lo largo de todo el trabajo, pudiendo lograrse en cierto grado, ya que la actividad docente es una labor compleja y en constante cambio y con replanteamientos en su práctica. Asimismo, su trascendencia será el uso que los Profesores y alumnos hagan de él.

e) Calendario o cronograma de actividades que precise las formas de organización del trabajo. En el caso de grupos institucionales se incluirá: distribución, periodicidad y horarios de las reuniones, que deberán programarse fuera del horario de clases y dentro de las instalaciones del Colegio.

VER ANEXO 1

f) Actividades a realizar por cada uno de los integrantes del grupo de trabajo (coordinadores y participantes), señalando las responsabilidades y compromisos que en lo individual les corresponderán.

El grupo de trabajo institucional, está compuesto por 9 Profesores de asignatura y por 1 Profesor de Carrera, y consideramos que se ajusta totalmente a las prioridades del Colegio establecidas en el cuadernillo "Orientaciones para el desarrollo de los proyectos de apoyo a la docencia o área complementaria 2018-2019.

Las actividades de cada uno de los integrantes del grupo serán:

Martín Mejía Ramos
Coordinar el grupo de trabajo
Asistir a las sesiones de trabajo
Elaborar material didáctico de la asignatura
Organizar el material elegido
Participar en la elaboración del informe final

Leticia Aguilar Pascual
Coordinar el grupo de trabajo
Asistir a las sesiones de trabajo
Elaborar material didáctico de la asignatura
Organizar el material elegido
Participar en la elaboración del informe final

Araceli Cabrera Ortíz
Asistir a las sesiones de trabajo
Elaborar material didáctico de la asignatura
Organizar el material elegido
Participar en la elaboración del informe final

María Elena Gómez Pérez
Asistir a las sesiones de trabajo
Elaborar material didáctico de la asignatura
Organizar el material elegido
Participar en la elaboración del informe final

Pedro Luis Martínez Abraján
Asistir a las sesiones de trabajo
Elaborar material didáctico de la asignatura
Organizar el material elegido
Participar en la elaboración del informe final

Noemí Martínez Alvarado

Asistir a las sesiones de trabajo
Elaborar material didáctico de la asignatura
Organizar el material elegido
Participar en la elaboración del informe final

Francisco Mario Molina Guzmán

Asistir a las sesiones de trabajo
Elaborar material didáctico de la
asignatura Organizar el material elegido
Participar en la elaboración del informe final

María del Carmen Olivera Martínez

Asistir a las sesiones de trabajo
Elaborar material didáctico de la asignatura
Organizar el material elegido
Participar en la elaboración del informe final

Víctor Agustín Sosa Gómez

Asistir a las sesiones de trabajo
Elaborar material didáctico de la asignatura
Organizar el material elegido
Participar en la elaboración

José Luis Waldo Hernández

Asistir a las sesiones de trabajo
Elaborar material didáctico de la asignatura
Organizar el material elegido
Participar en la elaboración

g) Recursos humanos y materiales viables que se requerirán para el desarrollo del proyecto.

Hojas blancas

Lápices

bolígrafos

Equipo de Cómputo: Computadora actualizada, impresora, escanner, acceso a internet

Un cubículo para trabajar

Fuentes de consulta para la elaboración del proyecto

1. Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, Programa *de estudios Actualizados, UNAM,* 2016.

2. Colegio de Ciencias y Humanidades*. Cuadernillo de Orientaciones 2018-2019*. Suplemento especial. Gaceta CCH. Número 3, 3 de mayo de 2018.
3. Suplemento especial de la gaceta CCH. Protocolo de equivalencias. número 4, 23 de mayo de 2008

Sin más por el momento le enviamos un cordial saludo.

Atentamente

Coordinadores del Grupo de Trabajo 401C-2

Profr. Martín Mejía Ramos	Profra. Leticia Aguilar Pascual

P.D. Cartas compromiso en ANEXO 2

c.c.p. Profr. Lauro Arturo Herrera Morales. Jefe de Sección del Área de Matemáticas. **Plan**tel Oriente

ANEXO 1 Cronograma de Actividades

NOMBRE DEL PROYECTO		*Paquete para la evaluación extraordinaria de Matemáticas I*										
N°	ACTIVIDAD	MES										
		Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio
1	Distribución de actividades de acuerdo al Proyecto	10										
2	Primera entrega de trabajos por los Profesores		21									
3	Revisión del material de la Primera entrega		21→	→19								
4	Segunda entrega de trabajos por los profesores			19								
5	Revisión del material de la Primera entrega			19								
6	Revisión del material de la Segunda entrega			19→	→23							
7	Tercera entrega de trabajo de los Profesores				23							
8	Revisión del material de la tercera entrega				23→	→18						
9	Cuarta entrega del trabajo de los Profesores					18						
10	Revisión del material de la cuarta entrega					25→	→22					
11	Discusión del material entregado y revisado						22					
12	Edición del material revisado						22→	→22				
13	Sesión para elaborar informe							22→	→19	→17		
14	Discusión del Informe								→19	→17		
15	Revisión del Documento final										→14	→28
16	Entrega											28

ANEXO 2 CARTAS COMPROMISO

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL ORIENTE
JEFATURA DE SECCIÓN
ÁREA DE MATEMÁTICAS
24/06/2018
RECIBIDO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL ORIENTE
JEFATURA DE SECCIÓN
ÁREA DE MATEMÁTICAS
28/07/2019
RECIBIDO

H. CONSEJO TÉCNICO DE LA ESCUELA NACIONAL
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
P R E S E N T E

Por este medio, manifiesto mi decisión de participar **voluntariamente** durante el ciclo escolar 2018-2019, en el Grupo de Trabajo 401C-2, coordinado por el Profesor Martín Mejía Ramos y Leticia Aguilar Pascual, cuyo producto o actividad es: "Paquete para la evaluación extraordinaria de Matemáticas I" **Rubro** I **Nivel C Numeral 13** de acuerdo al Glosario de Términos.[1]

Por tal motivo me comprometo a cumplir con la normatividad relativa al funcionamiento de los grupos de trabajo. [2]

- Participar **únicamente** en este grupo de trabajo.
- Realizar las actividades que el responsable o coordinador me asigne.
- Asistir a las sesiones que convoque el responsable o coordinador, **sin afectar** la atención de mis grupos escolares.

Si por algún motivo personal o laboral no continuara colaborando con el grupo de trabajo, lo notificaré **por escrito** al H. Consejo Técnico, en la Secretaría General de la DG, con copia al Consejo Académico, a la Jefatura de Sección del plantel o Departamento y al coordinador o responsable del grupo de trabajo, dentro de un plazo no mayor a los 60 días naturales de haber iniciado el ciclo escolar (**15 de octubre de 2018**).

A t e n t a m e n t e

Cd. Mx., a 20 de junio de 2018

Nombre y Firma del profesor(a): Araceli Cabrera Ortíz

RFC: CAOA590530MS9

Plantel de adscripción: Oriente

---

[1] "Glosario de Términos" *del Protocolo de Equivalencias para el Ingreso y la Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades para el Ingreso y Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades (2008) y/o la Actualización del Glosario de Términos del Protocolo de Equivalencias para el Ingreso y Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades (2011).*

[2] Reglas para el Reconocimiento, Creación y Funcionamiento de los Grupos de Trabajo Institucionales *(2012)*

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
SECRETARÍA ACADÉMICA
24/08/2018
CONSEJO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS
REVISADO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

H. CONSEJO TÉCNICO DE LA ESCUELA NACIONAL
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
P R E S E N T E

Por este medio, manifiesto mi decisión de participar **voluntariamente** durante el ciclo escolar 2018-2019, en el Grupo de Trabajo 401C-2, coordinado por el Profesor Martín Mejía Ramos y Leticia Aguilar Pascual, cuyo producto o actividad es: "Paquete para la evaluación extraordinaria de Matemáticas I" **Rubro** I **Nivel C Numeral 13** de acuerdo al Glosario de Términos.[3]

Por tal motivo me comprometo a cumplir con la normatividad relativa al funcionamiento de los grupos de trabajo. [4]

- Participar **únicamente** en este grupo de trabajo.
- Realizar las actividades que el responsable o coordinador me asigne.
- Asistir a las sesiones que convoque el responsable o coordinador, **sin afectar** la atención de mis grupos escolares.

Si por algún motivo personal o laboral no continuara colaborando con el grupo de trabajo, lo notificaré **por escrito** al H. Consejo Técnico, en la Secretaría General de la DG, con copia al Consejo Académico, a la Jefatura de Sección del plantel o Departamento y al coordinador o responsable del grupo de trabajo, dentro de un plazo no mayor a los 60 días naturales de haber iniciado el ciclo escolar (**15 de octubre de 2018**).

A t e n t a m e n t e

Cd. Mx., a 20 de junio de 2018

Nombre y Firma del profesor(a): Francisco Mario Molina Guzmán

RFC: MOGF6610107R8

Plantel de adscripción: Oriente

[3] "Glosario de Términos" *del Protocolo de Equivalencias para el Ingreso y la Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades para el Ingreso y Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades (2008) y/o la Actualización del Glosario de Términos del Protocolo de Equivalencias para el Ingreso y Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades (2011).*
[4] Reglas para el Reconocimiento, Creación y Funcionamiento de los Grupos de Trabajo Institucionales *(2012)*

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

H. CONSEJO TÉCNICO DE LA ESCUELA NACIONAL
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
P R E S E N T E

Por este medio, manifiesto mi decisión de participar **voluntariamente** durante el ciclo escolar 2018-2019, en el Grupo de Trabajo 401C-2, coordinado por el Profesor Martín Mejía Ramos y Leticia Aguilar Pascual, cuyo producto o actividad es: "Paquete para la evaluación extraordinaria de Matemáticas I" **Rubro I Nivel C Numeral 13** de acuerdo al Glosario de Términos.[1]

Por tal motivo me comprometo a cumplir con la normatividad relativa al funcionamiento de los grupos de trabajo.[2]

- Participar **únicamente** en este grupo de trabajo.
- Realizar las actividades que el responsable o coordinador me asigne.
- Asistir a las sesiones que convoque el responsable o coordinador, **sin afectar** la atención de mis grupos escolares.

Si por algún motivo personal o laboral no continuara colaborando con el grupo de trabajo, lo notificaré **por escrito** al H. Consejo Técnico, en la Secretaría General de la DG, con copia al Consejo Académico, a la Jefatura de Sección del plantel o Departamento y al coordinador o responsable del grupo de trabajo, dentro de un plazo no mayor a los 60 días naturales de haber iniciado el ciclo escolar (**15 de octubre de 2018**).

Atentamente

Cd. Mx., a 20 de junio de 2018

Nombre y Firma del profesor(a): Leticia Aguilar Pascual

RFC: AUPL6607286B8

Plantel de adscripción: Oriente

[1] "Glosario de Términos" *del Protocolo de Equivalencias para el Ingreso y la Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades para el Ingreso y Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades (2008) y/o la Actualización del Glosario de Términos del Protocolo de Equivalencias para el Ingreso y Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades (2011).*
[2] Reglas para el Reconocimiento, Creación y Funcionamiento de los Grupos de Trabajo Institucionales *(2012)*

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

H. CONSEJO TÉCNICO DE LA ESCUELA NACIONAL
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
P R E S E N T E

Por este medio, manifiesto mi decisión de participar **voluntariamente** durante el ciclo escolar 2018-2019, en el Grupo de Trabajo 401C-2, coordinado por el Profesor Martín Mejía Ramos y Leticia Aguilar Pascual, cuyo producto o actividad es: "Paquete para la evaluación extraordinaria de Matemáticas I" **Rubro** I **Nivel C Numeral 13** de acuerdo al Glosario de Términos.[5]

Por tal motivo me comprometo a cumplir con la normatividad relativa al funcionamiento de los grupos de trabajo. [6]

- Participar **únicamente** en este grupo de trabajo.
- Realizar las actividades que el responsable o coordinador me asigne.
- Asistir a las sesiones que convoque el responsable o coordinador, **sin afectar** la atención de mis grupos escolares.

Si por algún motivo personal o laboral no continuara colaborando con el grupo de trabajo, lo notificaré **por escrito** al H. Consejo Técnico, en la Secretaría General de la DG, con copia al Consejo Académico, a la Jefatura de Sección del plantel o Departamento y al coordinador o responsable del grupo de trabajo, dentro de un plazo no mayor a los 60 días naturales de haber iniciado el ciclo escolar (**15 de octubre de 2018**).

A t e n t a m e n t e

Cd. Mx., a 20 de junio de 2018

Nombre y Firma del profesor(a): María Elena Gómez Pérez Ma Elena Gómez Pérez.

RFC: GOPE5012263R3

Plantel de adscripción: Oriente

[5] "Glosario de Términos" *del Protocolo de Equivalencias para el Ingreso y la Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades para el Ingreso y Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades (2008) y/o la Actualización del Glosario de Términos del Protocolo de Equivalencias para el Ingreso y Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades (2011).*
[6] Reglas para el Reconocimiento, Creación y Funcionamiento de los Grupos de Trabajo Institucionales *(2012)*

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

H. CONSEJO TÉCNICO DE LA ESCUELA NACIONAL
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PRESENTE

Por este medio, manifiesto mi decisión de participar **voluntariamente** durante el ciclo escolar 2018-2019, en el Grupo de Trabajo 401C-2, coordinado por el Profesor Martín Mejía Ramos y Leticia Aguilar Pascual, cuyo producto o actividad es: “Paquete para la evaluación extraordinaria de Matemáticas I” **Rubro I Nivel C Numeral 13** de acuerdo al Glosario de Términos.[1]

Por tal motivo me comprometo a cumplir con la normatividad relativa al funcionamiento de los grupos de trabajo.[2]

- Participar **únicamente** en este grupo de trabajo.
- Realizar las actividades que el responsable o coordinador me asigne.
- Asistir a las sesiones que convoque el responsable o coordinador, **sin afectar** la atención de mis grupos escolares.

Si por algún motivo personal o laboral no continuara colaborando con el grupo de trabajo, lo notificaré **por escrito** al H. Consejo Técnico, en la Secretaría General de la DG, con copia al Consejo Académico, a la Jefatura de Sección del plantel o Departamento y al coordinador o responsable del grupo de trabajo, dentro de un plazo no mayor a los 60 días naturales de haber iniciado el ciclo escolar (**15 de octubre de 2018**).

Atentamente

Cd. Mx., a 20 de junio de 2018

Nombre y Firma del profesor(a): Pedro Luis Martínez Abraján

RFC: MAAP510217JF7

Plantel de adscripción: Oriente

[1] “Glosario de Términos” *del Protocolo de Equivalencias para el Ingreso y la Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades para el Ingreso y Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades (2008) y/o la Actualización del Glosario de Términos del Protocolo de Equivalencias para el Ingreso y Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades (2011).*

[2] Reglas para el Reconocimiento, Creación y Funcionamiento de los Grupos de Trabajo Institucionales *(2012)*

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

H. CONSEJO TÉCNICO DE LA ESCUELA NACIONAL
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
P R E S E N T E

Por este medio, manifiesto mi decisión de participar **voluntariamente** durante el ciclo escolar 2018-2019, en el Grupo de Trabajo 401C-2, coordinado por el Profesor Martín Mejía Ramos y Leticia Aguilar Pascual, cuyo producto o actividad es: “Paquete para la evaluación extraordinaria de Matemáticas I” **Rubro** I **Nivel C Numeral 13** de acuerdo al Glosario de Términos.[7]

Por tal motivo me comprometo a cumplir con la normatividad relativa al funcionamiento de los grupos de trabajo. [8]

- Participar **únicamente** en este grupo de trabajo.
- Realizar las actividades que el responsable o coordinador me asigne.
- Asistir a las sesiones que convoque el responsable o coordinador, **sin afectar** la atención de mis grupos escolares.

Si por algún motivo personal o laboral no continuara colaborando con el grupo de trabajo, lo notificaré **por escrito** al H. Consejo Técnico, en la Secretaría General de la DG, con copia al Consejo Académico, a la Jefatura de Sección del plantel o Departamento y al coordinador o responsable del grupo de trabajo, dentro de un plazo no mayor a los 60 días naturales de haber iniciado el ciclo escolar (**15 de octubre de 2018**).

A t e n t a m e n t e

Cd. Mx., a 20 de junio de 2018

Nombre y Firma del profesor(a): Noemí Martínez Alvarado

RFC: MAAN760804216

Plantel de adscripción: Oriente

[7] “Glosario de Términos” *del Protocolo de Equivalencias para el Ingreso y la Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades para el Ingreso y Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades (2008) y/o la Actualización del Glosario de Términos del Protocolo de Equivalencias para el Ingreso y Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades (2011).*
[8] Reglas para el Reconocimiento, Creación y Funcionamiento de los Grupos de Trabajo Institucionales *(2012)*

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

H. CONSEJO TÉCNICO DE LA ESCUELA NACIONAL
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
P R E S E N T E

Por este medio, manifiesto mi decisión de participar **voluntariamente** durante el ciclo escolar 2018-2019, en el Grupo de Trabajo 401C-2, coordinado por el Profesor Martín Mejía Ramos y Leticia Aguilar Pascual, cuyo producto o actividad es: “Paquete para la evaluación extraordinaria de Matemáticas I” **Rubro** I **Nivel C Numeral 13** de acuerdo al Glosario de Términos.[9]

Por tal motivo me comprometo a cumplir con la normatividad relativa al funcionamiento de los grupos de trabajo. [10]

- Participar **únicamente** en este grupo de trabajo.
- Realizar las actividades que el responsable o coordinador me asigne.
- Asistir a las sesiones que convoque el responsable o coordinador, **sin afectar** la atención de mis grupos escolares.

Si por algún motivo personal o laboral no continuara colaborando con el grupo de trabajo, lo notificaré **por escrito** al H. Consejo Técnico, en la Secretaría General de la DG, con copia al Consejo Académico, a la Jefatura de Sección del plantel o Departamento y al coordinador o responsable del grupo de trabajo, dentro de un plazo no mayor a los 60 días naturales de haber iniciado el ciclo escolar (**15 de octubre de 2018**).

A t e n t a m e n t e

Cd. Mx., a 20 de junio de 2018

Nombre y Firma del profesor(a): María del Carmen Olivera Martínez

RFC: OICM650622LP0

Plantel de adscripción: Oriente

[9] “Glosario de Términos” *del Protocolo de Equivalencias para el Ingreso y la Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades para el Ingreso y Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades (2008) y/o la Actualización del Glosario de Términos del Protocolo de Equivalencias para el Ingreso y Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades (2011).*
[10] Reglas para el Reconocimiento, Creación y Funcionamiento de los Grupos de Trabajo Institucionales *(2012)*

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

H. CONSEJO TÉCNICO DE LA ESCUELA NACIONAL
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
P R E S E N T E

Por este medio, manifiesto mi decisión de participar **voluntariamente** durante el ciclo escolar 2018-2019, en el Grupo de Trabajo 401C-2, coordinado por el Profesor Martín Mejía Ramos y Leticia Aguilar Pascual, cuyo producto o actividad es: "Paquete para la evaluación extraordinaria de Matemáticas I" **Rubro** I **Nivel C Numeral 13** de acuerdo al Glosario de Términos.[11]

Por tal motivo me comprometo a cumplir con la normatividad relativa al funcionamiento de los grupos de trabajo. [12]

- Participar **únicamente** en este grupo de trabajo.
- Realizar las actividades que el responsable o coordinador me asigne.
- Asistir a las sesiones que convoque el responsable o coordinador, **sin afectar** la atención de mis grupos escolares.

Si por algún motivo personal o laboral no continuara colaborando con el grupo de trabajo, lo notificaré **por escrito** al H. Consejo Técnico, en la Secretaría General de la DG, con copia al Consejo Académico, a la Jefatura de Sección del plantel o Departamento y al coordinador o responsable del grupo de trabajo, dentro de un plazo no mayor a los 60 días naturales de haber iniciado el ciclo escolar (**15 de octubre de 2018**).

A t e n t a m e n t e

Cd. Mx., a 20 de junio de 2018

Nombre y Firma del profesor(a): Víctor Agustín Sosa Gómez

RFC: SOGV510514GN4

Plantel de adscripción: Oriente

[11] "Glosario de Términos" *del Protocolo de Equivalencias para el Ingreso y la Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades para el Ingreso y Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades (2008) y/o la Actualización del Glosario de Términos del Protocolo de Equivalencias para el Ingreso y Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades (2011).*
[12] Reglas para el Reconocimiento, Creación y Funcionamiento de los Grupos de Trabajo Institucionales *(2012)*

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

H. CONSEJO TÉCNICO DE LA ESCUELA NACIONAL
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
P R E S E N T E

Por este medio, manifiesto mi decisión de participar **voluntariamente** durante el ciclo escolar 2018-2019, en el Grupo de Trabajo 401C-2, coordinado por el Profesor Martín Mejía Ramos y Leticia Aguilar Pascual, cuyo producto o actividad es: "Paquete para la evaluación extraordinaria de Matemáticas I" **Rubro** I **Nivel C Numeral 13** de acuerdo al Glosario de Términos.[13]

Por tal motivo me comprometo a cumplir con la normatividad relativa al funcionamiento de los grupos de trabajo. [14]

- Participar **únicamente** en este grupo de trabajo.
- Realizar las actividades que el responsable o coordinador me asigne.
- Asistir a las sesiones que convoque el responsable o coordinador, **sin afectar** la atención de mis grupos escolares.

Si por algún motivo personal o laboral no continuara colaborando con el grupo de trabajo, lo notificaré **por escrito** al H. Consejo Técnico, en la Secretaría General de la DG, con copia al Consejo Académico, a la Jefatura de Sección del plantel o Departamento y al coordinador o responsable del grupo de trabajo, dentro de un plazo no mayor a los 60 días naturales de haber iniciado el ciclo escolar (**15 de octubre de 2018**).

A t e n t a m e n t e

Cd. Mx., a 20 de junio de 2018

Nombre y Firma del profesor(a): José Luis Waldo Hernández

RFC: WAHL5810192K6

Plantel de adscripción: Oriente

[13] "Glosario de Términos" *del Protocolo de Equivalencias para el Ingreso y la Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades para el Ingreso y Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades (2008) y/o la Actualización del Glosario de Términos del Protocolo de Equivalencias para el Ingreso y Promoción de los Profesores Ordinarios de Carrera del Colegio de Ciencias y Humanidades (2011).*
[14] Reglas para el Reconocimiento, Creación y Funcionamiento de los Grupos de Trabajo Institucionales *(2012)*

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL ORIENTE

Paquete para la evaluación extraordinaria de un curso (Matemáticas I)

EL PROYECTO SE INSERTA EN EL CAMPO 3 APROBADO POR EL CONSEJO
TÉCNICO, RUBRO I-C, NUMERAL 13 DEL PROTOCOLO DE EQUIVALENCIAS Y EN EL RUBRO B DEL PRIDE

INFORME DE AREA COMPLEMENTARIA 2018-2019

Aguilar Pascual Leticia (coordinadora)	Profr. Asig. “A” Definitivo
Cabrera Ortíz Araceli	Profr. Asig. “A” Interina
Gómez Pérez María Elena	Profr. Asig. “B” Definitivo
Martínez Abraján Pedro Luis	Profr. Asig. Interino
Martínez Alvarado Noemí	Profr. Asig. “B” Definitivo
Mejía Ramos Martín (Coordinador)	Profr. Titular “A” T/C Definitivo
Molina Guzmán Francisco	Profr. Asig. “A” Interino
Olivera Martínez Ma. Del Carmen	Profr. Asig. “B” Definitivo
Sosa Gómez Víctor Agustín	Profr. Asig. “A” Interino
Waldo Hernández José Luis	Profr. Asig. “A” Definitivo

Cd. de México, a 29 de julio de 2019

Lic. Víctor Efraín Peralta Terrazas
Director del CCH Plantel Oriente

P r e s e n t e

Por este medio nos dirigimos a Usted con el fin de presentarle nuestro informe de trabajo, los que subscriben Profesores Martín Mejía Ramos y Leticia Aguilar Pascual, coordinadores el grupo de trabajo, adscrito al Área de Matemáticas del Plantel Oriente, realizamos el trabajo denominado:

“*Paquete para la evaluación extraordinaria de un curso (Matemáticas I)*”

1) Introducción

De acuerdo al apartado III del cuadernillo de Orientaciones 2018-2019, especificaciones para la presentación y evaluación de informes de área básica y complementaria, del suplemento especial de la Gaceta CCH (Número 4) de fecha 3 de mayo del 2018, desarrollamos nuestro trabajo en el Campo 3. Diseño y elaboración de materiales didácticos para la aplicación de los Programas de Estudio Actualizados. Los objetivos de este Campo de Actividad son: a) apoyar la puesta en práctica de los programas de estudio actualizados mediante el, b) diseño de materiales didácticos innovadores, congruentes con los postulados del Modelo Educativo del Colegio.

En el mismo documento, se establecen las actividades para este Campo, entre las que se incluyen los proyectos para la instrumentación, seguimiento y evaluación de los programas actualizados, del que forma parte el proyecto del que ahora presentamos el informe: “***Paquete para la evaluación extraordinaria de un curso (Matemáticas I)***”, el cual se enmarca en el Rubro I, Nivel C, numeral 13 y que de acuerdo al Protocolo de equivalencias para el ingreso y promoción de los profesores ordinarios de carrera del colegio de Ciencias y Humanidades, 3ª. Versión 2008a la letra dice: “Es el conjunto estructurado de lineamientos, criterios e instrumentos para la evaluación extraordinaria que permite evaluar los aprendizajes que se señalan para el curso. Incluye: a) Guía para el examen extraordinario, b) Banco de reactivos, c) tres modelos de examen generados del banco de reactivos. El paquete debe estar revisado y avalado por un comité de pares, la guía publicada y los exámenes aplicados”.
El alcance de nuestro proyecto, se ve reflejado en nuestro producto que anexamos en el presente documento, el cual debe ser puesto a consideración de los profesores del área para su reflexión y consulta.

2) Descripción de las actividades o los productos

Como ya se mencionó en el párrafo anterior, el paquete para la evaluación extraordinaria de un curso, está compuesto de las siguientes partes (anexo 2):

***a) Guía para el examen extraordinario**:* La guía para examen extraordinario, Rubro I-B, es el documento auxiliar para la preparación de un reconocimiento extraordinario, impreso o en línea, elaborado colegiadamente, con base en el programa de la asignatura. Incluye: a) Introducción, b) Instrucciones, c) presentación de cada unidad, indicando los conceptos clave, d) sugerencias de actividades de aprendizaje teórico- prácticas, e) formas de autoevaluación o verificación del aprendizaje, f) bibliografía básica y complementaria. Debe estar aprobada por la Dirección del plantel y ser utilizada en un periodo de exámenes. Esto último no se pudo llevar a cabo dado que se requiere más tiempo para su aplicación.

b) Banco de reactivos: Es la elaboración de banco de reactivos de evaluación, impresos o en línea, organizados conforme a los aprendizajes del programa y sus propósitos, ordenados según su grado de complejidad, el cual puede ser subjetivo, y depende del criterio del profesor. Se presentan más de cien en total para que los alumnos puedan practicar lo aprendido en sus cursos normales o de manera autodidacta.

c) Tres modelos de examen, generados del banco de reactivos: Los tres exámenes que se proponen son realizados de acuerdo al criterio del profesor y auxiliados en una tabla de especificaciones como guía. La tabla de especificaciones es un auxiliar en el proceso de la elaboración de los exámenes, lo que permite cumplir con tres características que deben cumplir las pruebas escritas: ser objetivas, válidas y confiables. La validez en esta ocasión, lamentablemente no la pudimos concretar porque el tiempo fue insuficiente. El proceso de validación requería aplicar las pruebas a los estudiantes, sin embargo, pretendemos retomar este asunto en una ocasión futura.

3) Una explicación sobre cómo se atendió el propósito general del Campo de Actividad seleccionado a través de las actividades o los productos desarrollados (pertinencia).

Uno de los objetivos principales que plantea el Campo 3, al que pertenece este informe, es la necesidad de diseñar materiales didácticos innovadores, congruente con los postulados básicos del Modelo Educativo del Colegio; además de apoyar la puesta en práctica de los Programas de Estudio. Para ello surge necesidad de contar con guías que contribuyan a reforzar la comprensión de los aprendizajes de manera clara y suficiente para los estudiantes y también apoyen la labor del docente con numerables estrategias de enseñanza e ideas que converjan en mejorar su trabajo en el aula. En este sentido, consideramos que nuestro producto ***es pertinente***, pues contribuye a mejorar la comprensión de los aprendizajes propuestos en los Programas de estudio vigentes por parte de los estudiantes, debido a que está basado en el enfoque, propósitos, aprendizajes y contenidos temáticos del Programa vigente, está ajustado al modelo educativo del Colegio y al nivel de bachillerato, con un lenguaje adecuado para los estudiantes. También se ajustó a las prioridades y necesidades institucionales del Colegio y se puede poner en práctica, dado que se operó bajo las condiciones institucionales del colegio.

La intención principal de trabajar en la asignatura de Matemáticas I, es apoyar el seguimiento y evaluación de los Programas de Matemáticas, así como ofrecer y facilitar a los alumnos que necesiten de los aprendizajes de esta asignatura de primer semestre materiales de fácil comprensión para continuar con las siguientes etapas de su aprendizaje sin las complicaciones que implican el no poseer las habilidades requeridas para su comprensión. Los alumnos se verán beneficiados al contar con materiales diseñados específicamente para lograr aprendizajes específicos, lo que contribuirá a disminuir los índices de reprobación en estas asignaturas debidos a la incomprensión de los temas tratados. También los profesores podrán contar con materiales suficientes para poder trabajar en el aula o para apoyarse en asesorar a los alumnos que se acerquen a pedirles consulta de algún aspecto en particular de la asignatura.

4) Valoración de las actividades y/o los productos, indicando su calidad y trascendencia.

El trabajo realizado por el grupo de trabajo muestra la importancia de la participación de los profesores de asignatura y se plasma la aportación de conocimientos y experiencia del profesor de Carrera. Finalmente el trabajo se pondrá a disposición de la academia de Matemáticas para su aplicación y en consecuencia su ***trascendencia*** radica en que tiene actualidad, pues está basado en los contenidos del Plan de Estudios vigente y está basado en las definiciones del glosario de Términos del Protocolo de Equivalencias del CCH. Consideramos que si se cuenta con una valoración positiva de pares a este trabajo, se podrá publicar en algún tiraje impreso y podrán estar disponibles en línea para su fácil consulta de los miembros de la comunidad universitaria del Colegio que los necesite. La ***calidad*** de este paquete se aprecia en que hace aportaciones dirigidas a docentes y alumnos encaminadas a una fácil comprensión de los aprendizajes por parte de los alumnos y como guía a docentes y alumnos. Consideramos que cubre con suficiencia una necesidad institucional de proponer materiales novedosos y suficientes. También consideramos que las actividades propuestas en la Guía refuerzan la intención para alcanzar los aprendizajes y aportan un rico bagaje didáctico que tanta falta hace en esta asignatura. Se presentan ideas y ejercicios con más de cien reactivos en total para dar confianza y seguridad a los alumnos que necesiten ese apoyo presentados en un lenguaje claro, pero sin perder el rigor que la materia exige.

5) Reseña de las actividades desarrolladas por cada integrante

Como se menciona en el proyecto, el grupo de trabajo institucional, está compuesto por 8 Profesores de asignatura y por un profesor de Carrera. Es importante mencionar que por decisión personal, un profesor de asignatura, el profesor Francisco Mario Molina Guzmán no pudo colaborar en ninguna actividad y no pudimos contar con su valioso apoyo.
La forma de trabajar fue en reuniones mensuales tipo seminario, reuniones en las cuales se exponían y discutían las actividades progresivas que se iban generando ***(Anexo 1)***; además de estas reuniones, se realizaban otras organizadas en grupos de 4 o 3 profesores. En cada grupo se establecían las tareas específicas a desarrollar.

Las actividades desarrolladas por cada uno de los integrantes fueron las siguientes:

Leticia Aguilar Pascual
Coordinó el grupo de trabajo
Presidió las sesiones de trabajo
Revisó el material didáctico producido por el grupo Elaboró material didáctico de la asignatura
Organizó el material elegido
Participó en la elaboración del informe final
Realizó las gestiones pertinentes para el buen funcionamiento del grupo
Su trabajo fue satisfactorio. Y tuvo una asistencia de 100%

Martín Mejía Ramos
Coordinó el grupo de trabajo
Presidió las sesiones de trabajo
Revisó el material didáctico producido por el grupo Elaboró material didáctico de la asignatura
Organizó el material elegido
Participó en la elaboración del informe final
Realizó las gestiones pertinentes para el buen funcionamiento del grupo
Su trabajo fue satisfactorio. Y tuvo una asistencia de 100%

Araceli Cabrera Ortíz
Asistió a las sesiones de trabajo
Elaboró material didáctico de la asignatura Organizó el material elegido
Participó en la edición de los documentos finales.
Participó en la elaboración del informe final
Su trabajo fue satisfactorio. Y tuvo una asistencia de 100%

María Elena Gómez Pérez
Asistió a las sesiones de trabajo
Elaboró material didáctico de la asignatura Organizó el material elegido
Participó en la edición de los documentos finales.
Participó en la elaboración del informe final
Su trabajo fue satisfactorio. Y tuvo una asistencia de 100%

Pedro Luis Martínez Abraján
Asistió a las sesiones de trabajo
Elaboró material didáctico de la asignatura Organizó el material elegido
Participó en la edición de los documentos finales.
Participó en la elaboración del informe final
Su trabajo fue satisfactorio. Y tuvo una asistencia de 100%

Noemí Martínez Alvarado
Asistió a las sesiones de trabajo
Elaboró material didáctico de la asignatura Organizó el material elegido
Participó en la edición de los documentos finales.
Participó en la elaboración del informe final
Su trabajo fue satisfactorio. Y tuvo una asistencia de 100%

Francisco Mario Molina Guzmán
El profesor no pudo colaborar con el grupo de trabajo.

María del Carmen Olivera Martínez
Asistió a las sesiones de trabajo
Elaboró material didáctico de la asignatura Organizó el material elegido
Participó en la elaboración del informe final
Su trabajo fue satisfactorio. Y tuvo una asistencia de 100%

Víctor Agustín Sosa Gómez
Asistió a las sesiones de trabajo
Elaboró material didáctico de la asignatura Organizó el material elegido
Participó en la edición de los documentos finales.
Participó en la elaboración del informe final
Su trabajo fue satisfactorio. Y tuvo una asistencia de 100%

José Luis Waldo Hernández
Asistió a las sesiones de trabajo
Elaboró material didáctico de la asignatura Organizó el material elegido

Participó en la edición de los documentos finales.
Participó en la elaboración del informe final
Su trabajo fue satisfactorio. Y tuvo una asistencia de 100%

6) *Evaluación global del grupo de trabajo y una reflexión sobre su funcionamiento y desempeño*.

En resumen, el trabajo realizado cumple con todos los requisitos y prioridades establecidos en los documentos correspondientes. El producto **Paquete para la evaluación extraordinaria de un curso (Matemáticas I)** se ajusta al 100% al nuevo programa de estudios de la signatura de Matemáticas I y forma parte de las prioridades y lineamientos institucionales para orientar los planes y proyectos de académicos del Colegio.

Los profesores trabajaron con entusiasmo, pues el intercambio de opiniones con profesores de asignatura enriquece la experiencia didáctica y aporta elementos de integración al Modelo del Colegio. Todo ello contribuye al perfil de formación de un docente en el CCH.
Por lo anterior, consideramos importante que existan más oportunidades de superación de los profesores de manera permanente, ya sea a través de seminarios que aborden diferentes temas de interés para los docentes y mediante el apoyo no escatimado a la oferta de Programas de Maestrías y Doctorados en diversas áreas de interés para los docentes en instituciones nacionales o extranjeras. Hace falta más interés por parte del colegio en la formación de sus profesores materializados en convenios para estudios de Posgrado donde éstos se oferten de manera transparente a todos los miembros de la comunidad. Lo anterior contribuirá a una mejora continua y permanente en beneficio de nuestros alumnos.

De cualquier modo, éste fue un buen trabajo de intercambio docente, aprendizaje conjunto, y realización de diversas estrategias materializadas en este paquete que servirá como herramienta de apoyo y contribuirá bastante y significativa a la labor del profesor en el aula, y al estudiante en su preparación.

7) *Fuentes consultadas en las que se apoyó el informe*

1) ALSINA, (1998) et. al., *Enseñar matemáticas*, GRAÓ.
2) Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, (2008). *Protocolo de equivalencias 3ª versión 2008*.
3) Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, (2018). *Cuadernillo Orientaciones 2018-2019*.
DE LA PEÑA, JOSÉ ANTONIO (Coompilador), (2008). *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México*. México, Editorial Siglo XXI.

4) DIAZ BARRIGA ARCEO, HERNÁNDEZ ROJAS, (1998). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. MC GRAW HILL, México, 1998.
5) DIAZ BARRIGA ANGEL (compilador), (1993). *El examen; textos para su historia y debate*. UNAM, México.
6) ESCAMILLA GONZÁLEZ AMPARO, (2009). Las competencias en la programación de aula, tomos, GRAÓ.
7) IMBERNÓN FRANCISCO, (2007). *La formación permanente del profesorado. Nuevas ideas para formar en la innovación y el cambio*, de la serie 10 ideas clave, núm. 4. Editorial Graó, Barcelona.

Sin más por el momento se despiden de Usted

Atentamente Coordinadores del Grupo de Trabajo

Leticia Aguilar Pascual

Martín Mejía Ramos

Ccp. Profr. Lauro Arturo Herrera Morales. Jefe de Sección del Área de Matemáticas. Plantel Oriente

ANEXO 1
MINUTAS

Aguilar Pascual Leticia (coordinadora)	Profr. Asig. “A” Definitivo
Cabrera Ortíz Araceli	Profr. Asig. “A” Interina
Gómez Pérez María Elena	Profr. Asig. “B” Definitivo
Martínez Abraján Pedro Luis	Profr. Asig. Interino
Martínez Alvarado Noemí	Profr. Asig. “B” Definitivo
Mejía Ramos Martín (Coordinador)	Profr. Titular “A” T/C Definitivo
Molina Guzmán Francisco	Profr. Asig. “A” Interino
Olivera Martínez Ma. Del Carmen	Profr. Asig. “B” Definitivo
Sosa Gómez Víctor Agustín	Profr. Asig. “A” Interino
Waldo Hernández José Luis	Profr. Asig. “A” Definitivo

U.N.A.M.
C.C.H. ORIENTE.
GRUPO DE TRABAJO 2018-2019
“ Paquete para la evaluación extraordinaria del curso de Matemáticas I”

Minuta de la sesión realizada por el grupo 401C el día 10 de agosto de 2018

La sesión da inicio a las 13:20 hrs. La profesora Leticia Aguilar Pascual, interviene para informar en qué consiste específicamente el trabajo a desarrollar durante el presen*te período, informa que se trabajará en la realización de un Paquete para la evaluación extraordinaria de un curso, específicamente el de la asignatura de Matemáticas I*. El Profesor Martín Mejía Ramos complementa la información y menciona lo que establece el protocolo de equivalencias para este trabajo. Describe las especificaciones establecidas en el protocolo de equivalencias y propone que se divida el grupo en dos para trabajar dos documentos, es decir, la guía para el examen extraordinario y un banco de reactivos. Que el paquete para la evaluación extraordinaria contempla los siguientes aspectos: a) una guía para el examen extraordinario, b) un banco de reactivos y c) tres modelos de exámenes extraordinarios.

El Profesor José Luis Waldo, pregunta si se puede trabajar con algún material que se ya haya realizado antes, en general los asistentes consideran que no debe existir ningún problema, solo se sugiere que trabajemos acorde al programa actual de estudios de la asignatura. El Profesor Víctor Sosa menciona que debemos estar comunicados y sugiere que se haga un directorio con los correos y teléfonos de todos los integrantes del grupo. Queda dicho que todos los trabajos se realizarán en Word en letra Arial de 12 puntos.

La profesora Araceli Cabrera, informa a los asistentes que, en períodos anteriores, se publicó un libro para Matemáticas IV, en ese tiempo el programa solo contemplaba Geometría Analítica, lo pone a disposición de los integrantes del grupo. Lo enviará al correo electrónico de cada uno, y que son libres de utilizar los materiales si lo consideran necesario.

La María Elena Gómez Pérez, pregunta que como nos vamos a organizar, que si son dos grupos cada uno trabajará por separado. La profesora Noemí Martínez Alvarado reitera que el trabajo será coordinado en dos equipos y que las sesiones se realizarán con todos los integrantes.

Se procede a conformar los dos grupos de trabajo: Para la Guía se proponen los Profesores Martín Mejía, Araceli Cabrera, Noemí Martínez Alvarado y José Luis Waldo. Para la elaboración de reactivos, los Profesores Leticia Aguilar Pascual, Carmen Olivera, Ma. Elena Gómez, Víctor Sosa y Pedro Martínez.

Se acuerda que en la siguiente reunión cada grupo debe traer ejercicios tipo.

Se da por terminada la reunión a las 14:30 hrs y se cita para el día 21 de septiembre de 2018 a las 13 hrs.

Lista de asistencia a la reunión del Grupo de Trabajo 2018-2019 del día 10 de agosto de 2018: "Paquete para la evaluación extraordinaria del curso de Matemáticas I"

Profra. Leticia Aguilar Pascual	
Profra. Araceli Cabrera Ortíz	
Profra. María Elena Gómez Pérez	Ma Elena Gómez Pérez
Profr. Pedro Luis Martínez Abraján	
Profra. Noemí Martínez Alvarado	
Profr. Martín Mejía Ramos	
Profr. Francisco Mario Molina Guzmán	
Profra. María del Carmen Olivera Martínez	
Profr. Víctor Agustín Sosa Gómez	
Profr. José Luis Waldo Hernández	

Minuta de la sesión realizada por el grupo 401C el día 21 de septiembre de 2018

La sesión da comienzo a las 13 hrs. La Profesora Leticia Aguilar solicita a los integrantes del grupo que informen sobre lo realizado hasta el momento. El Profesor Víctor Sosa toma la palabra e informa que se reunieron para estructurar de qué forma iban a trabajar, que revisaron el programa de la asignatura y acordaron que todos los del equipo trabajaran por unidades, en el orden que lo establece el programa de estudios de la asignatura, que ya comenzaron a trabajar con la unidad uno. El Profesor Martín Mejía les recuerda que debemos realizar dos documentos, en primera instancia, que se denominan Guía para examen extraordinario de matemáticas I, que va incluido en el paquete para la evaluación extraordinaria de matemáticas I, y un paquete para la evaluación extraordinaria que involucra elaborar un banco de reactivos por aprendizaje y unidad. La Profesora Araceli Cabrera en el uso de la palabra menciona que ya comenzaron a trabajar material para la primera unidad y que la estructuran de acuerdo con los temas y aprendizajes del programa, menciona que en la próxima sesión presentarán lo realizado.

El Profesor José Luis Waldo y la Profesora Noemí Martínez informan que acorde con lo propuesto por el Profesor Francisco J. Rodríguez, el tema de trigonometría lo estructuran acorde a los aprendizajes que marca el programa, estableciendo los conceptos de una manera que apoyen al Profesor que imparte la asignatura de Matemáticas III. La Profesora Dolores Martínez muestra la demostración del seno de la suma de dos ángulos y lo ponen a consideración, ejemplifican con ello como se irá trabajando la unidad. El equipo se compromete que para la próxima sesión lo traerán ya estructurada la unidad.

La Profesora Leticia Aguilar propone que se estructuren los dos documentos por unidad y colocar los aprendizajes como guía y que el material didáctico se estructure como anexos.

El Profesor Pedro Martínez pregunta si es posible que se estructure de la manera que los productos cumplan con el protocolo de equivalencias, esto con el fin de tener más trabajos para promoción. Se considera la propuesta.

Se da por terminada la reunión a las 14:50 hrs y se cita para el día 19 de octubre de 2018 a las 13 hrs.

Lista de asistencia a la reunión del Grupo de Trabajo 2018-2019 del día 21 de septiembre de 2018: "Paquete para la evaluación extraordinaria del curso de Matemáticas I".

Profra. Leticia Aguilar Pascual

Profra. Araceli Cabrera Ortíz

Profra. María Elena Gómez Pérez — Ma Elena Gómez Pérez

Profr. Pedro Luis Martínez Abraján

Profra. Noemí Martínez Alvarado

Profr. Martín Mejía Ramos

Profr. Francisco Mario Molina Guzmán

Profra. María del Carmen Olivera Martínez

Profr. Víctor Agustín Sosa Gómez

Profr. José Luis Waldo Hernández

Minuta de la sesión realizada por el grupo 401C el día 19 de octubre de 2018

La sesión da comienzo a las 13:10 hrs. El Profesor Martín Mejía propone que se presente el material elaborado hasta el momento por parte de los dos equipos. El Profesor Víctor Sosa y el Profesor Pedro Martínez presentan el material realizado para la unidad de El significado de los números y sus operaciones básicas, se proyecta lo realizado y se hacen observaciones, se toma nota y el equipo se compromete a terminarlo. La Profesora Carmen Olivera menciona que ya han comenzado a trabajar la segunda unidad referente a variación directamente proporcional y funciones lineales, solicita que si hay sugerencias de enfoques se les hagan llegar.

A continuación, La Profesora Leticia Aguilar y la profesora Elena Gómez presentan el material didáctico que han realizado para la unidad 1. Se comprometen a estructurar los dos trabajos acordes a lo que se ha decidido en las reuniones.

La Profesora Leticia Aguilar solicita que la apoyen con bibliografía para la unidad del significado de los números y que presenten problemas que se presentan al impartir el tema y como lo solucionan.

Por otra parte, la Profesora Leticia Aguilar vuelve a tomar la palabra para referirse a la unidad 2, propone que se hagan ejemplos y ejercicios acordes a la realidad de los alumnos y se considere utilizar parte de ese material con los ajustes necesarios y nuevas aportaciones para el banco de reactivos.

El Profesor Martín Mejía se compromete a imprimir los teléfonos y correos electrónicos de todos los miembros del equipo y presentarlo en la próxima se sesión.

Se solicita que para la próxima reunión se tenga trabajo sobre la unidad 2, y se les recuerda que el programa es extenso. Por lo anterior se solicita a los compañeros que se presente buen avance la próxima reunión.

Se da por terminada la reunión a las 14:50 hrs y se cita para el día 22 de noviembre a las 13 hrs.

Lista de asistencia a la reunión del Grupo de Trabajo 2018-2019 del día 19 de octubre de 2018: "Paquete para la evaluación extraordinaria del curso de Matemáticas I".

Profra. Leticia Aguilar Pascual

Profra. Araceli Cabrera Ortíz

Profra. María Elena Gómez Pérez — Ma Elena Gómez Pérez

Profr. Pedro Luis Martínez Abraján

Profra. Noemí Martínez Alvarado

Profr. Martín Mejía Ramos

Profr. Francisco Mario Molina Guzmán

Profra. María del Carmen Olivera Martínez

Profr. Víctor Agustín Sosa Gómez

Profr. José Luis Waldo Hernández

Minuta de la sesión realizada por el grupo 401C el día 22 de noviembre de 2018

Da comienzo la sesión a las 13:04 hrs. Se comienza con la presentación de las dos partes de la unidad 1: el significado de los números y sus operaciones básicas, se realiza la exposición y se hacen observaciones por parte de los dos equipos de trabajo. Se toman en consideración y se hacen los cambios sugeridos.

A continuación, el Profesor Víctor Sosa y el Profesor Pedro Martínez presentan la parte de material didáctico sobre la unidad 2, que han realizado los compañeros, muestran un avance del 60%, se hacen algunas preguntas y observaciones.

La Profesora Leticia Aguilar comenta que sí se pueden proponer algunos cambios al programa, se sugiere que mientras contenga lo que se solicita no hay problema, se propone que se siga el orden del programa, que en todo caso podríamos realizar un anexo donde se propongan algunos cambios.

La Profesora Araceli Cabrera y el Profesor José Luis Waldo presentan lo que realizó su equipo referente a la unidad 1, números y operaciones; se les propone que introduzcan actividades de aprendizaje y que propongan bibliografía actualizada sobre lo realizado. El avance es de 50%.

Se propone que para la siguiente reunión se pueda traer el trabajo completo sobre la unidad 2. Se presentan algunas objeciones, ya que es el fin de semestre, sin embargo, se menciona que las siguientes unidades son más extensas.

La Profesora Noemí Martínez y la profesora Carmen Olivera cuestionan el orden del programa, mencionan que se debe tratar primero cuestiones históricas y luego definir un conjunto. La Profra. Leticia Aguilar reitera que sigamos el orden del programa y que lo hagamos de una manera accesible, se deja pendiente el punto.

El profesor Martín Mejía comenta que para elaborar los reactivos de cada unidad, se debe tener claro el aprendizaje que se pretende evaluar. La profesora Araceli Cabrera comenta que ella va a traer la siguiente sesión una propuesta de examen para su validación. La profesora Leticia Aguilar comenta que el Protocolo pide que los exámenes sean realizados con los reactivos, pero que los exámenes no deben ser el único factor a evaluar.

Se da por terminada la reunión a las 15:15 hrs y se cita para el día 16 de enero a las 13 hrs.

Lista de asistencia a la reunión del Grupo de Trabajo 2018-2019 del día 22 de noviembre de 2018: " Paquete para la evaluación extraordinaria del curso de Matemáticas I".

Profra. Leticia Aguilar Pascual	
Profra. Araceli Cabrera Ortíz	
Profra. María Elena Gómez Pérez	Ma Elena Gómez Pérez
Profr. Pedro Luis Martínez Abraján	
Profra. Noemí Martínez Alvarado	
Profr. Martín Mejía Ramos	
Profr. Francisco Mario Molina Guzmán	
Profra. María del Carmen Olivera Martínez	
Profr. Víctor Agustín Sosa Gómez	
Profr. José Luis Waldo Hernández	

Minuta de la sesión realizada por el grupo 401C el día 16 de enero de 2019

La sesión comienza a las 13:30 hrs. El Profesor Martín Mejía propone que solo la dediquemos a presentar el trabajo realizado de la primera unidad, que estamos iniciando el semestre y hay que terminar la unidad uno, se acepta la propuesta.

Los Profesores Leticia Aguilar, Carmen Olivera y la Profra. Ma. Elena Gómez presentan algunos reactivos y surge la pregunta si deben ir explícitos los aprendizajes o se colocan por unidad. Se hacen observaciones, se menciona que tal vez falta agregar aprendizajes y temas, tal como se presentan en los Programas, se hacen las anotaciones y el Profesor Pedro Martínez dice que él se encarga de editar el trabajo y corregir lo acordado.

Ahora, los profesores José Luis Waldo y Araceli Cabrera, presentan la parte del trabajo que corresponde a lo que se ha denominado la guía, se hacen las observaciones a lo presentado y se hace la conexión entre ambos trabajos con el fin de darle coherencia, el Profesor Martín Mejía se encargará de editar esta parte.

Se retoma el tema de si debemos estructurar el trabajo considerando la unidad o colocar los aprendizajes y temas de cada reactivo, después de escuchar opiniones, se considera que se debería contener los aprendizajes, pero la propuesta de mantener el orden que determina el programa se debe de respetar.

Antes de terminar la sesión, los coordinadores, solicitan a los integrantes que para la siguiente reunión se traiga un avance de la unidad 3, Ecuaciones de primer grado con una incógnita.

La profesora Noemí Alvarado comenta que los reactivos deben tener cuatro incisos, mientras que la Profra. Leticia comenta que deben ser cinco. El profesor Martín comenta que es mejor no saturar las respuestas porque causa confusión, pero al final, el equipo de la profesora Leticia Aguilar comentaron que los estándares sobre reactivos determinaban que eran de cinco respuestas. Quedaron de llevar la fuente bibliográfica.

Se da por terminada la reunión a las 15:40 hrs y se cita para el día 30 de enero de 2019.

Lista de asistencia a la reunión del Grupo de Trabajo 2018-2019 del día 16 de enero de 2019: " Paquete para la evaluación extraordinaria del curso de Matemáticas I".

Profra. Leticia Aguilar Pascual ______________________

Profra. Araceli Cabrera Ortíz ______________________

Profra. María Elena Gómez Pérez Ma Elena Gómez Pérez

Profr. Pedro Luis Martínez Abraján ______________________

Profra. Noemí Martínez Alvarado ______________________

Profr. Martín Mejía Ramos ______________________

Profr. Francisco Mario Molina Guzmán ______________________

Profra. María del Carmen Olivera Martínez ______________________

Profr. Víctor Agustín Sosa Gómez ______________________

Profr. José Luis Waldo Hernández ______________________

Minuta de la sesión realizada por el grupo 401C el día 30 de enero de 2019.

La sesión da comienzo a las 13:10 hrs. La Profesora Leticia informa que hasta el momento se tiene dos unidades, que hay que darle una revisión. Menciona que la parte de números requiere una discusión para ver la profundidad del tema, en particular conceptos como conjuntos y axiomas de propiedades de las operaciones.

El Profesor Martín Mejía pregunta a los integrantes del grupo si hubo avances en la unidad 3, Ecuaciones de primer grado con una incógnita. El Profesor José Luis Waldo toma la palabra e informa que se reunieron y se trabajaron algunos puntos de la unidad 2, en particular, las diferentes formas de abordar la variación directamente proporcional, que la próxima sesión considera que ya se tendrá terminado, la profesora. Araceli Cabrera menciona que la forma general de la ecuación de la recta no se debe tratar en este ciclo, ya que es tema de matemáticas III. A continuación, el Profesor Martín Mejía informa que ya se ha avanzado en la parte de la Guía de la unidad 3, que solo faltan detalles para terminarla, se concluye el tema y se solicita por parte de la Profesora Leticia Aguilar se presenten lo avanzado de la unidad dos.

El Profesor Víctor Sosa interviene respecto al tema de Variación directamente proporcional, dice que es importante para comprender algunos fenómenos físicos, sin embargo, se cuestiona que no se incluya variación inversamente proporcional, que dejemos bases fundamentales. El Profesor Martín Mejía interviene y dice que se apeguen al programa actualizado, que si se comprende la variación directamente proporcional, se podrá comprender mejor la otra variación. Se considera la propuesta, el Profesor Waldo solicita que no se incluya la variación inversa, si acaso sólo se mencione que existe. La profesora Leticia pide se presente en forma total la unidad dos en la próxima sesión como se había acordado.

La Profesora Araceli, el Profesor Víctor Sosa y la profesora Noemí, proponen que se integren algunas prácticas con Software interactivo, en particular con Geogebra, se oyen intervenciones en contra y a favor. La profesora Carmen menciona que se puede sugerir en la guía, algunas prácticas sin desarrollarlas, se solicita que en la próxima sesión el profesor que conozca el software pueda sugerir algunas prácticas y que el que maneje el software de GeoGebra las implemente. Queda la propuesta pendiente, se decide que si algunos integrantes tienen algunas actividades prácticas estructuradas las presenten y se agregan en un apartado de la guía.

Se solicita a los integrantes se trabaje con la unidad 3, y que se presente lo avanzado en la próxima sesión.
Se da por terminada la reunión a las 15:05 hrs y se cita para el día 22 de febrero de 2019 a las 13 hrs.

Lista de asistencia a la reunión del Grupo de Trabajo 2018-2019 del día 30 de enero de 2019: "Paquete para la evaluación extraordinaria del curso de Matemáticas I".

Profra. Leticia Aguilar Pascual ______________________

Profra. Araceli Cabrera Ortíz ______________________

Profra. María Elena Gómez Pérez Ma Elena Gómez Pérez

Profr. Pedro Luis Martínez Abraján ______________________

Profra. Noemí Martínez Alvarado ______________________

Profr. Martín Mejía Ramos ______________________

Profr. Francisco Mario Molina Guzmán ______________________

Profra. María del Carmen Olivera Martínez ______________________

Profr. Víctor Agustín Sosa Gómez ______________________

Profr. José Luis Waldo Hernández ______________________

Minuta de la sesión realizada por el grupo 401C el día 22 de febrero de 2019.

Da comienzo la sesión a las 13:10 hrs. Se hacen algunos comentarios respecto al tema cómo abordar el significado de números, en particular sobre si el tema de conjuntos es necesario. La profesora Noemí propone incluir una lectura sobre el origen de los números. Se hacen algunos comentarios y se aprueba incluir una lectura sobre la historia de los números. A continuación, las Profesoras Araceli Cabrera y Carmen Olivera acuerdan que se puede definir el concepto de conjunto, se hacen observaciones al mismo y se acuerda definirlo brevemente. Sobre el orden de los temas, se acuerda respetar el programa. La Profesora Leticia Aguilar, menciona que eso debe ser un tema en un foro o un seminario. La Profesora Leticia Aguilar se compromete a trabajar sobre los materiales entregados y presentarlos la próxima sesión.

La profesora Carmen Olivera y el Profesor Víctor Sosa presentan la parte correspondiente a la guía del Profesor, Se hacen comentarios sobre el trabajo presentado y se hacen observaciones, se toma nota. el Profesor Martín Mejía menciona que trabajará con la Profesora Leticia para que los dos documentos queden compatibles, se pregunta si algún profesor se quiere integrar a trabajar en actividades de aprendizaje, se agregan el Profesor Pedro Martínez y la Profesora Ma. Elena.

La Profesora Leticia Aguilar propone que la próxima sesión se entregue lo realizado de ecuaciones de primer grado y por lo pronto se debe trabajar con el tema de Sistemas de ecuaciones lineales.

La profesora Araceli Cabrera presenta un examen y se le hicieron algunos comentarios. La profesora Leticia elaborará una tabla de especificaciones para que el examen sea objetivo y confiables. La validez no se podrá hacer porque para ellos tendrían que aplicarse en un grupo de alumnos, situación que no será posible en este periodo.

Se da por terminada la sesión a las 15:25 hrs. Y se cita para el próximo día 22 de marzo de 2019 a las 13 hrs.

Lista de asistencia a la reunión del Grupo de Trabajo 2018-2019 del día 22 de febrero de 2019: “ Paquete para la evaluación extraordinaria del curso de Matemáticas I”.

Profra. Leticia Aguilar Pascual	
Profra. Araceli Cabrera Ortíz	
Profra. María Elena Gómez Pérez	Ma Elena Gómez Pérez
Profr. Pedro Luis Martínez Abraján	
Profra. Noemí Martínez Alvarado	
Profr. Martín Mejía Ramos	
Profr. Francisco Mario Molina Guzmán	
Profra. María del Carmen Olivera Martínez	
Profr. Víctor Agustín Sosa Gómez	
Profr. José Luis Waldo Hernández	

U.N.A.M.

C.C.H. ORIENTE.

GRUPO DE TRABAJO 2018-2019

“ Paquete para la evaluación extraordinaria del curso de Matemáticas I”

Minuta de la sesión realizada por el grupo 401C el día 22 de marzo de 2019.

Da comienzo la sesión a las 13:10 hrs. La Profesora Araceli Cabrera y el Profesor José Luis Waldo presentan lo que han desarrollado de Ecuaciones de Primer grado con una incógnita, se hacen observaciones al mismo y se proponen algunos cambios, en particular sobre el orden de los temas. Al final de la presentación, el Profesor Pedro Martínez hace entrega de una serie de ejercicios para que sean considerados.

La Profesora Carmen Olivera y el Profesor Víctor Sosa presentan la parte de reactivos que trabajó el equipo correspondiente, se hace mención de la ecuación de la recta en su forma general, se menciona que el programa no lo contempla, se argumenta que será necesario para encontrar la ecuación en su forma y=mx+b. La Profesora Leticia Aguilar hace una propuesta para usar otra actividad de aprendizaje para no utilizar la ecuación general de la recta, que es tema de matemáticas III. Se menciona que la Propuesta de la Profesora Leticia es adecuada, sin embargo, algunos argumentan que en la guía se puede mencionar solamente, pero sin profundizar en su obtención, se acepta la sugerencia.

Se hace un recuento de lo que se tiene hasta el momento, los coordinadores informan que ya se imprimieron las dos primeras unidades, que hay que hacer una revisión por parte de todos, también que ya se cuenta con trabajo de la unidad 3, en lo que respecta a la guía.

Una vez discutido lo anterior, El Profesor Martín Mejía, comenta que no debemos olvidar que la guía debe hacerse pensando en que va dirigida a los alumnos, pero que también pueda ser usada por los profesores. Se propone que no se cambie el orden respecto a lo que indica el programa. La Profesora Leticia Aguilar, menciona que eso debe ser tema en un foro más general. Se acepta la moción de la Profesora Leticia. La Profesora Leticia Aguilar se compromete a trabajar una estrategia de enseñanza para integrar de alguna manera el tema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Se solicita que se trabaje ya con la unidad 4 correspondiente al tema de Sistemas de ecuaciones lineales y que se presente un avance en la próxima se sesión.

Se da por terminada la sesión a las 15:15 hrs. y se cita para el día 10 de abril a las 13 hrs.

Lista de asistencia a la reunión del Grupo de Trabajo 2018-2019 del día 22 de marzo de 2019: "Paquete para la evaluación extraordinaria del curso de Matemáticas I".

Profra. Leticia Aguilar Pascual ____________________

Profra. Araceli Cabrera Ortíz ____________________

Profra. María Elena Gómez Pérez Ma Elena Gómez Pérez

Profr. Pedro Luis Martínez Abraján ____________________

Profra. Noemí Martínez Alvarado ____________________

Profr. Martín Mejía Ramos ____________________

Profr. Francisco Mario Molina Guzmán ____________________

Profra. María del Carmen Olivera Martínez ____________________

Profr. Víctor Agustín Sosa Gómez ____________________

Profr. José Luis Waldo Hernández ____________________

Minuta de la sesión realizada por el grupo 401C el día 10 de abril de 2019.

Da comienzo la sesión a las 13:10 hrs. Al comenzar la reunión, el Profesor Martín Mejía, toma la palabra y recuerda que hace falta que se entreguen más reactivos para la unidad tres que tengan cinco incisos, como ya se había acordado. La profesora Leticia Aguilar comenta que se deben incluir las respuestas de cada reactivo, al final de cuentas son guías para auto estudio y esto brindará más seguridad a los alumnos que estudien de los reactivos y comprueban sus resultados. La profesora Noemí Martínez comenta que ha abierto una carpeta en Drive de Google para que todos los correos registrados puedan subir sus aportaciones en línea. Todos estuvimos de acuerdo, pero algunos profesores prefieren entregarlas en papel, y en las reuniones, porque no tienen acceso a internet en sus domicilios. A continuación, La Profesora Leticia Aguilar presenta la siguiente propuesta; tener todo listo antes de concluir el semestre para trabajarlo en vacaciones. Se acepta la propuesta.

A continuación, la Profesora Leticia Aguilar y el Profesor Víctor Sosa presentan lo que han desarrollado de material didáctico de la unidad de Ecuaciones lineales, se hacen observaciones al mismo y se proponen algunos cambios, en particular sobre reactivos. La Profesora Araceli Cabrera y el Profesor Waldo presentan la parte de la unidad 3 de la guía.

Se hace un recuento de lo que se tiene hasta el momento, los coordinadores informan que ya se trabajaron las tres primeras unidades, La Profesora Leticia Aguilar y el profesor Martín Mejía muestran la parte editada de unidades 1, 3 y 3. Se tiene hasta la unidad 3 y se agregaran las sugerencias mencionadas. Se propone el Profesor Pedro Martínez, la profesora Carmen Olivera y la Profesora Ma. Elena continuar con la revisión del trabajo. Los coordinadores mencionan que harán una revisión final de lo terminado y darán énfasis en la coherencia entre ambos trabajos.

Se informa que nos quedan menos de un mes para terminar el trabajo, esto es en mayo, que después son vacaciones, además que se tienen que unificar y armar los informes correspondientes. Se solicita que se realice un esfuerzo con el fin de tener lo más avanzado posible para el mes de mayo.

Se da por terminada la sesión a las 15:10 hrs. y se cita para el día 14 de mayo a las 13 hrs.

Lista de asistencia a la reunión del Grupo de Trabajo 2018-2019 del día 10 de abril de 2019: "Paquete para la evaluación extraordinaria del curso de Matemáticas I".

Profra. Leticia Aguilar Pascual ______________________

Profra. Araceli Cabrera Ortíz ______________________

Profra. María Elena Gómez Pérez Ma Elena Gómez Pérez

Profr. Pedro Luis Martínez Abraján ______________________

Profra. Noemí Martínez Alvarado ______________________

Profr. Martín Mejía Ramos ______________________

Profr. Francisco Mario Molina Guzmán ______________________

Profra. María del Carmen Olivera Martínez ______________________

Profr. Víctor Agustín Sosa Gómez ______________________

Profr. José Luis Waldo Hernández ______________________

Minuta de la sesión realizada por el grupo 401C el día 14 de mayo de 2019.

Debido a los acontecimientos del asesinato de una alumna del Plantel, y a que las autoridades del Plantel no garantizaban la seguridad de alumnos ni del personal, se suspendió la reunión que teníamos programada para este mes. Se continuó la comunicación por medio de correo electrónico y a través de Google Drive. Algunos profesores prefirieron comunicarse mediante llamadas telefónicas.

ANEXO 2

INDICE

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Participantes:

Martín Mejía Ramos
Noemí Martínez Alvarado
Víctor Agustín Sosa Gómez
José Luis Waldo Hernández

UNIDAD 1

El significado de los números y sus operaciones básicas

INTRODUCCIÓN

En los pueblos antiguos se aprendió a través de las experiencias acumuladas por el transcurso del tiempo que el contar con un sistema de numeración facilitaba tener el control de muchas actividades prioritarias para su supervivencia. Así aprendieron a operar con los números. Entidades abstractas que simbolizan el tiempo, estaciones del año, cantidad de propiedades, número de habitantes, etc.

Durante mucho tiempo los antropólogos se preguntaron acerca de la causa por la cual las civilizaciones antiguas, o tribus poco evolucionadas, podían efectuar operaciones básicas, a pesar de que muchas de ellas solamente conocían unos cuantos símbolos.

Entre los números más utilizados como base están el 5, el 10, el 20, y el 60; pero se han dado casos de sistemas numéricos de base 3, 4, 7 y 8. Nuestra actual base numérica es el 10, al parecer por el hecho de que los humanos tenemos diez dedos en las manos. A partir de esta base hemos desarrollado nuestra tecnología. La base utilizada para los procesos de cómputo es 2.

Los números naturales fueron los primeros en ser utilizados por la humanidad. Posteriormente a través de un largo proceso de desarrollo y evolución, aparecieron el cero, los números negativos, las fracciones y la concepción de los números irracionales y demás números.

Finalmente, gracias a las aportaciones de Kepler, Galileo, Fermat, Descartes, Leibniz y Newton, entre otros científicos del siglo XVII, los números reales se aceptaron, aunque no se comprendieron en su justa dimensión y así, se inició una impresionante actividad matemática con ellos, lo que desembocó en la invención de la geometría analítica, del Cálculo Diferencial e Integral, las ecuaciones Diferenciales, la comprensión del sistema solar y la generación de tecnología.

A finales del siglo XIX, como consecuencia de los resultados de investigaciones de Cauchy, Dirichlet, Dedekind, Riemann, Weierstrass y Cantor, entre otros, se conformó una teoría rigurosa de los números reales.

Importantes matemáticos como los mencionados antes, además de Laplace, Lagrange, Gauss, Euler, D'Alembert, Hamilton, Wallis, Ramanujan y muchos más en los siglos XVII, XVIII y XIX fueron configurando la actual teoría de los números complejos, la cual da origen a la teoría de las funciones analíticas y a los sistemas dinámicos holomorfos. Lo último es una herramienta muy importante en el desarrollo de la tecnología de estos momentos y del futuro.

PRESENTACIÓN.

Al finalizar esta unidad el alumno será capaz de:

- Operar con los números racionales (enteros y no enteros) y resolver problemas aritméticos, aplicando algunas heurísticas para facilitar la comprensión, la búsqueda de un plan de resolución y su ejecución, con la finalidad de que haga suyos los recursos básicos para iniciarse en el uso del lenguaje algebraico para expresar la generalidad.

Para conseguir esta ambiciosa meta, te proponemos una serie de actividades de aprendizaje, teoría y prácticas que están seguidas del aprendizaje y temática propuestas en el programa de la asignatura. Se recomienda seguirlas en el orden que se presentan, sin embargo, pueden estudiarse donde el estudiante tenga interés si considera que los conceptos que se requieren para su entendimiento ya los domina.

CONCEPTOS CLAVE

Números naturales, Números racionales, Números enteros, Números Pares, Números impares, Números Primos, dígito, notación estándar, cardinalidad, Factorización, números compuestos, factores primos, árbol de factores, múltiplos de un número, mínimo común múltiplo.

SUGERENCIAS

Este contenido está dirigido a los alumnos que desean estudiar de manera autodidacta y a su ritmo. Se recomienda seguir las actividades de aprendizaje y repasar la teoría. Seguir los ejemplos ayudará a adquirir destreza. En caso de tener preguntas, se sugiere preguntar al profesor o acudir a asesorías con dudas específicas. No está de más el hacer algunas recomendaciones a los estudiantes para que su estudio sea eficaz: leer con atención cada párrafo y comprender lo que se pide, trabajar en un lugar bien ventilado, iluminado y silencioso, sentarse cómodamente en una silla con respaldo y en una mesa libre de obstáculos y tener una libreta de notas para realizar todos los ejercicios propuestos para adquirir seguridad en esta asignatura. Probablemente alguna de estas recomendaciones no sean posibles, pero en lo general tratar de respetarlas.

Aprendizajes:

Comprende el significado de los números reales.

Temática:

Significado de los números racionales Q (enteros Z y no enteros) e irracionales I.

SUGERENCIA DE ACTIVIDADES APRENDIZAJE TEÓRICO- PRÁCTICA 1

A continuación te presentamos una tabla donde se concentran las estaturas de una muestra de 100 estudiantes del CCH. En la columna 1, se reagruparon los alumnos en grupos representativos de las diferentes estaturas. Llena los espacios de la tabla con los datos que faltan con ayuda de una calculadora si lo consideras.

1	2	3	4	5	6	7
Grupo	Estatura (m)	Núm. Alumnos	Acumulado Núm. alumnos	Razón núm alumnos (3) / total	(5) en forma de decimal	Razón acumulado (5) / total
A	1.53	4	4	$\frac{4}{100}$	0.04	0.04
B	1.58	3	7	$\frac{\quad}{100}$		0.07
C	1.63	17		$\frac{\quad}{100}$	0.17	
D	1.68	27		$\frac{27}{100}$		
E	1.73	17	68	$\frac{\quad}{100}$		
F	1.78	23		$\frac{\quad}{100}$		
G	1.83	7	98	$\frac{\quad}{100}$		
H	1.88	2		$\frac{2}{100}$	0.02	1
Total de alumnos ∑						

En la columna 1, el grupo A representa al conjunto de alumnos que miden 1.53 m de estatura.
Con la información de la tabla, responde las siguientes preguntas:

1.- ¿Qué representa el número 1.63 de la columna dos, grupo C?

____

2.- ¿Qué representa el número 2 de la columna tres, grupo H?

____

3.- ¿Cuántos alumnos tienen 1.63 m de estatura?_____

4.- ¿Cuál grupo contiene al mayor número de alumnos?_____

5.- ¿Cuál grupo contiene al menor número de alumnos?_____

6.- ¿Qué estatura representa el 27%?_____

7.- ¿Cuáles estaturas contienen hasta el 51% del número de alumnos de la muestra?_____, _______, _______ y _______.

8.- Como puedes observar, la tabla anterior contiene datos que se escriben con diferentes tipos de números: ¿los puedes identificar con una X?.

NATURALES	ENTEROS	DECIMALES	RACIONALES
REALES	NEGATIVOS	IMAGINARIOS	PARES
IMPARES	PRIMOS	NO PRIMOS	IRRACIONALES

9.- ¿Qué columnas son equivalentes?__________________

10.- ¿Qué número en decimal es equivalente al número de la columna cinco, grupo G?

Los números Racionales

Definición: El conjunto de los **números racionales** está formado por todos aquellos números que pueden obtenerse o expresarse como una fracción cuyo numerador y denominador son números enteros, siendo el denominador diferente de cero. Se les representa mediante la letra Q, que proviene de varios idiomas europeos *Quotient* (cociente).

Ejemplo: Los siguientes números son racionales: $\frac{5}{2},\ -\frac{3}{4},\ 7$

____

SUGERENCIA DE ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE TEÓRICO- PRÁCTICA 2

A continuación te presentamos un texto extraído del libro: Números Increíbles de Ian Stewart, 2016, sobre el origen de los números y su significado. Lee con cuidado y resuelve las preguntas que se proporcionan más adelante.

Números

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... ¿Hay algo más sencillo? Y no obstante son los números, quizá más que ninguna otra cosa, los que han permitido a la humanidad despegarse del lodo y tocar las estrellas.

Cada número particular tiene sus propias características y nos lleva a una variedad de áreas de matemáticas. Sin embargo, antes de examinarlos uno por uno, merece la pena echar un vistazo a tres grandes cuestiones: ¿cómo se originaron los números?, ¿cómo se desarrolló el concepto de número? y ¿qué *son* los números?

El origen de los números

Hace alrededor de 35.000 años, en el Paleolítico Superior, un humano desconocido talló 29 marcas en el peroné de un babuino. Se encontró en una cueva en la cordillera Lebombo, en Suazilandia, y se conoce como el «hueso de Lebombo». Se cree que es un palo de conteo, algo que registra números como una serie de muescas: |, ||, |||, etcétera. Hay 29,5 días en el mes lunar, de modo que podría ser un primitivo calendario lunar, o el registro del ciclo de menstruación de una mujer. O, es más, una colección aleatoria de cortes. Un hueso garabateado.

El hueso de lobo, otro palo de conteo con 55 muescas, lo encontró en Checoslovaquia, en 1937, Karl Absolon. Tiene alrededor de 30.000 años.

En 1960, el geólogo belga Jean de Heinzelin de Braucourt descubrió un peroné de babuino con muescas entre los restos de una pequeña comunidad de pescadores que había sido sepultada por un volcán en erupción. La ubicación es lo que ahora se conoce como Ishango, en la frontera entre Uganda y el Congo. Se atribuye al hueso una antigüedad de 20.000 años.

La interpretación más sencilla del hueso de Ishango es la de que se trata de un palo de conteo. Algunos antropólogos van más allá y detectan elementos de estructura aritmética, como multiplicación, división y números primos; otros creen que es un calendario lunar de seis meses; y hay quienes están convencidos de que las marcas se hicieron para proporcionar un buen agarre a una herramienta hecha de hueso y que no tienen significado matemático.

Es muy enigmático. Hay tres series de muescas. La serie central usa los números 3, 6, 4, 8, 10, 5, 7. Dos veces 3 es 6, dos veces 4 es 8 y dos veces 5 es 10; sin embargo, el orden para el par final es el inverso y 7 no encaja en el patrón en absoluto. La serie de la izquierda es 11, 13, 17, 19: los números primos del 10 al 20. La serie de la derecha proporciona los números impares 11, 21, 19, 9. Las series de derecha e izquierda suman cada una 60.

Un problema con la interpretación de patrones como este es que es difícil no encontrar un patrón en cualquier serie de números más bien pequeños. Por ejemplo, en la Tabla 1 se muestra una lista de áreas de diez islas en las Bahamas, en concreto los números 11-20 en términos

Figura 1. Parte frontal y trasera del hueso de Ishango. Museo de Ciencias Naturales de Bruselas.

de área total. Para mezclar los números en la lista he puesto las islas en orden alfabético. Te aseguro que esto es lo primero que intenté. Cierto es que la habría cambiado por otra cosa si no me hubiese válido para explicar mi propósito, pero funcionó, así que no la cambié.

¿Qué notamos en este «patrón» de números? Hay muchas secuencias cortas con características comunes:

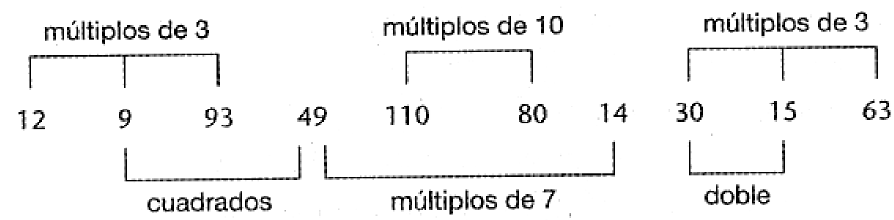


Figura 2. Algunos patrones aparentes en el área de las islas Bahamas.

Para empezar, hay una hermosa simetría en la lista. En cada extremo hay una terna de múltiplos de 3. En el medio, hay un par de múltiplos de 10, separando a dos múltiplos de 7. Además, dos cuadrados: $9 = 3^2$ y $49 = 7^2$, ambos cuadrados de números primos. Otro par adyacente está formado por 15 y 30, uno el doble del otro. En la secuencia 9-93-49, todos los dígitos tienen un 9. Los números crecen y decrecen de modo alterno, excepto por 110-80-14. ¡Oh! ¿Y te has dado cuenta de que *ninguno* de estos diez números es primo?

Nombre	*Área en millas cuadradas*
Berry	12
Bimini	9
Isla de Crooked	93
Pequeña Inagua	49
Mayaguana	110
Nueva Providencia	80
Isla Ragged	14
Cayo Rum	30
Cayo Sámana	15
Isla de San Salvador	63

Tabla 1

No hay más que decir. Otro problema con el hueso de Ishango es la imposibilidad virtual de encontrar evidencias extras que apoyen alguna interpretación concreta. Pero las marcas en él son realmente enigmáticas. Los rompecabezas de números siempre lo son. Así que vamos con algo menos polémico.

Hace diez mil años, en Oriente Medio la gente usaba piezas de barro para llevar un registro numérico. Quizá tenía que ver con los impuestos o como prueba de una propiedad. Los ejemplos más antiguos son Tepe Asiab y Ganj-iDareh Tepe, dos yacimientos en la cadena montañosa de Zagros, en Irán. Las piezas eran pequeños trozos de barro de varias formas, algunas con marcas simbólicas. Una bola marcada con + representaba una oveja, siete de esas bolas indicaban siete ovejas. Para evitar estar marcando un gran número de piezas, había una de un tipo diferente para diez ovejas. Y otra que representaba diez cabras, y así sucesivamente. La arqueóloga Denise Schmandt-Besserat dedujo que las piezas representaban elementos básicos de la época, como cereales, animales y jarras de aceite.

Alrededor de 4000 a. C., las piezas se unían con una cuerda a modo de collar. Como era fácil cambiar los números añadiendo o eliminando piezas, se introdujo una medida de seguridad: se envolvían las piezas con barro, que luego se cocía. Una discusión sobre los números podía resolverse rompiendo el sobre de barro para abrirlo. A partir de 3500 a. C., para evitar roturas innecesarias, los burócratas de la antigua Mesopotamia inscribían símbolos en el sobre, enlistando las piezas que había en él.

Fue entonces cuando una mente brillante se dio cuenta de que los símbolos convertían las piezas en redundantes. El resultado fue un sistema de símbolos numéricos escritos, lo cual estableció las bases de todos los sistemas subsiguientes de notación numérica y, posiblemente, de la propia escritura.

Como este libro no es de historia, daré la visión de sistemas notacionales posteriores como si surgiesen en conexión con números específicos. Por ejemplo, la notación decimal moderna y antigua se aborda en el capítulo [10]. Sin embargo, como el gran matemático Carl Friedrich Gauss señaló una vez, lo importante no son las notaciones, sino las nociones. Los temas que siguen tendrán más sentido si se

Figura 3. Sobre de arcilla y piezas para la contabilidad, período de Uruk, de Susa.

ven en un contexto de concepción de los números cambiante por parte de la humanidad. De modo que empezaremos repasando los sistemas numéricos principales y alguna terminología importante.

El sistema numérico creciente

Tendemos a pensar en los números como algo fijo e inmutable: una característica del mundo natural. En realidad son una invención humana, pero una muy útil, porque representa aspectos importantes de la naturaleza, como cuántas ovejas posees o la edad del universo. La naturaleza nos sorprende reiteradamente destapando nuevas preguntas, cuyas respuestas a veces requieren nuevos conceptos matemáticos. Otras veces, la exigencia interna de indicios matemáticos en estructuras nuevas y potencialmente útiles. De vez en cuando estos indicios y problemas han llevado a los matemáticos a extender el sistema numérico inventando nuevos tipos de números.

Hemos visto cómo los números surgen primero como un método para contar cosas. En la temprana Grecia clásica, la lista de números empezaba 2, 3, 4, etcétera. El 1 era especial, no era «realmente» un número. Más tarde, cuando esta convención comenzó a parecer absurda, el 1 pasó a considerarse también un número.

El siguiente gran avance en la ampliación del sistema numérico fue la introducción de las fracciones. Estas son útiles para dividir algún producto entre varios. Si tres personas obtienen partes iguales de dos bushels* de cereales, cada una recibe $\frac{2}{3}$ de un bushel.

Los antiguos egipcios representaban las fracciones de tres modos diferentes. Tenían jeroglíficos especiales para $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$. Usaban varias porciones del ojo de Horus para representar 1 dividido por las primeras seis potencias de 2. Finalmente, ideaban símbolos para fracciones unitarias, las que son de la forma «uno sobre algo»: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etcétera. Expresaban todas las otras fracciones como sumas de distintas fracciones unitarias. Por ejemplo:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

No está claro por qué no escribían $\frac{2}{3}$ como $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, pero no lo hacían.

El número cero llegó mucho después, probablemente porque no se necesitaba demasiado. Si no tienes ovejas, no hay necesidad de contarlas o enlistarlas. Cero se introdujo primero como un símbolo y no se pensó en él como un número. Pero cuando los matemáticos chinos

Figura 4. A la izquierda, jeroglíficos egipcios para $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$. En el centro, ojo de Horus. A la derecha, jeroglífico de la fracción derivado de ellos.

* Unidad de medida de capacidad anglosajona. (*N. de la t.*)

e hindúes introdujeron los números negativos [véase −1], el 0 tuvo que ser considerado un número también. Por ejemplo, $1 + (-1) = 0$, la suma de dos números debe sin duda contar como un número.

Los matemáticos llaman al sistema de los números:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

números naturales, y cuando se incluyen los números negativos, son los *enteros*.

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Las fracciones, el cero y las fracciones negativas forman los *números racionales*.

Un número es *positivo* si es mayor que cero, y *negativo* si es más pequeño que cero. De modo que cada número (ya sea un entero o un racional) está exactamente en una de las tres categorías: positivo, negativo o cero. Los números que usamos para contar:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

son enteros positivos. Esta convención nos lleva a una terminología un poco burda: a menudo nos referimos a los números naturales:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

como los enteros *no negativos*. Lamento esto.

Durante mucho tiempo, las fracciones fueron lo máximo que alcanzó el concepto de número. Pero en la antigua Grecia probaron que el cuadrado de una fracción nunca puede ser exactamente igual a 2. Más tarde esto se expresó como «el número $\sqrt{2}$ es irracional», esto es, no racional. Los griegos tenían un modo más engorroso de decir esto mismo, pero sabían que $\sqrt{2}$ debía existir: por el teorema de Pitágoras, es la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1. Así que se necesitaban más números, los racionales solos no pueden hacerlo todo. Los griegos encontraron un complicado método geométrico para lidiar con los números irracionales, pero no era completamente satisfactorio.

El siguiente paso hacia el concepto moderno de número fue hacer posible la invención de la coma decimal (,) y la notación decimal. Esto hizo posible representar los números irracionales con un grado alto de precisión. Por ejemplo:

$$\sqrt{2} \sim 1{,}4142135623$$

aproximado a 10 cifras decimales (el símbolo ~ significa «es aproximadamente igual a»). Esta expresión no es exacta: su cuadrado es realmente

$$1{,}99999999979325598129$$

Una aproximación mejor, que sería con 20 cifras decimales, es esta:

$$\sqrt{2} \sim 1{,}41421356237309504880$$

pero de nuevo no es exacta. Sin embargo, hay un sentido lógico riguroso en el cual una expansión decimal infinita es exacta. Por supuesto, esa expresión no puede escribirse completa, pero es posible establecer las ideas para que tenga sentido.

Los decimales con parte decimal infinita (incluyendo aquellos que la tienen finita, pues pueden pensarse como decimales que terminan en una cantidad infinita de ceros) se llaman *números reales*, en parte porque corresponden directamente a medidas del mundo natural como longitudes o pesos. Cuanto más precisa sea la medición, más cifras decimales necesitas; para obtener un valor exacto, necesitas infinitas. Tal vez resulte irónico que «real» esté definido por un símbolo infinito que no puede escribirse completamente. Los números reales negativos también están permitidos.

Hasta el siglo XVIII ningún otro concepto matemático se consideró como números genuinos. Pero ya en el siglo XV, unos cuantos matemáticos se preguntaron si habría un tipo de número nuevo: la raíz cuadrada de menos uno. Esto es, un número que da −1 cuando lo multiplicas por sí mismo. A primera vista se trata de una idea disparatada, porque el cuadrado de cualquier número real es positivo o cero. Sin embargo, resultó ser una buena idea seguir adelante y equipar a 1 con una raíz cuadrada, para lo cual Leonhard Euler introdujo el símbolo i. Esta es la letra inicial de «imaginario» (en inglés, latín, francés, alemán y español) y se llamaron así para distinguirlos de los viejos números reales. Por desgracia, esto llevó a mucho misticismo innecesario —Gottfried Leibniz una vez se refirió a i como «un anfibio entre ser y no ser»—, lo cual complicó una verdad clave. En concreto, tanto números reales como imaginarios tiene exactamente la misma condición lógica. Son conceptos humanos que modelan la realidad, pero no son reales por sí mismos.

La existencia de i hace necesario introducir muchos otros números nuevos para poder hacer cálculos aritméticos, números como 2 + 3i. Estos se llaman *números complejos*, y han sido indispensables en matemáticas y ciencias durante los últimos siglos. Es curioso, porque lo cierto es que son nuevos para la mayoría de la raza humana, pues no sueles encontrarte con números complejos en las matemáticas del colegio; no porque carezcan de importancia, sino porque las ideas son demasiado sofisticadas y las aplicaciones demasiado avanzadas.

Los matemáticos utilizan símbolos con florituras para los principales sistemas numéricos. No los usaré de nuevo, pero deberías verlos al menos una vez:

$\mathbb{N}$ = el conjunto de todos los números naturales 0, 1, 2, 3, ...
$\mathbb{Z}$ = el conjunto de todos los números enteros –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...
$\mathbb{Q}$ = el conjunto de todos los números racionales
$\mathbb{R}$ = el conjunto de todos los números reales
$\mathbb{C}$ = el conjunto de todos los números complejos

Estos sistemas encajan unos dentro de otros como unas matrioskas:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

El símbolo de la teoría de conjuntos $\subset$ significa «está contenido en». Observa que, por ejemplo, todo entero es racional; un ejemplo sería el entero 3, que es también la fracción $\frac{3}{1}$. Normalmente no lo escribimos de este modo, pero ambas notaciones representan el mismo número. De manera similar, todo número racional es también real, y todo real es también complejo. Los sistemas más antiguos se incorporan a los nuevos, no se reemplazan.

Incluso los números complejos no son el final de las extensiones del sistema numérico que los matemáticos han hecho a lo largo de los siglos. Están los cuaterniones $\mathbb{H}$ y los octoniones $\mathbb{O}$ [véase 4], por ejemplo. Sin embargo, estos son más provechosos desde un punto de vista algebraico que aritmético. Y acabaré mencionando un número más paradójico: infinito. Desde un punto de vista filosófico, infinito difiere de los números convencionales y no pertenece a ninguno de los sistemas numéricos estándar, desde los números naturales a los números complejos. Sin embargo, merodea por los márgenes, con un aspecto numérico pero sin ser un número como tal. Hasta que Georg Cantor revisó nuestro punto de partida, contar, y mostró que no solo infinito es un número en el sentido de contar, sino también que hay *diferentes tamaños* de infinito. Entre ellos están $\aleph_0$, el número de números naturales, y $\mathfrak{c}$, el número de números reales, el cual es mayor. *Qué tan* mayor es discutible: depende del sistema de axiomas que uses para formalizar las matemáticas.

Pero dejemos estos números hasta que hayamos desarrollado la suficiente intuición sobre números más ordinarios. Lo que me lleva a la tercera cuestión.

¿Qué es un número?

Parece una pregunta sencilla, y lo es. Pero no así la respuesta.

Todos sabemos cómo usar los números. Todos sabemos qué aspecto tienen siete vacas, siete ovejas o siete sillas. Todos podemos contar hasta siete. Pero ¿qué *es* siete?

No es el símbolo 7. Esa es una elección arbitraria y es diferente en muchas culturas. En árabe es ٧, en chino es 七 o más formalmente 柒.

No es la palabra «siete». En francés es *sept*, en alemán es *sieben*.

Hacia mediados del siglo XIX, algunos matemáticos con mentalidad lógica se dieron cuenta de que, aunque todo el mundo había estado usando los números durante miles de años, nadie sabía realmente qué eran. Así que hicieron la pregunta que nunca debería haberse formulado: ¿qué *es* un número?

Es una pregunta más complicada de lo que parece. Un número no es algo que puedas mostrar a alguien en el mundo físico. Es una abstracción, un concepto mental humano, uno derivado de la realidad, pero no exactamente *real*.

Puede sonar preocupante, pero los números no son solo eso. Un ejemplo común es el «dinero». Todos sabemos cómo pagar algo y cuál es su cambio, y lo hacemos —ingenuamente imaginamos— intercambiando dinero. Tendemos a pensar en dinero como las monedas y billetes en nuestros bolsillos o carteras. Sin embargo, no es tan simple. Si usamos la tarjeta de crédito, no hay intercambio de monedas o billetes. En su lugar, hay señales que pasan a través de un sistema telefónico a la compañía de la tarjeta y finalmente a nuestro banco, y las cifras en las cuentas bancarias —la nuestra, la de la tienda, la de la compañía de la tarjeta— cambian. Un billete británico de 5 libras usado para llevar el mensaje «Prometo pagar bajo demanda al portador la suma de cinco libras», no es dinero en absoluto, sino la promesa de pagar dinero. Hubo un tiempo en el que podías llevarlo al banco y cambiarlo por oro, lo que era considerado como el dinero *real*. Ahora, todo lo que el banco haría sería cambiártelo por otro billete de 5 libras. Pero el oro tampoco era realmente dinero, era solo una manifestación física de este. Como prueba, el valor del oro no es fijo.

¿Es entonces el dinero un número? Sí, pero solo con un contexto legal específico. Escribir 1.000.000 de dólares en un trozo de papel no te convierte en millonario. Lo que hace que el dinero sea *dinero* es un cuerpo de convenciones humanas sobre cómo representamos los números del dinero y cómo lo cambiamos por bienes u otros números. Lo que importa es lo que haces con él, no lo que es. El *dinero* es una abstracción.

Lo mismo pasa con los números. Aunque esta respuesta no resuelve mucho, porque *todo* en matemáticas es una abstracción. De modo que unos cuantos matemáticos siguieron preguntándose qué *tipo* de abstracción podía definir «número». En 1884, un matemático alemán llamado Gottlob Frege escribió *Los fundamentos de la aritmética*, estableciendo los principios fundamentales sobre los que se basan los números. Una década después, fue más allá, e intentó derivar esos principios de las leyes más básicas de la lógica. Su *Leyes básicas de la aritmética* se publicó en dos volúmenes, el primero en 1893 y el segundo en 1903.

Frege empezó a partir del proceso de contar y no se centró en los números que usamos, sino en las cosas que contamos. Si pones siete tazas en una mesa y las cuentas: «1, 2, 3, 4, 5, 6, 7», los objetos importantes parecen ser los números, pero para Frege lo importante eran las tazas. Contar tiene sentido porque tenemos una colección de tazas que queremos contar. Con una colección diferente, tendríamos un número diferente. Frege llamó a estas colecciones *clases* (en alemán). Cuando contamos cuántas tazas contiene esta clase en particular, establecemos una *correspondencia* entre la clase de las tazas y los símbolos numéricos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

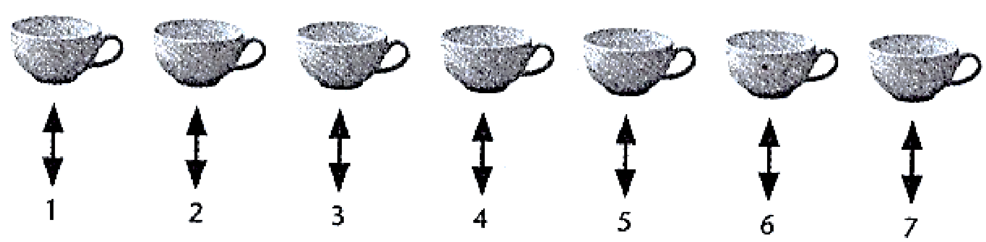


Figura 5. Correspondencia entre tazas y números.

De modo similar, dada una clase de platos, quizá seamos capaces de establecer también esta correspondencia:

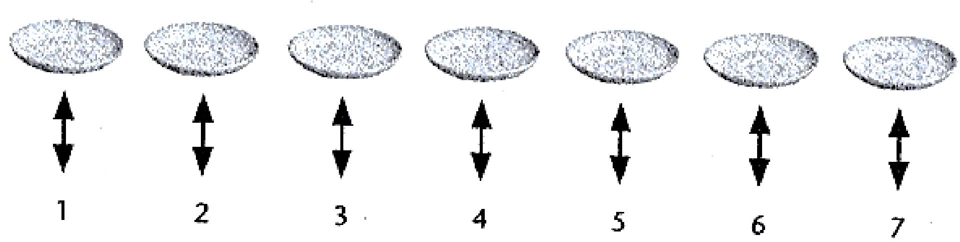


Figura 6. Correspondencia entre platos y números.

En tal caso, podemos concluir que la clase de platos contiene el mismo número de platos que la clase de tazas contiene de tazas. Incluso sabemos cuántos: siete.

Esto podría parecer obvio hasta el punto de la banalidad, pero Frege se dio cuenta de que nos estaba diciendo algo bastante profundo. En concreto, que podemos probar que la clase de platos contiene el mismo número de platos que la clase de tazas contiene de tazas, *sin* usar los símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y sin saber cuántas tazas o platos hay. Es suficiente con establecer una correspondencia entre la clase de tazas y la clase de platos:

Figura 7. Correspondencia entre tazas y platos sin necesidad de números.

Técnicamente, este tipo de correspondencia es conocido como una correspondencia *uno a uno*: cada taza se empareja exactamente con un plato, y cada plato se empareja exactamente con una taza. El contar no funciona si te olvidas de alguna taza o cuentas la misma taza varias veces. Lo llamaremos correspondencia, mientras recordemos esta condición técnica.

Por cierto, si alguna vez te has preguntado por qué los niños en la escuela pasan cierto tiempo «emparejando» conjuntos de vacas con conjuntos de pollos, o cualquier otra cosa, dibujando líneas entre las imágenes, es culpa de Frege. Algunos educadores esperaban (y puede que todavía esperen) que su planteamiento podría mejorar la intuición para los números. Yo me inclino a verlo como promover la lógica e ignorar la psicología y acabar confundido en lo que se refiere al significado de «fundamental», pero no reiniciemos una guerra matemática aquí.

Frege concluyó que emparejar clases usando una correspondencia se encuentra en el fondo de lo que entendemos por «número». Contar cuántas cosas contiene una clase tan solo empareja esa clase con una clase estándar, cuyos miembros se denotan con los símbolos convencionales 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etcétera, dependiendo de la cultura de uno. Pero Frege no creía que el concepto de número debiese depender de la cultura, de modo que encontró un modo de evitar de una vez símbolos arbitrarios. Más exactamente, inventó un supersímbolo universal, el mismo para cualquier cultura. Pero no puedes escribirlo, pues era algo puramente conceptual.

Empezó señalando que los miembros de una clase pueden ser clases ellos mismos. No tienen que serlo, pero no hay nada que lo impida. Una caja de latas de frijoles es un ejemplo del día a día: los miembros de la caja son latas y los miembros de las latas son frijoles. De modo que es correcto usar clases como miembros de otras clases.

El número «siete» está asociado, por correspondencia, a cualquier clase que se pueda emparejar con nuestra clase de tazas o la correspondiente clase de platos o la clase que consiste en los símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Escoger una clase en concreto de estas y llamar *a eso* un número es una decisión arbitraria que carece de elegancia y resulta insatisfactoria. Así que ¿por qué no jugarse el todo por el todo y usar todas estas clases? Entonces «siete» puede definirse como la *clase de todas las clases* que están en correspondencia con cualquiera (por tanto todas) de las clases que acabamos de mencionar. Haciendo esto, podemos decir si cualquier clase dada tiene siete miembros comprobando si es miembro de esta clase de clases. Por comodidad etiquetamos esta clase de clases como «siete», pero la propia clase tiene sentido incluso si no lo hacemos. De modo que Frege distinguió un número de un nombre arbitrario (o símbolo) para ese número.

Podría entonces definir qué es un número: es la clase de las clases que está en correspondencia con una clase dada (por tanto, también con las otras). Este tipo de clase es a lo que me refería como «supersímbolo». Si estás en esta línea de pensamiento, esta es una idea brillante. De hecho, en lugar de escoger un nombre para el número, conceptualmente agrupamos *todos los posibles nombres* juntos en un único objeto y usamos ese objeto en su lugar.

¿Funcionó? Lo podrás ver más adelante, en el capítulo [$\aleph_0$].

Control de Lectura:

1.-¿Qué permitió a la humanidad tocar las estrellas?

2.-¿Cuántas muescas tiene el hueso de Lebombo y qué representa?

3.-¿Qué tipos de números se encuentran en las series de muescas del hueso de Ishango?

4.-¿Dónde se usaban piezas de barro para llevar un registro numérico?

5.-¿Qué representaba una bola marcada con un “+”?

6.-¿Qué hicieron los antiguos burócratas de Mesopotamia para evitar roturas innecesarias de las piezas de barro?

7.-¿Cómo se establecieron las bases de la notación numérica y se cree que de la escritura?

8-¿Por qué se habla de un sistema numérico creciente?

9.-¿Por qué en la Grecia Clásica temprana la lista de números empezaba con el número dos?

10-¿Qué cultura antigua representaba las fracciones mediante porciones del ojo del dios Horus?

11.- ¿Quiénes introdujeron los números negativos?

12.-¿Qué símbolos forman los números naturales y con qué letra se representan?

14.-¿Qué símbolos forman los números enteros y con qué letra se representan?

15.-¿Por qué números están constituidos los números racionales?

16.-¿Cuáles son los números negativos y para qué se utilizan?

17.-¿Por qué las expresiones decimales no son exactas?

18.-¿Cuáles son los números reales y con qué letra se representan?

19.-¿Qué matemático introdujo el símbolo i?

20.-¿Cómo se refirió Gottfried Leibniz de los números imaginarios?

21.-¿Cuál es la misma condición lógica que existe entre los números reales e imaginarios?

22.-¿Qué forma tienen los números complejos?

23.-¿Qué símbolo se utiliza para referirse a los números racionales?

24.-¿Con qué letra se representa a los números complejos?

25.- ¿Qué es un número?

26.- ¿Qué similitud existe entre un número y el dinero?

Los números Naturales

Definición: El conjunto de los ***números naturales*** es:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Los puntos suspensivos indican que N es un conjunto infinito y ordenado.

El conjunto de los números naturales es el primero de que se valió el ser humano para poder sobrevivir. Este conjunto contiene a los números de contar.

Se observa que en este conjunto no se cuenta al cero como integrante. El cero fue incorporado posteriormente. Para la Organización del Bachillerato Internacional (***OBI***), el cero sí se incluye entre los naturales.

Considera al conjunto de los números pares naturales:

$$P = \{2, 4, 6, \dots\}$$

¿Qué conjunto tendrá más elementos? ¿P o **N**?

Para evaluar el tamaño de dos conjuntos infinitos, se puede proceder a compararlos término a término.

$$\begin{array}{lllllll}
\mathbf{N} = \{1, & 2, & 3, & 4, & \dots & n & \dots\} \\
\ \ \ \ \ \ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
P = \{2, & 4, & 6, & 8, & \dots & 2n & \dots\}
\end{array}$$

Para cada elemento n de **N**, existe un elemento de P, a saber, su doble y para cada elemento de P existe un elemento de **N** que le corresponde, su mitad.

Entonces P y **N** tienen la misma ***cardinalidad***, es decir, la misma cantidad de elementos, aunque parezca que P tiene menos elementos que **N**.

Observa que P es un subconjunto de propio de N, aunque ambos conjuntos tengan la misma cardinalidad.

Es conveniente aclarar que estas cosas extrañas suceden sólo en los conjuntos infinitos, ya que para los conjuntos finitos, nuestra intuición es correcta.

Definición: Un conjunto infinito cuya cardinalidad sea la misma que la de **N**, se llama ***numerable***.

El conjunto de los números pares es numerable.

Es importante recordar que los **números pares** tienen la propiedad de que son divisibles entre dos, esto es, al ser divididos entre dos, el residuo es cero. En caso de que no sean divisibles por dos, se dice que son **números impares**.

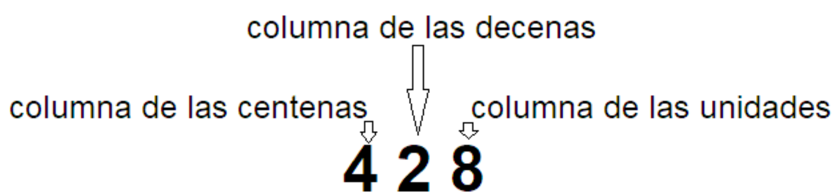
Ejercicios:

En una batalla sangrienta luchaban 270 hombres. 90 de ellos perdieron un ojo, 90 un brazo y 90 una pierna. 30 perdieron un ojo y un brazo, 30 un brazo y una pierna, 30 una pierna y un ojo. 10 perdieron un ojo, un brazo y una pierna.

a) ¿Cuántos hombres salieron ilesos? Respuesta: 80
b) ¿Cuántos hombres tuvieron exactamente una lesión? Resp. 120
c) ¿Cuántos hombres tuvieron exactamente dos lesiones? Resp. 60
d) ¿Cuántos hombres tuvieron exactamente tres lesiones? Resp. 10

Escritura de los números

Cuando se escribe un número natural utilizando los **dígitos** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, se dice que está en la **forma estándar** (**notación estándar**). La posición de un dígito en un número natural determina su valor posicional. En el número 428, el ocho está en la columna de las unidades, el dos está en la columna de las decenas y el 4 está en la columna de las centenas:



Para leer fácilmente los números naturales grandes, se emplean comas para separar sus dígitos en grupos de tres, llamados **periodos**. Cada periodo se llaman como unidades, millares, millones, millares de millones y billones.

Cada uno de los dígitos tiene un valor posicional diferente debido al lugar que ocupan respecto a los otros números.

A medida que se recorre a la izquierda del número, el valor posicional de cada columna es 10 veces mayor que la columna directamente a su derecha. Por esta razón se le llama a nuestro sistema de numeración sistema numérico ***base diez***.

Cuando se escribe un número natural en palabras, se emplean comas para separar los periodos.

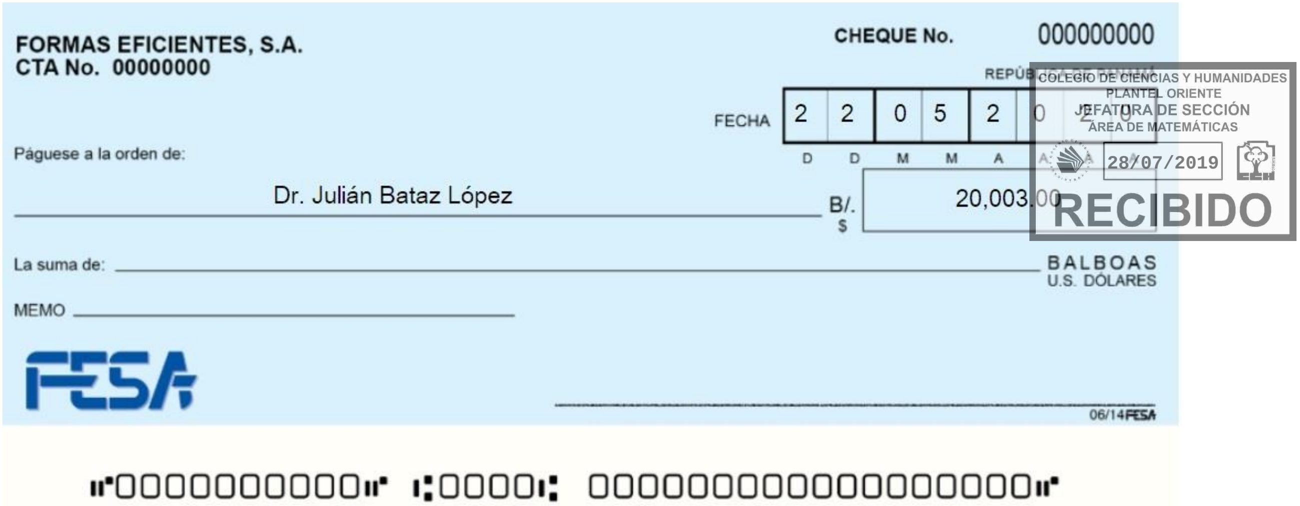
Ejemplo: Escribe en palabras los siguientes números:

a) 12,472: doce mil, cuatrocientos setenta y dos.
b) 701,036,006: setecientos un millones, treinta y seis mil, seis.
c) 43,000,068: cuarenta y tres millones, sesenta y ocho.

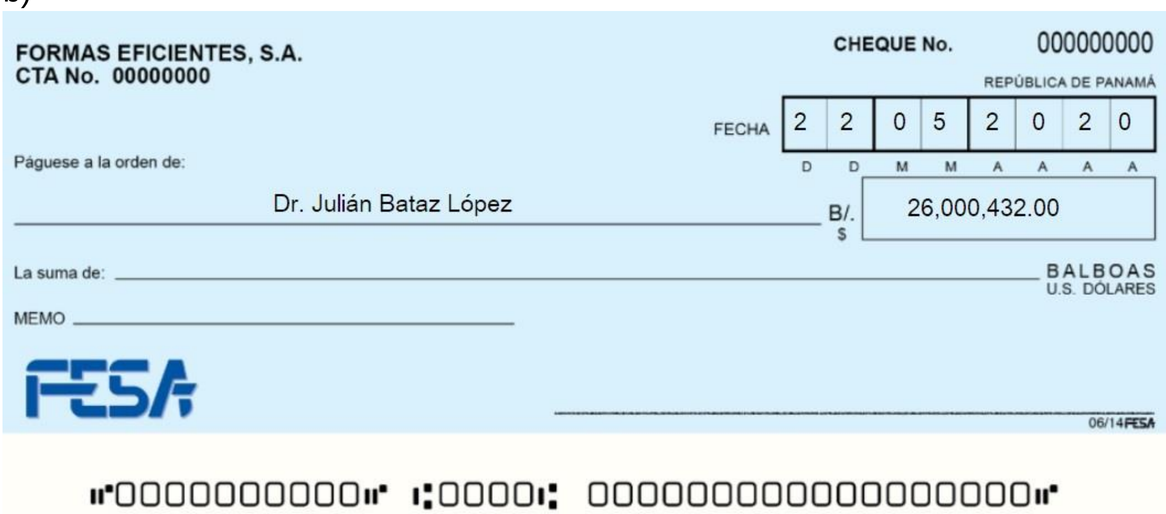
Ejercicios:

Completa el cheque escribiendo la cantidad en palabras en la línea apropiada.

a)



b)



Otro subconjunto interesante de **N**, lo constituyen los primos.

Los números Primos

Definición: Un número natural es ***primo*** si es divisible únicamente por sí mismo y la unidad. Es decir, debe de tener exactamente dos divisores diferentes. Por esto se define como ***no primo*** al número 1.

Los **números compuestos**, son números naturales mayores que 1 que no son primos: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, …etc. Hay infinitamente números compuestos. El 0 y el 1 no son primos ni compuestos porque no son mayores que 1.

SUGERENCIA DE ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE TEÓRICO-PRÁCTICA 3

Erastóstenes, un sabio de la antigua Grecia, director de la legendaria biblioteca de Alejandría y autor de uno de los primeros cálculos acertados acerca de la circunferencia de la Tierra, concibió un ingenioso método para calcular números primos. Este procedimiento, conocido como criba de Erastóstenes, se muestra para los primeros 100 números naturales.

Se escriben los naturales en filas de diez.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	31	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Se tacha al uno que no es primo y se señala con un círculo al 2, por ser primo.

~~1~~	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	31	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Después se tachan todos los números que son factores de 2:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

Posteriormente, se elige al siguiente primo, el 3 con un círculo y se procede a tachar sus múltiplos.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

El siguiente primo es el 5, se circula y se eliminan sus múltiplos. Te proponemos que en el siguiente cuadro, únicamente encierres con tu lápiz los números que son primos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	31	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Los números Enteros

Definición: El conjunto de los números enteros contiene a la totalidad de los *números naturales*, a *sus simétricos negativos* y al *cero*. Se les representa mediante la letra Z, que proviene del vocablo alemán zahlen (números).

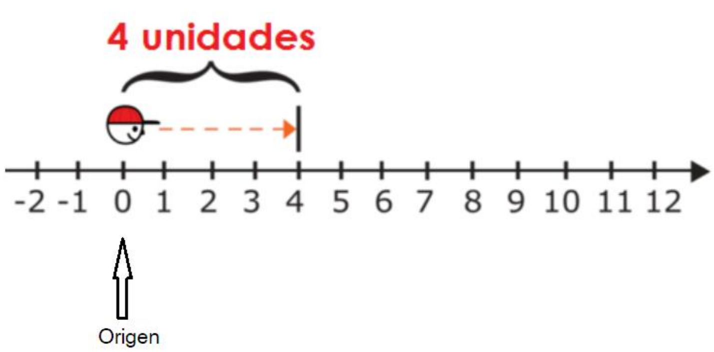
Ejemplo: 1500, -3, 0, 8, -34 son enteros.

Existen territorios donde hay tres habitantes por kilómetro cuadrado como en Siberia, en Rusia donde se llegan a registrar temperaturas de 50 grados Celsius bajo cero o menos.

https://es.wikivoyage.org/wiki/Rusia

Si quisiéramos escribir esta temperatura, T= - 50 ºC.

Para poder entender la posición de los números enteros positivos y negativos, se acostumbra a representarlos en la reta numérica.



Observa que la flecha ubicada a la derecha indica el sentido positivo, mientras que a la izquierda no se coloca. En el ejemplo se indica la posición de 4 unidades positivas. Nota que a los números positivos no se les coloca signo, Sin embargo, se entiende que son positivos. Un número posicionado a la derecha es más grande entre más alejado del cero esté. En sentido contrario, entre más se aleje un número del cero hacia la izquierda, se entiende que es más pequeño.

Para poder comparar dos cantidades, se emplean los siguientes símbolos matemáticos.

Símbolos de comparación

Mayor que	$>$
Menor que	$<$
Igual a	$=$

Ejercicios:

Coloca el signo que corresponda:

-12_____-25	3____3	2____0
0 _____-2	-10____10	-3____0
11____8	29____54	3,206____3,231

Ejemplo:

En cierta ocasión, el servicio meteorológico del estado de Sonora proporcionó una temperatura a inicio de la mañana de 3 ^{o}C, si . Al final del día reportó un descenso de temperatura de 5 ^{o}C., respecto a la dada en la mañana. ¿A qué temperatura estuvieron? Respuesta: -2 grados o dos grados bajo cero.

Números Irracionales

Definición: El conjunto de los **números irracionales** está formado por todos aquellos números que NO pueden obtenerse o expresarse como una fracción cuyo numerador y denominador son números enteros, siendo el denominador diferente de cero. Se les representa mediante la letra I. Ejemplo: π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc.

Ejemplo: Son números irracionales: $\pi,\ e,\ \sqrt{7}\ ,\ \sqrt[3]{9}\ ,\ etc.$

Números Reales

Definición: El conjunto de los **números reales** está formado por todos los números racionales e irracionales. Se les representa mediante la letra R. Ejemplo: π, e, $\sqrt{15}$, $-\sqrt[3]{17}$, $-\frac{1}{3}$, 5, etc.

Reglas de los signos

Para sumar dos números del mismo signo se suman los valores absolutos y se antepone al resultado el signo común. Por ejemplo, 3 + 4=7, (-3)+(-5)=-8.

El **valor absoluto** de un número es el correspondiente al número prescindiendo del signo. El valor absoluto se representa colocando el número entre barras verticales. Por ejemplo,

$$|-6| = 6$$

$$|+4| = 4$$

$$\left|-\frac{7}{4}\right| = \frac{7}{4}$$

Para sumar dos números de signos diferentes se efectúa la diferencia entre sus valores absolutos y se antepone al resultado el signo del sumando de mayor valor absoluto.

Ejemplos:

$$(-5) + 7 = 2$$

$$8 + (-15) = 8 - 15 = -7$$

$$2 - (-8) = 2 + 8 = 10$$

Para multiplicar (o dividir) dos números del mismo signo, se multiplican (o dividen) sus valores absolutos y se antepone al resultado el signo positivo (+).

Ejemplos:

$$(5)(3) = 15$$

$$(-5)(-2) = 10$$

$$\frac{-6}{-3} = -2$$

Para multiplicar (o dividir) dos números de signos diferentes, se multiplican (o dividen) sus valores absolutos y se antepone al resultado el signo negativo (-).

Ejemplos:

$$(-5)(3) = -15$$

$$(-5)(2) = -10$$

$$\frac{-12}{4} = -3$$

Los números Complejos

Definición: El conjunto de los **números complejos** está formado por todos los números de la forma "a$\pm$bi", donde a y b son números reales, e "i" representa la raíz cuadrada de -1, es decir, **i=**$\sqrt{-1}$. Se les representa mediante la letra C.

Los números de la forma "a$\pm$bi", con a y b reales, se dicen números complejos; a se llama parte real y bi parte imaginaria del número complejo "a$\pm$bi".

El número complejo "a$\pm$bi", es un número real si b de la parte imaginaria es cero y es un número imaginario puro si a es cero. Si un número complejo no se reduce a un número real, se le suele llamar **imaginario**.

Ejemplo de números complejos: $3 + 2i$, $2 + \sqrt{-5}$, $-8 - \sqrt{-3}$, 3i, etc.

Aprendizajes:

Usa correctamente las diversas simbolizaciones de un número racional, transitando entre sus equivalencias (cuando sea necesario) en problemas puramente aritméticos y en contexto.

Compara dos cantidades haciendo uso de las representaciones de un número racional.

Temática:

Las diversas simbolizaciones de un número racional y sus equivalencias: fracción (parte de un todo), decimal y porcentaje.
La comparación entre cantidades (relación de orden) empleando las diferentes simbolizaciones.
Fracciones equivalentes.

SUGERENCIA DE ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE TEÓRICO- PRÁCTICA

Un estudio de dos semanas de duración sobre la productividad de los trabajadores en una fábrica de elaboración de piezas electrónicas, se obtuvieron los siguientes datos acerca del número de piezas aceptables producidas por 110 trabajadores. Los datos se ordenaron en una tabla y se organizaron en grupos como sigue:

Actividad: Con apoyo de una calculadora, llena los datos que hacen falta en la tabla y responde las preguntas relacionadas.

1	2	3	4	5	6	7
grupo	Piezas aceptables producidas	Trabajadores que las producen o frecuencia	Frecuencia respecto al total (3)/total	Frecuencia de (4) en porcentaje 3 decimales	Frecuencia acumulada (4)+(6)	Frecuencia (6) en decimales
A	25.5	4	$\frac{4}{110}$	0.036	$\frac{4}{110}$	0.04
B	35.5	16	$\frac{16}{110}$	0.145	$\frac{20}{110}$	0.18
C	45.5	18	$\frac{18}{110}$	0.164	$\frac{38}{110}$	0.35
D	55.5	31	$\frac{31}{110}$	0.282	$\frac{69}{110}$	0.63
E	65.5	22	$\frac{22}{110}$	0.201	$\frac{91}{110}$	0.83
F	75.5	14	$\frac{14}{110}$	0.127	$\frac{105}{110}$	0.95

G	85.5	5	$\frac{5}{110}$	0.045	$\frac{}{110}$	1
Total de trabajadores ∑						

1.- ¿Qué representa el número 55.5 de la columna dos, grupo D? ____

2.- ¿Qué representa el número 5 de la columna tres, grupo G? ____

3.- ¿Cuántas piezas producen más trabajadores?_____

4.- ¿Qué porcentaje de los trabajadores producen la máxima calidad de las piezas aceptables?_____

5.- ¿Qué porcentaje de los trabajadores producen la menor calidad de piezas aceptables?_____

6.- ¿Qué porcentaje del total producen los trabajadores de los grupos F y G? _______

7.- Los trabajadores de los grupos F y G se pueden considerar los más calificados, ¿qué porcentaje representan del total?_______

8.- Como puedes observar, la tabla anterior contiene datos que se escriben con diferentes tipos de números: ¿los puedes identificar con una X?.

NATURALES	ENTEROS	DECIMALES	RACIONALES
REALES	NEGATIVOS	IMAGINARIOS	PARES
IMPARES	PRIMOS	NO PRIMOS	COMPLEJOS

9.- ¿Qué columnas son equivalentes?__________________

10.- ¿Qué número en porcentaje es equivalente al número de la columna cinco, grupo G?

11.- ¿Qué presentación te es más fácil comprender entre las fracciones, decimales o los porcentajes?, ¿Por qué? ____
____
____
____

Fracciones comunes

Una fracción se llama ***propia*** cuando su numerador es menor que su denominador. Por ejemplo:

$$\frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{23}$$

Una fracción es ***impropia*** si el numerador es mayor que el denominador. Ejemplo:

$$\frac{5}{3}, \frac{7}{2}, \frac{15}{7}$$

Los números que son combinación de enteros y fracciones propias, se llaman números mixtos: Ejemplo:

$$2\tfrac{2}{3}, 3\frac{1}{2}, 1\frac{8}{23}$$

Actividad:

Completa la siguiente tabla:

Número fraccionario	Cociente indicado	Numero decimal
$\frac{3}{5}$	3÷5	0.6
$\frac{3}{2}$		
$\frac{19}{6}$		
$\frac{7}{3}$		
$\frac{7}{10}$		
$\frac{2}{3}$		
$\frac{5}{6}$		

Observa que existen dos tipos de expresiones decimales:

a) Números cuya parte decimal es limitada o finita. Escribe las fracciones de la tabla que cumplen con esta característica:

____

b) Números cuya parte decimal es infinita periódica o limitada periódica, llamados ***números decimales periódicos***. Escribe las fracciones de la tabla que cumplen con esta propiedad:

____

c) ¿Qué característica tienen los denominadores de los números decimales exactos o finitos?

____

d) ¿Qué característica tienen los denominadores de los números decimales periódicos?

____

Transformación de una expresión decimal en fracción

Todo número decimal puede expresarse en fracción.

1) Número decimal finito. Para expresar un número decimal finito en fracción, se escribe como numerador el numero dado sin punto decimal y como denominador, la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número dado. Luego se simplifica todo lo posible a su mínima expresión.

Ejemplo:

Escribe los siguientes decimales finitos en fracciones

a) 1.2 $\frac{12}{10}$	b) 0.4 $\frac{4}{\ }$	0.026 $\frac{26}{\ }$

2) Número decimal Periódico puro. Para transformar un número decimal periódico puro en fracción, se escribe como numerador el número dado sin coma decimal y se le resta la parte entera y en el denominador tantos nueve como cifras tenga el periodo. Si tiene parte entera se le suma. Luego se busca la fracción irreducible correspondiente.

Ejemplo:

Escribe los siguientes decimales periódicos puros en fracciones

a) $0.\widehat{12}$ $\frac{número\ dado\ - parte\ entera}{tantos\ 9\ como\ cifras\ del\ periodo}$	operaciones $\frac{12-0}{99}=\frac{12}{99}$	Se simplifica $\frac{3x4}{3x33}=\frac{4}{33}$

b) $1.\widehat{15}$	$\frac{115-1}{99}=\frac{114}{99}$	$\frac{38x3}{33x3}=\frac{38}{33}$
c) $12.\hat{3}$		
d) $1.\widehat{21}$		

3) Número *decimal periódico mixto*. Para transformar un número decimal periódico mixto en fracción, se escribe como numerador el número dado sin el punto decimal y se le resta el número formado por la parte entera y las cifras decimales no periódicas y como denominador, tantos 9 como cifras decimales tenga el periodo, seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga la parte no periódica.

La escritura de números periódicos se puede simplificar indicando el periodo.

Ejemplo:

Escribe los siguientes números indicando cuál es su periodo.

a) 0.121212 $0.\widehat{12}$	b) 0.151515	c) 5.432432	d) 123.1312312
e) 0.236565	f) 0.125125	g) 2.424242	e) -2.143143…

Ejemplo:

Escribe los siguientes decimales periódicos mixtos en fracciones

a) $0.1\hat{3}$	$\frac{13-1}{90}=\frac{12}{90}=\frac{3x4}{3x30}=\frac{2x2}{2x15}=\frac{2}{15}$
$\frac{número\ dado\ sin\ decimales - parte\ entera\ seguida\ de\ las\ cifras\ decimales\ no\ periódicas}{tantos\ nueves\ como\ cifras\ del\ periodo\ seguida\ de\ tantos\ ceros\ como\ cifras\ no\ periodicas}$	
b) $1.00\hat{5}$	$\frac{1005-100}{900}=\frac{905}{900}=\frac{181x5}{180x5}=\frac{181}{180}$
c) $0.1\widehat{26}$	$\frac{126-1}{990}=\frac{125}{990}=\frac{25x5}{198x5}=\frac{25}{198}$
d) $2.2\hat{6}$	

Autoevaluación

1.- Expresa los siguientes números decimales como fracciones irreducibles:

a) 2.35	b) $3.\widehat{12}$	c) $0.222\ldots$
d) $0.2\hat{7}$	e) -8.35	f) -0.66
g) $1.01666\ldots$	h) -2.8	i) $0.2\hat{3}$

2.- Coloca los símbolos mayor, menor o igual, según corresponda:

-1.13 ______ $-\frac{2}{3}$

$-\frac{2}{3}$ ______ $\frac{2}{3}$

1.8 ______ 1.799

$-\frac{5}{2}$ ______ -2.5

-0.1999… ______ -0.1999…

1.5222… ______ 1.523

$\frac{1}{3}$ ______ 0.33

3.- Elije las expresiones que son equivalentes al número racional dado: $\frac{4}{8}$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{8}{4}$ c) 0.5 d) $0.5\hat{0}$ e) $0.\widehat{55}$

4.- Elije las expresiones que son equivalentes al número racional dado: $\frac{5}{9}$

a) $\frac{9}{5}$ b) $1\frac{4}{5}$ c) 0.56 d) $0.\hat{5}$ e) 0.55

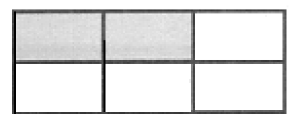
5.- Elije las expresiones que son equivalentes al número racional dado: $\frac{2}{3}$

a) $\frac{20}{30}$ b) 0.6 c) 0.67 d) $0.666\ldots$ e) $0.\hat{6}$

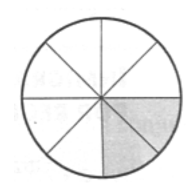
6.- Elije las expresiones que son equivalentes al número racional dado: $\frac{1}{4}$

a) $\frac{10}{400}$ b) $\frac{25}{100}$ c) 0.25 d) 4 e) $0.24\hat{9}$

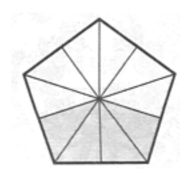
7.- Para la figura siguiente, escribe una fracción en los términos más simples que represente la porción que está sombreada.



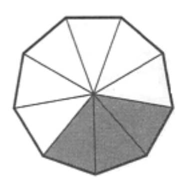
8.- Para la figura siguiente, escribe una fracción en los términos más simples que represente la porción que está sombreada.



9.- Para la figura siguiente, escribe una fracción en los términos más simples que represente la porción que está sombreada.



10.- Para la figura siguiente, escribe una fracción en los términos más simples que represente la porción que está sombreada.



Aprendizajes:

Opera correctamente con los números racionales (enteros y no enteros), en los casos de una sola operación y una secuencia de números.

Temática:

Algoritmo de las operaciones entre números enteros y racionales: suma, resta, multiplicación, división, y las condiciones para su ejecución.

- $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

- El mínimo común múltiplo (mcm) y la regla:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a\left(\frac{mcm(b,d)}{b}\right) \pm c\left(\frac{mcm(b,d)}{d}\right)}{mcm(bd)}$$

- $\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right)\left(\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}\right) = \frac{\mathrm{ac}}{\mathrm{bd}}$

- $\frac{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}}{\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}} = \frac{\mathrm{ad}}{\mathrm{bc}}$

- El máximo común divisor (MCD) y la simplificación de resultados.

SUGERENCIA DE ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE TEÓRICO- PRÁCTICA

En un libro de recetas de cocina, se encontró la siguiente tabla para cocinar una papilla de cereales:

Microondas		**Estufa**		
porciones	**1**	**1**	**4**	**6**
agua	$\frac{3}{4}$ taza	1 taza	3 tazas	4 tazas
sémola	3 cuch.	3 cuch.	$\frac{3}{4}$ tazas	1 taza
Sal (opcional)	Una pizca	Una pizca	$\frac{1}{4}$ cuch.	$\frac{1}{2}$ cuch.

Responde las siguientes preguntas:

En microondas, ¿Cuántas tazas de agua serían necesarias para 6 porciones?

____

En estufa, ¿Cuántas tazas se sémola serían necesarias para 5 porciones?

____

Factorización de Números naturales

Factorizar números naturales significa expresarlo como el producto de otros números naturales.

Ejemplo, factoriza al 40 en, a) 2 factores, b) tres factores

Solución:

a) (40)(1)=40, (20)(2)=40, (10)(4)=40, (8)(5)=40
b) (2)(20)(1)=40, (5)(4)(2)=40, (2)(2)(10)=40

Ejercicio: Encuentra los factores de 17 en dos factores.

En general, si un número natural es un factor de un número dado, también divide al numero dado de manera exacta.

Ejemplo: Encuentra los factores de 12 en dos factores.

Solución: (1)(12)=(2)(6)=(3)(4)=12

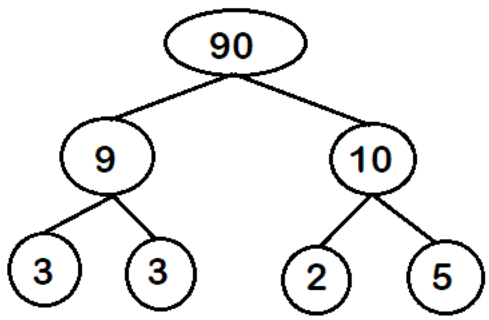
1, 2, 3, 4 y 12 son factores del 12 y cada uno de ellos divide al 12 de manera exacta.

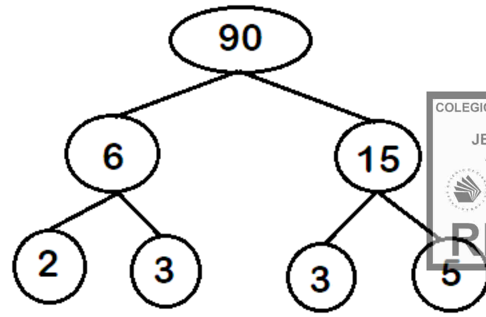
Todo número compuesto puede formarse multiplicando una combinación específica de números primos. Al proceso de encontrar esa combinación se le llama **Factorización de Primos**.

Encontrar la factorización de primos de un número natural significa escribirlo como el producto de sólo números primos.

Ejemplo: Encuentra la factorización de primos de 90.

Solución: Un diagrama como el que se presenta se llama árbol de factores:





En ambos casos la respuesta es la misma:

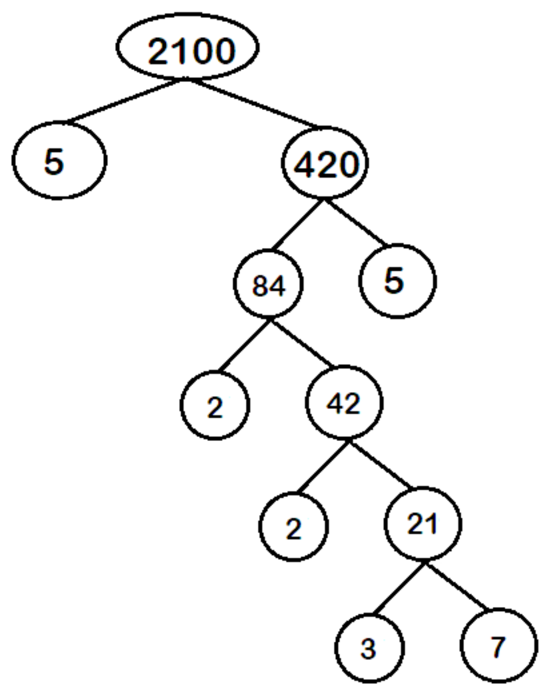
$$(2)(3)(3)(5)=90$$

El establecimiento del siguiente teorema se debió a los trabajos de Gauss:

Teorema Fundamental de la Aritmética. Todo número natural, excepto la unidad, admite una descomposición en factores de números primos única, salvo por el orden.

Ejemplo:

Factorizar 2100 en sus factores primos.



Solución:

$2100=(7)(5)(5)(3)(2)(2)=(7)(5^2)(3)(2^2)$

Ejercicios:

1.- Factoriza en sus factores primos a los siguientes naturales:

a) 1440
b) 136
c) 120

d) 6327
e) 1979
f) 280

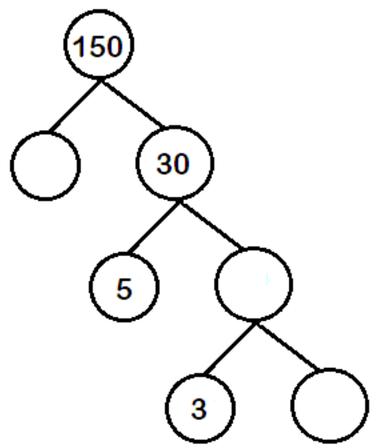
Soluciones:

a) $1440 = (2^5)(3^2)(5)$
b) $136 = (2^3)(17)$
c) $120 = (2^3)(3)(5)$
d) $6327 = (3^2)(19)(37)$
e) $Es\ un\ primo$
f) $280 = (2^3)(5)(7)$

2.- La factorización de primos de un número es: $(2^3)(3^4)(5)$, ¿Cuál es el número?

Solución: 3240

3.- Completa los espacios para la factorización de primos del 150 utilizando un árbol de factores:



Solución: La factorización de primos es:

$$150 = (\quad)(\quad)(\quad)(\quad)$$

4.- Completa los espacios:

a) Si un número es divisible entre dos, es un número ________, si no es divisible entre 2, es un número _________.

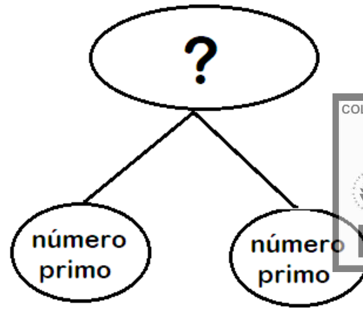
b) Lista los diez primeros números primos:

c) Lista los diez primeros números compuestos:

d) Lista los diez primeros naturales pares:

e) Lista los diez primeros números naturales impares

5.- ¿Cuáles de los siguientes números naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 pueden estar en la parte superior de éste árbol de factores?



Solución: 4, 9, 10

Múltiplos de un número

Los múltiplos de un número, son los productos de ese número y el 1, 2, 3, 4, etc.

Ejemplo: Encuentra los primeros tres múltiplos de 6.

Solución: Los primeros tres múltiplos de 6 son 6, 12 y 18, ya que: (1)(6)=6, (2)(6)=12, (3)(6)=18.

Los primeros 8 múltiplos de 3 y los primeros 8 múltiplos de 4 son:

$$\begin{array}{ll}
(3)(1) = 3 & (4)(1) = 4 \\
(3)(2) = 6 & (4)(2) = 8 \\
(3)(3) = 9 & (4)(3) = \mathbf{12} \\
(3)(4) = \mathbf{12} & (4)(4) = 16 \\
(3)(5) = 15 & (4)(5) = 20 \\
(3)(6) = 18 & (4)(6) = 24 \\
(3)(7) = 21 & (4)(7) = 28 \\
(3)(8) = 24 & (4)(8) = 32
\end{array}$$

Los números marcados con rojo son los múltiplos comunes de 3 y 4. Si se extiende cada lista, te darás cuenta que tienen infinitamente muchos múltiplos comunes.

Los múltiplos comunes del 3 y 4, son: 12, 24, 36, 48, 60, 72, …

El 12, es el número más pequeño de la lista, de los múltiplos de 3 y 4, se llama mínimo común múltiplo (mcm) del 3 y 4. Comúnmente se escribe:

mcm (3,4) = 12

Mínimo común múltiplo (mcm)

El mínimo común múltiplo de dos números naturales es el múltiplo común más pequeño de los números.

Cuando queremos encontrar el mcm de dos números, resulta fastidioso calcular los múltiplos de ambos números. Sin embargo, de acuerdo a la definición anterior, si calculamos los múltiplos del número más grande, el mcm de ambos números es el número más pequeño que es divisible entre el número más pequeño.

En el ejemplo anterior, si analizamos los múltiplos de cuatro, verás que 4 no es múltiplo de 3. 8 tampoco lo es y el 12 sí.

Dado que el 12 es el primer múltiplo de 4 que es divisible entre el 3, el mcm de 4 y 3 es 12.

Procedimiento para encontrar el mcm de varios números naturales.

1.- Escribe los múltiplos del número más grande, multiplicándolos por 1, 2, 3, etc.

2.- El proceso continúa hasta que encontremos el primer múltiplo del número más grande que sea divisible entre cada uno de los números más pequeños. Ese múltiplo es el mcm buscado.

Ejemplo.

Encuentra el mcm de 6 y 8.

Solución. mcm (6, 8)=

Múltiplos de 8: 8, 16, 24. 24 es múltiplo de 6m por lo tanto, mcm (6, 8)= 24.

Ejemplo: Encuentra el mcm (2, 3, 10).

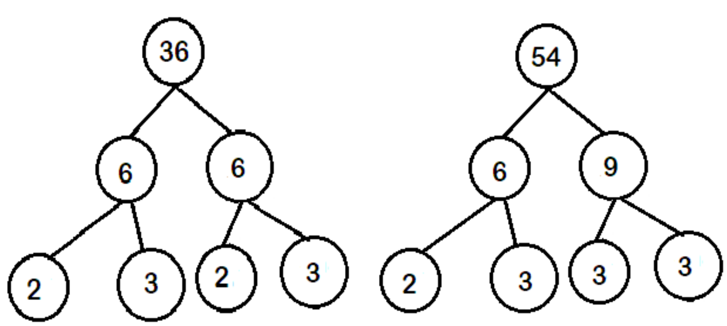
Solución: Los múltiplos de 10: 10, 20, 30.

El mcm (2, 3, 10)= 30

Cuando los números son muy grandes se recomienda utilizar el árbol de factores primos de los números involucrados.

Ejemplo:
Calcular el mcm (36, 54).

Solución.
Factores primos de 36:
2, 2, 3, 3.
Factores primos de 54:
2, 3, 3, 3.
Mcm (36, 54) = (2)(2)(3)(3)(3)=108



Árbol de factores primos de los números involucrados.

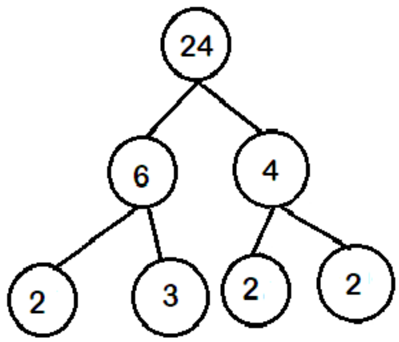
Procedimiento para encontrar el mcm utilizando la factorización de primos

1.- Realice la factorización de primos de cada número involucrado.

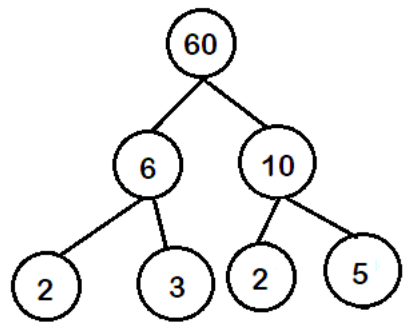
2.- El mcm es un producto de los factores primos, donde cada factor se utiliza el número mayor de veces que aparece en cualquier factorización (aunque no sean comunes).

Ejemplo:
Calcular el mcm (24, 60).

Solución.
mcm (24,60)= $(2)^3(3)(5)$= 120.



$2^3(3)$



$(2)^2(3)(5)$

Observa que el 120 es el número más pequeño que es divisible entre el 24 y el 60.

Ejemplo:

Dos pacientes que se recuperan de una cirugía se ejercitan diario caminando alrededor de una pista. Un paciente puede completar una vuelta en 4 minutos. El otro puede completar la vuelta completa en 6 minutos. Si comienzan al mismo tiempo y en el mismo lugar de la pista, ¿Cuántos minutos llegarán juntos al punto inicial de su rutina?

Solución: Se trata de encontrar el mcm (4, 6).

Factores de 6: 6, 12. El 12 es factor tanto de 6, como de 4, por lo tanto el mcm (4, 6)=12. En 12 minutos llegarán juntos al mismo punto de inicio.

Máximo común Divisor (MCD)

Dos números naturales pueden tener múltiplos comunes. También pueden tener factores comunes.

Ejemplo:

Encuentra todos los pares de factores de 26 y 39, respectivamente.

Pares de factores de 26	Pares de factores de 39
(13)(2) (26)(1)	(13)(3) (39)(1)

Cada uno de los números en los pares es un factor del 26. Del menor al mayor, los factores de 26: 1, 2, 13, 26

Los factores del 39 ordenados del menor al mayor: 1, 3, 13, 39

1, 2, 13, 26 ⇨ factores del 26
1, 3, 13, 39 ⇨ factores del 39

Debido a que el 13 es el número más grande que es factor común al 26 y al 39, se le llama máximo factor común o máximo común divisor (MCD).

Máximo común divisor (MCD)

El máximo común divisor de dos números naturales es el factor común más grande de los números.

Ejemplo:

Encuentra el MCD (18, 45).

Solución:

Pares de factores de 18	Pares de factores de 45
(9)(2) (18)(1) (3)(6)	(9)(5) (3)(15) (45)(1)

1, 2, 3, 6, 9 , 18 ⇨ factores de 18
1, 3, 5, 9, 15, 45 ⇨ factores de 45

Se observa que el factor común mayor es el 9.

El MCD (18, 45)= 9

Nuevamente, para encontrar el MCD de números muy grandes resulta muy laborioso, por lo tanto se propone utilizar la factorización de primos.

Procedimiento del MCD utilizando la factorización de primos

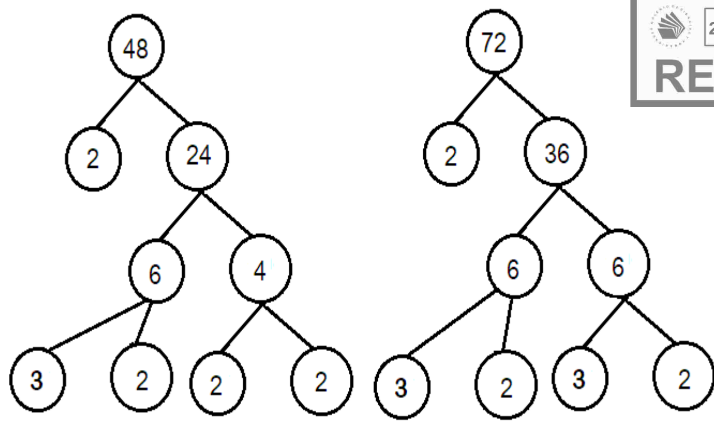
1.- Realiza la factorización de primos de cada número.

2.- Identifica los factores primos comunes

3.- El MCD es un producto de todos los factores primos **comunes** encontrados en el paso anterior. Si no hay factores primos comunes, el MCD es el 1.

Ejemplo:
Calcular el MCD (48, 72).

Solución.
mcm (48,72)= $(2)^3(3)$= 24.



$2^4(3)$ $(2)^3(3)^2$

Operaciones con Racionales

El valor de una fracción no se altera si se multiplican (o dividen) el numerador y el denominador por un mismo número diferente de cero.

Ejemplo:

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times 3}{4\times 3}=\frac{9}{12}$$

$$\frac{15}{18}=\frac{15\div 3}{18\div 3}=\frac{5}{6}$$

Si se cambia el signo del numerador, o el del denominador de una fracción, ésta cambia de signo.

Ejemplo:

$$\frac{-2}{3}=\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}$$

La suma de dos fracciones del *mismo denominador* es igual a una fracción que tiene por numerador la suma de los numeradores y por denominador el denominador común.

Ejemplo:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{8}{4}=2$$

La suma de dos fracciones de *diferente denominador* se efectúa como si fuera de igual denominador, una vez que se hayan transformado las fracciones a un denominador común.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2\times 4+3\times 1}{3\times 4}=\frac{8+3}{12}=\frac{11}{12}$$

El producto de dos fracciones es otra fracción cuyo denominador es igual al producto de los numeradores y el denominador igual al producto de los denominadores.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}=\frac{2\times 5}{3\times 4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

El reciproco de una fracción es la fracción cuyos numerador y denominador son, respectivamente, el denominador y numerador de la fracción dada. Así, el recíproco de 3 es 1/3).

Ejemplo: El recíproco de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$; el recíproco de $-\frac{8}{5}$ es $-\frac{5}{8}$.

Para **dividir** dos **fracciones**, se multiplica la primera por el recíproco de la segunda.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3}\div\frac{5}{4}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times 4}{3\times 5}=\frac{8}{15}$$

Ejemplos:

Adrián invita a sus amigos a comer un pedazo de piza. Andrés come $\frac{1}{5}$, Julia $\frac{1}{6}$, Luis $\frac{1}{3}$. Si Adrián come el resto, ¿Cuánto come?

Solución:

Para conocer cuánto come Adrián, proponemos que se conozca cuánto comen sus amigos:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{}{}$$

En este caso, tenemos diferentes denominadores, aplicando la siguiente fórmula:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\ \pm\ bc}{bd}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1\times 6\times 3+1\times 5\times 3+1\times 5\times 6}{5\times 6\times 3}=\frac{18+15+30}{5\times 6\times 3}=\frac{63}{5\times 6\times 3}$$
$$=\frac{21\times 3}{5\times 6\times 3}$$

Simplificando:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{21}{5\times 6}=\frac{7\times 3}{5\times 2\times 3}=\frac{7}{5\times 2}=\frac{7}{10}$$

Sus amigos comen $\frac{7}{10}$ del total de la piza, por lo que Adrián come el resto, lo cual se representa como :

$$1-\frac{7}{10}=\frac{1}{1}-\frac{7}{10}=\frac{10-7}{1\times 10}=\frac{3}{10}$$

Adrián come el resto, o sea tres décimas de la piza.

La suma que realizamos con la fórmula, se puede resolver si calculamos el mcm (5,6,3).

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1\times 6+1\times 5+1\times 10}{5\times 6}=\frac{6+5+10}{5\times 6}=\frac{21}{5\times 6}=\frac{7\times 3}{5\times 2\times 3}$$
$$\frac{7}{10}$$

Jerarquía de las operaciones

En una expresión numérica, el orden que debe respetarse entre operaciones es la siguiente:

1) **Potencias y raíces.** Si la expresión contiene potencias y raíces, éstas deben realizarse primero antes que las demás operaciones. Ejemplo: $6-3\times 4^2+3=\ 6-3\times 16+3$.
2) **Multiplicaciones y divisiones.** Después de las potencias y las raíces, se efectúan las multiplicaciones y divisions, en el orden en que aparezcan de izquierda a derecha. Ejemplo: $6-3\times 16+3=\ 6-48+3$.
3) **Sumas y restas.** Efectuadas las potencias y raíces, multiplicaciones y divisiones, se procede con las sumas y las restas. Ejemplo: $6-48+3=-39$.

Símbolos de agrupamiento. Si en la expresión aparecen símbolos de agrupamiento, se deben realizar las operaciones dentro de los mismos, empezando de adentro hacia afuera. Los símbolos de agrupamiento más comunes son llaves { }, paréntesis ( ) y corchetes [ ]. Lo que indican es que las cantidades que están dentro de los símbolos de agrupamiento se consideran como una sola cantidad. Por ejemplo, la suma de dos expresiones, 2y +2x y 4x−5y, se puede representar como (2x+2y)+(4x−5y).

Supresión de símbolos de agrupamiento

1) Si un signo + precede a un símbolo de agrupamiento, dicho símbolo puede suprimirse sin modificar los términos que contiene. Por ejemplo:

$$(2a+8)+(3a-5)=2a+8+3a-5$$

2) Si un signo precede a un símbolo de agrupamiento, dicho símbolo se puede suprimir, cambiando el signo de cada uno de los términos que contiene. Por ejemplo: $-(2a+8)-(3a-5)=-2a-8-3a+5$
3) Si en una expresión figura más de un símbolo de agrupamiento, para suprimirlos se comienza por los interiores. Por ejemplo:

$$-2\{2-3(x-y)\}=-2\{2-3x+3y\}=-4+6x-6y$$

Autoevaluación

1.- De un bidón de aceite, se saca primero la mitad y después la quinta parte del resto, quedando aún tres litros. ¿Cuál es la capacidad del bidón?

Respuesta:

$$\frac{37}{10}=3.7\ litros$$

2.- De su sueldo, la señora Ximena gastó $\frac{1}{3}$ la primera semana, $\frac{1}{4}$ la segunda y $\frac{1}{6}$ la tercera, ¿Qué parte de su dinero gastó hasta ahora?

Respuesta: $\frac{3}{4}$ partes

3.- Un escritor escribió una novela en tres meses. El primer mes escribió $\frac{5}{12}$ de la novela y en el segundo mes $\frac{2}{5}$, ¿Qué fracción de la novela escribió en el tercer mes?

Respuesta: $\frac{11}{60}$ partes.

4.- La quinceava parte de los alumnos de un curso miran 4 horas de televisión por día, la décima parte mira 3 horas diarias y $\frac{2}{9}$ miran 2 horas diarias. Calcula qué fracción de ese curso no ve televisión.

Respuesta: $\frac{13}{18}$

5.- Se reparte una fortuna entre tres hermanos. El hermano mayor se queda con nueve décimos de los $\frac{11}{36}$ del dinero. El hermano menor se queda con seis octavos de $\frac{24}{42}$ ¿Qué parte del dinero se llevó el tercer hermano?

Respuesta: $\frac{83}{280}$

6.- Un pintor realiza en el primer día la tercera parte de su trabajo, en el segundo día las $\frac{3}{4}$ partes del resto, al tercer día el $\frac{1}{5}$ de lo que aún le falta y el resto el cuarto día. ¿Qué porcentaje del trabajo realizó cada día?

Respuesta: primer día: 33%, el segundo día: 50%, el tercer día: 10% y el cuarto día: 7%

7.- Una modista usó $\frac{2}{3}$ de tela en vestidos, la mitad de lo que queda en faldas y le sobran 4 m. ¿Cuántos metros de tela tenía?

Respuesta: $\frac{24}{5}$ m de tela

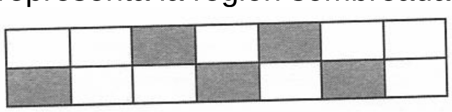
8.- En el colegio se eligió al candidato de alumnos que los representará ante el Consejo Universitario. $\frac{2}{3}$ de los alumnos votaron por el candidato ganador, $\frac{1}{4}$ por el candidato del segundo lugar y 187 alumnos por otros. ¿Cuántos alumnos votaron?

Respuesta: 2337 alumnos

9..- El perímetro de un triángulo isósceles es 39 cm. Si cada lado congruente es igual a los $\frac{5}{3}$ de la base, ¿Cuál es la longitud de cada lado?

Respuesta: base 9 cm, lados congruentes 15 cm cada uno.

10- ¿Qué fracción del rectángulo mayor representa la región sombreada?



a) $\frac{9}{14}$
b) $\frac{5}{14}$ ok
c) $\frac{5}{7}$
d) $\frac{9}{7}$

11.- Evalúa la expresión siguiente: $[(2\times 3-1)^2-1]^2$.

$$[(2\times 3-1)^2-1]^2=[(6-1)^2-1]^2=[(5)^2-1]^2=[25-1]^2=[24]^2=576$$

12.- Evalúa la expresión siguiente: $13\,500-\left[2700+2\times 2700+(2\times 2700-1800)\quad\right]$.

$$\begin{aligned}13\,500-\left[2700+2\times 2700+(2\times 2700-1800)\quad\right]\\ &=13\,500-[2700+5400+(5400-1800)]\\ &=13\,500-[8100+3600]=13\,500-11\,700=1\,800\end{aligned}$$

Aprendizajes:

Opera correctamente con potencias y radicales con la misma base.

Temática:

Operaciones con potencias: exponentes positivos y fraccionarios.

SUGERENCIA DE ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE TEÓRICO- PRÁCTICA

Lee la siguiente situación y responde las preguntas.

Según la leyenda, el rey hindú Shirham le preguntó al gran Visir Sissa Ben Dari qué deseaba como pago por haber inventado el ajedrez. Este le contestó que le diera un grano de trigo para colocarlo en la primera casilla, dos para colocarla en la segunda casilla, cuatro para la tercera, ocho para la cuarta y así sucesivamente hasta completar las 64 casillas. El rey sorprendido le respondió que por qué se conformaba tan poco, a lo que respondió que le había pedido más trigo que el que había en todo el mundo. El soberano envió a su matemático más sabio que le dijese cuántos granos de trigo debía entregar.

Después de varios días de minuciosos cálculos, el sabio le dijo al rey que la cantidad de granos que debía entregar era *Dieciocho trillones cuatrocientos cuarenta y seis mil setecientos cuarenta y cuatro billones setenta y tres mil setecientos nueve millones quinientos cincuenta y un mil seiscientos quince.*

¿Cuántos granos había en la casilla 5?______________________

¿Cuántos granos colocó en la casilla 9? ______________________

¿Cómo podrías escribir 286 de manera diferente? ______________

Según la leyenda, se deben sumar los granos de cada casilla para conocer el número total de granos, así se puede representar de la siguiente manera:

$$S_{64} = 1+2+4+\ldots+9{,}223{,}372{,}036{,}854{,}775{,}808$$

Esta lista se puede simplificar si se escribe en potencias:

$$S_{64} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{62} + 2^{63}$$

En forma de sumatoria:

$$\sum_{i=0}^{63} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{62} + 2^{63}$$

$$s = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{62} + 2^{63}$$

Multiplicando por dos cada lado:

$$2s = 2 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + \cdots + 2 \times 2^{62} + 2 \times 2^{63}$$

$$2s = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} + 2^{64}$$

Restando ahora la original:

$$2s - s = -2^0 + 2^{64}$$

$$s = 2^{64} - 1$$

$$s = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$$

Para hacernos una idea de la cantidad de trigo de la que estamos hablando podemos estimar que en un kilogramo de trigo hay aproximadamente 25 000 granos de trigo (el peso de 1 000 granos de trigo se puede considerar de unos 40 gramos), por lo tanto:

18,446,744,073,709,551,615 granos ⇒ 737,869,762,948,382 kg

es decir 737,869,762,948 Ton

La estimación de producción de trigo para la cosecha 2013-2014 de algunos países es de:

Unión Europea	142 896 000 Tm
China	121 000 000 Tm
India	92 460 000 Tm
Estados Unidos	57 536 000 Tm
Rusia	54 000 000 Tm
Canadá	31 500 000 Tm
Australia	25 500 000 Tm
Pakistán	24 000 000 Tm
Ucrania	22 000 000 Tm
Turquía	18 000 000 Tm
Kazajstán	17 000 000 Tm
Irán	14 500 000 Tm
Argentina	12 000 000 Tm
Egipto	8 800 000 Tm
Marruecos	7 000 000 Tm
Uzbekistán	6 700 000 Tm
Otros	53 999 000 Tm
TOTAL	708 891 000 Tm

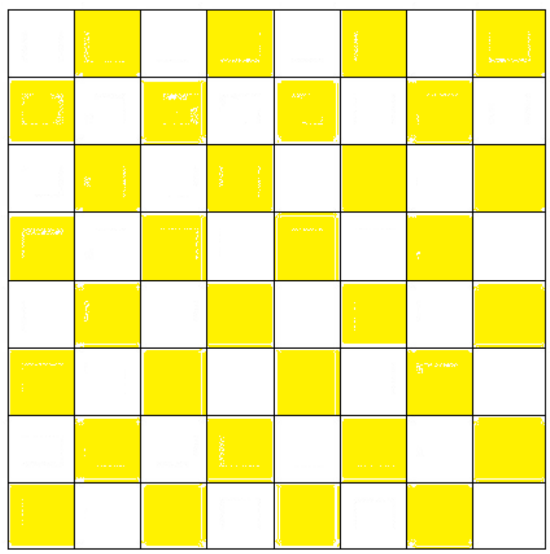
Por lo tanto, tomando esta estimación como cosecha anual, debería poner sobre el tablero las cosechas mundiales de:

$$\frac{737.869.762.948\,Tm}{708.891.000\,Tm/\text{año}} \simeq 1.044\ \text{años}$$

Es decir, serían necesarias las cosechas mundiales de algo más de un milenio, es decir ¡¡más de mil años!! para sumar esa cantidad de trigo.

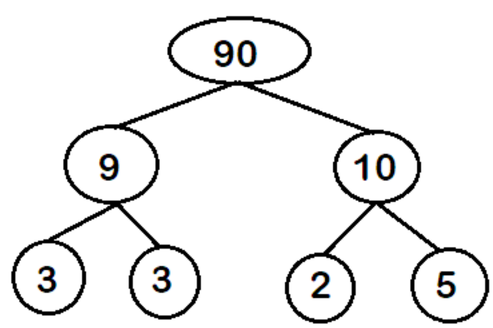
Como puedes ver, expresar cantidades muy grandes, se puede simplificar si se utilizan los exponentes.

Escribe, cómo puedes expresar el valor del trigo en cada casilla en forma abreviada:



SUGERENCIA DE ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE TEÓRICO- PRÁCTICA

Escribe la factorización de primos de 90 utilizando exponentes.

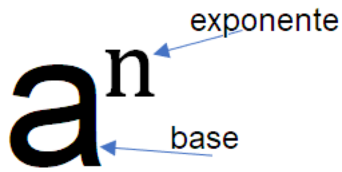


Solución:

$$2 \times 3^2 \times 5$$

Potencia de un exponente entero positivo

Si n es un entero positivo, a^n representa el producto de n factores igual a a. Así, $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$. En la expresión



Ejemplos:

$$x^3 = x \cdot x \cdot x$$

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$$

$$(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$$

Potencia de un exponente entero negativo

Si n es un entero positivo, por definición:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \; ; \;\; a \neq 0$$

Ejemplos:

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{3^{-3}} = 3^3 = 27$$

$$(a+b)^{-1} = \frac{1}{(a+b)}$$

Potencia de un exponente fraccionario positivo

Si m y n son enteros positivos, $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ (a ≥ 0 si n es par)

Ejemplo:

$$4^{3/2} = \sqrt[2]{4^3}$$

$$(27)^{2/3} = \sqrt[3]{27^2} = 9$$

Potencia de un exponente fraccionario negativo

Si m y n son enteros positivos, $a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}$

Ejemplo:

$$8^{-2/3} = \frac{1}{8^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$$

$$x^{-5/2} = \frac{1}{x^{5/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^5}}$$

Potencia de exponente cero

Por definición: $a^0 = 1$, si a ≠ 0.

Ejemplo:

$$10^0 = 1$$

$$(-3)^0 = 1$$

$$(ax)^0 = 1(si ax \neq 0)$$

Propiedades generales de la potenciación

Si p y q son números reales, se verifica que:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

Ejemplo:

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$$

$$3^{-3} \cdot 3^5 = 3^{-3+5} = 3^2$$

$$2^{1/2} \cdot 2^{5/2} = 2^{6/2} = 2^3$$

$$2^9 \cdot 2^{-2} \cdot 2^{-3} = 2^{9-5} = 2^4$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

Ejemplo:

$$(2^4)^3 = 2^{12}$$

$$\left(5^{1/3}\right)^{-3} = 5^{(1/3)(-3)} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$(2^2)^0 = 2^0 = 1$$

$$(x^4)^{-3} = x^{-12}$$

$$\left(a^{3/2}\right)^{5/2} = a^{(3/2)(5/2)} = a^{15/4}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q};\ a \neq 0$$

Ejemplo:

$$\frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2 = 9$$

$$\frac{2^{-2}}{2^4} = 2^{-2-4} = 2^{-6}$$

$$\frac{x^{1/2}}{x^{-1}} = x^{1/2-(-1)} = x^{3/2}$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

$$(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3$$

$$(5 \cdot x)^3 = 5^3 \cdot x^3 = 125x^3$$

$$(2a)^{-3} = 2^{-3} \cdot a^{-3} = \frac{1}{8a^3}$$

$$(4 \cdot a)^{1/2} = 4^{1/2} \cdot a^{1/2} = 2\sqrt{a}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}\ ;\ b \neq 0$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$$

$$\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{-2} = \frac{(x^2)^{-2}}{(y^3)^{-2}} = \frac{x^{-4}}{y^{-6}} = \frac{y^6}{x^4}$$

$$\left(\frac{2^3}{5^4}\right)^{-1/2} = \frac{(2^3)^{-1/2}}{(5^4)^{-1/2}} = \frac{2^{-3/2}}{5^{-2/}} = \frac{5^2}{\sqrt{2^3}}$$

Autoevaluación

Calcula las siguientes potencias

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$$

$$\left(-\frac{8}{5}\right)^{-1} =$$

$$\left(2\frac{1}{3}\right)^{-1} =$$

$$(2)^{-3} =$$

$$2^{-1} =$$

$$(-x^3)^{1/3} =$$

$$(8)^{-2/3} =$$

$$-(-1)^{-3/5} =$$

$$\sqrt{x+y}(x+y) =$$

$$\sqrt{(x+y)^5} =$$

Aprendizajes:

Traduce relaciones contextuales en operaciones entre números racionales (enteros y no enteros) y las resolverá correctamente.
Resuelve problemas aritméticos que involucren una secuencia de relaciones contextuales, auxiliándose de estrategias heurísticas en las etapas de comprensión, elaboración de un plan y su ejecución.

Temática:

Significado contextual de las operaciones suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.
Relaciones entre partes de una cantidad y el total.
Relaciones entre partes de una cantidad (medir una parte tomando como unidad la otra, etc.).
Relaciones de área.
Relaciones entre porcentajes: el porcentaje de una cantidad, el porcentaje de un porcentaje, y su relación con el total; relación porcentual entre una parte y el total; dada una cantidad que representa un porcentaje encontrar el total.
Relación de dos magnitudes de distinta clase que varían conjuntamente: entre distancia y velocidad, masa, densidad y volumen, fuerza, área, presión.
Aplicación de estrategias heurísticas en la resolución aritmética de problemas con más de una operación.

SUGERENCIA DE ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE TEÓRICO- PRÁCTICA

Lee el siguiente caso y analiza las soluciones. Después responde lo que se pregunta.

En una reunión familiar había 48 personas, 20 de ellas eran mujeres y 28 eran hombres. 8 de las personas eran casadas y 40 solteras; por su edad, 10 eran niños y 38 adultos. ¿Con qué fracción representas…

a) La parte del grupo que son niños?
b) La razón del número de mujeres, respecto al número de hombres?
c) La comparación entre el número de personas casadas y el número de personas adultas?
d) El cociente del número de personas solteras entre el número de personas casadas?

Solución.

a) Del total de personas en la reunión (48), 10 eran niños. Por lo que $\frac{10}{48} = \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 24} = \frac{5}{24} = 0.208\hat{3} = 20.83\%$

b) $\frac{20}{28} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{5}{7}$, 5 de cada 7 hombres son mujeres

c) $\frac{8}{38} = \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 19} = \frac{4}{19}$; cuatro de cada 19 personas adultas son casadas

d) $\frac{40}{8} = 5$; Por cada persona casada, hay 5 solteras

Responde:

En el contexto del caso anterior, ¿Qué representan las fracciones siguientes?

a) $\frac{38}{48}$ (la razón entre adultos y el total de personas)

b) $\frac{28}{20}$ (la razón de hombres y mujeres)

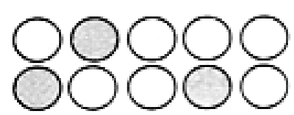
c) $\frac{8}{38}$ (la razón entre número de casados y adultos)

d) $\frac{8}{40}$ (la razón entre número de casados y solteros)

Las fracciones como parte de un todo

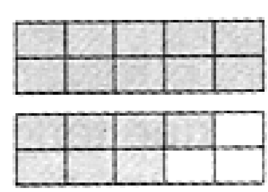
Se usan las fracciones cuando representan cantidades menores, iguales o mayores a una unidad, a partir de dividir ésta en partes iguales. La unidad puede ser elegida arbitrariamente.

Por ejemplo: En la siguiente imagen, $\frac{3}{10}$ representa la parte sombreada. Por lo tanto, la unidad está representada por diez bolitas.

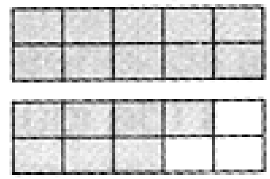


Ejercicios: Completa el espacio en blanco para formar una afirmación verdadera.

Por ejemplo: En la siguiente imagen, $\frac{17}{5}$ representa la parte sombreada. Por lo tanto, la unidad está representada por ________ cuadritos.

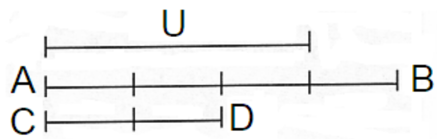


Por ejemplo: En la siguiente imagen, $\frac{17}{10}$ representa la parte sombreada. Por lo tanto, la unidad está representada por ________ cuadritos.



Las fracciones como medida

En la figura, el segmento U, representa la unidad de longitud. El segmento AB mide $\frac{4}{3}$ y el segmento CD $\frac{2}{3}$.



Las fracciones como cociente

Se usan las fracciones como cociente cuando se indica la división entre dos cantidades. Por ejemplo, si 10 canicas se reparten entre cinco niños de manera equitativa, a cada niño le corresponden $\frac{10}{5}$ de las canicas (o sea 3 canicas por niño).

Las fracciones como razón o proporción

Si en la escuela, 3 de cada 5 alumnos aprueban un examen, la fracción $\frac{3}{5}$ significa que la razón del número de aprobados, respecto de los que presentan un examen es $\frac{3}{5}$.

Las fracciones como porcentaje

Existe el 20% de probabilidad de lluvia el día de hoy, significa que es muy poco posible que llueva el día de hoy. Significa que existen 20 de cien posibilidades de que llueva el día de hoy.

Las fracciones como operador

Cuando una fracción opera sobre un número para transformarlo, se utiliza la fracción como operador: En un grupo de 25 alumnos, $\frac{3}{5}$ de ellos son mujeres. El número de mujeres es: $25 \times \frac{3}{5} = 15$. La fracción $\frac{3}{5}$ transforma al 25 en 15.

Autoevaluación

1.- Miguel limpió $\frac{3}{8}$ de una superficie y Luis $\frac{5}{12}$ de la misma superficie.

a) ¿Qué parte del área pintaron entre los dos? Resp. $\frac{19}{24}$; 0.792; 79.17%

b) ¿Qué tanto más pintó Luis que Miguel? Resp. $\frac{1}{24}$; 4.1%

2.- Los $\frac{2}{5}$ de los alumnos de una escuela son mujeres. Si $\frac{5}{12}$ de ellas usan lentes, ¿Qué parte de los alumnos de la escuela son mujeres y usan lentes?

Respuesta: $\frac{1}{6}$

3.- De los 75 km que se van a recorrer, la primera hora se recorrieron $\frac{3}{5}$ de dicha distancia y en la segunda hora $\frac{1}{3}$ del resto. ¿Cuántos kilómetros faltan por recorrer?

Respuesta: $\frac{2}{15}$

3.- El costo de almacenaje diario en una aduana es $\frac{1}{10}$ del valor de la mercancía. Un comerciante comienza a retirar al final de cada día $\frac{1}{5}$ de la mercancía almacenada. ¿Cuánto pagó en total por el almacenaje?

Solución:

día	Mercancía que se retira	pago	Mercancía que queda
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{2}{25}$	$\frac{3}{5}$
3	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{3}{50}$	$\frac{2}{5}$
4	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$

5	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{50}$	0

$$\frac{1}{10}+\frac{2}{25}+\frac{3}{50}+\frac{1}{25}+\frac{1}{50}=\frac{5+4+3+2+1}{50}=\frac{15}{50}=\frac{3}{10}$$

Respuesta: $\frac{3}{10}$ del costo de la mercancía

4.- Un estanque puede ser llenado por una tubería A en 15 horas, y por otra tubería B en 10 horas. Puede ser vaciado por una tubería C en 12 horas. Si A y B trabajan juntas dos horas y luego se cierran y se abre C; ¿en cuánto tiempo C vaciará el estanque?

Solución:

hora	Tubería A	Tubería B	Porción de llenado
1	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$

En dos horas ambas tuberías (Ay B) llenaron $\frac{1}{3}$ del volumen total del estanque.

La tubería C descarga en una hora $\frac{1}{12}$ del volumen del estanque, así para conocer en cuánto tiempo desalojará un tercio del volumen:

$$\frac{1}{3}\div\frac{1}{12}=\frac{12}{3}=4\ horas$$

5.- A un tinaco lo llenan dos tuberías y lo desaguan otras dos. Si se abre solo una tubería, el tinaco se llena en 5 horas, abriendo la sólo la otra tubería se llena en seis horas. Si se abre solamente una tubería de desagüe, el tinaco se descarga en 8 horas. Si se abre el otro desagüe solamente, se vacía en 10 horas. Cuando el tinaco contiene $\frac{2}{5}$ de su capacidad y se abren las cuatro tuberías, se desea conocer en cuánto tiempo se llena el tinaco.

Solución.

hora	Tubería A de llenado	Tubería B de llenado	Tubería C de descarga	Tubería D de descarga

1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$
suma	$\frac{11}{30}$		$\frac{9}{40}$	
Tipo	A y B llenan $\frac{11}{30}$ del tinaco en una hora		C y D vacían $\frac{9}{40}$ del tinaco en una hora	

Si se abren las cuatro tuberías al mismo tiempo, en una hora habrá: $\frac{11}{30} - \frac{9}{40} = \frac{17}{120}$ de la capacidad del tinaco.

Para conocer el tiempo en el que se llenará el tinaco, simplemente dividimos cuántas veces cabe $\frac{17}{120}$ en lo que resta para llenar el tinaco ($\frac{3}{5}$).

$\frac{3}{5} \div \frac{17}{120} = \frac{120\times3}{5\times17} = \frac{72}{17} = 4\,\frac{4}{17}$ = cuatro horas $\frac{4}{17}$.

6.- Dos personas A y B podrían terminar juntos un trabajo en 10 días. B y C lo harían juntos en 12 días. A y C lo harían juntos en 15 días. ¿Cuánto tiempo emplearán si los tres trabajan juntos?

Solución:

Condición		En un día
1	A+B	$\frac{1}{10}$
2	B+C	$\frac{1}{12}$
3	A+C	$\frac{1}{15}$
Suma	2A+2B+2C	$\frac{1}{4}$

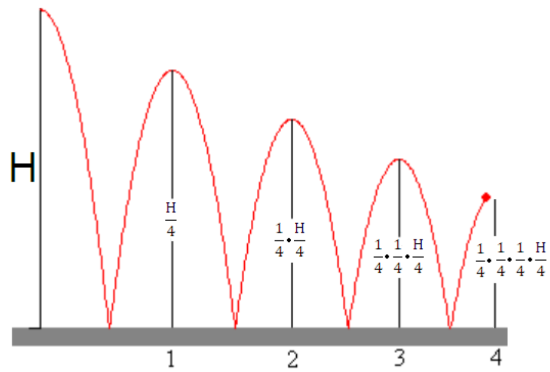
Factorizando y despejando:

$$2(A + B + C) = \frac{1}{4}$$

$$(A + B + C) = \frac{1}{8}$$

Juntos en un día hacen $\frac{1}{8}$ del trabajo, por lo que los tres juntos terminan el trabajo en 8 días.

7.- Una bola cae de cierta altura sobre un piso de mármol. Cada vez que toca el piso, rebota hasta un cuarto de la altura de donde cayó. ¿A qué altura se elevará la bola después de haber tocado el piso por cuarta vez?



Solución:

$$\frac{1}{256} H$$

Aprendizajes:

Reconoce patrones numéricos y geométricos en situaciones problemáticas y modelará su comportamiento.

Temática:

Expresión simbólica de la generalidad (obtención de fórmulas).

SUGERENCIA DE ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE TEÓRICO- PRÁCTICA

Lee la siguiente situación y responde las preguntas.

La historia cuenta que siendo niño, Karl Friederich Gauss, un matemático cuyo trabajo le llevó a recibir el título de El príncipe de las Matemáticas, resolvió el siguiente problema numérico de forma inteligente:

$$1+2+3+\ldots+98+99+100=?$$

Supuso que la solución debía de ser un número desconocido X e invirtió a los sumandos como se muestra:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 100 & & 101 \\ 2 & & 99 & & 101 \\ 3 & & 98 & & 101 \\ \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ 98 & & 3 & & 101 \\ 99 & & 2 & & 101 \\ \underline{100} & & \underline{1} & & \underline{101} \\ X & & X & & 2X \end{array} \quad \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{100 veces}$$

En seguida sumó horizontalmente, observando que todas estas sumas dan lo mismo (_____) y que esto sucede 100 veces.

$$2X = 100(101)$$

$$X = 5050$$

Si se repite este procedimiento para los 500 primeros números:

$$X = 1 + 2 + 3 + \ldots + 499 + 500$$

$$X = \frac{\quad(501)}{2}$$

La suma de los primeros n números naturales es:}

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(\quad)(\quad)}{2}$$

SUGERENCIA DE ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE TEÓRICO- PRÁCTICA 2

Dado el siguiente conjunto de números, determina una fórmula que pueda utilizarse para determinar la suma de los números impares de ese conjunto.

$$Q = \{1,3,5,7,\ldots\}$$

El primero número se puede obtener de la siguiente manera:

$$1 = 2(\#) - 1$$

El segundo número impar:

$$3 = 2(\mathbf{2}) - 1$$

El tercer número impar:

$$5 = 2(\mathbf{3}) - 1$$

El cuarto número impar:

$$7 = 2(\_\_) - 1$$

El enésimo número impar:

$$n = 2(\_\_) - 1$$

Ahora completa la tabla siguiente:

Posición en la lista (#)	**formula**	**número**	**Suma acumulada**
1	$2(\#) - 1$	1	1

2	$2(\mathbf{2})-1$	3	4
3	$2(\mathbf{3})-1$	5	9
4	$2(\_\_)-1$	7	16
5	$2(\_\_)-1$		25
6			
7			
n			

Autoevaluación:

1.- Encuentra el resultado de la siguiente operación: $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \ldots - 100 =$ ______.

2.- Alicia tiene $53, Luis y Alfonso, sus amigos, también tienen dinero. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas representa la cantidad de dinero que tienen entre los tres?

a)	b)	c)	d)
53+x+y	53+x+x	53+2x	53y

3.- Determina una fórmula que calcule la suma de los primero números enteros pares consecutivos:

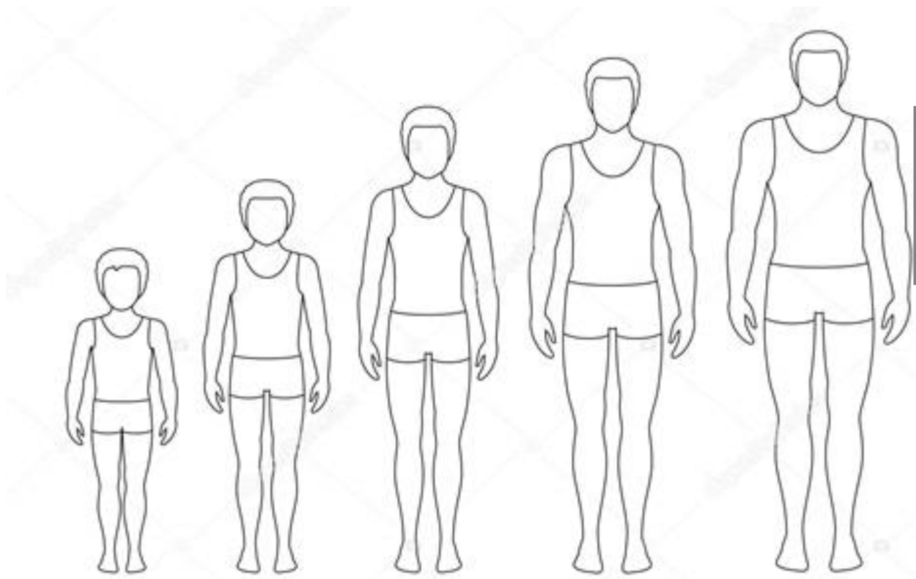
Posición en la lista (#)	formula	número	Suma acumulada
1	$2(\#)$	2	2
2		4	6
3			
4			
5			(__+1)
n			

Bibliografía básica

- ALANIS SOLIS, LORENZO (2012). *Matemáticas I. Solución de problemas reales*. México, Ediciones Quinto sol, 215 pp.
- MILLER, CHARLES D., HEEREN, VERN E., HORBSBY, JOHN (2013). *Matemática: razonamiento y aplicaciones.* 12a Edición, México. Pearson. Addison Wesley.
- TUSSY, GUSTAFSON Y KOENING (2013). *Matemáticas básicas*. México, 4ª. Edición, Cengage Learning, 843 pp.

Bibliografía complementaria

- AGUILAR, DAVID (1981). *Cómo jugar y divertirse con las matemáticas*. Madrid, Altalena Editores, 91 pp.
- BERLINSKI, DAVID (2013). *Uno, dos, tres. La belleza y la simetría de las matemáticas absolutamente elementales*. México, Oceano, 200 pp.
- CAPÓ DOLZ, MIGUEL (2017). Matemáticas del 1 al 100. Ariel, México, 254 pp.
- CRUZ, LORETO (2003). Libro 1, Números. Serie LEITMOTIV, México, 109 pp.
- EQUIPO πms (2003). *Taller de Matemáticas I. Los números naturales.* Madrid, Editorial EOS, 148 pp.
- ESPUIG, ALICIA (2011). Matemáticas. Prueba de acceso a ciclos formativos de GS. Barcelona, Editorial Marcombo, 342 pp.
- MILLER, HEEREN Y HORNSBY(2006). *Matemática: razonamiento y aplicaciones.* Pearson.Addison Wesley, 10ª. Edición, México, 944 pp.
- VELASCO, ANTONIANO (2016). *Curiosidades matemáticas. Sorpresas, paradojas, enigmas y maravillas del mundo de la matemática.* Limusa, México, 126 pp.
- EGOAVIL VERA, JUAN RAÚL (2015). *Fundamentos de Matemática. Introducción al nivel universitario*. Bogotá, Ediciones de la U.
- RAMOS, FRANCISCO (2014). *Aritmética*. Lima, Perú. Empresa Editora Macro.
- STEWART, IAN. (2016) *Números increíbles*. (traducción), Crítica. México. 418 pp.



UNIDAD 2

Variación directamente proporcional y funciones lineales

INTRODUCCIÓN.

En la vida cotidiana nos topamos con el término proporción en muchos casos: Cuando decimos que un alumno ha crecido mucho, pero está bien proporcionado le damos un sentido de armonía y estética. O si escuchamos las noticias que opinan que la riqueza de un político es proporcional a sus emolumentos recibidos, nos referimos a que las variables riqueza e ingresos son justificados.

También utilizamos el término para comparar características en distintas circunstancias: un perro es más inteligente que un gato, etc. Sin embargo, el término proporción se utiliza cotidianamente más de lo que imaginamos. Si has hecho un pastel o galletas, te habrás dado cuenta que todos sus ingredientes son proporcionales de acuerdo a una receta. Muchos problemas de este tipo se pueden resolver por una simple regla de tres, porque existe una dependencia lineal, directa o inversa entre las magnitudes involucradas.

Dentro de las organizaciones y en particular de las empresas, cuando se compra un bien mueble como equipo, maquinaria o algún automotor, se registra el valor de dicho bien como un activo en los registros correspondientes. Al paso del tiempo el valor de estos activos, tienden a decrecer como consecuencia de su desgaste u obsolescencia. Esta disminución gradual en el valor del activo, se conoce como depreciación. Esta depreciación se comporta de acuerdo a un modelo lineal, donde la reducción del valor se hace en una cantidad constante cada año.

Otra aplicación es en el cálculo de costos totales que se generan en un proceso de producción y venta de bienes en general.

INSTRUCCIONES

Este material está pensado para que repases, complementes o prepares algún examen por tu cuenta. Está pensado para que de manera autodidacta y al ritmo de estudio que consideres adecuado, avances de manera contundente para adquirir seguridad y destreza en los aprendizajes que debes conocer para aprobar con éxito esta asignatura.

PRESENTACIÓN

Al finalizar esta unidad el alumno será capaz de:

- Modelar y analizar situaciones que involucren la variación entre dos cantidades en los casos en que la razón de sus incrementos sean proporcionales; utilizando los registros tabular, gráfico y algebraico, con la finalidad de que se inicie en el estudio de la variación, la idea de relación funcional, sus conceptos asociados y, continúe la comprensión del lenguaje algebraico como la representación de la generalidad.

Para conseguir esta ambiciosa meta, te proponemos una serie de actividades de aprendizaje, teoría y prácticas que están seguidas del aprendizaje y temática propuestas en el programa de la asignatura. Se recomienda seguirlas en el orden que se presentan, sin embargo, pueden estudiarse donde el estudiante tenga interés si considera que los conceptos que se requieren para su entendimiento ya los domina.

CONCEPTOS CLAVE:

Magnitud, variable dependiente, variable independiente, unidad de medida, variación, relación, función lineal, constante.

SUGERENCIAS

Este contenido está dirigido a los alumnos que desean estudiar de manera autodidacta y a su ritmo. Se recomienda seguir las actividades de aprendizaje y repasar la teoría. Seguir los ejemplos ayudará a adquirir destreza. En caso de tener preguntas, se sugiere preguntar al profesor o acudir a asesorías con dudas específicas. No está de más el hacer algunas recomendaciones a los estudiantes para que su estudio sea eficaz: leer con atención cada párrafo y comprender lo que se pide, trabajar en un lugar bien ventilado, iluminado y silencioso, sentarse cómodamente en una silla con respaldo y en una mesa libre de obstáculos y tener una libreta de notas para realizar todos los ejercicios propuestos para adquirir seguridad en esta asignatura. Probablemente alguna de estas recomendaciones no sean factibles, pero en lo posible tratar de respetarlas.

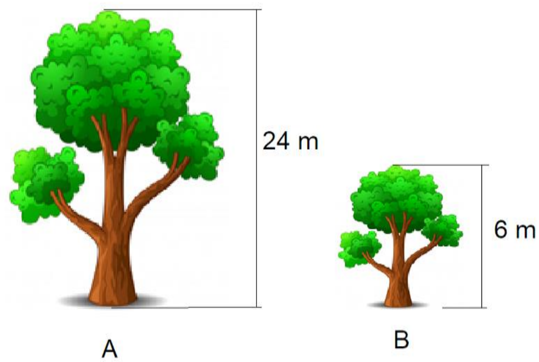
Aprendizajes:

Identifica situaciones donde existe variación entre dos magnitudes.

Temática:

El concepto de variación entre dos magnitudes.

Nos piden comparar la altura de los árboles siguientes:



Para compararlos, podemos establecer que la altura de A, sobrepasa a la del segundo B en:

$$24 - 6 = 18\ m$$

O bien, la altura de A es

$$\frac{24}{6} = 4$$

Cuatro veces la del segundo árbol.

Al resultado de comparar dos magnitudes mediante la resta se llama razón aritmética o por diferencias y sus términos son:

valor de la razón

$$\underset{\text{antecedente}}{A} - \underset{\text{consecuente}}{B} = \propto$$

Cuando se comparan dos magnitudes por división, al resultado se llama razón geométrica o por división y sus términos son:

antecedente

$$\frac{A}{B} = k$$

valor de la razón

consecuente

Autoevaluación

Se ofrece un concierto del grupo musical de moda. Las entradas por persona cuestan $350.00.

a) ¿De qué depende el importe total de las entradas?____

____

b) De las magnitudes: importe total y asistentes, ¿cuál depende de la otra?, ¿Por qué?

____

____

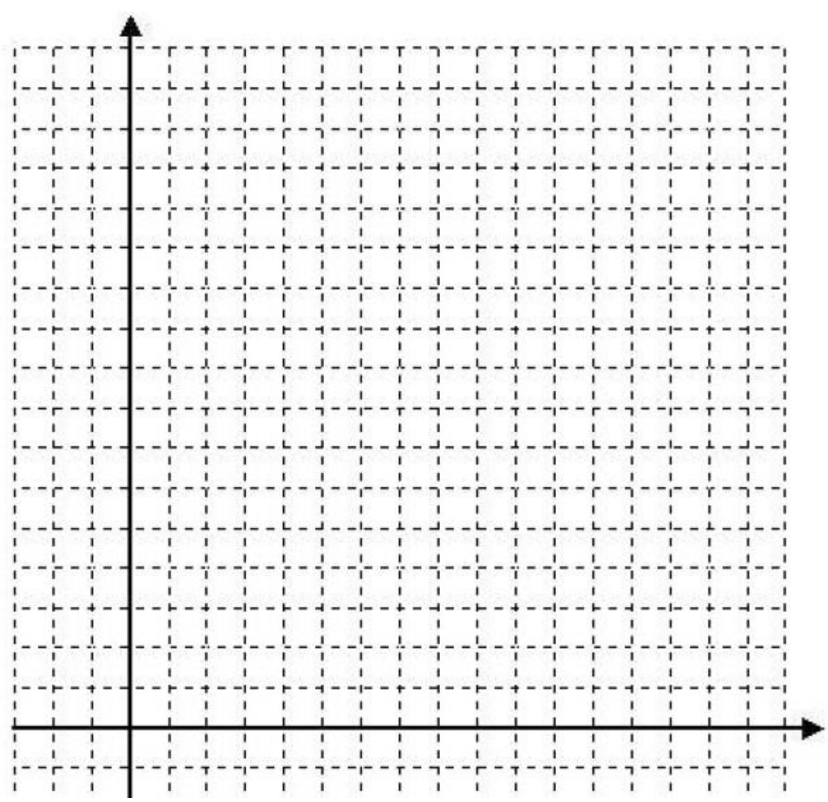
____

____

c) Completa la tabla:

Número de personas	1	3	7	15	20	40	200	n
Importe total ($)	350							

d) Grafica la tabla. Elije una escala adecuada para los ejes y coloca el nombre de los ejes.



¿Qué observas?

Aprendizajes:

Dada una situación donde existe variación entre dos cantidades, el alumno identifica los elementos que corresponden a los conceptos de variable independiente y dependiente, razón de cambio y su cálculo dado un incremento de la variable independiente.

Temática:

El concepto de variable dependiente e independiente.
Razón de cambio entre dos variables correlacionadas.

Definición de Magnitud, variable dependiente e independiente

Una **magnitud** es una cualidad o característica que se puede medir. Ejemplo: longitud, masa, número de alumnos, velocidad, edad de alumnos, número de nacimientos, etc.

Las magnitudes se expresan en unidades de medida: kg, litros, $m/_s$, etc.

Para cada una de esas medidas, existen diferentes cantidades, por ejemplo, un metro, 40 $m/_s$, 17 años, 25 alumnos, etc.

Cuando el valor de una magnitud depende de otra, se dice que es una **variable dependiente** y la segunda es la variable **independiente**.

Autoevaluación

1.- Señala de la lista siguiente las que correspondan a magnitudes.

cualidad	**SI**	**NO**
El peso de una persona	( )	( )
El amor	( )	( )
El ancho de la mesa	( )	( )
El volumen de agua de una alberca	( )	( )
La edad de Alejandro	( )	( )
La distancia que recorres a tu casa	( )	( )
La risa	( )	( )
La hora del día	( )	( )
El cariño que sientes por tu mascota	( )	( )

2.- Señala la unidad de medida de las siguientes magnitudes.

cualidad	**Unidad de medida**
El precio de una bicicleta	pesos

La distancia entre dos ciudades	
El ancho de la mesa	
El volumen de agua de una alberca	
La edad de Alejandro	
El tiempo que tardas en llegar a tu casa	
La densidad de un líquido	
La hora del día	
La aceleración de una partícula	

3.- En la siguientes situaciones, determina cuál es la variable dependiente.

Situación	**Variable dependiente**
El número de fotocopias y el costo que se paga por ellas	El costo
El número de objetos (iguales) y el peso total de ellos	
La distancia recorrida (a velocidad constante) y el consumo de gasolina	
El tiempo de llenado de un depósito y su capacidad	
El alargamiento de un resorte y el peso suspendido de él	
La longitud de las sombras y las alturas de los objetos correspondientes	
La cantidad de dinero en un sistema monetario y su equivalente en otro sistema	
El costo de mantenimiento de una industria y el tamaño de sus instalaciones	
El costo de una consulta de acuerdo a la especialidad del médico	

Aprendizajes:

Traduce en una tabla de valores algunos “estados” correspondientes a la descripción verbal de la variación directamente proporcional entre dos magnitudes.
Traduce en una gráfica, la descripción tabular o verbal de la variación relacionada (directamente proporcional) entre dos cantidades y usa esta representación para obtener información sobre la variación.

Temática:

- Representación tabular de la variación directamente proporcional entre dos magnitudes.
- El patrón aditivo en una variación directamente proporcional.
- El punto como representación de “estados” específicos de variación.
- Convenciones sobre las escalas.
- El patrón gráfico de una variación directamente proporcional.
- Análisis contextual de la representación gráfica:
- Interpretación de los puntos del patrón gráfico como estados de la variación no registrados en una representación tabular.
- El punto en el origen y la inclinación del gráfico como indicadores esenciales de una variación directamente proporcional.

Sugerencia de actividades de aprendizaje teórico-prácticas

Actividad: Se desea conocer el precio de 15 folletos y se sabe que el costo de uno de ellos es de 20 pesos. Si completamos una tabla para observar el costo se tendría:

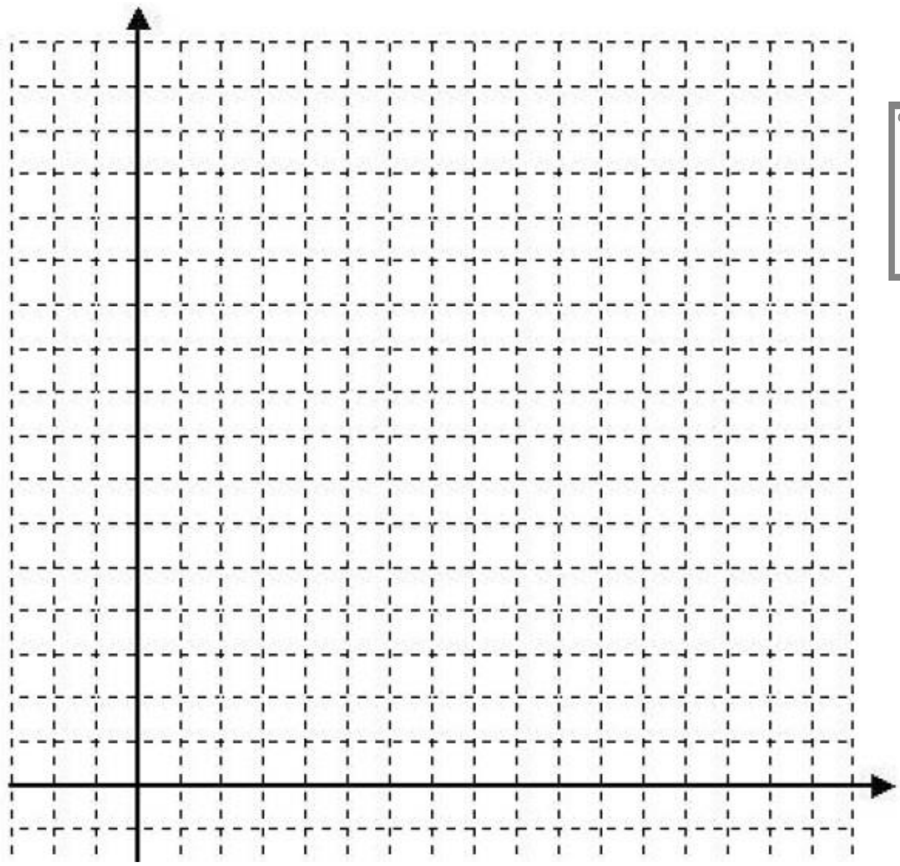
Núm libros	1	2	3	4	5	7	10	13	15
Precio ($)	20	40		80	100		200	260	

Responde:

1.- En la tabla se puede observar que el costo de dos libros es de $40, el de 15: _____.

2.- Al aumentar la cantidad de libros, aumenta el ___________.

3.- Escribe el nombre de los ejes, elige una escala adecuada y construye la gráfica de los datos de la tabla:



4.- Observa que los puntos se encuentran alineados, es decir, sobre una recta. Si se desea conocer el costo de 20 libros, ¿Cuántas veces se debe sumar el costo de un libro? _______

5.- Llena la siguiente tabla y responde.

6.- ¿En cuáles columnas no cambia el significado de la operación?

____

Libros (x)	Precio (y)	$\frac{x}{y}$	$\frac{y}{x}$
1	20	$\frac{1}{20}$	$\frac{20}{1}=20$
2		$\frac{2}{40}$	
3	60	$\frac{3}{\ }$	
4		$\frac{4}{\ }$	
5	100	$\frac{5}{\ }$	

6		$\frac{6}{\quad}$	
7		$\frac{7}{\quad}$	
8	160	$\frac{8}{160}$	
9		$\frac{9}{\quad}$	
10	200	$\frac{10}{200}$	
11		$\frac{11}{\quad}$	
12		$\frac{12}{\quad}$	
13	260	$\frac{13}{260}$	
14		$\frac{14}{\quad}$	
15		$\frac{15}{\quad}$	

7.- En efecto, la columna $\frac{x}{y} = \frac{1}{20}$ y la última:

$$\frac{y}{x} = \_\_\_\_$$

8.- Esta última expresión matemática modela la relación entre las variables x e y, despeja y de la ecuación anterior:

$$y = \_\_\_\_$$

9.- Esta ecuación, nos permite determinar el precio de los libros, simplemente multiplicando por ______ el número de libros.

Cuando los valores que toman un par de variables están **en razón constante**, se dice que son **directamente proporcionales**. Siempre se cumple que:

$$\frac{y}{x} = k$$

Donde x e y son las variables y k es una constante, conocida como constante de proporcionalidad entre x e y. La constante de proporcionalidad resulta ser la pendiente de la recta que resulta de graficar y contra x.

Esta razón $\frac{y}{x} = k$ nos brinda la base para formalizar la popular regla de tres:

$\frac{y_1}{x_1} = k = \frac{y_2}{x_2}$ la cual representa una proporción.

Ejemplos:

1.- Un pintor termina de pintar una barda de cierta dimensión en 3 días. a) ¿Cuánto tiempo tardará en pintar 5 bardas equivalentes? b) ¿Cuántos pintores que trabajen a un ritmo similar se requieren para pintar 126 bardas iguales en 6 días?

Solución:

a) La proporción que se requiere es: $\frac{1\ barda}{3\ días} = \frac{5\ bardas}{x\ \ días}$

$$x = \frac{(5\ bardas)(3\ días)}{1\ bardas} = 15\ días$$

b) La proporción que se requiere: $\frac{1\ pintor}{3\ días} = \frac{x\ \ pintores}{126\ \ días}$

$$x = \frac{(1\ pintor)(126\ días)}{3\ días} = 42\ pintores$$

2.- Un lingote de oro de 1 000 gramos ocupa un volumen de 53.703 cm^3. El banco Central de México debe transportar 350 lingotes de oro periódicamente. El banco está pensando en comprar una camioneta para llevar a cabo esta tarea, ¿Cuál es la capacidad mínima, en kg y en m^3 que debe tener el vehículo?

Solución:

La proporción que se requiere para el peso es: $\frac{1\ lingote}{1\ kg} = \frac{350\ lingotes}{x\ \ kg}$, por lo tanto:

$$x\ [kg] = \frac{(350\ lingotes)(1\ kg)}{1\ lingote} = 350\ kg$$

La proporción que se requiere para el volumen:

$$\frac{1\ lingote}{0.000053703\ m^3} = \frac{350\ lingotes}{x\ \ m^3}$$

$$x\ [m^3] = \frac{(350\ lingotes)(0.000053703\ m^3)}{1\ lingote} = 0.019\ m^3$$

Al peso habría que sumarle el peso del conductor y de los guardias que cuidan la mercancía tan valiosa.

Autoevaluación

1.- Establece si la relación entre las siguientes variables que se presentan en las siguientes tablas son directamente proporcionales o no.

a) T es la temperatura y V es el volumen de una sustancia gaseosa.

T (ºC)	100	125	150	175	200	225	250
V (l)	31.021	33.103	35.184	37.265	39.345	41.425	43.503

no

b).h es la altura sobre el nivel del mar y t es el tiempo.

t (min.)	7	14	20	25	28	35
h (pies)	5 000	10 000	14 286	17 857	20 000	25 000

si

c) T es la temperatura y V es el volumen de una sustancia gaseosa.

T (ºC)	398.15	423.15	448.15	473.15	498.15	523.15
siV (l)	33.103	35.184	37.265	39.345	41.425	43.505

si

d). Crecimiento de bacterias (núm. De colonias) con el tiempo

t	15	30	45	60	75	90	105
colonias	2	4	8	16	32	64	128

No

2.- Completa la siguiente tabla sabiendo que la proporcionalidad entre las magnitudes es directa.

A	4	2	12	7	20		
B	20	10	60	35	100		

3.- ¿Cuánto corresponde a 1? ___5__

4.- ¿Cuánto corresponde al valor 0? ______

5.- Un tractor, en un camino se mueve a una velocidad constante de 20 km/h. Calcular la distancia que recorre en 20 minutos, 45 minutos, 55 minutos, 1 hr y 10 minutos, 1 hr y 25 minutos, 1 hr y 50 minutos, 2 hr y 15 minutos.

Llena la tabla siguiente:

Tiempo (t)							
Distancia (d)							

Responde a las siguientes preguntas:

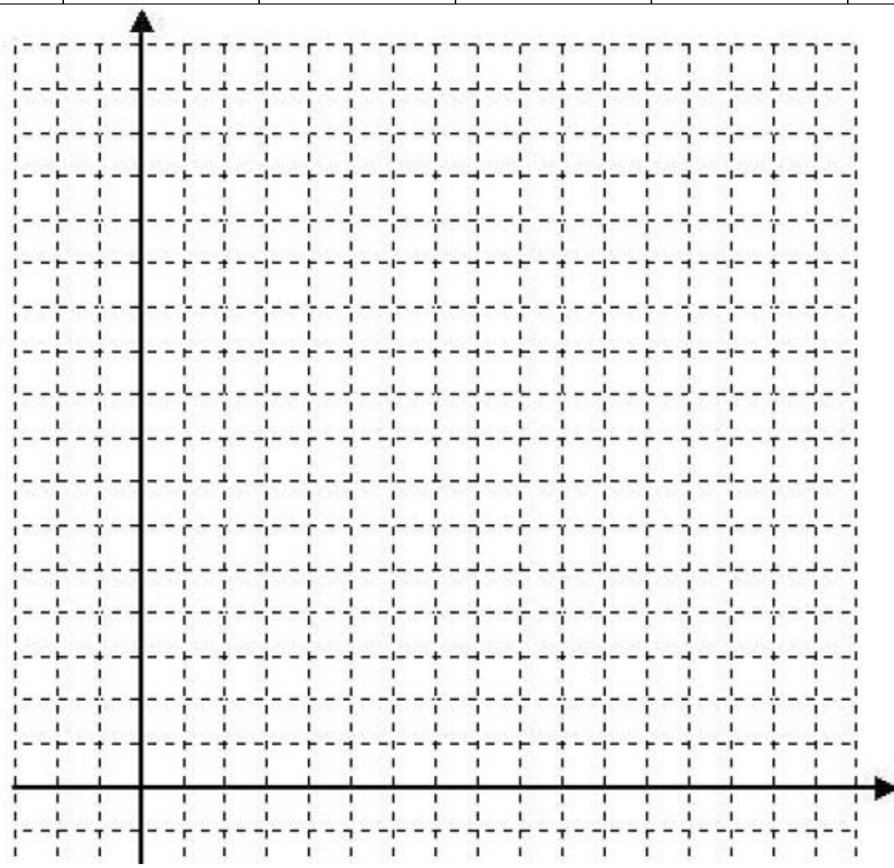
a) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ______________________

b) ¿Cuál es la variable dependiente? _______________ ¿Cuál es la variable independiente? ______________________

c) Escribe la expresión o modelo matemático que relaciona las dos variables. _____________________________________

6.- Llena la siguiente tabla, considerando que y varia directamente con x. Determina la expresión o modelo matemático que relaciona ambas variables y realiza la gráfica correspondiente.

x	2	5		8	
y		16	19.2		41.6



Aprendizajes:

Representa algebraicamente la variación directamente proporcional entre dos cantidades y obtener a partir de ella información sobre ésta.

Temática:
Expresión simbólica de la generalidad

- $y = ax$ como representación de una variación directamente proporcional.

Análisis contextual de la expresión simbólica $y = ax$.

- El parámetro a como la rapidez de variación o razón de cambio.
- El parámetro a como indicador de la inclinación del gráfico de la variación.
- La constancia de a en una variación directamente proporcional.

Variación directamente proporcional para un resorte

Instrucciones: A continuación te presentamos una actividad. Lee con cuidado y atención de qué trata y qué es lo que se pide, después, analiza con cuidado cómo se va resolviendo.

La ley de Hooke para un resorte elástico establece que la distancia que éste se alarga es directamente proporcional a la fuerza que se aplica. Si una fuerza de 50 N se aplica sobre un resorte y provoca que se alargue 8 cm, ¿Cuánto alargará el resorte una fuerza de 70 N?

Solución:

Se sabe que en una variación directamente proporcional se cumple que la relación de variables está determinada por:

$$y = ax$$

En este caso y representa el alargamiento y x la fuerza:

$$0.08 = 50a$$

La constante de variación (rigidez del resorte):

$$a = \frac{0.08}{50} = 0.0016$$

Es decir:

$$y = 0.0016x$$

respondiendo la pregunta:

$$y = 0.0016(70)$$

$$y = 0.112\, m = \ 11.2\, cm$$

Observación: Cuida de trabajar con unidades homogéneas, es decir:

$$[N] = \frac{[m]}{[s^2]} = \frac{metro}{segundo^2}$$

Actividad de aprendizaje teórico-práctica 1

Instrucciones: Lee con atención la siguiente situación y contesta los que se pregunta: En cierto lapso de tiempo, dos albañiles construyen un muro de 12 m de longitud de acuerdo a la siguiente tabla.

1.- Llena la tabla en donde se muestre la longitud del muro en diversos instantes.

albañiles	0	1	2	3			10	13	15
longitud de muro (metros)			12		24	30			

2.- Determina cuántos metros de muro construirá un solo albañil. ________________

3.- Exceptuando para el tiempo cero, Calcula el cociente de la longitud de muro entre los albañiles que los construyen y escríbelo debajo de la tabla, en cada espacio.

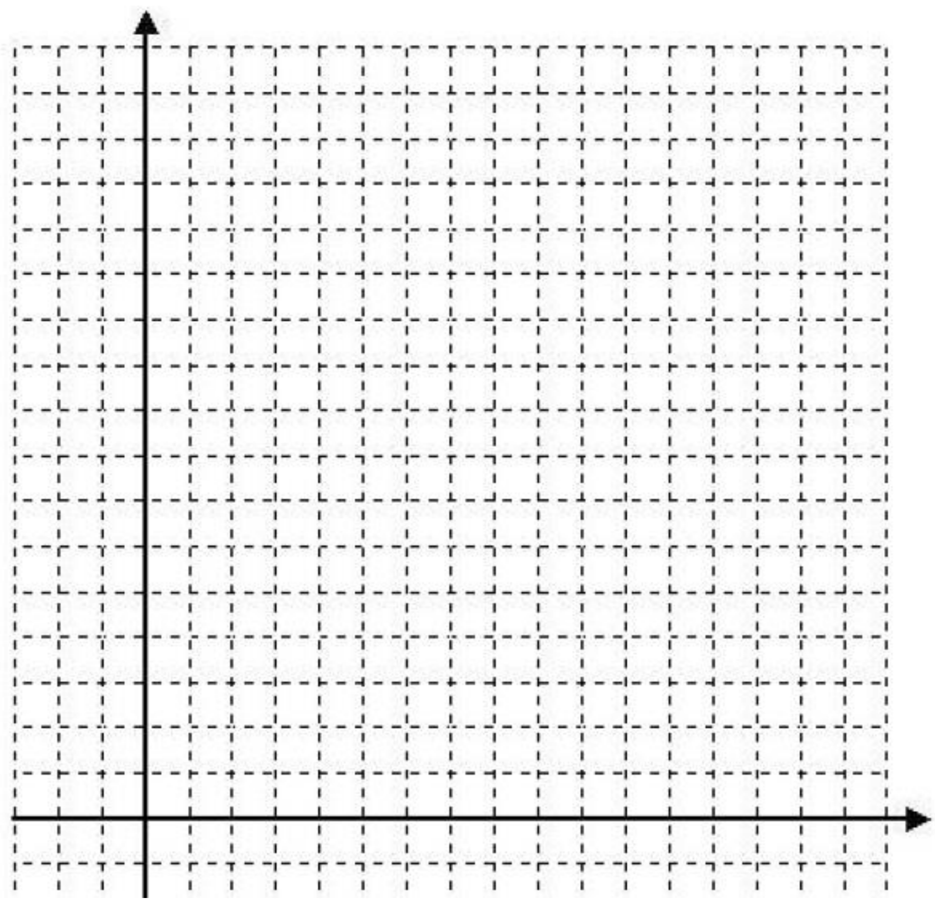
Cociente	---								

4.-Describe la relación entre número de albañiles y la longitud de muro que construyen

5.- Explica cuál es la variable independiente y dependiente.

6.- Elabora un modelo matemático que relacione la variable dependiente de la independiente.

7.- Representa gráficamente los resultados de la tabla. Elige una escala adecuada. No olvides etiquetar cada eje con la variable que representa.



8.- Escribe el nombre de la línea que se forma al unir los puntos en la gráfica: __________________________

9.- Describe el comportamiento de la línea. ¿Qué efecto produce en la gráfica el cociente obtenido en el punto 3?

El modelo matemático obtenido en el paso 6, representa la **variación directa** que existe entre la longitud de muro construido y el número de albañiles, y al mismo tiempo representa una función lineal del tipo: $y = ax$

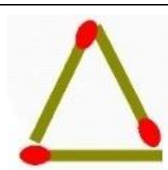
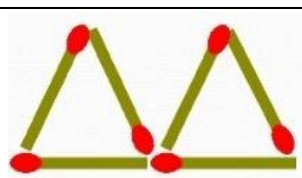
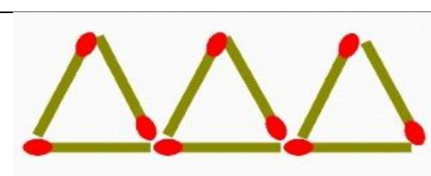
Al cociente obtenido en el punto 3, se le conoce como constante de proporcionalidad, *razón de cambio* o indicador de la inclinación en la gráfica.

10.- ¿Cuántos albañiles se necesitarán para construir un muro de 120 m, en las mismas condiciones?

11.- ¿Existe alguna ventaja de una gráfica con respecto a una tabla de valores? Explica tu respuesta.

Autoevaluación

Analiza con atención, luego justifica tus respuestas con los cálculos correspondientes en los espacios: Las siguientes figuras fueron hechas con cerillos:

 1a	 2a	 3a

1.- Dibuja la figura que sigue (4a):

2.- ¿Cuántos cerillos se necesitan para construir la figura 10a?__________

3.- ¿Cuántos cerillos se necesitan para construir la figura 50a?__________

4.- ¿Cuántos cerillos se necesitan para construir la figura 67a?__________

5.- Determina en qué lugar se encuentra la figura que se construye con 1 239 cerillos. ____________________

6.- Determina en qué lugar se encuentra la figura que se construye con 4 755 cerillos. ____________________

7.- Identifica la variable dependiente y la independiente. Justifica tu respuesta

8.- Determina el modelo algebraico: __________

Aprendizaje

Identifica entre una serie de variaciones entre dos aquellas que correspondan al concepto de función lineal.

Temática:

El concepto de función lineal.

La función Lineal

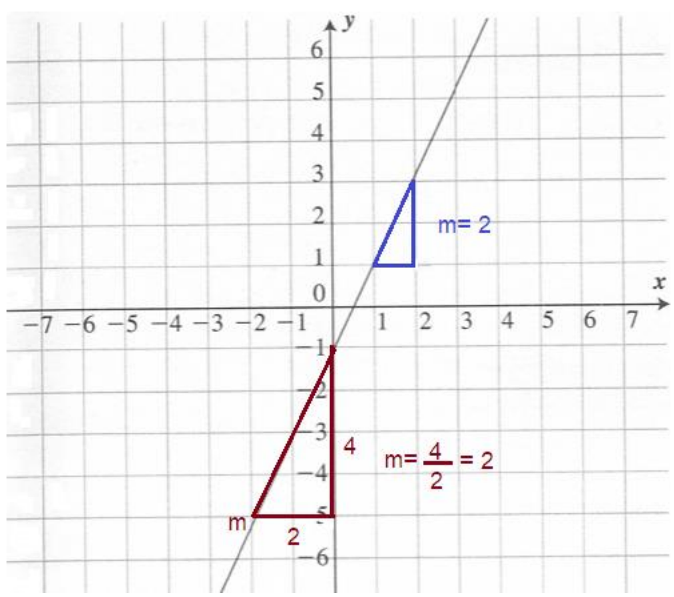
Definición: Una ***función*** es una relación entre dos variables en la que a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente.

Las funciones lineales son de la forma:

$$y = mx + b$$

El valor donde interseca al eje de las ordenadas la gráfica, se le conoce como **ordenada al origen** (b). En el caso de la gráfica siguiente vale -1.

Si se ubican triángulos donde puedas claramente identificar la medida de sus catetos como se muestra en la gráfica:



Al valor calculado con la razón m: $\frac{cateto\ vertical}{cateto\ horizontal}$ se llama **pendiente** de la recta y se le representa con la letra m. El valor de la pendiente permanece constante en cualquier tramo de la recta.

Para el ejemplo, se tienen los siguientes valores:

$$y = 2x - 1$$

Ejercicios de Autoevaluación

1.- Un automóvil a velocidad constante tiene siempre el mismo consumo de gasolina. Si en un viaje de 250 km consume 12.5 litros.

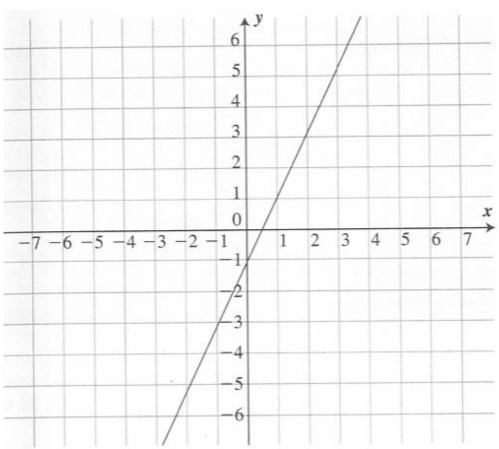
a) ¿Cuánto vale la variación entre variables (pendiente)?

b) Estima la función que modela esta situación.

c) ¿Cuántos kilómetros recorrerá si consume 20 litros?

d) Si con 12.5 litros recorre 500 km, ¿cuánto vale la constante de proporcionalidad?

2.- Completa la siguiente tabla utilizando la gráfica siguiente:



x	y
-2	
-1	
	-1
1	
	3
	5

a) ¿Cuáles coordenadas tiene el punto de intersección con el eje y?

____

Aprendizaje

- Modela con la expresión $y = mx + b$, una variación relacionada entre dos variables con rapidez de variación constante y condición inicial $(0, b)$ transitando en la etapa de exploración, por representaciones tabulares y gráficas.
- Dada una variación que se modela con una función lineal, el alumno calcule estados específicos de variación, su rapidez de cambio y estado inicial empleando sus representaciones gráfica y analítica.

Temática:

- Representación analítica de una función lineal.
- Identificación de los elementos definitorios de una función lineal empleando las representaciones gráficas y analíticas: condición inicial, rapidez de variación.

Aplicaciones en la Administración:

La expresión lineal para el valor depreciado de un bien al paso del tiempo es:

$$V_D = V_{adq} - TDt$$

donde V_D es el valor de depreciación,

V_{adq} es el valor de adquisición del bien,

t años transcurridos y

TD es la tasa de depreciación, la cual se define como $TD = \frac{V_{adq} - valor\ de\ rescate}{vida\ \text{útil}}$.

Ejemplo:

1.- Si se compra una maquinaria a \$250 000.00 cuya vida útil se fija en 5 años y se vende en \$75 000.

a) Calcula la tasa de depreciación anual

b) Obtener la expresión lineal para el valor depreciado

c) Calcula el valor de la maquinaria al término de tres años

Solución:

a) $TD = \frac{V_{adq} - valor\ de\ rescate}{vida\ \text{útil}} = \frac{250\,000 - 75\,000}{5} = \$35\,000$
b) $V_D = V_{adq} - TD(t) = 250\,000 - 35\,000(t)$
c) $V_D = 250\,000 - 35\,000(3) = \$145\,000$

2.- La señora Jacqueline compró un televisor nuevo por $10 000.00 que se deprecian linealmente cada año un 15% de su costo original.

a) ¿Cuál es el valor del televisor después de t años y después de 4 años de uso?

b) ¿Cuántos años tendrán que pasar para que se deprecie totalmente el televisor?

Solución:

a) La tasa de depreciación es del 15% el valor del televisor nuevo:

$$TD = 0.15(10\ 000) = \$1\ 500$$

La expresión lineal para el valor depreciado de un bien al paso del tiempo es de la forma:

$$y = mx + b$$

$$V_D = -TD(t) + V_{adq}$$

El valor del televisor después de t años es:

$$V_D = -1\ 500(t) + 10\ 000$$

El valor del televisor después de 4 años es:

$$V_D = -1\ 500(4) + 10\ 000 = \$4\ 000.00$$

b) El tiempo en el que el televisor se deprecia totalmente es cuando $V_D = 0$:

$$-1\ 500(t) + 10\ 000 = V_D$$

$$-1\ 500(t) + 10\ 000 = 0$$

$$t = \frac{-10\ 000}{-1\ 500} = 6.67\ años$$

Se puede afirmar que la respuesta es de aproximadamente 6 años con:

$$\frac{1\ año}{12\ meses} = \frac{0.67}{X}$$

$$x = \frac{(0.67\ años)(12\ meses)}{1\ año} = 8\ meses$$

Respuesta: 6 años y 8 meses.

En una empresa se generan costos variables (C_v) y costos fijos (C_f). Los costos variables están integrados por los costos de materias primas y de mano de obra. Los costos fijos no dependen de la producción y son el pago de renta del inmueble, intereses sobre algún préstamo, salarios, etc.

El modelo lineal aplicado a los costos totales (C_T) lleva la siguiente expresión:

$$C_T = C_v x + C_f$$

X representa el número de unidades producidas.

Los **ingresos** (I) dependen del precio por unidad que se fija al bien que se vende y e número de unidades vendidas.

La aplicación del modelo lineal a la expresión para los ingresos por ventas, lleva a:

$$I = px$$

Donde p es el precio de venta por unidad y x es el número de unidades vendidas.

La **utilidad** se define como la diferencia entre los ingresos derivados de la venta del bien y los costos totales asociados a la producción del mismo. Es claro que si los ingresos son mayores que los costos totales, la utilidad será positiva, es decir habrá ganancias. Si por el contrario, los ingresos son menores a los costos totales, la utilidad será negativa, habrá pérdida.

Aplicando el modelo lineal a la utilidad, condice a las siguiente expresión:

$$U = I - C_T$$

$$U = Px - (C_v x + C_F)$$

$$U = (P - C_V)x - C_F$$

Nota que la expresión anterior corresponde a la de una recta con pendiente $m = p - C_V$ y ordenada al origen $b = C_F$.

Ejemplo 3: Los costos variables asociados el material y mano de obra de un tipo de silla son de $200.00 por unidad. Los costos fijos del taller son de $5 600.00 a la semana, Si cada silla se vende al público en $600.00

a) Escribe la expresión lineal para los costos totales, el ingreso y las utilidades.
b) ¿Cuántas sillas habrá qué vender para obtener utilidades de $20 000.00 a la semana?

Solución:

a)

Para el Costo Total C_T:

$$C_T = C_v x + C_F$$

$$C_T = 200x + 5600$$

Para el ingreso (I):

$$I = px$$

$$I = 600x$$

Para la Utilidad U:

$$U = (Px - C_V)x - C_F$$

$$U = (600 - 200)x - 5\,600$$

$$U = 400\,x - 5\,600$$

b)

$$U = 400\,x - 5\,600$$

$$20\,000 = 400\,x - 5\,600$$

$$400x = 20\,000 + 5\,600$$

$$x = \frac{5\,600}{400} = 64\ sillas.$$

Autoevaluación

1.- Alejandro compró un automóvil nuevo en $160 000.00

a) ¿Cuál es la función lineal que modela el valor del automóvil después de t años, suponiendo que se deprecia linealmente a razón de $20 000.00 cada año? (respuesta: $V_D = -20\,000(t) + 160\,000$).
b) ¿Cuál es el valor después de 5 años? (Respuesta: $60 000.00).

2.- Con relación a la gráfica de adjunta,
a) ¿Cuál es el valor de la ordenada al origen?.

____

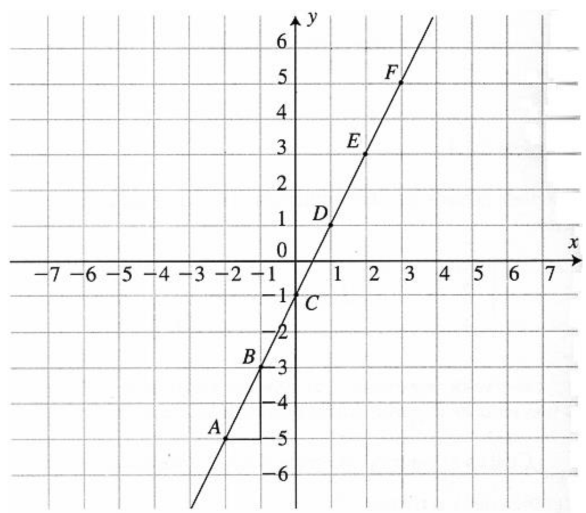
____

b). ¿Cuánto vale la pendiente?

____

____

c). Determina la función lineal que representa la gráfica adjunta _______________



3.- escribe la pendiente de la recta (m) y las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados: $y = 3x + 5$

a). m=3 ok b). m=3 c). m=5 d). m=3

(0,5) y $(-5/3\,, 0)$	(5,0) y $(-5/3\,, 0)$	(0,-5) y $(5/3\,, 0)$	(0,5) y $(0,\ -5/3)$

4.- escribe la pendiente de la recta (m) y las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados: $y = \frac{2}{3}x - 2$.

a). m=$-2/3$	b). m=$2/3$	c). m=$2/3$ 0k	d). m=$-2/3$
(0,2) y $(2/3\,, 0)$	(2,0) y $(-3{,}0)$	(0,-2) y $(3{,}0)$	(0,-2) y $(0,\ 3)$

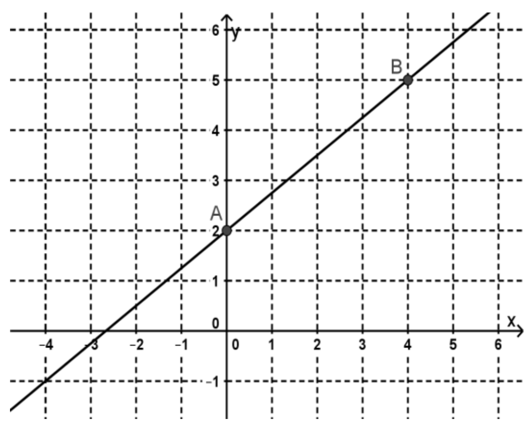
5.- escribe la pendiente de la recta (m) y las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados: $y = 5x + 3$.

a). m=5	b). m=-5	c). m=5 0k	d). m=5
(0,2) y $(3/5\,, 0)$	(2,0) y $(-3{,}0)$	(0,3) y $(-3/5\,, 0)$	(0,-2) y $(5/3\,, 0)$

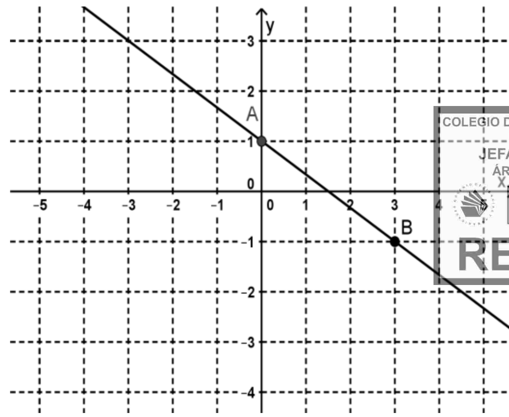
6.- Un empleado de una zapatería gana $30.00 por día más $5.00 por cada par de zapatos que venda (x), ¿Cuál es el modelo lineal que describe el sueldo (y) por día?

a). $y = 5x + 30$ ok
b). $y = 30x + 5$
c). $y = -5x + 30$
d). $y = 5x - 30$

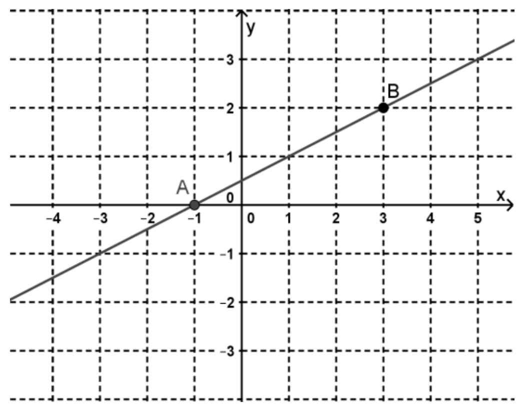
7.- Con relación a la gráfica adjunta, determina:
a) la ordenada al origen
b) la pendiente
c) la función lineal



8.- Con relación a la gráfica adjunta, determina:
a) la ordenada al origen
b) la pendiente
c) la función lineal



9.- Con relación a la gráfica adjunta, determina:
a) la ordenada al origen
b) la pendiente
c) la función lineal



10.- Encuentra la función que corresponde a la siguiente tabla:

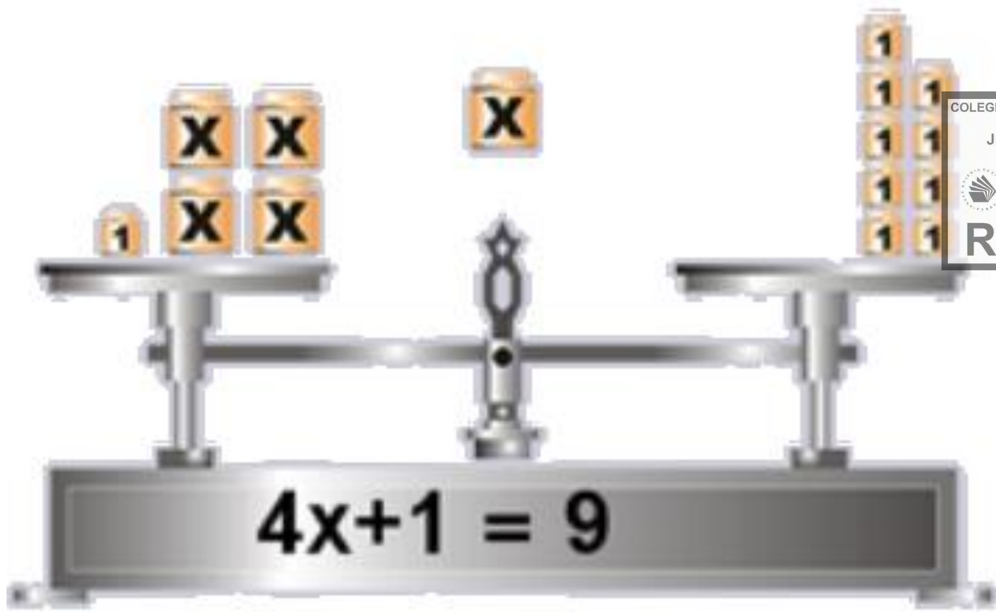
X	2	4	8	10	15
y	4	8	16	20	30

Bibliografía básica

- ALANIS SOLIS, LORENZO (2012). *Matemáticas I. Solución de problemas reales*. México, Ediciones Quinto sol, 215 pp.
- MILLER, CHARLES D., HEEREN, VERN E., HORBSBY, JOHN (2013). *Matemática: razonamiento y aplicaciones.* 12a Edición, México. Pearson. Addison Wesley.
- TUSSY, GUSTAFSON Y KOENING (2013). *Matemáticas básicas*. México, 4ª. Edición, Cengage Learning, 843 pp.

Bibliografía complementaria

- AGUILAR, DAVID (1981). *Cómo jugar y divertirse con las matemáticas*. Madrid, Altalena Editores, 91 pp.
- BERLINSKI, DAVID (2013). *Uno, dos, tres. La belleza y la simetría de las matemáticas absolutamente elementales*. México, Oceano, 200 pp.
- CAPÓ DOLZ, MIGUEL (2017). Matemáticas del 1 al 100. Ariel, México, 254 pp.
- CRUZ, LORETO (2003). Libro 1, Números. Serie LEITMOTIV, México, 109 pp.
- EQUIPO πms (2003). *Taller de Matemáticas I. Los números naturales.* Madrid, Editorial EOS, 148 pp.
- ESPUIG, ALICIA (2011). Matemáticas. Prueba de acceso a ciclos formativos de GS. Barcelona, Editorial Marcombo, 342 pp.
- MILLER, HEEREN Y HORNSBY(2006). *Matemática: razonamiento y aplicaciones.* Pearson.Addison Wesley, 10ª. Edición, México, 944 pp.
- VELASCO, ANTONIANO (2016). *Curiosidades matemáticas. Sorpresas, paradojas, enigmas y maravillas del mundo de la matemática.* Limusa, México, 126 pp.
- EGOAVIL VERA, JUAN RAÚL (2015). *Fundamentos de Matemática. Introducción al nivel universitario*. Bogotá, Ediciones de la U.
- RAMOS, FRANCISCO (2014). *Aritmética*. Lima, Perú. Empresa Editora Macro.
- SPIEGEL, MURRAY R. (1969) Algebra superior. Serie de compendios schaum. McGraw-Hill, México.



UNIDAD 3

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

INTRODUCCIÓN

En la vida cotidiana nos topamos con el término proporción en muchos casos: Cuando decimos que un alumno ha crecido mucho, pero está bien proporcionado le damos un sentido de armonía y estética. O si escuchamos las noticias que opinan que la riqueza de un político es proporcional a sus emolumentos recibidos, nos referimos a que las variables riqueza e ingresos son justificados.

También utilizamos el término para comparar características en distintas circunstancias: un perro es más inteligente que un gato, etc. Sin embargo, el término proporción se utiliza cotidianamente más de lo que imaginamos. Si has hecho un pastel o galletas, te habrás dado cuenta que todos sus ingredientes son proporcionales de acuerdo a una receta. Muchos problemas de este tipo se pueden resolver por una simple regla de tres, porque existe una dependencia lineal, directa o inversa entre las magnitudes involucradas.

Dentro de las organizaciones y en particular de las empresas, cuando se compra un bien mueble como equipo, maquinaria o algún automotor, se registra el valor de dicho bien como un activo en los registros correspondientes. Al paso del tiempo el valor de estos activos, tienden a decrecer como consecuencia de su desgaste u obsolescencia. Esta disminución gradual en el valor del activo, se conoce como depreciación. Esta depreciación se comporta de acuerdo a un modelo lineal, donde la reducción del valor se hace en una cantidad constante cada año.

Otra aplicación es en el cálculo de costos totales que se generan en un proceso de producción y venta de bienes en general.

INSTRUCCIONES

Este material está pensado para que repases, complementes o prepares algún examen por tu cuenta. Está pensado para que de manera autodidacta y al ritmo de estudio que consideres adecuado, avances de manera contundente para adquirir seguridad y destreza en los aprendizajes que debes conocer para aprobar con éxito esta asignatura.

PRESENTACIÓN

Al finalizar esta unidad el alumno será capaz de:

- Modelar y resolver situaciones problemáticas que conduzcan a una ecuación de primer grado con una incógnita, esto lo hará manipulando algebraicamente el modelo, con la finalidad de que la representación algebraica sea una herramienta en la resolución de tales situaciones.

Para conseguir esta ambiciosa meta, te proponemos una serie de actividades de aprendizaje, teoría y prácticas que están seguidas del aprendizaje y temática propuestas en el programa de la asignatura. Se recomienda seguirlas en el orden que se presentan, sin embargo, pueden estudiarse donde el estudiante tenga interés si considera que los conceptos que se requieren para su entendimiento ya los domina.

CONCEPTOS CLAVE

Magnitud, variable dependiente, variable independiente, unidad de medida, variación, relación, función lineal, constante, modelo lineal.

SUGERENCIAS

Este contenido está dirigido a los alumnos que desean estudiar de manera autodidacta y a su ritmo. Se recomienda seguir las actividades de aprendizaje y repasar la teoría. Seguir los ejemplos ayudará a adquirir destreza. En caso de tener preguntas, se sugiere preguntar al profesor o acudir a asesorías con dudas específicas. No está de más el hacer algunas recomendaciones a los estudiantes para que su estudio sea eficaz: leer con atención cada párrafo y comprender lo que se pide, trabajar en un lugar bien ventilado, iluminado y silencioso, sentarse cómodamente en una silla con respaldo y en una mesa libre de obstáculos y tener una libreta de notas para realizar todos los ejercicios propuestos para adquirir seguridad en esta asignatura. Probablemente alguna de estas recomendaciones no sean factibles, pero en lo posible tratar de respetarlas.

Aprendizajes:

Comprende el concepto de “ecuación” en el contexto de la resolución de problemas y lo expresa en el lenguaje algebraico.

Temática:

- La ecuación como la condición simbólica que debe satisfacer la incógnita del problema.
- El uso de paréntesis en la representación algebraica.
- La ecuación como la expresión simbólica de un estado específico de una función lineal.

SIGERENCIA DE ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE TEÓRICO-PRÁCTICA

Un automóvil parte de la ciudad A con una velocidad uniforme de 40.5 km/h hacia la ciudad B. Dos horas después sale de A hacia B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h. ¿A qué distancia de A se alcanzan?

SOLUCIÓN.

Podríamos proceder con una tabla donde mediante aproximaciones sucesivas encontremos la respuesta: Llena los espacios que faltan y responde las preguntas.

Tiempo transcurrido desde que el Primer automóvil sale de A (hora)	Distancia recorrida por el primer automóvil (km). $d = vel \times tiempo$	Distancia recorrida por el segundo automóvil (km) $d = vel \times tiempo$	Control ¿Son iguales las distancias?
1	40.5	0	¿40.5=0?
2	81	0	¿ 81 =0 ?
3	121.5	60	¿121.5=60?
4	162	120	¿162=120?
5	202.5	180	¿202.5=180?
6	243	240	¿243=240?
7	283.5	300	¿283.5=300?

1.- ¿A partir de qué hora las distancias se han alcanzado?__________

2.- La respuesta se encuentra entre qué horas? _______ y _______

3.- ¿Cómo podrías encontrar la respuesta más exacta? _____________________

____

____

____

4.- Escribe una expresión matemática que describa el recorrido del automóvil A y B.

Automóvil A distancia=velocidad × tiempo	Automóvil B distancia=velocidad × tiempo
$d = 40.5t$	$d =$ ____$(t-2)$

5.- como estamos buscando la misma distancia entre ambos vehículos, igualamos ambas expresiones y encontramos el tiempo en el que ambos se encuentran, ¿Cuál es? ____

____

____

____

Acabas de expresar una igualdad para resolver un problema.

Definición:

Una **ecuación** es un enunciado en el que dos expresiones algebraicas representan al mismo número.

Ejemplo:

2+3=4+1 es una ecuación donde cada expresión representa al 5

Existen ecuaciones en las que se utilizan variables como:

x+3=5
2x-6=4
$2x^2 - 4 = 0$

Estas ecuaciones son verdaderas para algunos valores de las variables y falsas para otros. A los valores que hacen que sea verdadera la ecuación se les llama **raíces** o **solución** de la ecuación.

Ejemplo: Determina si 2 es solución de la ecuación $2x - 6 = 0$.

Solución:

Se sustituye el 2 en la ecuación. Si se cumple la igualdad sí es solución, de lo contrario no lo será.

$$2(2) - 6 = 0$$

$$4 - 6 = 0$$

$$-2 = 0$$

No se cumple la igualdad, por lo tanto 2 no es solución de la ecuación dada.

Definición:

Una **ecuación lineal con una incógnita** es aquella que, una vez simplificada, contiene solamente una incógnita con exponente uno.

Ejemplo: La expresión x+1=4 es lineal, pues el exponente mayor de la variable es 1.

$x^2 + 4 = 0$ no es lineal, ya que el exponente de la variable no es 1.

Cómo expresar un enunciado en ecuación.

Si x representa un número cualquiera:

enunciado	**Expresión matemática**
El doble de un número	2x
La mitad de un número cualquiera	$x/2$
El cuádrupo de un número cualquiera	4x
Cinco veces un número más uno	5x+1
Dos unidades menos que un número	x−2
La edad de Juan (x) dentro de cuatro años	x+4
La edad de Joseph (x) hace diez años	x-10
El número de centavos en x monedas de 25 centavos	25x
Separe 17 en dos partes	x y 17−x
Dos enteros consecutivos	x y x+1
Dos enteros pares consecutivos	x y x+2
Dos enteros nones consecutivos	x y x+2
El interés que rinden x pesos al 5% durante un año	0.05x
La distancia recorrida en x horas a 30 km/h	30x
Tres es cuatro veces más que cierto número (x)	3=x+4

Recomendaciones para resolver problemas

1.- Leer todo el problema con rapidez para saber de qué tipo es y de qué se trata.

2.- Busca la pregunta al final del problema; a menudo se aclara qué es lo que se resuelve. Generalmente son dos o tres cosas.

3.- Empieza diciendo: Sea x = algo” (en general la incógnita se representa con x). x es lo que se intenta encontrar, y suele expresarse en la pregunta que se plantea al final del problema; se denomina incógnita. X casi siempre se etiqueta en la unidad de medición que pide el problema: cm, km, kg, años, etc.

4.- Cuando sea preciso encontrar más de una incógnita, intenta determinar la incógnita más pequeña, que con frecuencia se denota con x.

5.- Lee todo el problema nuevamente y traduce el problema de palabras a símbolos dato por dato.

6.- Elimina los datos que no sean necesarios para resolver el problema.

Ejemplos

1.- Un número es el doble de otro.

Sea x = el número más pequeño

2x = el número más grande

2.- Un hombre es 3 años mayor que el doble de la edad de su hijo.

Sea x = edad del hijo

2x+3 = la edad del padre

3.- Representa dos números cuya suma sea 43

Sea x = un número

72-x = el otro número

4.- Un hombre es 5 años mayor que el doble de la edad de su hijo.

Sea x = la edad del hijo

2x+5 = la edad del padre

AUTOEVALUACIÓN

Expresa algebraicamente el valor de cada incógnita en cada uno de los casos siguientes:

1.- Un hombre invirtió $10 000.00, una parte a 5% y otra al 7%, ¿Qué interés tuvo?

Sea x = ___________ invertida al 5% (10 000 - x) = cantidad invertida al _______%	0.05x = interés de la primera inversión 0.07(10 000 – x) = interés de la segunda inversión

2.- Una mezcla contiene 5% de ácido sulfúrico. Represente la cantidad de ácido en litros.

Sea x = Número de: ______________________

______________________ = Número de litros de ácido sulfúrico.

3.- Una mujer condujo 5 horas a una velocidad constante por hora. Representa la distancia que recorrió. (Recuerda las lecciones de física: $v = \frac{d}{t} \Rightarrow d = v \times t$).

Sea x = Distancia ______________________

______________________ = Número de kilómetros que viajó.

4.- Una niña tiene dos monedas más de 10 pesos que de 5 pesos. Representa cuánto dinero tiene en pesos.

Sea x = Número de: ______________________

______________________ = Número monedas de $10.00

5x = Cantidad de monedas de $5.00

10(_________) = Cantidad de monedas de $10.00

5.- La suma de dos número es 72 y un número es el doble del otro. ¿Cuáles son esos dos números?.

Sea x = Número pequeño

______________________ = El doble del número pequeño

______________________ = La suma de los dos números es 72

$x +$ ____ $= 72$

6.- Dos números suman 50. Tres veces el primero es 5 más que el doble del segundo. ¿Cuáles son esos números?

Sea x = Número pequeño

______________________ = El otro número

______________________ = Tres veces el primero

______________________ = El doble del segundo

Juntando las partes:

$3x = 2($_______$)+$_______

7.- Separe 71 en dos partes, de manera que una de ellas exceda a la otra por 7. ¿Cuáles son esos dos números?.

Sea x = Número pequeño

______________________ = La otra parte

______________________ = La segunda parte excede a la primera parte por 7 unidades

Juntando todo:

$$(71 - \_\_\_) - x = 7$$

8.- Encuentra tres enteros consecutivos cuya suma sea 87.

Sea x = Número pequeño

_________________________= El número de en medio

= El número más grande

_________________________= La suma de los tres números es 87

$$x + \_\_\_\_ + \_\_\_\_ = 87$$

9.- Encuentra tres enteros consecutivos *pares* de modo que el mayor sea tres veces más grande que el menor.

Sea x = Número pequeño

_________________________= El número de en medio

= El número más grande

_________________________: El número mayor es tres veces más grande que el menor

Juntando todo:

$$x + \_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

10.- Juan puede pintar una barda en 4 horas y Enrique puede pintarla en tres. ¿Cuánto tardarán en pintar la misma barda si trabajan juntos?.

Sea x = Número de horas para pintar la barda juntos.

_________________________= Parte fraccionaria del trabajo hecho en una hora por Juan

_________________________= Parte fraccionaria del trabajo hecho en una hora por Enrique

Parte fraccionaria del trabajo hecho en una hora por ambos

Juntando las partes

$$\frac{\_\_}{4} + \frac{\_\_}{3} = \frac{1}{x}$$

11.- A un precio de \$2.50 por unidad, una empresa ofrecerá 8 000 camisetas al mes; a \$4.00 cada unidad, la misma empresa producirá 14 000 camisetas al mes. Determine la ecuación de la oferta, suponiendo que es lineal.

12.- Un fabricante de herramientas puede vender 3 000 martillos al mes a \$2.00 cada uno, mientras que sólo pueden venderse 2 000 martillos a \$2.75 cada uno. Determina la ley de la demanda, suponiendo que es lineal.

Aprendizajes:

Una vez expresada algebraicamente la condición que satisface la incógnita en un problema, el alumno la utiliza para resolverlo, empleando las reglas de transposición o las propiedades de igualdad.

Temática:

- Reducción de una ecuación de primer grado con una incógnita a la forma: $ax + b = 0$.
- El concepto de ecuaciones equivalentes.
- Las reglas algebraicas que producen ecuaciones equivalentes:
- Las reglas de transposición o las propiedades de la igualdad y las condiciones de su aplicación.
- La propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma.
- Resolución de una ecuación de primer grado con una incógnita transformándola a la forma: $ax + b = 0$

Reglas algebraicas que producen ecuaciones equivalentes

Resolver una ecuación quiere decir que se desea encontrar todos los valores que hagan que la igualdad se cumpla. Para ello se procede a simplificar la ecuación realizando operaciones que van transformando la ecuación dada en otras equivalentes (que tengan la misma solución).

El resultado de una ecuación no se altera si se afectan ambos lados de la misma manera:

$$x = y \Rightarrow x + z = y + z$$

$$x = y \Rightarrow x - z = y - z$$

$$x = y \Rightarrow x(z) = y(z), z \neq 0$$

$$x = y \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{y}{z} \quad x \neq 0, y \neq 0$$

Ejemplo:

1.- Resolver la siguiente ecuación: $5x + 2 = 17$

$a).\ 5x + 2 = 17$

$5x + 2 - 2 = 17 - 2$ Restemos 2 en ambos lados de la ecuación

b). $5x = 15$ simplifiquemos

$\frac{5x}{5}=\frac{15}{5}$	Dividamos ambos lados por 5
$x=3$	Simplifiquemos

La ecuación a) y b) son equivalentes, es decir, tienen la misma solución.

2.- Resolver la siguiente ecuación: $8y=3y+35$

$8y=3y+35$	
$8y-3y=3y-3y+35$	Restemos $3y$ en ambos lados de la ecuación
$5y=35$	simplifiquemos
$\frac{5y}{5}=\frac{35}{5}$	Dividamos ambos lados por 5
$y=7$	Simplifiquemos

3.- Resolver la siguiente ecuación: $3x+\frac{x}{4}=7$

$3x+\frac{x}{4}=7$	
$3x+\frac{1}{4}x=7$	Identifiquemos los coeficientes
$x(3+\frac{1}{4})=7$	factoricemos
$x(\frac{13}{4})=7$	simplifiquemos
$x(\frac{13}{4})4=(7)4$	Multipliquemos por 4 ambos lados
$13x=4(7)$	Simplifiquemos
$13x=4(7)$	Dividamos por 13 ambos lados
$(\frac{13}{13})x=\frac{4(7)}{13}$	Simplifiquemos
$x=\frac{28}{13}$	

4.- Resolver la siguiente ecuación: $\frac{1}{x}=4$

$\frac{1}{x}=4$	
$1\left(\frac{1}{x}\right)=4$	Identifiquemos los coeficientes
$x(\frac{1}{x})=4x$	Multipliquemos por x ambos lados
$1=4x$	simplifiquemos
$4x=1$	Trasponemos términos (nota que los signos se conservan)

$\left(\frac{4}{4}\right)x = \frac{1}{4}$	Dividamos por 4 ambos lados
$x = \frac{1}{4}$	simplifiquemos

5.- Resolver la siguiente ecuación: $\frac{3}{x+4} = 7$

$\frac{3}{x+4} = 7$	
$3\left(\frac{1}{x+4}\right) = 7$	Identifiquemos los coeficientes
$3\left(\frac{1}{x+4}\right)(x+4) = 7(x+4)$	Multipliquemos por x+4 ambos lados
$3 = 7(x+4)$	simplifiquemos
$7(x+4) = 3$	Trasponemos términos (nota que los signos se conservan)
$\left(\frac{7}{7}\right)(x+4) = \frac{3}{7}$	Dividamos por 7 ambos lados
$x + 4 = \frac{3}{7}$	simplifiquemos
$x + 4 - 4 = \frac{3}{7} - 4$	Restemos ambos lados por 4
$x = \frac{3}{7} - 4 = -\frac{25}{7}$	simplifiquemos
$x = -\frac{25}{7}$	

Autoevaluación

1.- Si a la tercera parte de la edad de Adrián, le sumamos el doble de su edad y le restamos 10, el resultado es 95. ¿Cuál es la edad de Adrián?

¿Qué te pregunta el problema?
Sea x =

$\frac{\quad}{3}$	La tercera parte de la edad de Adrián
$2\ \_\_$	El doble de su edad
$\frac{\quad}{3} + 2\ \_\_ - \_\_ = 95$	Juntemos todo
$\frac{1}{3}(\_\_\_) + 2\ \_\_\_ - \_\_\_ = 95$	Identifica los coeficientes

$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 95 + \_\_\_$ Identifica los términos semejantes y factoriza la incógnita

$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 105$ Simplifica y despeja x

$x = \_\_\_\_\_$ La edad de Adrián.

2.- Al sueldo quincenal de Martín le descuentan $300.00 por concepto de un préstamo que le fue otorgado. Después de ese descuento cobra $5 000.00, ¿Cuál es su sueldo mensual?

Sea x =

_________________________= El descuento a la quincena

$\frac{\_}{2}$ El sueldo a la quincena

___ – ___ Sueldo quincenal menos el descuento

Juntemos todo

$$\frac{x}{\_} - \_\_\_\_ = 5\ 000$$

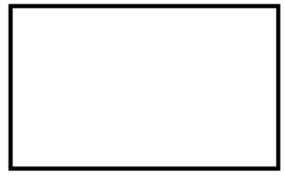
Despeja la variable:

El sueldo mensual de Martín es: ______________

3.- El perímetro de un rectángulo mide 18 cm, el largo es 3 unidades mayor

Escribe las medidas del rectángulo según los datos dados en el problema:

que el doble de la altura. ¿Cuánto mide la altura del rectángulo?



Sea x =

__________________________ = El doble de la altura

__________________________ = 3 unidades más que el doble de la altura

El perímetro

$2(\_\_\_ x + \_\_\_\_ + \_\_\_\_) = \_\_\_$

Despeja la variable:

La altura del rectángulo mide: ______ cm.

4.- El padre de María tiene el cuádruple de la edad de ella. Hace cinco años tenía 7 años de edad. ¿Qué edad tiene cada uno de ellos actualmente?

Sea x =

________________________________ = Edad actual del padre

________________________________ = La edad de María hace cinco años

________________________________ = La edad del padre hace cinco años

$Edad\ del\ padre = 7(Edad\ de\ María)$ Hace cinco años, el padre era 7 veces mayor que María

$\_\_\_\_\_\_\_\_ = 7(\ x - \_\_\_\_)$

Despeja la variable:

La edad de María: ______.
La edad del padre: _______.

5.- La suma de dos número es 72 y un número es el doble del otro. ¿Cuáles son esos dos números?.

Sea x = Número pequeño
_________________________= El doble del número pequeño
_________________________= La suma de los dos números es 72

$$x + \_\_\_\_ = 72$$

Despeja la variable:

Los dos números son: _______ y _______.

6.- Dos números suman 50. Tres veces el primero es 5 más que el doble del segundo. ¿Cuáles son esos números?

Sea x = Número pequeño
_________________________= El otro número
_________________________= Tres veces el primero
_________________________= El doble del segundo

Juntando las partes:

$$3x = 2(\_\_\_\_\_\_\_) + \_\_\_\_\_\_$$

Despeja la variable:

Los dos números son: _______ y _______.

7.- Separe 71 en dos partes, de manera que una de ellas exceda a la otra por 7. ¿Cuáles son esos dos números?.

Sea x = Número pequeño
_________________________= La otra parte
_________________________= La segunda parte excede a la primera parte por 7 unidades

Juntando todo:

$$(71 - \_\_\_) - x = 7$$

Despeja la variable:

Los dos números son: _______ y _______.

8.- Encuentra tres enteros consecutivos cuya suma sea 87.

Sea x = Número pequeño
_________________________= El número de en medio
= El número más grande
_________________________= La suma de los tres números es 87

$$x + \_\_\_ + \_\_\_\_ = 87$$

Despeja la variable:

Los dos números son: _______ y _______.

9.- Encuentra tres enteros consecutivos *pares* de modo que el mayor sea tres veces más grande que el menor.

Sea x = Número pequeño
_________________________= El número de en medio
= El número más grande
_________________________: El número mayor es tres veces más grande que el menor

Juntando todo:

$$x + \_\_\_ = \_\_\_\_$$

Despeja la variable:

Los tres números son: _______ , _______ y _______.

10.- Juan puede pintar una barda en 4 horas y Enrique puede pintarla en tres. ¿Cuánto tardarán en pintar la misma barda si trabajan juntos?.

Sea x = Número de horas para pintar la barda juntos.

_________________________ = Parte fraccionaria del trabajo hecho en una hora por Juan

_________________________ = Parte fraccionaria del trabajo hecho en una hora por Enrique

Parte fraccionaria del trabajo hecho en una hora por ambos

Juntando las partes

$$\frac{\quad}{4}+\frac{\quad}{3}=\frac{1}{x}$$

Despeja la variable:

El tiempo en que tardan en pintar la barda juntos en horas es:__________

11.- Gerardo compró una bicicleta de 10 velocidades por $12 000.00. Si hizo un pago inicial por $2 000.00 y dio mensualidades de $500.00, ¿Cuántos meses le tomó pagar la bicicleta?

Sea ___ = Número de pagos mensuales.

_________________________ = Número de mensualidades de $500.00

_________________________ = Pago inicial + numero de mensualidades de 500

Juntando las partes

$$2\,000+\ 500\_\_=12\,000$$

Despeja la variable:

12.- Tres cuartas partes de los miembros de un club de tenis se inscribieron en un torneo. El día del torneo entraron 9 personas más, lo que hizo un total de 84. ¿Cuántos miembros tiene el club? (resp. 100)

13.- Eliot ganó $60 pesos por hora en un trabajo y obtuvo una compensación de $100.00, lo que hace un ingreso total de $580.00. ¿Cuántas horas trabajó? (resp. 8horas).

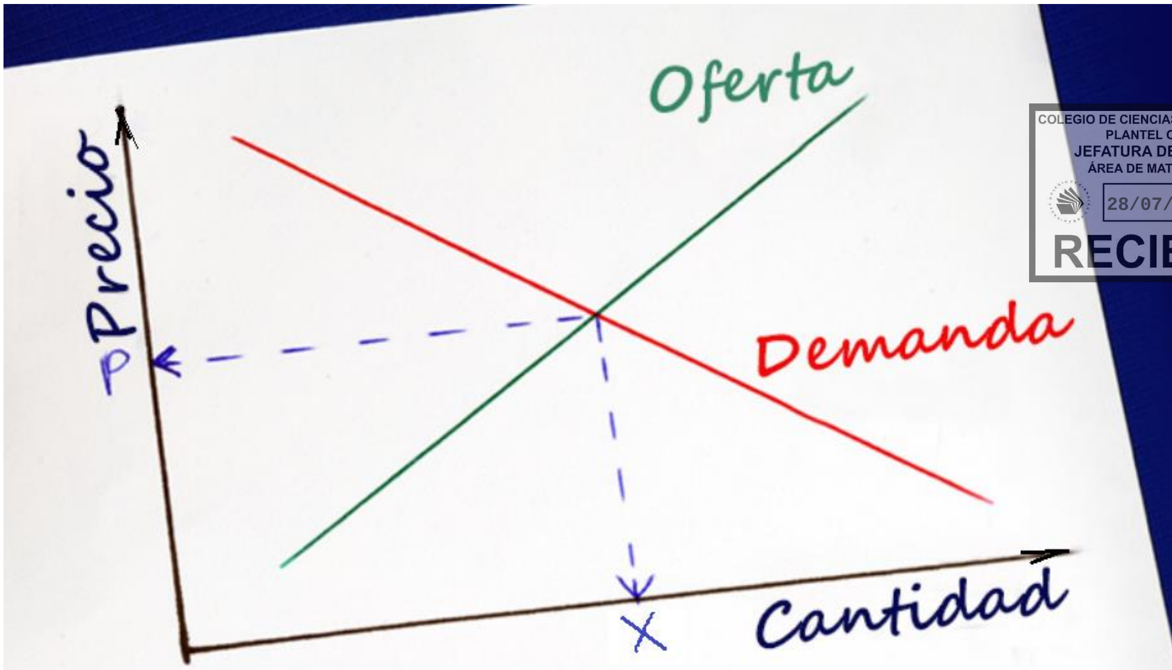
14.- La familia Ortíz viajó a razón de 53 km/h, se detuvo a comer y luego viajó 78 km más en una hora y media. El odómetro de su automóvil indicaba que habían recorrido un total de 343 km. ¿Cuánto tiempo les llevó el viaje? (Resp. 4.26 h.).

Bibliografía básica

- ALANIS SOLIS, LORENZO (2012). *Matemáticas I. Solución de problemas reales*. México, Ediciones Quinto sol, 215 pp.
- MILLER, CHARLES D., HEEREN, VERN E., HORBSBY, JOHN (2013). *Matemática: razonamiento y aplicaciones.* 12a Edición, México. Pearson. Addison Wesley.
- TUSSY, GUSTAFSON Y KOENING (2013). *Matemáticas básicas*. México, 4ª. Edición, Cengage Learning, 843 pp.

Bibliografía complementaria

- AGUILAR, DAVID (1981). *Cómo jugar y divertirse con las matemáticas*. Madrid, Altalena Editores, 91 pp.
- BERLINSKI, DAVID (2013). *Uno, dos, tres. La belleza y la simetría de las matemáticas absolutamente elementales*. México, Oceano, 200 pp.
- CAPÓ DOLZ, MIGUEL (2017). Matemáticas del 1 al 100. Ariel, México, 254 pp.
- CRUZ, LORETO (2003). Libro 1, Números. Serie LEITMOTIV, México, 109 pp.
- EQUIPO πms (2003). *Taller de Matemáticas I. Los números naturales.* Madrid, Editorial EOS, 148 pp.
- ESPUIG, ALICIA (2011). Matemáticas. Prueba de acceso a ciclos formativos de GS. Barcelona, Editorial Marcombo, 342 pp.
- MILLER, HEEREN Y HORNSBY(2006). *Matemática: razonamiento y aplicaciones.* Pearson.Addison Wesley, 10ª. Edición, México, 944 pp.
- VELASCO, ANTONIANO (2016). *Curiosidades matemáticas. Sorpresas, paradojas, enigmas y maravillas del mundo de la matemática.* Limusa, México, 126 pp.
- EGOAVIL VERA, JUAN RAÚL (2015). *Fundamentos de Matemática. Introducción al nivel universitario*. Bogotá, Ediciones de la U.
- RAMOS, FRANCISCO (2014). *Aritmética*. Lima, Perú. Empresa Editora Macro.
- SPIEGEL, MURRAY R. (1969) Algebra superior. Serie de Compendios Schaum. McGraw-Hill, México.



UNIDAD 4

Sistemas de ecuaciones lineales

INTRODUCCIÓN

Un sistema de ecuaciones lineales 2×2, consta de 2 ecuaciones lineales con dos incógnitas. De acuerdo con el tipo de solución los sistemas de ecuaciones se pueden clasificar en compatible e incompatible; los sistemas compatibles a su vez se dividen en determinados e indeterminados, los determinados son aquellos que tienen una única solución, mientras que los indeterminados tienen una infinidad de soluciones. Finalmente, los sistemas incompatibles son aquellos que no tienen solución.

En la vida diaria seguramente habrás escuchado palabras como oferta, demanda, punto de equilibrio, variables de crecimiento, etc. Pues bien, el concepto a estas palabras tiene mucho efecto en nuestras vidas diarias. Sin embargo, los que se encargan de estudiarlas, deben conocer sobre matemáticas ya que para comprenderlos pueden seguir modelos lineales. El modelo lineal aplicado a las leyes de la oferta y demanda representa un instrumento que es simple y es muy útil. Para ello se emplea la fórmula de la ecuación de la recta, denominada pendiente-ordenada al origen (y=mx+b).

PRESENTACIÓN

Al finalizar esta unidad el alumno será capaz de:

- Modelar y resolver situaciones problemáticas que conduzcan a sistemas de ecuaciones lineales de orden 2x2 y 3x3, a fin de que se avance en la utilización de la representación algebraica como un sistema de símbolos útiles en la resolución de tales situaciones.

Para conseguir este ambicioso propósito, te proponemos una serie de actividades de aprendizaje, teoría y prácticas que están seguidas del aprendizaje y temática propuestas en el programa de la asignatura. Se recomienda seguirlas en el orden que se presentan, sin embargo, pueden estudiarse donde el estudiante tenga interés si considera que los conceptos que se requieren para su entendimiento ya los domina.

CONCEPTOS CLAVE

Sistema de ecuaciones lineales, sistema de ecuación lineal compatible, sistema de ecuación lineal incompatible, sistema de ecuación indeterminada, sistema de ecuaciones equivalente, punto de equilibrio, matriz.

INSTRUCCIONES

Este material está pensado para que repases, complementes o prepares algún examen por tu cuenta. Está pensado para que de manera autodidacta y al ritmo de estudio que consideres adecuado, avances de manera contundente para adquirir seguridad y destreza en los aprendizajes que debes conocer para aprobar con éxito esta asignatura.

SUGERENCIAS

Este contenido está dirigido a los alumnos que desean estudiar de manera autodidacta y a su ritmo. Se recomienda seguir las actividades de aprendizaje y repasar la teoría. Seguir los ejemplos ayudará a adquirir destreza. En caso de tener preguntas, se sugiere preguntar al profesor o acudir a asesorías con dudas específicas. No está de más el hacer algunas recomendaciones a los estudiantes para que su estudio sea eficaz: leer con atención cada párrafo y comprender lo que se pide, trabajar en un lugar bien ventilado, iluminado y silencioso, sentarse cómodamente en una silla con respaldo y en una mesa libre de obstáculos y tener una libreta de notas para realizar todos los ejercicios propuestos para adquirir seguridad en esta asignatura. Probablemente alguna de estas recomendaciones no sean factibles, pero en lo posible tratar de respetarlas.

Aprendizajes:

Ante un problema que potencialmente lleve a una ecuación con dos variables, el alumno comprende que existe una infinidad de soluciones que satisfacen la condición.

Temática:

- Solución de una ecuación lineal con dos variables.
- Representación tabular de las soluciones a un problema con dos variables que satisfacen una sola condición.

Definición: Un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas es un par de ecuaciones del tipo:

$$\begin{array}{lcl} ax & + \; by & = c \\ a'x & + \; b'y & = c' \end{array}$$

Donde a, b, c, a', b' y c' son números reales.

La solución del sistema de ecuaciones es el par de valores que es solución de las dos ecuaciones a la vez.

Sugerencias de Actividad de aprendizaje Teórico-Práctica

Marco tiene dos cuentas de Banco y, en total, la suma depositada en ellas es $15 000.00. Si nombramos la cantidad de dinero depositada en el Banco A como x y a la cantidad de dinero depositada en el Banco B con la letra y, Determina:

a) El modelo matemático que representa la cantidad de dinero ahorrada por Marco.
b) Si en el Banco A tiene ahorrado $10,000.00, ¿cuánto dinero tiene en el Banco B?
c) Si en el Banco A tiene ahorrado $3,000.00, ¿cuánto dinero tiene en el Banco B?
d) Si en el Banco B tiene ahorrado $1 500.00, ¿Cuánto dinero tiene en el Banco A?

SOLUCIÓN.

a) Podemos escribir el problema como:

$$\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ = 15{,}000$$

Esta es una ecuación lineal con dos incógnitas.

b) Como x= la cantidad de dinero ahorrado en el banco A= 10,000

Sustituimos en $x + y = 15{,}000$ el valor de x dado y despejamos el valor de y:

$$\_\_\_\_\_ + y = 15\ 000$$

$$y = 15\ 000 - \_\_\_\_\_$$

$$y = \_\_\_\_\_\_$$

c) Repetimos el proceso anterior, pero ahora x= 3 000

$$\_\_\_\_\_ + y = 15\ 000$$

$$y = 15\ 000 - \_\_\_\_\_$$

$$y = \_\_\_\_\_\_$$

d) Ahora, sustituimos en $x + y = 15{,}000$ el valor de y dado y despejamos el valor de x:

$$x + \_\_\_\_ = 15\ 000$$

$$x = 15\ 000 - \_\_\_\_\_$$

$$x = \_\_\_\_\_\_$$

Si se introduce otra condición al problema dado: Se sabe que en el Banco B, Marco tiene el doble de dinero que en el Banco A, podemos escribir:

$$y = 2x$$

Ahora tenemos dos condiciones que se deben cumplir al mismo tiempo (simultáneamente):

$x + y = 15{,}000$ Condición 1

$y = 2x$ Condición 2:

e) Si realizamos una tabla con la solución de cada una de ellas por separado, esperamos obtener dos números y escribimos esta solución como un par coordenado. Estos dos números (uno para cada incógnita) deben satisfacer a ambas ecuaciones a la vez. Escribamos en una tabla los valores de x y de y que satisfacen a cada ecuación de manera individual:

Soluciones de la Condición 1:

x	1,000	2,000	4,000	5,000	6,000	7,000
y	14,000		11,000		9,000	

Condición 2:

x	1,000	2,000	4,000	5,000	6,000	7,000
y	2,000		8,000		12,000	

f) ¿Para qué valor de x se da el mismo resultado en ambas condiciones??

Aprendizajes:

- Grafica las soluciones a un problema con dos variables e identifica el patrón geométrico que siguen las representaciones gráficas de las ecuaciones y su utilidad.
- Expresa algebraicamente las coordenadas de las soluciones a un problema con dos variables y una sola condición.
- Con el conocimiento anterior, el alumno resuelve gráficamente un problema que potencialmente lleve a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, aplicando la heurística de tratar cada una de las condiciones por separado.

Temática:

- Exploración gráfica de las soluciones a un problema con dos variables que deben satisfacer una sola condición.
- Las coordenadas
$$\left(x,\ \frac{c-ax}{b}\right) \text{ o } \left(\frac{c-by}{a}, y\right)$$
como la expresión general de los puntos que pertenecen a la recta que representa las soluciones de un problema que lleva a una ecuación lineal con dos variables y que se reduce a la forma: $ax + by = c$.
- Solución gráfica de un problema con dos variables y dos condiciones que potencialmente se puedan representar con ecuaciones lineales con dos variables.

Sugerencias de Actividad de aprendizaje Teórico-Práctica

1.- La mamá de Pedro tiene una alcancía con monedas de \$10.00 y con monedas de \$5.00, en total suman \$400.00

a) Traduce a lenguaje algebraico la situación anterior, si x= número de monedas de \$5.00 y y= número de monedas de \$10.00.

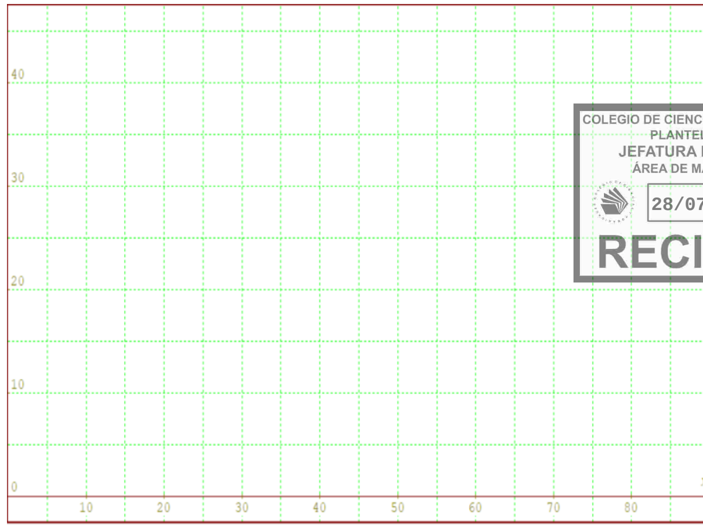
$$5x + 10y = \_\_\_\_$$

b) Despeja la variable y.

$$y = \text{—} - \text{—}x$$

c) Tabula algunos valores para x y obtén el valor de y. Grafica tus datos obtenidos.

x	y
0	
1	
2	
10	
15	
20	
25	
50	
80	



d) ¿Qué patrón sigue la gráfica? ¿tiene pendiente positiva o negativa?

e) Si se tienen 30 monedas de \$5.00, ¿Cuántas monedas de \$10.00 tendrá en su alcancía?

f) Si se tienen 35 monedas de \$10.00, ¿Cuántas monedas de \$5.00 tendrá en su alcancía?

g) ¿Resulta útil conocer el patrón de comportamiento de la gráfica? ¿Por qué?

Sugerencias de Actividad de aprendizaje Teórico-Práctica

Instrucciones: Lee con atención la siguiente situación y contesta lo que se pide.

2.- El abuelito de Victoria tiene una granja de conejos y de gallinas. En un día de ocio, Victoria contó 151 cabezas en total y 432 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos tiene su abuelito?

a) Asigna una variable para cada pregunta:

Sea x = el número de gallinas que hay en la granja

Sea y = ________________________________.

b). ¿Cuántos animales hay en total en la granja?________

c) Plantea el modelo que represente el número total de animales que hay en la granja:
____

d). ¿Cuántas patas tiene una gallina normalmente? ______________

¿Cómo modelas matemáticamente el número de patas que tiene una gallina normalmente?____

e). ¿Cuántas patas tiene un conejo normalmente? _______________

¿Cómo modelas matemáticamente el número de patas que tiene un conejo normalmente?____

f). Escribe la ecuación que describe el número total de patas de gallina y de conejo que existen en la granja:

$$\_\_ \, x + \_\_ \, y = \_\_\_\_$$

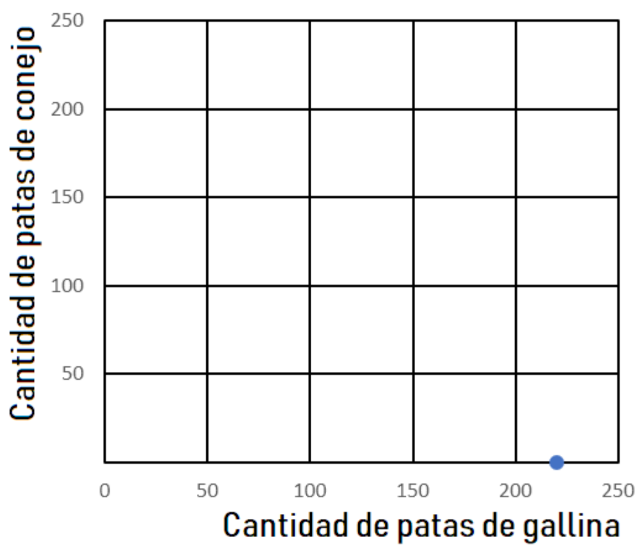
g). Despeja y de la ecuación anterior:

$$y = — \; - — x$$

Según el signo de la pendiente, ¿Cómo sería la gráfica de la ecuación, ascendente o descendente?____

h). Completa los datos de la tabulación siguiente y grafica la ecuación g).

x	y
0	
	0



Ahora, grafiquemos la otra condición, el número total de animales (cabezas) es:

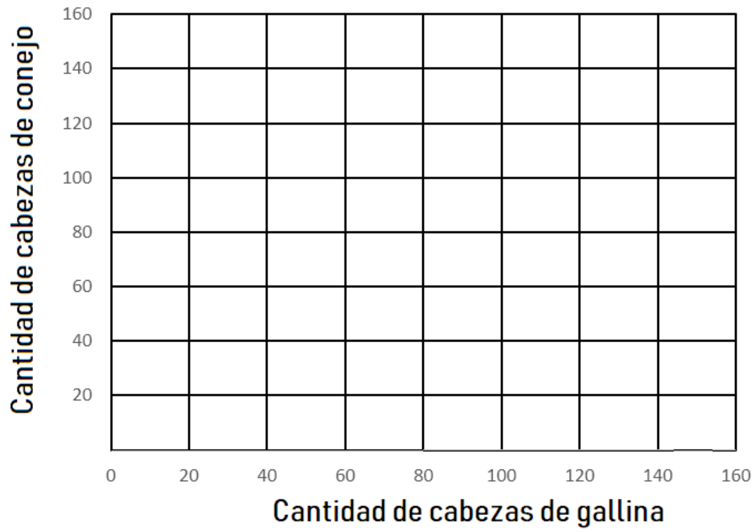
$$x + y = \_\_\_\_$$

i). Despeja y:

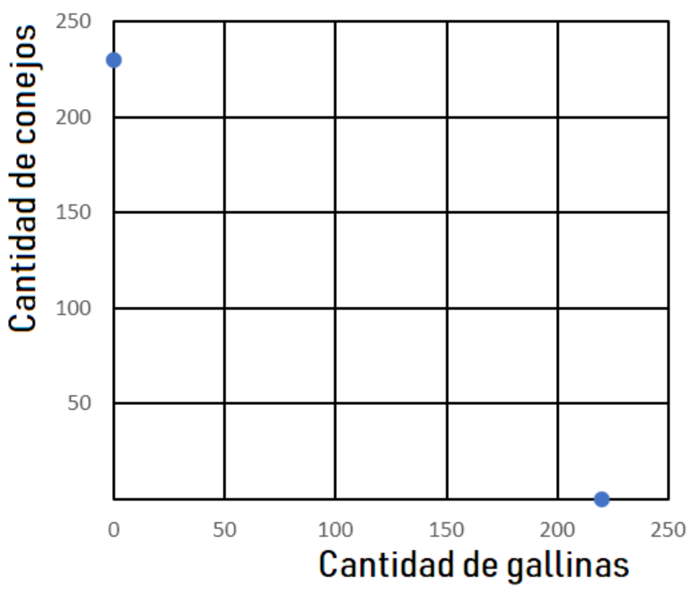
$$y = \_\_\_\_ - x$$

k) Tabula en la siguiente tabla y grafica:

x	y
0	
	0



l). Ahora grafica ambas rectas en la misma gráfica:



j) ¿Puedes identificar con precisión las coordenadas de intersección de ambas rectas?, ¿Por qué?

Autoevaluación:

Traduce el siguiente enunciado al lenguaje algebraico, es decir, escribe una ecuación y responde lo que se pide:

1). La suma de dos enteros es 16.

a). ¿Es posible encontrar una solución única?

Escribe algunas soluciones:

x	0	5	10	15	20	30	40
y							

2). La resta de dos números es 24:

a). ¿Es posible encontrar una solución única?

Escribe algunas soluciones:

x	0	5	10	15	20	30	40
y							

3) La suma de dos números enteros es 16 y su resta es 24.

a). Las coordenadas (0, 16) ¿son solución del sistema?, ¿Por qué?

b) ¿Cuál es la única solución del problema 3? Sol. (20,-4)

4.- En cada caso, subraya la solución correcta del sistema de ecuaciones indicado y compruébalo:

a) Comprobación

$$\begin{aligned} x - y &= 7 \\ 2x + y &= -1 \end{aligned} \qquad (10,3) \qquad (7,0) \qquad (\mathbf{2}, -\mathbf{5}) \qquad (1,-3)$$

b) Comprobación

$$\begin{aligned} x - y &= -2 \\ x + y &= 0 \end{aligned} \qquad (\mathbf{1}, -\mathbf{1}) \quad (-1,1) \quad (-1,-1) \quad (-2,0)$$

5.- Analiza los siguientes sistemas de ecuaciones e indica sus soluciones, si es que existen.

a)

$$\begin{aligned} x + y &= 6 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}$$

Sol. (2,4)

b)

$$\begin{aligned} x + y &= 10 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

No tiene solución

b)

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x + 2y &= 8 \end{aligned}$$

Infinitas soluciones

6.- En una tienda de ropa, Andrés pagó $190.00 por una playera y un pantalón, mientras que Alexis $400.00 por dos playeras y tres pantalones. ¿Cuánto cuesta cada pantalón y cada camisa? Plantea cada condición, Grafica las dos condiciones y encuentra las coordenadas de intersección y responde la pregunta.

Aprendizajes:

- Resuelve algebraicamente problemas que lleven a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.

Temática:
Solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables por los métodos de:

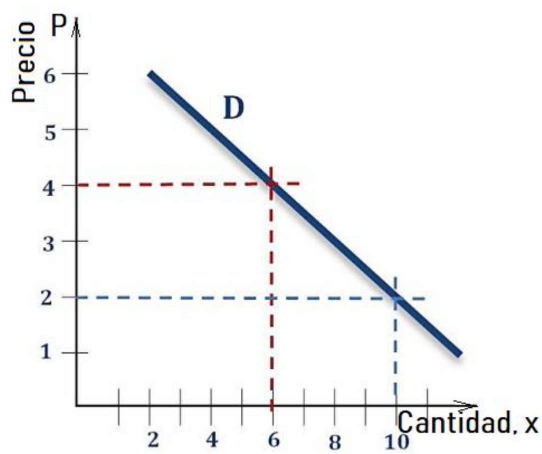
- Igualación.
- Sustitución.

Sugerencias de Actividad de aprendizaje Teórico-Práctica

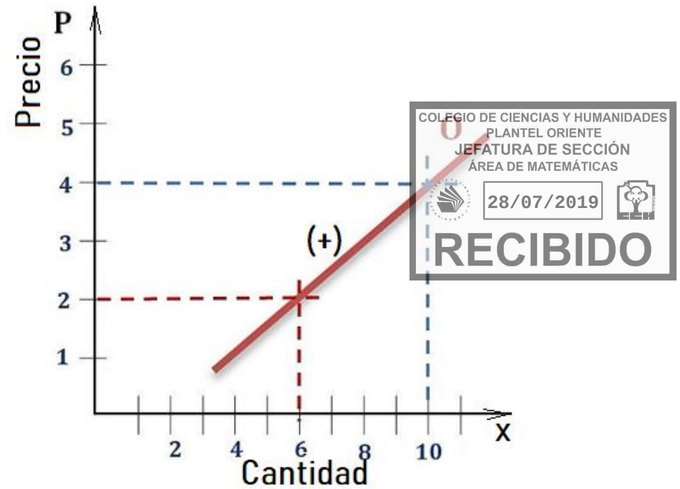
Instrucciones: Lee con atención la siguiente situación y contesta lo que se pide.

En economía y administración se hace referencia a la Ley de la Oferta y Demanda, que rigen los precios de productos y servicios que se generan en una sociedad determinada. El comportamiento de la Oferta y Demanda se puede modelar linealmente para hacer análisis económicos de manera relativamente sencilla.

La ecuación de la recta asociada a la demanda tiene una pendiente **negativa** (conforme disminuye el precio, aumenta la cantidad demandada) y una ordenada al origen que al menos teóricamente representa un precio tan alto, se traduce en una demanda nula (x=0). Un esquema de la gráfica correspondiente es:

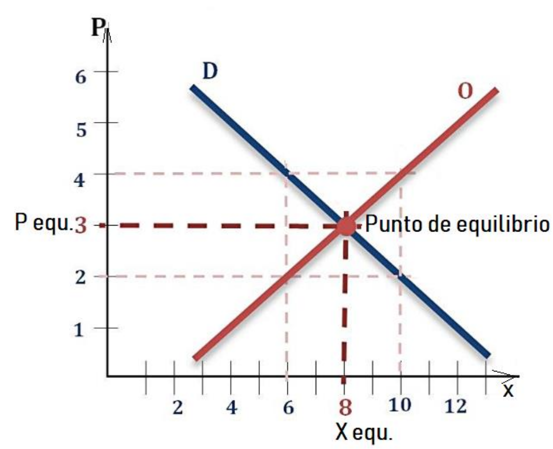


La ecuación de la recta asociada a la Oferta tiene una pendiente positiva (conforme el precio aumenta, la cantidad de unidades ofertadas se incrementa) y una ordenada al origen que al menos teóricamente representa un precio tan bajo que hace que la cantidad de unidades ofertadas sea nula. La gráfica correspondiente es:



Las leyes de la oferta y la demanda se regulan y equilibran entre sí; si el precio de determinado artículo es demasiado alto, los consumidores no lo comprarán, mientras que si el precio es demasiado bajo, los fabricantes o proveedores del mismo no lo venderán. En una economía de mercado, cuando el precio de determinado bien sólo depende de la cantidad demandada y de la oferta respectiva, siempre existe una tendencia del precio a ajustarse por sí mismo, de modo que la cantidad demandada por los consumidores iguale la cantidad que los productores están dispuestos a ofrecer. Se dice que la oferta y la demanda han llegado a su punto de equilibrio cuando el precio visto desde la curva de la demanda es igual al precio obtenido de la curva de la oferta.

Analíticamente el punto de equilibrio se obtiene resolviendo para x e y, el sistema de ecuaciones lineales que se forma con las expresiones de la oferta y la demanda. El punto de equilibrio es el punto de intersección de las dos rectas.



Método de igualación

1.- Determina el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio de las ecuaciones de la oferta y demanda siguientes:

$$\begin{aligned} -2x + p &= -290 \\ x + p &= 250 \end{aligned}$$

Una vez que se tiene un sistema de ecuaciones lineales, se procede a despejar una de las variables en ambas ecuaciones. Se recomienda que sea la variable que esté más fácil de despejar, pero en teoría puede ser cualquiera de ellas.

a). En este caso despejaremos p de ambas ecuaciones. Indica en el paréntesis cuál ecuación corresponde a la oferta (O) y cuál a la demanda (D).

$$\begin{array}{llcl} (\quad) & p & = & 2x - 290 \\ (\quad) & p & = & -x + 250 \end{array}$$

b) una vez despejadas, se igualan y se resuelven:

$$2x - 290 = -x + 250$$

$$2x + x = 290 + 250$$

$$x = \frac{540}{\_\_\_}$$

$$x = \_\_\_\_\_$$

c). Este valor se sustituye en cualquier ecuación donde se despejó p:

$$\begin{array}{lllcl} & p & = & 2(\_\_\_\_) - 290 = \_\_\_\_\_ \\ o & p & = & -(\_\_\_\_) + 250 = \_\_\_\_\_ \end{array}$$

En este caso se sustituye en ambas ecuaciones, pero es suficiente con solo una de ellas. Si te puedes dan el mismo resultado.

d). escribe las coordenadas del punto de equilibrio: (_____ , _____).

Método de sustitución

2.- Determina el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio de las ecuaciones de la oferta y demanda siguientes:

$$\begin{array}{rcrcr} -2x & + & p & = & -290 \\ x & + & p & = & 250 \end{array}$$

Una vez que se tiene el sistema de ecuaciones lineales, se procede a despejar de cualquiera de las dos ecuaciones una de las variables. Se recomienda elegir una que sea sencilla de despejar, por ejemplo, en este caso, elegiremos despejar x, de la segunda ecuación:

a). Despeja x de la ecuación: $x + p = 250$ (escribe el signo correcto en la línea).

$$x = 250\_\_\_\_ p$$

b). Sustituye el valor de x, en la otra ecuación: $-2x + p = -290$

$$-2(250 - \_\_\_) + p = -290$$

Como puedes observar, tienes ahora una ecuación lineal, con una incógnita.

c). Simplifica y despeja p:

$$-2(250-\_\_\_)+p=-290$$

Quitando paréntesis:

$$-500+2\_\_\_+p=-290$$

Simplifica:

d). Después se sustituye el valor encontrado para p en la ecuación obtenida en a).

Finalmente se obtienen los valores de p y x, los cuales deberás comprobar. Al sustituir estos valores en las ecuaciones originales (¿Por qué?)

e). Al comprobar tus valores, se deben cumplir las igualdades en ambas ecuaciones originales. Realiza la comprobación:

$$\begin{array}{rcrcr} -2x & + & p & = & -\ 290 \\ x & + & p & = & 250 \end{array}$$

Autoevaluación:

1.- A un precio de \$2.50 por unidad, una empresa ofrecerá 8,000 camisetas al mes; a \$4.00 cada unidad, la misma empresa producirá 14,000 camisetas al mes. Determine la ecuación de la oferta en la forma y=mx+b, suponiendo que es lineal.

Solución: $p = \frac{1}{4000}x + \frac{1}{2}$

2.- Un fabricante de herramientas puede vender 3,000 martillos al mes a \$2.00 cada uno, mientras que solo pueden venderse 2,000 martillos a \$2.75 cada uno. Determine la ley de demanda, suponiendo que es lineal.

Solución: $p = -\frac{0.75}{1000}x + 4.25$

3.- Encuentra el precio y la cantidad de equilibrio de las rectas demanda y oferta siguientes utiliza el método se igualación y sustitución y comprueba tus respuestas:

a). $\begin{array}{lll} (D) & 2p + 3x & = 100 \\ (O) & p & = \frac{1}{10}x + 2 \end{array}$ Solución: x= 30; p= 5

b) $\begin{array}{lll} (D) & 4p + x & = 50 \\ (O) & 6p - 5x & = 10 \end{array}$ Solución: x=10; p=10

4.- A un precio de \$2,400.00, la oferta de cierto artículo es de 120 unidades, mientras que la demanda es de 560 unidades. Si el precio se eleva a \$2,700.00 por unidad, la oferta y la demanda serán de 160 unidades y 380 unidades, respectivamente.

a) Determina las ecuaciones de la oferta y la demanda.

Sol. $\begin{array}{lll} (D) & 300x + 180p & = 600\,000 \\ (O) & 300x - 40p & = -60\,000 \end{array}$

b). Encuentra el precio y cantidad de equilibrio, mediante los métodos gráfico, sustitución e igualación. Comprueba tus resultados. Solución: x= 200 , p= 3 000

5.- Un fabricante puede ofrecer 2 000 pares de zapatos al mes a un precio de \$30.00 por par de zapatos, mientras que la demanda es de 2 800 pares. A un precio de \$35.00 el par, puede ofrecer 400 pares más. Sin embargo, con este incremento de precio la demanda se reduce en 100 pares.

a). Suponiendo relaciones lineales, determina las relaciones de demanda y oferta.

Solución: $\begin{array}{lll} (O) & 5x - 400p & = -2\,000 \\ (D) & 5x + 100p & = 17\,000 \end{array}$

b). Encuentra el precio y la cantidad de equilibrio, por los métodos de sustitución e igualación y comprueba tus resultados. Solución: x= 2 640, p= 38.

Aprendizajes:

- Comprende el concepto de sistemas equivalentes de ecuaciones lineales en el caso de sistemas lineales 3x3.
- Obtiene sistemas equivalentes de ecuaciones lineales.

Temática:

- Sistemas equivalentes de ecuaciones.
- El método de suma o resta y la multiplicación de una de las ecuaciones por un escalar para obtener sistemas de ecuaciones equivalentes a partir de un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 y 3x3.

Ecuaciones equivalentes

Existen tres operaciones que producen sistemas de ecuaciones equivalentes: intercambio de ecuaciones, multiplicar o dividir una ecuación por un número diferente de cero y multiplicar o dividir una ecuación por un número diferente de cero, sumando la ecuación resultante a otra, sustituyendo ésta última por el resultado obtenido.

Para facilitar los cálculos, se acostumbra a colocar los coeficientes del sistema en un arreglo ordenado de filas y columnas llamado matriz.

Ejercicio: Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales de 3 x 3, escribe en los espacios sus coeficientes correspondientes, respetando su signo.

$$\begin{array}{rrrcr} 3x & -2y & +z & = & -1 \\ x & -2y & +3z & = & 1 \\ & 6y & -2z & = & 4 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & & & -1 \\ 1 & & 3 & \\ & & -2 & \end{array}\right]$$

A un arreglo de números en filas y columnas entre corchetes se le denomina *matriz*. Resulta más fácil y práctico trabajar con estos arreglos (matrices) que con las ecuaciones completas. A la matriz que obtuviste se le denomina matriz ampliada porque incluye los términos independientes de cada ecuación y se separan con una línea punteada.

De esta forma, el sistema de ecuaciones original y la matriz ampliada que la representa son sistemas equivalentes porque tienen la misma solución y se representan así:

$$\begin{array}{rrrcr} 3x & -2y & +z & = & -1 \\ x & -2y & +3z & = & 1 \\ & 6y & -2z & = & 4 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

A partir de la matriz ampliada, que denominaremos de aquí en adelante sistema original, transformaremos mediante las 3 operaciones, indistintamente a *sistemas equivalentes* hasta llegar a uno, que sea fácil de resolver.

Ejemplo:

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, aplicando la operación 3 permitida, obtén otro sistema equivalente.

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ x & - & 3y & = & -7 \end{array}$$

a) Multiplicando la ecuación 1 por -1, luego, el resultado se suma a la ecuación 2, sustituyendo esta última por el resultado obtenido:

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ x & - & 3y & = & -7 \end{array} \sim \begin{array}{rcrcr} -x & - & y & = & -1 \\ x & - & 3y & = & -7 \end{array} \sim \begin{array}{rcrcr} -x & - & y & = & -1 \\ & - & 4y & = & -8 \end{array}$$

El último sistema de ecuaciones es equivalente al anterior, y éste a su vez al primero, es decir, todos tienen la misma solución.

Como puedes observar, el último sistema de ecuaciones obtenido es más sencillo de resolver, ya que la segunda ecuación solamente contiene una incógnita (y) y fácilmente se puede despejar. Posteriormente se sustituye el valor de y en la primera ecuación del mismo sistema de ecuaciones y se despeja la otra variable (x).

Autoevaluación:

1.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones equivalentes por cualquier método (igualación o sustitución) y comprueba que tienen la misma solución.

a). $\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ x & - & 3y & = & -7 \end{array}$ b). $\begin{array}{rcrcr} -x & - & y & = & -1 \\ x & - & 3y & = & -7 \end{array}$ c). $\begin{array}{rcrcr} -x & - & y & = & -1 \\ & - & 4y & = & -8 \end{array}$

Solución: x= -1, y= 2.

2.- Obtener un sistema equivalente de ecuaciones lineales al sistema dado mediante el intercambio de ecuaciones y resolver ambos por el método que consideres para comprobar que tienen la misma solución.

a) Ordenando el sistema: Sistema equivalente:

$\begin{array}{lcl} x & = 2y & -\ 3 \\ -3y & +2 & = x \end{array}$

Solución: x= -1, y= 1.

b) Ordenando el sistema: Sistema equivalente:

$\begin{array}{lcl} 2x & = y & +\ 14 \\ 2x = & -3y & -26 \end{array}$

Solución: x= $\frac{17}{2}$, y= 3.

3.- Obtener un sistema equivalente de ecuaciones lineales al sistema dado mediante la multiplicación o división de la ecuación uno por un número (escalar) diferente de cero y resolver ambos por el método que consideres para comprobar que tienen la misma solución.

a)

$$\begin{array}{llll} 2x & -2\ y & = & 30 \\ x & +2\ y & = & 0 \end{array}$$

Multiplicando el primer renglón por un número cualquiera:

$$\begin{array}{llll} \_\_\ x & -\ \_\_\_\ y & = & \_\_\_ \\ x & +2\ y & = & 0 \end{array}$$

Sistema equivalente:

Solución: x= 10, y= -5.

Aprendizajes:

- Resuelve sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y 3x3 a través de obtener un sistema triangular equivalente de ecuaciones.
- Resuelve problemas en diversos contextos empleando los métodos algebraicos vistos con anterioridad.

Temática:

- Transformación de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 o 3x3 a un sistema triangular equivalente de ecuaciones.
- Problemas de aplicación.

Sugerencias de actividades de aprendizaje teórico-prácticas

Instrucciones: Lee con atención y responde lo que se pregunta.

1.- Escribe cuáles son las tres operaciones que producen ecuaciones equivalentes: intercambio de ecuaciones, ________________________________ y ________________________________.

2.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales de 3 x 3, escribe en los espacios sus coeficientes correspondientes, respetando su signo.

$$\begin{array}{rrrcr} 3x & -2y & +z & = & -1 \\ x & -2y & +3z & = & 1 \\ & 6y & -2z & = & 4 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & & & -1 \\ 1 & & 3 & \\ & & -2 & \end{array}\right]$$

3.- A un arreglo de números en filas y columnas entre corchetes se le denomina _________________.

4.- De esta forma, el sistema de ecuaciones original y la matriz ampliada que la representa son sistemas equivalentes porque ___________________________ y se representan con el símbolo: ______

$$\begin{array}{rrrcr} 3x & -2y & +z & = & -1 \\ x & -2y & +3z & = & 1 \\ & 6y & -2z & = & 4 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

5.- El ejercicio consiste en hacer cero todos los coeficientes que se encuentran por debajo de la diagonal principal de la matriz. La diagonal principal de la matriz original, está formada por los números 3, -2, -2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

6.- Observa cuidadosamente los siguientes sistemas equivalentes y explica cuál operación fue utilizada:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & | & -1 \\ 1 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 6 & -2 & | & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 1 \\ 3 & -2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 6 & -2 & | & 4 \end{bmatrix}$$

7.- Como se quiere eliminar (hacer cero) al 3 ubicado en el segundo renglón, primera columna, convendría que el uno, ubicado en el primer renglón y primera columna fuera -3. Esto se consigue multiplicando por -3 al primer renglón. Anota el resultado y con un lápiz de color dibuja el escalón debajo de la diagonal principal.

$$-3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 1 \\ 3 & -2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 6 & -2 & | & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & & & | & -3 \\ 3 & -2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 6 & -2 & | & 4 \end{bmatrix}$$

8.- Para eliminar al 3, basta con sumar algebraicamente el primero y segundo renglón entre sí, sustituyendo el resultado obtenido por el segundo renglón. La Primera ecuación puede quedarse transformada o tomarse la original, para no trabajar con números más grandes. Escribe el sistema equivalente:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & | & -1 \\ 1 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 6 & -2 & | & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 1 \\ 3 & -2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 6 & -2 & | & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & & -8 & | & \\ 0 & 6 & -2 & | & 4 \end{bmatrix}$$

Observa cómo ya se eliminaron los números debajo del 3 de la primera columna original.

Ahora dejamos de trabajar con el primer renglón y nos dedicaremos con los renglones dos y tres.

9.- A partir de ésta última, transformamos el sistema por otro equivalente. Explica qué operaciones se efectuaron.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 4 & -8 & | & -4 \\ 0 & 6 & -2 & | & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -1 \\ 0 & 6 & -2 & | & 4 \end{bmatrix}$$

10.- ¿Mediante qué operaciones eliminarías el seis ubicado en el tercer renglón y segunda columna? Indícala en el sistema de ecuaciones y efectúa la transformación.

$$\underline{\quad}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & & & \\ 0 & 6 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

11.- Ahora elimina al 6 ubicado en el tercer renglón y segunda columna. Recuerda que el segundo renglón NO cambia para seguir manteniendo los números pequeños.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & & \\ 0 & 6 & -2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & \end{array}\right]$$

12- Como ya se eliminaron todos los números debajo de la diagonal principal, hemos terminado, ahora escribe el sistema resultante en forma de ecuación.

$$\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +3z & = & 1 \\ & y & -2z & = & -1 \\ & & 10z & = & 10 \end{array}$$

Este último sistema de ecuaciones lineales de 3 x 3, es equivalente al primero porque su solución es la misma que la del sistema original, ya que se efectuaron las tres transformaciones que lo garantizan.

13.- Para resolver este sistema, despejamos la variable de la tercera ecuación por ser única. El resultado de z se sustituye en la segunda ecuación y se despeja y. Finalmente, ambos resultados, se sustituyen en la primera ecuación y se despeja x. ¿Cuáles son los resultados?, Comprueba la solución. (x=0, y=1, z=1).

Autoevaluación:

Autoevaluación:

1.- Un médico le recomienda a su paciente una dieta para bajar los altos niveles que tiene de triglicéridos y colesterol en la sangre. La dieta incluye exactamente 340 unidades de calcio, 180 de hierro y 220 de vitamina A. El número de unidades por onza de cada ingrediente especial para cada uno de los alimentos se muestra en la siguiente tabla:

	Alimento A	**Alimento B**	**Alimento C**
Calcio	30	10	20
Hierro	10	10	20
Vitamina A	10	30	20

¿Cuántas onzas de cada alimento deben emplearse para tener los requerimientos de la dieta?

a.- Determina cuáles son las incógnitas que debes encontrar

Número de onzas que proporciona el alimento A ______	Número de onzas que proporciona el alimento B ______	Número de onzas que proporciona el alim. C ______

b.- Expresa las relaciones de variables en forma de ecuación:

$$30\_\_ \quad +10\_\_ \quad +20\_\_ = \ 340$$

c.- Expresa los coeficientes en forma de una matriz ampliada y aplica las operaciones necesarias para obtener un sistema equivalente triangular.

d.- Responde la pregunta inicial: (Solución: x=8, y=2, z=4)

2.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de triangulación y comprueba tu solución sustituyendo los resultados en cada una de las ecuaciones originales.

a). $\begin{aligned} -2x + p &= -290 \\ x + p &= 250 \end{aligned}$

Solución: x= 180 y= 70

b). $\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x - y &= 12 \end{aligned}$

Solución: x= 4 y= -4

c). $\begin{aligned} 3x - y &= -10 \\ y &= 5x + 12 \end{aligned}$

Solución: x= -1 y= 7

d). $\begin{aligned} x &= 2y - 3 \\ -3y + 2 &= x \end{aligned}$

Solución: x= -1 y= 1

e). $\begin{aligned} x - 2y &= -2 \\ 2x + 4y &= 12 \end{aligned}$

Solución: x= 2 y= 2

f). $\begin{aligned} 2x - 2y &= 30 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned}$

Solución: x= 10 y= -5

g). $\begin{aligned} 2x - 4y &= -6 \\ -7x + y &= -18 \end{aligned}$

Solución: x= 3 y= 3

h). $\begin{aligned} 2x &= y + 14 \\ 2x &= -3y - 26 \end{aligned}$

Solución: x= 2 y= -10

i). $\begin{aligned} 3x - 2y + z &= -1 \\ x - 2y + 3z &= 1 \\ 6y - 2z &= 4 \end{aligned}$

Solución: x=0, y=1, z= 1

j). $\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 11 \\ 2x + y + z &= 7 \\ 3x + 4y + z &= 14 \end{aligned}$

Solución: x=1, y=2, z= 3

k). $\begin{aligned} x + 3y + 4z &= 14 \\ x + 2y + z &= 7 \\ 2x + y + 2z &= 2 \end{aligned}$

Solución: x= -2, y= 4, z= 1

l). $\begin{aligned} x + 4y + 3z &= 17 \\ 3x + 3y + z &= 16 \\ 2x + 2y + z &= 11 \end{aligned}$

Solución: x=2, y=3, z=1

m). $\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 2 \\ 2x + 3y - z &= 5 \\ x + y + z &= 6 \end{aligned}$

Solución: x= 1, y= 2, z= 3

n). $\begin{aligned} 2x + y + z &= 16 \\ x + 2y + z &= 9 \\ x + y + 2z &= 3 \end{aligned}$

Solución: x= 9, y= 2, z=-4

o). $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2 \\ 2x - 3y + z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= 9 \end{aligned}$

Solución: x= 3, y= 2, z=1

p). $\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 20 \\ 2x + 3y + 6z &= 70 \\ x - y + 6z &= 41 \end{aligned}$

Solución: x= 5, y= 6, z=7

q). $\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ x + 3y - 2z &= 11 \\ 3x - 2y + 4z &= 1 \end{aligned}$

Solución: x=3, y=2, z=-1

r). $\begin{aligned} 2x - y + 2z &= -8 \\ x + 2y - 3z &= 9 \\ 3x - y - 4z &= 3 \end{aligned}$

Solución: x=-1, y=2, z= -2

Lee con atención, plantea las ecuaciones correspondientes y responde lo que se pide:

3.- La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180º. El Angulo más pequeño del triángulo tiene una medida de 2/3 la medida del segundo ángulo más pequeño. El ángulo más grande tiene una medida que es 30º menos que tres veces la medida del segundo ángulo. Determine la medida de cada ángulo.

4.- En una fábrica hay tres máquinas: A, B y C. Cuando las tres están trabajando, producen 222 trajes por día. Si A y B trabajan, pero C no, producen 159 por día. Si B y C trabajan, pero A no, producen 147 trajes por día. ¿Cuál es la producción diaria de cada máquina?

5.- La suma de tres números es 105. El tercero es 11 menos que diez veces el segundo. Dos veces el primero es 7 más que tres veces el segundo. Calcula los números.

6.- La edad de Juan es la suma de las edades de Carmen y Daniel. La edad de Carmen es 2 años más que la suma de las edades de Daniel y Marco. La edad de Daniel es cuatro veces la edad de Marco. La suma de las cuatro edades es 42. ¿Qué edad tiene Juan?

7.- Carlos obtuvo un total de 225 puntos en tres exámenes. La suma de las calificaciones del primero y el tercero de ellos excede su tercera calificación en 61 puntos. Su primera calificación supera a la segunda en 6 puntos. Encuentra las tres calificaciones.

8.- Angélica recogió manzanas durante tres días. En total recogió 87 kg. El martes recogió 15 kg más que el lunes. El miércoles recogió 3 kg menos que el martes. ¿Cuántos kg recogió en cada día?

Bibliografía Básica

ALLEN, R. (2008). *Álgebra intermedia*. México: Pearson.
GARCÍA, M. (2005). *Matemáticas I para preuniversitarios*. México: esfinge.
DROOYAN, FRANKLIN. (1992). *Elementos de álgebra para bachillerato*. Limusa, 2ª. Edición, México.
SWOKOWSKY Y COLE. (2006). *Algebra y trigonometría*. Thomson, 11ª Edición, México.

Bibliografía Complementaria

EGOAVIL VERA, JUAN RAÚL. (2015) *Fundamentos de Matemática. Introducción al nivel universitario*. Bogotá, Ediciones de la U.
MILLER, CHARLES D., HEEREN, VERN E., HORNSBY, JOHN. (2013). *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. (12ª. ed.) México: Pearson. Addison Wesley.
TUSSY, GUSTAFSON Y KOENING. (2013) *Matemáticas básicas*. México, 4ª. Edición, Cengage Learning, 843 pp.
VELASCO, ANTONIANO. (2016) *Curiosidades matemáticas. Sorpresas, paradojas, enigmas y maravillas del mundo de la matemática.* Limusa, México, 126 pp.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Participantes:

Leticia Aguilar Pascual
María Elena Gómez Pérez
Pedro Luis Martínez Abraján
María del Carmen Olivera Martínez

UNIDAD 1

El significado de los números y sus operaciones básicas

Propósito:

Al finalizar el alumno será capaz de:

- Operar con los números racionales (enteros y no enteros) y resolver problemas aritméticos, aplicando algunas heurísticas para facilitar la comprensión, la búsqueda de un plan de resolución y su ejecución, con la finalidad de que haga suyos los recursos básicos para iniciarse en el uso del lenguaje algebraico para expresar la generalidad.

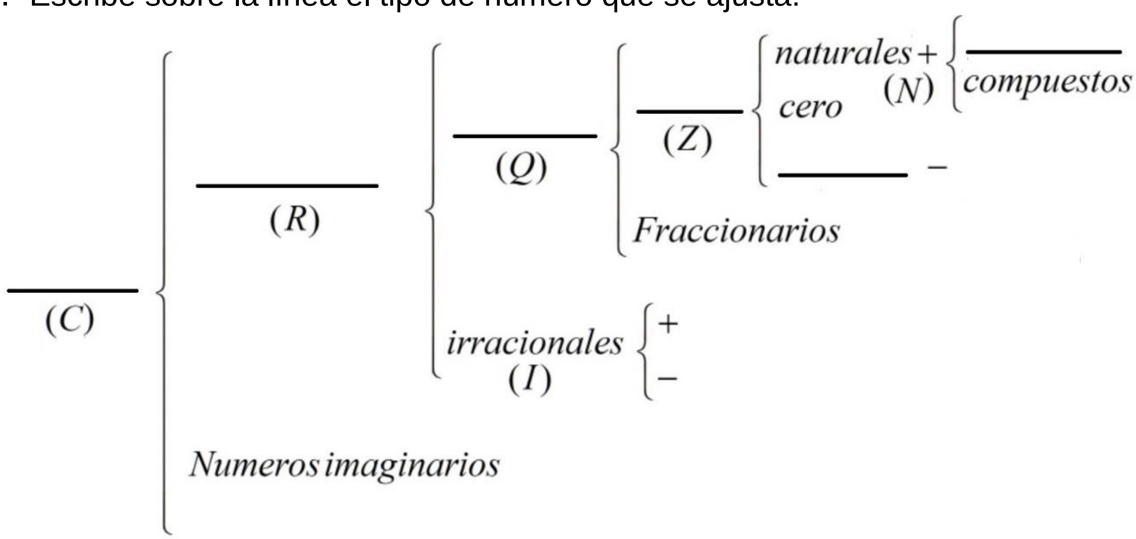
Aprendizajes:

Comprende el significado de los números reales.

Temática:

Significado de los números racionales Q (enteros Z y no enteros) e irracionales I.

1.- Escribe sobre la línea el tipo de número que se ajusta:



2.- Relaciona las siguientes columnas:

(D) Es un número triangular	(A) Si tenemos k, entonces existe m tal que (k)(m)=1
(A) Se refiere a la propiedad de inverso multiplicativo	(B) Un número primo
(F) El inverso multiplicativo de –p es…	(C) 7k, donde k es entero
(E) El neutro aditivo de k es ,..	(D) 6
(C) Es un numero cuyo residuo al dividir por 7 es cero	(E) cero

(B) Es un número que sólo es divisible entre 1 y entre sí mismo	(F) Un número $\frac{1}{p}$ $\frac{1}{p}$ *donde* $p \neq 0$

En las preguntas siguientes indica los números que son racionales (recuerda las razones por las cuales un número es racional).

3.- a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\pi}{2}$ c) $\sqrt{5}$ d) -3 e) $\sqrt{8}$

4.- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $-\frac{3}{\pi}$ c) $\frac{-3}{7}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ e) $\sqrt{\pi}$

5.- a) $\frac{\sqrt{2}}{1}$ b) $-\frac{\sqrt{9}}{5}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ d) -3 e) $\sqrt{8}$

6.- a) $\sqrt{6}$ b) $-\sqrt{25}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ e) $-\sqrt{7}$

Representa en la recta real cada número. Señala alguno que sea natural, explica.

Simplifica las siguientes operaciones:

7). $-\left(-\frac{1}{5}\right)-\frac{3}{25}+\frac{3}{25}+\frac{124}{125}$

a). $\mathbf{\frac{149}{125}}$ b). $\frac{126}{125}$ c). $\frac{135}{125}$ d). $-\frac{149}{125}$

8). $\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}+\frac{4-\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{4}}=$

a). $\frac{14}{2}$ **b).** $\mathbf{\frac{9}{2}}$ c). $\frac{5}{2}$ d). $-\frac{9}{2}$

9).

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{7}{2}-\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{1}{6^2}}\right)^2=$$

a). $\frac{14}{2}$ b). $\mathbf{\frac{49}{18}}$ c). $\frac{5}{2}$ **d).** $-\mathbf{\frac{49}{18}}$

10). $-5-\frac{3}{4}\left(-\frac{8}{3}+5\left(\frac{2}{3}-2\right)\right)=$

a). 3 b). $\mathbf{-2}$ **c). 2** d). $-\frac{2}{3}$

Aprendizajes:

Usa correctamente las diversas simbolizaciones de un número racional, transitando entre sus equivalencias (cuando sea necesario) en problemas puramente aritméticos y en contexto.

Temática:

Las diversas simbolizaciones de un número racional y sus equivalencias: fracción (parte de un todo), decimal, porcentaje.

1.- Leticia respondió correctamente 75% de las preguntas del examen de álgebra. Si tuvo 27 respuestas correctas, ¿cuántas preguntas había en el examen?

Respuesta: 36 preguntas

$$x(0.75) = 27$$
$$x = \frac{27}{0.75}$$
$$x = 36$$

2.- Una mujer colecciona vajillas de cerámica china. Compró dos, pero al verse sin dinero tuvo que venderlas precipitadamente. Las vendió en 6 mil pesos cada una. En un caso ganó el 20% y en el otro perdió el 20%. ¿Ganó o perdió en la transacción?, ¿Cuánto?

Respuesta:
No gana ni pierde nada

3.- En un grupo de 50 alumnos, 20% de ellos no aprobó Inglés. ¿Cuántos alumnos aprobaron?

a) 10 alumnos
b) 20 alumnos
c) 30 alumnos
d) 40 alumnos OK

4.- Una chamarra de piel cuesta $3,600. Si se le carga el %15 de IVA, ¿Cuánto dinero se paga en total por la chamarra, incluyendo el impuesto IVA?

a) $547.5
b) $4 197.5 OK
c) $5 350.5
d) $6 000.0

Representa como un “quebrado” a los números siguientes:

5.- 2,48

a) $2\frac{2}{4}$ b) $\frac{62}{25}$ c) $\frac{2,48}{100}$ d) $\frac{24}{10}$ e) $\frac{248}{1000}$

6.- 0,38

a) $\frac{38}{10}$ b) $\frac{38}{1000}$ c) $\frac{19}{100}$ d) $\frac{38}{100}$ e) $\frac{100}{38}$

7.- -1,34

a) $\frac{67}{25}$ b) $-\frac{67}{50}$ c) $\frac{67}{25}$ d) $-\frac{67}{100}$ e) $-\frac{67}{50}$

8.- 0,72

a) $\frac{18}{25}$ b) $\frac{18}{50}$ c) $-\frac{18}{100}$ d) $-\frac{18}{50}$ e) $\frac{9}{12}$

9.- 5,17

a) $\frac{258}{25}$ b) $\frac{517}{50}$ c) $\frac{517}{100}$ d) $-\frac{517}{50}$ e) $\frac{517}{25}$

10). El premio de un sorteo se reparte entre 12 personas. ¿Qué parte del premio recibirá cada uno de ellos? ¿Qué fracción corresponde a lo que reciben 5 personas?

a). $\frac{4}{12}$ y $\frac{3}{12}$ **b). $\frac{1}{12}$ y $\frac{5}{12}$** c). $\frac{6}{12}$ y $\frac{7}{8}$ d). $\frac{2}{12}$ y $\frac{3}{12}$

Aprendizajes:

Compara dos cantidades haciendo uso de las representaciones de un número racional.

Temática:

La comparación entre cantidades (relación de orden) empleando las diferentes simbolizaciones.

Fracciones equivalentes

1.- Si un amigo te ofrece una rebanada de pastel de tu sabor preferido y te da a elegir tres opciones: $^1/_4$, 2^{-1}, $^1/_8$, ¿cuál rebanada de pastel es la que representa mayor cantidad de pastel?. Representa las rebanadas de pastel en un dibujo.

Respuesta: 2^{-1}

2.- Considera el número racional $\frac{2}{7}$ indica la fracción equivalente a este número

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{4}{7}$ **c)** $\frac{4}{14}$ d) $\frac{3}{7}$ e) $\frac{6}{14}$

3.- Indica cuál de los números racionales $\frac{2}{9}$ y $\frac{1}{4}$ siguientes es mayor al otro.

a) $\frac{1}{4}$ c) son iguales b) $\frac{4}{9}$ d) no se pueden comparar

4.- Un elefante africano macho promedio pesa 5,897 kg. Un elefante asiático macho promedio pesa 5,398 kg. ¿Cuánto más pesa un elefante africano que uno asiático?

a)499 kg b)11,295 kg **c)**- 499 kg d)-11,295 kg

5.- El caballo más grande del mundo pesa 1152 kg, mientras que el caballo más pequeño pesa 26 kg. ¿Cuánto más pesa el caballo más grande, respecto al más pequeño?

a)1,126 kg b)1,178 kg c)- 1,126 kg d)-1,178 kg

6.- La calabaza más grande del mundo pesaba 766 kg y la sandía más grande del mundo pesaba 122 kg. ¿Cuánto más pesa la calabaza, respecto la sandía?

a) 644 kg b) 888 kg c) - 644 kg d) -888 kg

7.- El oro se funde alrededor de 1,947 ºF. El punto de fusión de la plata es de 187 ºF menor. ¿Cuál es el punto de fusión de la plata?

a)−1,760 ºF b)2,134 ºF **c)** 1,760 ºF d)-2,134 ºF

8.- Una cuenta de ahorros contenía $1,370. Después de un retiro de $197 y un depósito de $340, ¿Cuánto quedaba en la cuenta?

a)$1,173 **b)**$1,513 c)$ 1,907 d)$ 833

9.- En julio de 2005, el sitio web eBay fue visitado al menos una ocasión por 61,715,000 personas. En julio de 2007, el número se había incrementado en 18,072,000. ¿Cuántos visitantes tuvo el sitio web eBay en julio de 2007?

a)43,643,000 **b)**79,787,000 c) 45,643,000 d)80,787,000

10.- La habitación de Adrián tiene forma rectangular con dimensiones de 5 m por 3 m. ¿Cuántos metros de cenefa se necesitan para colocarse alrededor de toda la habitación?

a) 13 m b) 15 m c)16 m d) 60 m

11.-En un programa de juegos por televisión, el concursante ganador es la persona que se acerca más (sin pasarse) al precio del artículo cotizado. ¿Cuál concursante ganará si están cotizando unos sillones de espera que tiene un precio de menudeo de $4,745?

a)$4,995 b)$4,550 c)$ 4,551 d)$ 4,200

12.- Se requieren 13 naranjas para preparar una lata de jugo. Encuentra el número de naranjas utilizadas para preparar una caja con 24 latas.

a) 13 b) 156 c)200 d) 312

13.- Las ranas toro pueden saltar hasta 10 veces su longitud corporal. ¿Qué tanto pudiera saltar una rana toro de 26 cm de largo?

a) 26 cm b) 130 cm c)260 cm d) 300 cm

14.- Durante las olimpiadas del 2008 que se celebraron en Beijin, China, el costo de algunas habitaciones de hotel era 33 veces mayor que el costo normal de **є**42 por noche. ¿Cuál fue el costo de una habitación durante las olimpiadas?

a) **є**42 b)**є**75 c)**є**1,000 d) **є**1,386

15.- Un cine tiene una ganancia de $4 por cada boleto vendido. ¿Cuántos boletos deben venderse para tener una ganancia de $2,500?

a) 500 b) 625 c)10,000 d) 11,000

16.- Una máquina que perfora túneles en roca sólida lo puede hacer a una velocidad de 10 m por día. ¿Cuántos días le tomará perforar 2,414 m?

a) 241 b) 250 c)300 d) 350

17.- Los trabajadores en Francia promedian 5 días de vacaciones al año menos que los italianos. Los estadunidenses promedian 24 días de vacaciones menos que los franceses. Si los italianos promedian 42 días de vacaciones cada año (la mayor cantidad en el mundo), ¿Cuántos tiene el trabajador estadunidense promedio al año?

a) 13 b) 15 c) 18 d) 37

Aprendizajes:

Opera correctamente con los números racionales (enteros y no enteros), en los casos de una sola operación y una secuencia de operaciones.

Temática:

Algoritmo de las operaciones entre números enteros y racionales: suma, resta, multiplicación y división, y las condiciones para su ejecución.

Cuestionario: Completa los espacios.

1.- A los números que se multiplican entre sí se les llama:_____________(bases/**factores**)

2.- El ___________ (**factorizar**/descomponer) un número natural significa expresarlo como el producto de otros números naturales.

3.- Un número _________ (compuesto/**primo**) es un número natural mayor que 1 que solo tiene al 1 y a sí mismo como factores.

4.- Los números naturales mayores que 1 que no son números primos se les llama números _________.(**compuestos**/ pares)

5.- La factorización de primos de un número significa escribirlo como un producto de sólo números __________. (**primos**/ impares)

6.- Se utiliza un exponente para representar una multiplicación ________. (**repetitiva**/ única)

7.- En la expresión exponencial 6^4, el número 6 es la _________, (**base**/ exponente) y el 4 es el __________. (**exponente**/ base).

8.- 5^3 se puede leer como “5 a la tercera potencia” o como “5 al _______” (**cubo**/quinto).

9.- Suponga que un número es divisible entre 10. ¿el 10 es un factor del número? __________ (**sí**/no)

10.- Si un número es divisible entre 2, es un número _______ (**par**/ compuesto), si no es divisible entre 2, es un número (compuesto**/ impar**)

11.- Dos personas corren para hacer ejercicio alrededor de una pista de atletismo. Una persona completa una vuelta en 4 minutos, mientras que la otra lo hace en 6 minutos. Si comienzan al mismo tiempo y en el mismo lugar de la pista, ¿en cuántos minutos llegarán juntos al punto inicial de su rutina?

Solución:

Si calculas el mcm de 4 y 6, obtendrás el tiempo en el que ambas personas estarán en el punto inicial de su rutina. El mcm (4,6)= 12 minutos

Expresa a la variable y en términos de x en cada una de las ecuaciones siguientes

12.- $4x-5y-4=-2x-6y+2$

a) $y=2x-1$ b) $y=1-x$ c) $y=6-6x$ d) $y=2-2x$ e) $y=6x-6$

13.- $x-2y=-5x-y$

a) $y=x+3$ b) $y=2x$ c) $y=x$ d) $y=-2x+1$ e) $y=6x$

14.- $3(2x-1)+2(4-3y)=-3x+5y$

a) $y=\frac{3x+3}{4}$ b) $y=\frac{3x+2}{11}$ c) $y=\frac{2x+4}{7}$ d) $y=-2x+1$ e) $y=\frac{6x}{5}$

15.- $6y-7x=-2x-\frac{2}{3}y$

a) $y=\frac{x+3}{4}$ b) $y=\frac{3x+2}{11}$ c) $y=\frac{3x}{4}$ d) $y=\frac{-x+1}{6}$ e) $y=\frac{6x+3}{5}$

16.- $\frac{3}{5}(2x-4)+\frac{6}{5}(1-y)=-\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y$

a) $y=\frac{9x-6}{8}$ b) $y=\frac{3x+2}{4}$ c) $y=\frac{x+5}{4}$ d) $y=-x-3$ e) $y=\frac{6x+3}{5}$

17.- $\frac{5}{3}y-\frac{6}{4}x=-\frac{7}{4}x-\frac{5}{3}y$

a) $y=cero$ b) $y=\frac{3x+2}{11}$ c) *no existe* d) $y=\frac{-2x}{3}+1$ e) $y=1$

18.- $3x-5y=0$

a) $y=-\frac{5}{3}$ b) $y=\frac{3x}{11}$ c) $y=\frac{3x}{4}$ d) $y=-2x+1$ e) $y=\frac{5}{3}$

19.- $3x+4y-1=0$

a) $y=\frac{x+3}{4}$ b) $y=\frac{3x+1}{4}$ c) $y=\frac{x-3}{4}$ d) $y=\frac{1-3x}{4}$ e) $y=\frac{x+3}{4}$

20.- Una planta produce medicamentos en lotes de 800 unidades. Se distribuyen en cajas que contienen 75 unidades cada una. Indica el número de cajas que se tienen al empaquetar por lote, y el número de unidades que quedan sin empaquetar por lote.

a) 10, y 30 sobrantes b) 10, y 50 sobrantes c) 10, y 40 sobrantes

d) 10 y 20 sobrantes e) 10, y 10 sobrantes

21.- Considera el problema anterior y responde: ¿cuántos lotes deben realizarse como mínimo para que no sobren unidades y todas queden empaquetadas en cajas?

a) 3 lotes b) 2 lotes c) 5 lotes d) 4 lotes e) 10 lotes

Indica el máximo común divisor entre las parejas de números siguientes:

22.- 15 y 4

a) 4 b) 15 c) 1 d) 30 e) 60

23.- 8 y 12

a) 4 b) 8 c) 12 d) 48 e) 24

24 .- 24 y 42

a) 2 b) 1 c) 12 d) 24 e) 42

Indica el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números.

25.- 11 y 3

a) 1 b) 11 c) 3 d) 2 e) 33

26.- 4 y12

a) 4 b) 12 c) 24 d) 48 e) 8

27.- 8 y 7

a) 2 b) 4 c) 56 d) 28 e) 72

Aprendizajes:

Opera correctamente con potencias y radicales con la misma base.

Temática:

Operaciones con potencias: exponentes positivos, negativos y fraccionarios.

Usando la propiedad sobre leyes de exponentes $(x^m)(x^n)=x^{m+n}$, resolver:

1.- $\left(2x^3\right)\left(7x^4\right)=$

a) $14x^{12}$ b) $9x^{12}$ c) $9x^7$ d) $14x^7$ e) $14x^1$

2.- $\left(4x^3y^{-3}\right)\left(-3x^{-1}y^5\right)=$

a) x^2y^2 b) $-12x^2y^2$ c) $12x^{-3}y^{-15}$ d) $x^{-3}y^{-15}$ e) $-12x^{-3}y^{-15}$

3.- $\left(\frac{3}{5}x^{-2}y^2z^{-4}\right)\left(10x^4y^{-4}z^3\right)=$

a) $12x^{-8}y^{-8}z^{-12}$ b) $6x^{-8}y^{-8}z^{-12}$ c) $30x^{-2}y^{-2}z^1$ d) $6x^2y^{-2}z^{-1}$ e) $12x^{-3}y^{-15}$

4.- $\left(4x^3\right)\left(2x^5\right)=$

a) $8x^{15}$ b) $6x^{15}$ c) $8x^8$ d) $6x^8$ e) $6x^{-8}$

5.- $\left(3x^3y^3\right)\left(-5x^2y^{-1}\right)=$

a) $-2x^6y^{-3}$ b) $-15x^5y^2$ c) $15x^5y^2$ d) $-2x^5y^2$ e) $-15x^6y^{-3}$

6.- $\left(\frac{3}{2}x^2y^{-3}z^{-2}\right)\left(8x^{-3}y^2z^4\right)=$

a) $\frac{3}{2}x^{-6}y^{-6}z^{-8}$ b) $\frac{24}{12}x^{-6}y^{-6}z^{-8}$ c) $12x^{-1}y^{-1}z^2$ d) $-2x^5y^2$ e) $\frac{3}{2}x^{-1}y^{-1}z^2$

7.- $\left(3x^2\right)\left(6x^3\right)=$

a) $18x^{-6}$ b) $\frac{18}{4}x^{-6}$ c) $12x^6$ d) $-12x^5$ e) $18x^5$

8.- $\left(-2xy^3\right)\left(4xy^{-2}\right)=$

a) $-8xy^{-6}$ b) $8x^2y$ c) $8x^2y^{-6}$ d) $-8x^2y$ e) $2xy^{-6}$

9.- $\left(\frac{1}{4}x^3y^2z^{-1}\right)\left(16x^{-1}y^{-2}z^3\right) =$

a) $4x^2z^2$ b) $4x^{-3}y^{-4}z^{-3}$ c) $16x^2y^1z^2$ d) $4x^2y^1z^2$ e) $16x^2z^2$

10.- $\left(5x^{\frac{1}{2}}y^2\right)\left(\frac{3}{15}x^{\frac{3}{2}}y^{-1}\right) =$

a) $\frac{3}{2}x^{-6}y^{-6}z^{-8}$ b) $\frac{24}{12}x^{-6}y^{-6}z^{-8}$ c) $12x^{-1}y^{-1}z^2$ d) $-2x^5y^2$ e) $\frac{3}{2}x^{-1}y^{-1}z^2$

11.- $\left(4x^{\frac{2}{5}}y^4\right)\left(\frac{3}{12}x^{\frac{2}{5}}y^{-3}\right) =$

a) $\frac{3}{2}x^{-6}y^{-6}z^{-8}$ b) $\frac{24}{12}x^{-6}y^{-6}z^{-8}$ c) $12x^{-1}y^{-1}z^2$ d) $-2x^5y^2$ e) $\frac{3}{2}x^{-1}y^{-1}z^2$

12.- $\left(3x^{\frac{1}{3}}y^{-2}\right)\left(\frac{3}{15}x^{\frac{4}{3}}y\right) =$

a) $\frac{3}{2}x^{-6}y^{-6}z^{-8}$ b) $\frac{24}{12}x^{-6}y^{-6}z^{-8}$ c) $12x^{-1}y^{-1}z^2$ d) $-2x^5y^2$ e) $\frac{3}{2}x^{-1}y^{-1}z^2$

Aprendizajes:

Traduce relaciones contextuales en operaciones entre números racionales (enteros y no enteros) y las resolverá correctamente.

Temática:

Significado contextual de las operaciones suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.
Relaciones entre partes de una cantidad y la cantidad total.
Relaciones entre partes de una cantidad (medir una parte tomando como unidad la otra, etc.).
Relaciones de área
Relaciones entre porcentajes: el porcentaje de una cantidad; el porcentaje de un porcentaje y su relación con el total; relación porcentual de una parte y el total; dada la cantidad que representa un porcentaje encontrar el total.
Relación de dos magnitudes de distinta clase que varían conjuntamente. Por ejemplo: relaciones entre distancia, velocidad y tiempo; distancia, eficiencia en kilometraje por litro de combustible; masa, densidad y volumen; fuerza, área y presión.

1.- Un grupo de amigos organizó una reunión de festejo por el fin de cursos. Acordaron pedir cooperación para comprar pizzas y con lo que lograron reunir les alcanzó para pedir seis pizzas medianas, que venden en cortes de ocho porciones. Se repartió a cada asistente a la reunión $3/8$ de pizza y no sobró ninguna porción, ¿cuántos estudiantes se reunieron?, Explica el procedimiento que seguiste para obtener la respuesta.

Respuesta: 16 personas

2.- La dieta de la tía Margarita consiste en $^{2}/_{3}$ de taza de queso cottage al día. Si en el refrigerador hay cuatro tazas y media de queso, ¿para cuántos días le alcanzará esa dotación de queso?

Respuesta: 6 días

3.- Se tienen 51 botellas de vino de medio litro y se requiere repartirlas en botellas de $^{3}/_{4}$. ¿cuántas botellas se llenarán y cuánto vino sobrará?

Respuesta: se requieren 34 botellas y no sobra vino

4.- En una fábrica de ropa, se le ofrecen a cada costurera $13.00 por cada 10 piezas en las que realizan ojales. Indica el racional asociado a esta proporción si x representa el número de piezas con ojales realizados, mientras que y representa el dinero que se deberá pagar la fábrica a la costurera.

a) $y=\frac{10}{13}x$ b) $y=\frac{13}{10}x$ c) $y=\frac{3}{1}x$ d) $y=\frac{1}{3}x$ e) $\frac{13}{10}y=x$

5.- Un jardinero termina su trabajo en un edificio en 4 días, mientras que otro lo termina en tres días. ¿Cuánto tiempo utilizarán para arreglar el jardín en el mismo edificio si trabajan juntos?

a) $\left(2+\frac{1}{2}\right)$días b) 2 días c) $\left(1+\frac{5}{7}\right)$días d) $\left(1+\frac{7}{12}\right)$ e) (3)días

6.- Despeja la variable a, de la siguiente expresión: $d=vt+\frac{1}{2}at^2$ (1 punto)

a). $a=\frac{d}{vt}-\frac{1}{2}t^2$ **b).** $a=\frac{2(d-vt)}{t^2}$ c). $a=2t^2(d-vt)$ d). $a=\frac{d}{vt}-\frac{1}{2}t^2$

Aprendizajes:

Resuelve problemas aritméticos que involucren una secuencia de relaciones contextuales, auxiliándose de estrategias heurísticas en las etapas de comprensión, elaboración de un plan y su ejecución.

Temática:

Aplicación de estrategias heurísticas en la resolución aritmética de problemas con más de una operación.

1.- Las canastas que se ven en la figura contienen huevos; en unas canastas hay huevos de gallina, en las otras de pata. Su número está indicado fuera de la canasta. “Si vendo esta canasta -meditaba el vendedor- me quedarán el doble de huevos de gallina que de pata”. ¿A qué canasta se refiere el vendedor?

Respuesta: La canasta de 29 huevos

Observamos que el vendedor tiene una canasta de 29 huevos, dice: “si vendo una canasta me quedarán el doble de huevos de gallina que de pata”. Hagamos las sumas.

El vendedor se refería a la canasta con 29 huevos. En las canastas con 23, 12 y 5 había huevos de gallina, los de pata se hallaban en las canastas designadas con 6 y 14.

De gallina:

23+12+5=40

De pata:

14+6=20

2.- En una excursión Andrés se encontraba en la situación de recoger exactamente 4 litros de agua de un manantial con el auxilio solamente de una vasija de 5 litros y otra de 3 litros. No se cuenta con una tercera vasija en dónde verter agua ni con indicaciones de medidas fraccionarias en las vasijas. ¿Qué procedimiento le aconsejas seguir a Andrés?

Respuesta:

Como se tienen solamente dos vasijas, una de 5 litros y otra de 3 litros, se recomienda a Andrés proceder como sigue:

Llenar la vasija de 5 litros y vaciar el contenido en la de 3 litros. Así habrá tres litros en la vasija pequeña y dos en la grande. Después devolver el contenido del recipiente pequeño al manantial y llenar el contenido del recipiente mayor al menor. Con esto tenemos vacía la vasija grande y con 2 litros la menor.

Por último llenamos la vasija de 5 litros y con este contenido llenamos la vasija pequeña, que contiene en ese instante 2 litros, por lo que se llena con 3 litros, quedando en la mayor exactamente 4 litros, que es lo que se busca.

3.-

Si en un patio cerrado tenemos una pareja de conejos recién nacidos y éstos originan una nueva pareja cada mes a partir del segundo, ¿cuántas parejas tendremos al cabo de 2 meses?, ¿y después de 3?, ¿y al pasar 4, 5, 6, …?

Respuesta: 1,1,2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, etc.

4.- Carla corría en un maratón de 26 km cuando su amigo le mostró una señal que decía: “te faltan 8 km.” ¿Cuánto había recorrido Carla?

a) 8 km
b) 12 km
c) 15 km
d) 18 km OK

Aprendizajes:

Reconoce patrones numéricos y geométricos en situaciones problemáticas y modelará su comportamiento.

Temática:

Expresión simbólica de la generalidad (obtención de fórmulas).

1.- Raúl leyó un libro. El primer día leyó 5 páginas y cada día siguiente leyó dos páginas más que el día anterior (el segundo día leyó 7 nuevas páginas). Si la lectura le llevó un total de 20 días, ¿cuántas páginas tenía el libro?

Respuesta: El libro tenía 480 páginas

Realicemos la tabla siguiente, con la participación de los alumnos.

día	**expresión**	**Páginas leídas**
1	5	5
2	5+2(1)	7
3	5+2(2)	9
4	5+2(3)	11
.	.	.
.	.	.
.	.	.
20	5+2(19)	43
	Σsuma total	**480 pág.**

En la columna de las páginas leídas, podemos observar la sucesión aritmética: 5, 7, 9, 11, … 43.

El resultado que deseamos es la suma de los términos de la sucesión, es decir, la suma siguiente:

5+7+9+11+ … +43, en este caso solo 20 términos (que representan los 20 días en que lo leyó Raúl).

Este tipo de situaciones pueden ser un buen pretexto para recordarles las propiedades de la suma y la multiplicación, además de operaciones básicas de suma, productos y factorizaciones, uso de símbolos de agrupamiento, etc. Además se puede generalizar el resultado: $5+2(n-1)=2n+3$.

Resuelve las siguientes ecuaciones e indica el valor de x encontrado

2.- $2x+4=7-3x$

a) $\frac{11}{5}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{3}{5}$ d) cero e) -1

3.- $-3+2x=4x+11$

a) $\frac{2}{7}$ b) -7 c) $\frac{7}{2}$ d) $-\frac{7}{2}$ e) $-\frac{2}{7}$

4.- $-2(x+5)-4=2(4x-3)$

a) $-\frac{10}{8}$ b) $\frac{8}{10}$ c) $-\frac{8}{10}$ d) 1 e) -1

5.- $4(2x+1)-2=4(5-3x)$

a) $-\frac{3}{5}$ b) $\frac{10}{9}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{9}{10}$ e) $\frac{11}{5}$

6.- $4-\frac{4}{5}x=\frac{1}{4}x-6$

a) $-\frac{20}{21}$ b) $\frac{200}{21}$ c) $\frac{21}{200}$ d) $-\frac{200}{21}$ e) $\frac{21}{200}$

7.- $\frac{2}{3}x+5=\frac{x}{3}+11$

a) $-\frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 9 d) 18 e) $-\frac{1}{2}$

8.- $\frac{1}{7}x+\frac{3}{14}x-2=2+\frac{1}{14}x$

a) $-\frac{2}{3}$ b) $\frac{10}{2}$ c) -14 d) $\frac{3}{10}$ e) 14

9.- $3+x=\frac{27+x}{4}$

a) -1 b) $\frac{2}{7}$ c) 5 d) $\frac{1}{10}$ e) $-\frac{1}{10}$

10.- $-\frac{3}{8}(4x+24)=-\frac{3}{4}(4-12x)$

a) $-\frac{4}{3}$ b) $\frac{-4}{7}$ c) $\frac{4}{3}$ d) 10 e) $\frac{2}{7}$

11.- $\frac{2x+3}{4}=\frac{-2+2x}{3}$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{10}{9}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) 2 e) $\frac{5}{2}$

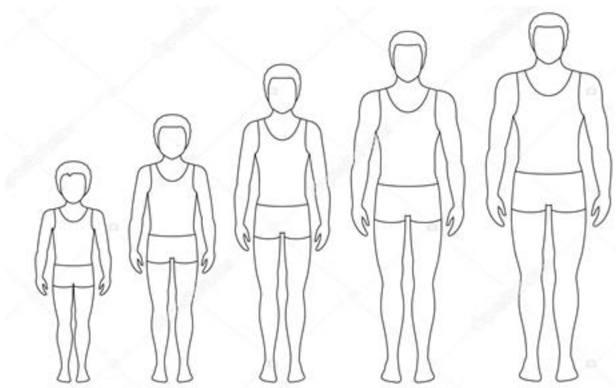
12- $\frac{4}{2x+3}=\frac{6}{4+4x}$

a) $-\frac{2}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $-\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{4}$

13.- $\frac{x-5}{4}=\frac{1+x}{3}$

a) 19 b) $\frac{1}{9}$ c) $-\frac{1}{9}$ d) -19 e) $\frac{1}{19}$

UNIDAD 2



Variación directamente proporcional y funciones lineales

Propósito:

Al finalizar esta unidad el alumno será capaz de:

- Modelar y analizar situaciones que involucren la variación entre dos cantidades en los casos en que la razón de sus incrementos sean proporcionales; utilizando los registros tabular, gráfico y algebraico, con la finalidad de que se inicie en el estudio de la variación, la idea de relación funcional, sus conceptos asociados y, continúe la comprensión del lenguaje algebraico como la representación de la generalidad.

Aprendizajes:

Identifica situaciones donde existe variación entre dos magnitudes.

Temática:

El concepto de variación entre dos magnitudes.

1.- Se ofrece un concierto del grupo musical de moda. Las entradas por persona cuestan $350.00.

e) ¿De qué depende el importe total de las entradas?____
____

f) De las magnitudes: importe total y asistentes, ¿cuál depende de la otra?, ¿Por qué?

____
____
____
____

g) Completa la tabla:

Número de personas	1	3	7	15	20	40	200	n
Importe total ($)	350							

Aprendizajes:

Dada una situación donde existe variación entre dos cantidades, el alumno identifica los elementos que corresponden a los conceptos de variable independiente y dependiente, razón de cambio y su cálculo dado un incremento de la variable independiente.

Temática:

El concepto de variable dependiente e independiente.
Razón de cambio entre dos variables correlacionadas.

1.- Señala de la lista siguiente las que correspondan a magnitudes.

cualidad	SI	NO
El peso de una persona	(✓)	( )
El amor	( )	(✕)
El ancho de la mesa	(✓)	( )
El volumen de agua de una alberca	(✓)	( )
La edad de Alejandro	(✓)	( )
La distancia que recorres a tu casa	(✓)	( )
La risa	( )	(✕)
La hora del día	(✓)	( )
El cariño que sientes por tu mascota	( )	(✕)

2.- Señala la unidad de medida de las siguientes magnitudes.

cualidad	Unidad de medida
El precio de una bicicleta	pesos
La distancia entre dos ciudades	
El ancho de la mesa	
El volumen de agua de una alberca	
La edad de Alejandro	
El tiempo que tardas en llegar a tu casa	
La densidad de un líquido	
La hora del día	
La aceleración de una partícula	

3.- En la siguientes situaciones, determina cuál es la variable dependiente.

Situación	**Variable dependiente**
El número de fotocopias y el costo que se paga por ellas	El costo
El número de objetos (iguales) y el peso total de ellos	
La distancia recorrida (a velocidad constante) y el consumo de gasolina	
El tiempo de llenado de un depósito y su capacidad	
El alargamiento de un resorte y el peso suspendido de él	
La longitud de las sombras y las alturas de los objetos correspondientes	
La cantidad de dinero en un sistema monetario y su equivalente en otro sistema	
El costo de mantenimiento de una industria y el tamaño de sus instalaciones	
El costo de una consulta de acuerdo a la especialidad del médico	

4.- Una mezcla química tiene una concentración que contiene 20 g de azufre por 17 g de cloruro de sodio. Encuentra la cantidad de cloruro de sodio que corresponde a 18 g de azufre para mantener la misma concentración

a) 10 g b) 14,7 g c) 17 g d) 15,3 g e) 25 g

5.- Una mezcla química tiene una concentración que contiene 3 g de ácido sulfúrico por 10 g de cadmio. Encuentra la cantidad Ácido sulfúrico que corresponde a 17g de Cadmio para mantener la misma concentración.

a) 1,4 g b) 0,3 g c) 5,1 g d) 7 g e) 5 g

6.- Una amalgama se compone de 2 g de plata por 5 g de Hierro. Encuentra la cantidad de plata si se tienen 18,7 g de Hierro para mantener la misma amalgama

a) 4,3 g b) 7,2 g c) 7,48 d) 6 g e) 7 g

7.- Un analgésico se prepara con .35 g de Paracetamol y .15 g de Cafeína. ¿Qué cantidad de cafeína se necesita para 2.5 g de Paracetamol si se debe tener la misma composición para este medicamento?

a) 1, 071…g b) 2,05 g c) 3,82 d) 5 g e) 2,5 g

8.- Un medicamento contiene 20% de diclofenaco en cada tableta de 500 mg. Un paciente necesita ingerir 150 mg de diclofenaco al día, ¿qué cantidad de este medicamento debe ingerir en el día?

a) 1,5 tabletas b) 1 tableta c) 2 tabletas d) $\frac{1}{2}$ tableta e) $\frac{1}{3}$ tableta

9.- Una distribuidora de pintura acrílica, combina 300 ml de azul cobalto con 200 ml de amarillo canario para obtener un tono de verde. Encuentra la cantidad de amarillo canario que debe mezclarse con 1.2 litros de azul cobalto para obtener el mismo tono de verde.

a) 500 ml b) 300 ml c) 700 ml d) 800 ml e) 750 ml

10.- Un pintor termina de pintar una barda de cierta dimensión en 3 días. a) ¿Cuánto tiempo tardará en pintar 5 bardas equivalentes? b) ¿Cuántos pintores que trabajen a un ritmo similar se requieren para pintar 126 bardas iguales en 6 días?

Resp. 15, 42

10.- Un lingote de oro de 1 000 gramos ocupa un volumen de 53.703 cm^3. El banco Central de México debe transportar 350 lingotes de oro periódicamente. El banco está pensando en comprar una camioneta para llevar a cabo esta tarea, ¿Cuál es la capacidad mínima, en kg y en m^3 que debe tener el vehículo?

Resp. 350 kg y 0.019 m^3

Aprendizajes:

Traduce en una tabla de valores algunos “estados” correspondientes a la descripción verbal de la variación directamente proporcional entre dos magnitudes. Traduce en una gráfica, la descripción tabular o verbal de la variación relacionada (directamente proporcional) entre dos cantidades y usa esta representación para obtener información sobre la variación.

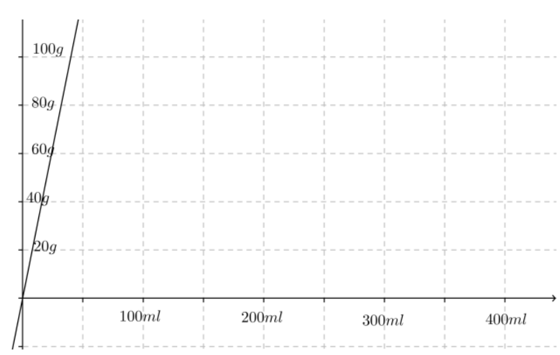
Temática:

- Representación tabular de la variación directamente proporcional entre dos magnitudes.
- El patrón aditivo en una variación directamente proporcional.
- El punto como representación de “estados” específicos de variación.
- Convenciones sobre las escalas.
- El patrón gráfico de una variación directamente proporcional.
- Análisis contextual de la representación gráfica:
- Interpretación de los puntos del patrón gráfico como estados de la variación no registrados en una representación tabular.
- El punto en el origen y la inclinación del gráfico como indicadores esenciales de una variación directamente proporcional.

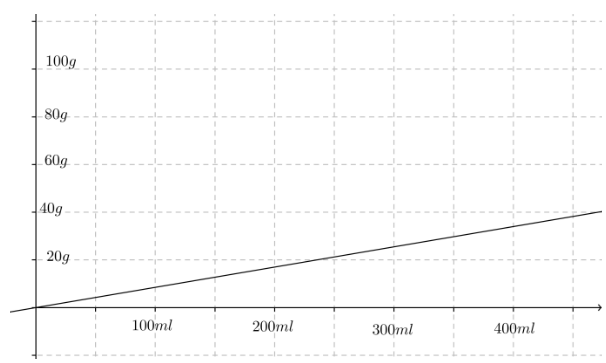
1.- En la siguiente tabla se muestran las variaciones de las cantidades de carbohidratos que contiene una bebida.

x ml	200	100	150	400	500
y g	17	8,5	12,75	34	42,5

Indica la gráfica que corresponde a la relación entre los carbohidratos y los mililitros de esta bebida.

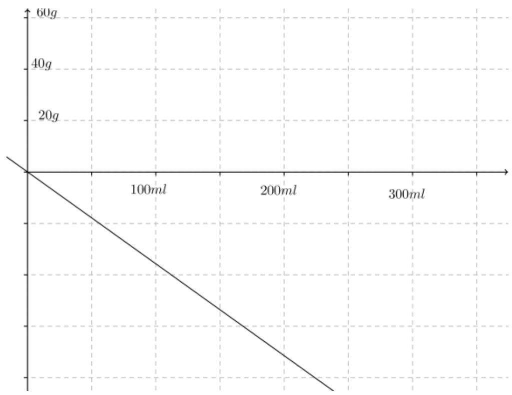


a)

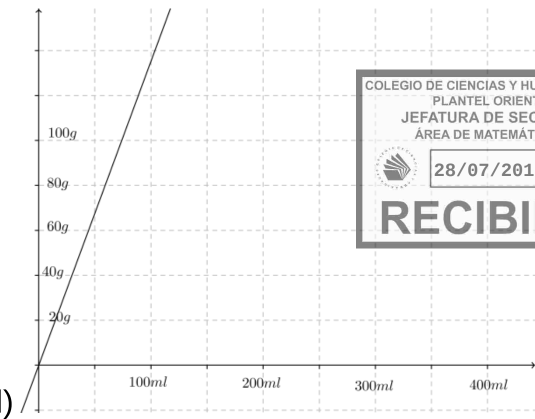


b)

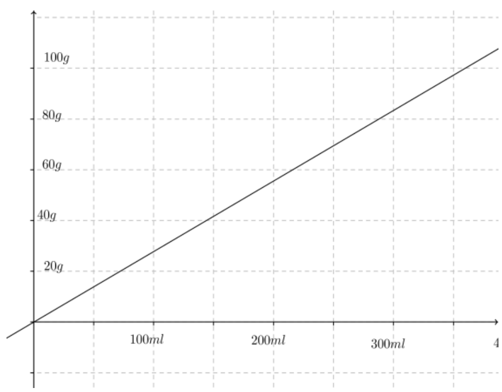
c)



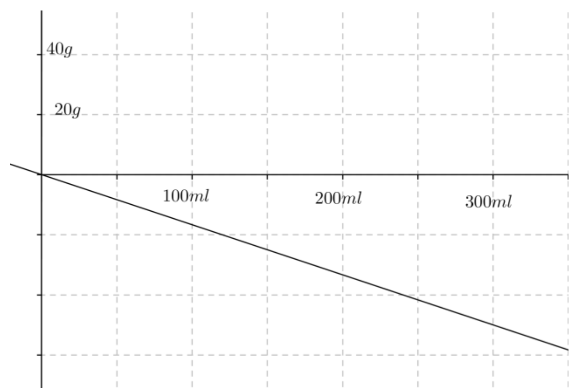
d)



e)



f)



2.- Se desea conocer el precio de 15 folletos y se sabe que el costo de uno de ellos es de 20 pesos. Si completamos una tabla para observar el costo se tendría:

Núm libros	1	2	3	4	5	7	10	13	15
Precio ($)	20	40		80	100		200	260	

Responde:

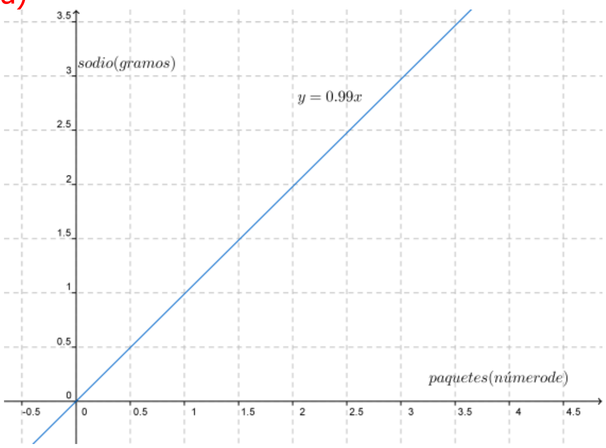
a.- En la tabla se puede observar que el costo de dos libros es de $40, el de 15: _____.

b.- Al aumentar la cantidad de libros, aumenta el ___________.

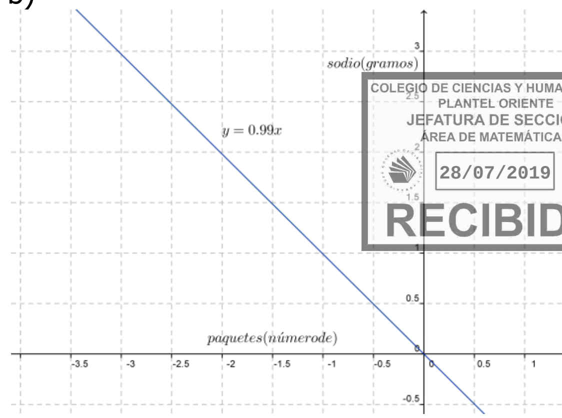
c.- Escribe el nombre de los ejes, elige una escala adecuada y construye la gráfica de los datos de la tabla:

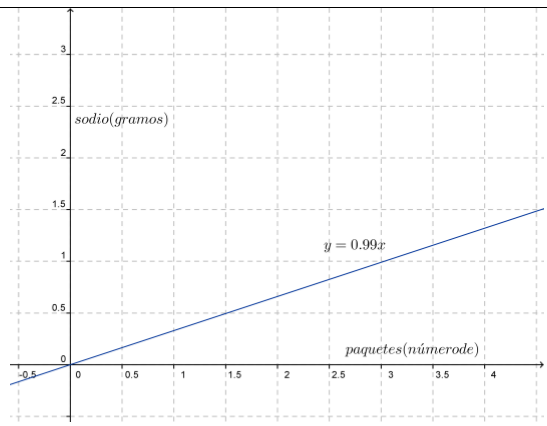
3.- Indica la gráfica que representa el consumo de gramos de sodio ingerido por un determinado número de paquetes de galletas del problema 14

a)

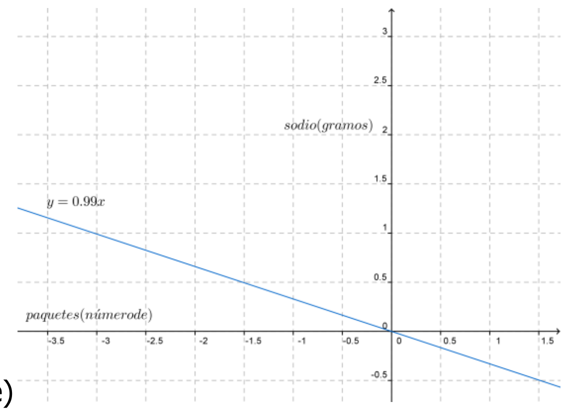


b)





c)



e)

4.- Establece si la relación entre las siguientes variables que se presentan en las siguientes tablas son directamente proporcionales o no.

a) T es la temperatura y V es el volumen de una sustancia gaseosa.

T (ºC)	100	125	150	175	200	225	250
V (l)	31.021	33.103	35.184	37.265	39.345	41.425	43.503

no

b).h es la altura sobre el nivel del mar y t es el tiempo.

t (min.)	7	14	20	25	28	35
h (pies)	5 000	10 000	14 286	17 857	20 000	25 000

si

c) T es la temperatura y V es el volumen de una sustancia gaseosa.

T (ºC)	398.15	423.15	448.15	473.15	498.15	523.15
siV (l)	33.103	35.184	37.265	39.345	41.425	43.505

si

d). Crecimiento de bacterias (núm. De colonias) con el tiempo

t	15	30	45	60	75	90	105
colonias	2	4	8	16	32	64	128

No

5.- Completa la siguiente tabla sabiendo que la proporcionalidad entre las magnitudes es directa.

A	4	2	12	7	20		
B	20	10	60	35	100		

a.- ¿Cuánto corresponde a 1? ___5__

b.- ¿Cuánto corresponde al valor 0? ______

6.- Un tractor, en un camino se mueve a una velocidad constante de 20 km/h. Calcular la distancia que recorre en 20 minutos, 45 minutos, 55 minutos, 1 hr y 10 minutos, 1 hr y 25 minutos, 1 hr y 50 minutos, 2 hr y 15 minutos.

Llena la tabla siguiente:

Tiempo (t)							
Distancia (d)							

Responde a las siguientes preguntas:

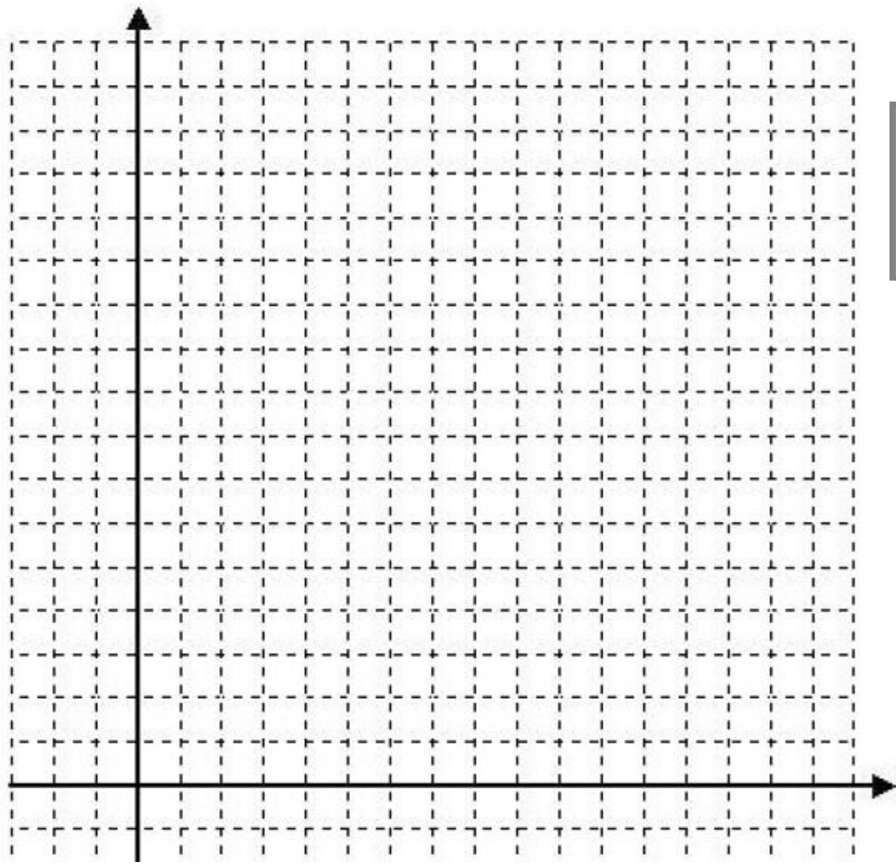
d) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ______________________

e) ¿Cuál es la variable dependiente? ________________ ¿Cuál es la variable independiente? _______________________

f) Escribe la expresión o modelo matemático que relaciona las dos variables. _______________________________________

7.- Llena la siguiente tabla, considerando que y varia directamente con x. Determina la expresión o modelo matemático que relaciona ambas variables y realiza la gráfica correspondiente.

x	2	5		8	
y		16	19.2		41.6



8.- Una solución de 30 litros agua con sal tiene un 18% de sal. Describe la expresión, o fórmula que relaciona la cantidad de sal en esta solución.

a) $30(18) = sal$ b) $\frac{30(18)}{100} = sal$ c) $\frac{100(30)}{18} = sal$

d) $100(18) = sal$ e) $\frac{100(18)}{30} = sal$

9.- Considera el problema anterior. Si el agua se calienta y se ha evaporado hasta quedar únicamente 20 litros de la solución, ¿cuál es la concentración de sal después de esta evaporación? Indica la ecuación que permite calcular esta concentración.

a) $\frac{30(100)}{5,4} = \%$ sal b) $\frac{5,4(100)}{30} = \%$ sal c) $\frac{5,4(20)}{100} = \%$ sal

d) $\frac{5,4(100)}{20} = \%$ sal e) $\frac{20(100)}{5,4} = \%$ sal

10.- Ya que al calentarse la solución anterior el agua se evapora, la cantidad de sal aumenta en concentración, indica la expresión que permite resolver la pregunta sobre la cantidad x de solución que debe tenerse para llegar a un 50% de concentración de sal en la solución.

a) $\frac{20(100)}{5,4} = 50$ (% sal) b) $\frac{5,4(100)}{x} = 50$ (% sal) c) $\frac{x(100)}{5,4} = 50$ (% sal)

d) $\frac{20(5,4)}{100} = 50$ (% sal) e) $\frac{20(5,4)}{x} = 50$ (% sal)

11.- Una solución de 2 litros contiene una concentración de 15% de carbonato y 85% de azufre. Indica la cantidad de azufre y la cantidad de carbonato que se tiene en esta solución.

a) 1,7 y 0,3 b) 1,5 y 0,3 c) 1,5 y 0,5 d) 1,7 y 0,5 e) 1,5 y 0,7

12.- Una mayonesa indica en su etiqueta que por cada porción de 15 g se consumen 2 g de proteína y 7,3 g de grasa poli saturada, entre otros componentes. La tabla siguiente representa la relación entre la cantidad de mayonesa y proteínas ¿cuáles son los valores que faltan?

gramos de mayonesa	3,75	7,5	11,25	15	18,75	22,5		30
gramos de proteínas	0.5	1		2	2.5	3	3.5	4

a) 1,3 y 25 b) 1,2 y 26,25 c) 1,5 y 25 d) 1,5 y 27 e) 1,5 y 26,25

13.- La tabla siguiente indica la relación entre los gramos de mayonesa y los de grasa poli saturada respectivamente. Indica los valores que faltan en la tabla:

gramos de mayonesa	3,75	7,5	11,125	15	18,75	22,5	30
gramos de grasa polisaturada		3,65	5,475	7,3		10,95	14,6

a) 1,5 y 9,165 b) 1,825 y 9,5 c) 1,825 y 9,125 d) 1,5 y 9,5 e) 1,8 y 9,2

Aprendizajes:

Representa algebraicamente la variación directamente proporcional entre dos cantidades y obtener a partir de ella información sobre ésta.

Temática:
Expresión simbólica de la generalidad

- $y = ax$ como representación de una variación directamente proporcional.

Análisis contextual de la expresión simbólica $y = ax$.

- El parámetro a como la rapidez de variación o razón de cambio.
- El parámetro a como indicador de la inclinación del gráfico de la variación.
- La constancia de a en una variación directamente proporcional.

1.- De las variaciones entre variables descritas abajo, indica aquélla que representa una variación proporcional entre x, y

a) $3x-2y=0$ b) $3x^2-2y=0$ c) $x^2-2y=0$

d) $3x^2-2y=0$ e) $3x^2-2y^2=0$

2.- Una mezcla química contiene 15 g de cloruro de sodio por 25 g de carbonato, describe la ecuación asociada para encontrar la cantidad y en gramos de carbonato si se tienen 22 g de cloruro de sodio.

a) $y=\frac{(22)(15)}{x}$ b) $y=\frac{(22)(25)}{15}$ c) $y=\frac{(15)(25)}{22}$ d) $y=\frac{(x)(25)}{15}$ e) $y=\frac{(22)(15)}{20}$

3.- Una amalgama contiene 3 g de plata por 20 g de hierro. Indica la ecuación que permite encontrar la cantidad y de plata para 37 g de hierro

a) $20y=3x$ b) $3y=20(37)$ c) $20y=37(3)$ d) $3y=20x$ e) $37y=3(20)$

4.- ¿Cuál es entonces la ecuación general que expresa la cantidad y de gramos de plata para una cantidad x de hierro que se tiene en la amalgama del ejercicio 8?

a) $3y=20(37)$ b) $3y=20x$ c) $3y=x(37)$ d) $20y=3x$ e) $20y=37x$

5.- La ecuación $3x=2y$ expresa la variación proporcional entre la cantidad de azúcar y la cantidad de fresas en una conserva, encuentra la ecuación equivalente a ésta

a) $y=2x$ b) $y=3x$ c) $\frac{y}{x}=\frac{2}{3}$ d) $y=\frac{3}{2}x$ e) $3x-2y=0$

6.- Un analgésico se prepara con 0,25 g de ketorolaco y 0,15 g de ibuprofeno.

En la tabla siguiente se indican algunos valores que corresponden cada uno a la concentración anterior. Escribe los valores que faltan

Gramos de ketorolaco	0,125	0,25g	0,375g	0,50g	0,75g
Gramos de ibuprofeno	0, 075g	0,15g		0,30g	

a) 0,20 y 0,45 b) 0,22 y 0,45 c) 0,225 y 0,45 d) 0,22 y 0,47 e) 0,22 y 0.50

7.- ¿Qué cantidad de Ibuprofeno se necesita para 2.5 g de Ketorolaco si se debe tener la misma composición del medicamento en el problema 12? Indica la ecuación que permite encontrar esta cantidad.

a) $y=\frac{(x)(0,15)}{0,25}$ b) $y=\frac{(2,5)(0,15)}{0,25}$ c) $y=\frac{(2,5)(x)}{0,25}$ d) $y=\frac{(2,5)(0,15)}{x}$ e) $y=\frac{(2,5)(0,25)}{0,15}$

8.- Un paquete de 3 galletas contiene 99 mg de sodio, ¿cuál es la cantidad de sodio que se ingiere al comer 2 paquetes de galletas?

a) 33 mg b) 66 mg c) 198 mg d) 99 mg e) 44 mg

9.- Indica la ecuación que representa la cantidad de sodio que se ingiere si se comen y paquetes de galletas

a) $y=\frac{x}{99}$ b) $y=99x$ c) $x=\frac{y}{0,99}$ d) $x=99y$ e) $x=0,99y$

10.- Encuentra la expresión equivalente a la ecuación anterior del problema 8.

a) $y-\frac{x}{99}=0$ b) $x-99y=0$ c) $0,99x-y=0$

d) $99x-y=0$ e) $0,99y=x$

11.- El consumo de sodio es necesario para el cuerpo humano, sin embargo para una vida sana se recomienda la ingesta al día como máximo de 2.3 g ¿cuántos paquetes de galletas pueden comerse al día para no exceder la ingesta recomendada?

a) $(2,3)(0,99)$ b) $\frac{23}{0,99}$ c) $\frac{0,99}{2,3}$ d) $(2,3)(99)$ e) $\frac{2,3}{0,99}$

12.- Indica cuál es la proporción asociada a la cantidad de sodio en gramos por cada paquete de galletas

a) $0,99$ b) $\frac{3}{0,99}$ c) $\frac{1}{0,33}$ d) $\frac{1}{0,99}$ e) $\frac{0,99}{3}$

13.- ¿Cuál son las operaciones qué utilizas para resolver lo que se conoce como *regla de tres*?

a) raíz cuadrada b) suma y resta c) multiplicación y división

d) multiplicación y resta e) suma y multiplicación

14.- Una mezcla química contiene 8 g de plata por 20 g cobalto. ¿Qué cantidad de cobalto se necesita para 23 g de plata si se debe tener la misma composición? La tabla siguiente muestra distintas concentraciones en la mezcla, indica los valores que faltan.

Gramos de Plata	2	2,5	4	5	8	11	19	24	27
Gramos de Cobalto.	5	6,25	10	12,25	20	27,5	47,5	60	67,5

a) 7 y 48 b) 7,5 y 28 c) 7,5 y 47,5 d) 6,25 y 47,5 e) 6,25 y 47

15.- Indica la ecuación asociada al problema 19 si y representa el cobalto y x representa a la plata

a) $20y = 8x$ b) $2y = x$ c) $8y = 20x$ d) $y = 3x$ e) $3y = x$

16.- Represента el siguiente enunciado como una ecuación. *"El interés simple (**I**) que produce un determinado capital es directamente proporcional al capital inicial (C)."*

a) $I - C = 0$ b) $I = kC$ c) $I = \frac{1}{k}C$ d) $IC = k$ e) $C = \frac{1}{k}I$

17.- Representa el siguiente enunciado como una ecuación. "*La distancia (d) de un cuerpo* que *cae es directamente proporcional al tiempo (t) que transcurre cuando cae".*

a) $d\ t = k$ b) $t = \frac{1}{k}d$ c) $d = \frac{1}{k}t$ d) $d - t = 0$ e) $d = kt$

18.- Representa el siguiente enunciado como una ecuación *"La altura de un triángulo (h) es directamente proporcional con la longitud (l) de su lado"*

a) $l = \frac{1}{k}h$ b) $h = \frac{1}{k}l$ c) $h = kl$ d) $h\ l = k$ e) $h - l = 0$

19.- Representa el siguiente enunciado como una ecuación. *"El volumen (V) de una caja rectangular es directamente proporcional con su longitud (l), su ancho (a) y su altura (h)"*

a) $V-l=ah$ b) $V-l=kah$ c) $V=\frac{l}{k}ah$ d) $V=lah$ e) $V=k\frac{h}{l}a$

Aprendizaje

Identifica entre una serie de variaciones entre dos aquellas que corresponden al concepto de función lineal.

Temática:

El concepto de función lineal.

1.- Indica de las ecuaciones siguientes, cuál representa una *función lineal* entre x, y

a) $5xy-6x=0$ b) $2x-3y=-6$ c) $3x^2-6x=2y$ d) $2x^2-8x-4=3y$ e) $4x=\frac{9}{y}$

2.- Si se compra una maquinaria a $250 000.00 cuya vida útil se fija en 5 años y se vende en $75 000.

a) Calcula la tasa de depreciación anual

b) Obtener la expresión lineal para el valor depreciado

c) Calcula el valor de la maquinaria al término de tres años

Aprendizaje

- Modela con la expresión $y = mx + b$, una variación relacionada entre dos variables con rapidez de variación constante y condición inicial (0,b), transitando en la etapa de exploración, por representaciones tabulares y gráficas.
- Dada una variación que se modela con una función lineal, el alumno calcule estados específicos de variación, su rapidez de cambio y estado inicial empleando sus representaciones gráfica y analítica.

Temática:

- Representación analítica de una función lineal.
- Identificación de los elementos definitorios de una función lineal empleando las representaciones gráficas y analíticas: condición inicial, rapidez de variación.

1.- Alejandro compró un automóvil nuevo en $160 000.00

c) ¿Cuál es la función lineal que modela el valor del automóvil después de t años, suponiendo que se deprecia linealmente a razón de $20 000.00 cada año? (respuesta: $V_D = -20\,000(t) + 160\,000$).

d) ¿Cuál es el valor después de 5 años? (Respuesta: $60 000.00).

2.- Con relación a la gráfica de adjunta,
a) ¿Cuál es el valor de la ordenada al origen?.

____

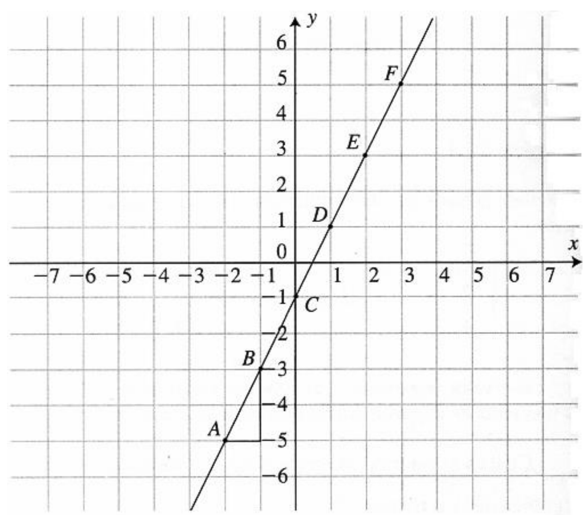
____

b). ¿Cuánto vale la pendiente?

____

____

c). Determina la función lineal que representa la gráfica adjunta _______________



3.- escribe la pendiente de la recta (m) y las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados: $y = 3x + 5$

a). m=3 ok
(0,5) y $(-5/3, 0)$

b). m=3
(5,0) y $(-5/3, 0)$

c). m=5
(0,-5) y $(5/3, 0)$

d). m=3
(0,5) y $(0, -5/3)$

4.- escribe la pendiente de la recta (m) y las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados: $y = \frac{2}{3}x - 2$.

a). m=$^{-2}/_{3}$
(0,2) y ($^{2}/_{3}, 0)$

b). m=$^{2}/_{3}$
(2,0) y $(-3{,}0)$

c). m=$^{2}/_{3}$ 0k
(0,-2) y $(3{,}0)$

d). m=$^{-2}/_{3}$
(0,-2) y $(0, 3)$

5.- escribe la pendiente de la recta (m) y las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados: $y = 5x + 3$.

a). m=5
(0,2) y ($^{3}/_{5}, 0)$

b). m=-5
(2,0) y $(-3{,}0)$

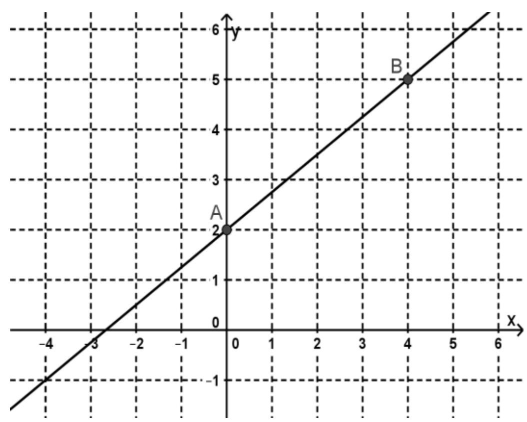
c). m=5 0k
(0,3) y ($^{-3}/_{5}, 0)$

d). m=5
(0,-2) y ($^{5}/_{3}, 0)$

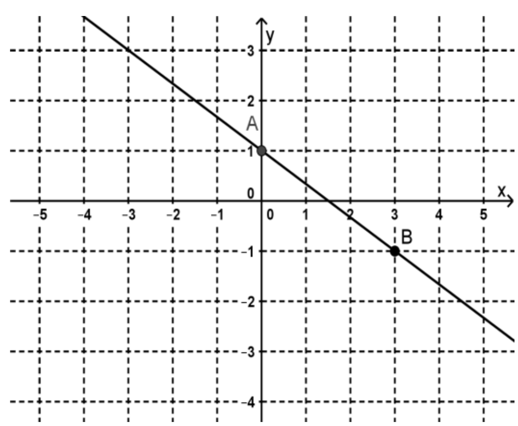
6.- Un empleado de una zapatería gana \$30.00 por día más \$5.00 por cada par de zapatos que venda (x), ¿Cuál es el modelo lineal que describe el sueldo (y) por día?

a). $y = 5x + 30$ ok
b). $y = 30x + 5$
c). $y = -5x + 30$
d). $y = 5x - 30$

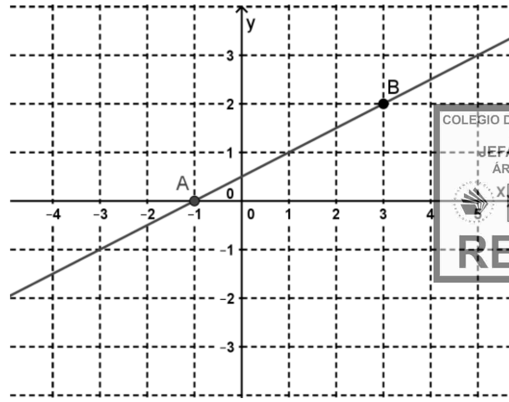
7.- Con relación a la gráfica adjunta, determina:
a) la ordenada al origen
b) la pendiente
c) la función lineal



8.- Con relación a la gráfica adjunta, determina:
a) la ordenada al origen
b) la pendiente
c) la función lineal



9.- Con relación a la gráfica adjunta, determina:
a) la ordenada al origen
b) la pendiente
c) la función lineal



10.- Encuentra la función en la forma y=mx+b, que corresponde a la siguiente tabla:

X	2	4	8	10	15
y	4	8	16	20	30

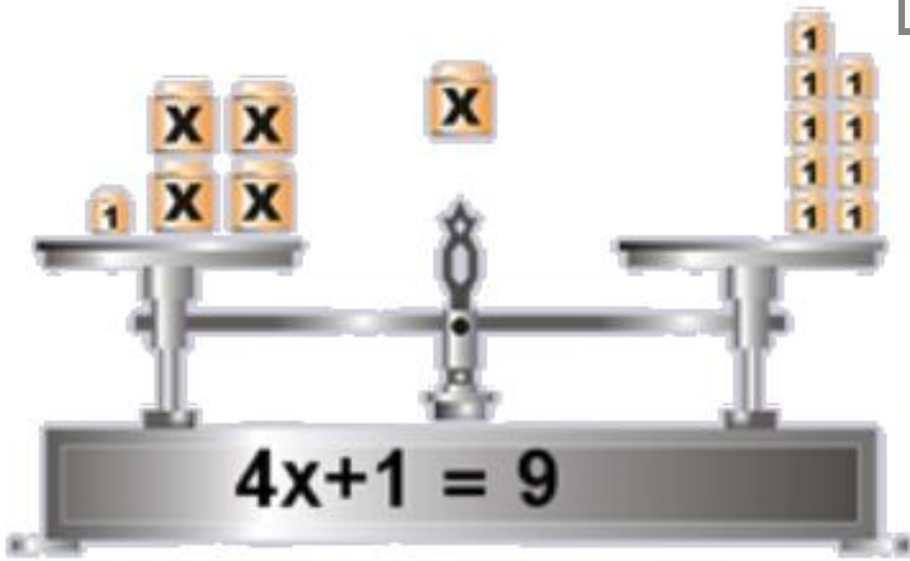
11.- A un precio de $2.50 por unidad, una empresa ofrecerá 8,000 camisetas al mes; a $4.00 cada unidad, la misma empresa producirá 14,000 camisetas al mes. Determine la ecuación de la oferta en la forma y=mx+b, suponiendo que es lineal.

Solución: $p = \frac{1}{4000}x + \frac{1}{2}$

12.- Un fabricante de herramientas puede vender 3,000 martillos al mes a $2.00 cada uno, mientras que solo pueden venderse 2,000 martillos a $2.75 cada uno. Determine la ley de demanda, suponiendo que es lineal.

Solución: $p = -\frac{0.75}{1000}x + 4.25$

UNIDAD 3



Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Propósito:

Al finalizar el alumno:

- Será capaz de modelar y resolver situaciones problemáticas que conduzcan a una ecuación de primer grado con una incógnita.
- Aplicará los conocimientos adquiridos en la manipulación algebraica del modelo, con la finalidad de que la representación algebraica sea una herramienta en la resolución de tales situaciones.

Aprendizajes:

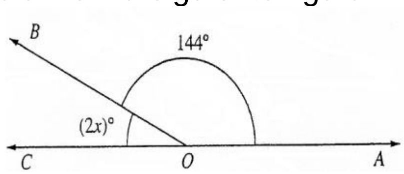
Comprende el concepto de “ecuación” en el contexto de la resolución de problemas y lo expresa en el lenguaje algebraico.

Temática:

La ecuación como la condición simbólica que debe satisfacer la incógnita en un problema.
El uso del paréntesis en la representación algebraica.

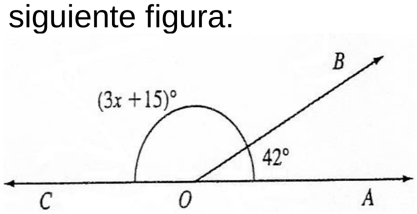
Elige la ecuación que corresponde a la representación algebraica que resuelve lo que se pide:

1.- Se solicita encontrar el valor de la variable x en la siguiente figura:



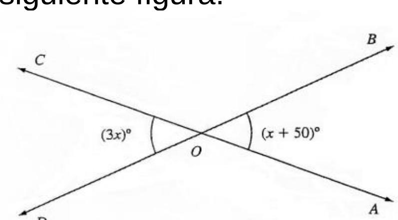
a) $2x + 144 = 180$ ok
b) $2x = 144$
c) $2x = 180 + 144$
d) $2x - 144 = 180$

2.- Encuentra el valor de la variable x en la siguiente figura:



a) $(3x + 15) + 42 = 180$
b) $(3x + 15) - 42 = 180$
c) $(3x + 15) = 42$
d) $(3x + 15) + 42 = 180$ ok

3.- Encuentra el valor de la variable x en la siguiente figura:



a) $(3x + 50) = 180$
b) $(3x) + (x + 50) = 180$
c) $3x = x + 50$ ok
d) $(3x) + (x + 15) = -180$

4.- Si un número es tres unidades mayor que otro y su suma es 61,

a) $x + (3x) = 61$
b) $x + (3x) + 61 = 0$

¿Cuáles son los números?. Suponga que x es el número más pequeño.

c) $x + (x + 3) = 61$ ok
d) $x - (x + 3) = 61$

5.- La suma de dos números enteros consecutivos es 77. ¿Cuáles son esos números?. Suponga que x es el número más pequeño.

a) $x + (2x) = 77$
b) $x + (x + 2) = 77$
c) $x + (x + 1) = 77$ ok
d) $x + (2x + 1) = 77$

6.- La suma de dos números pares consecutivos es 118. ¿Cuáles son esos números?. Suponga que 2x es el número par más pequeño.

a) $2x + (2x + 2) = 118$ ok
b) $2x + (x + 2) = 118$
c) $x + (x + 1) = 118$
d) $x + (x + 2) = 118$

7.- La suma de dos números enteros impares consecutivos es 136. ¿Cuáles son esos números?. Suponga que 2x - 1 es el número más pequeño.

a) $x + (2x) = 136$
b) $(2x - 1) + (3x) = 136$
c) $(2x - 1) + (2x + 1) = 136$ ok
d) $x + (x + 2) = 136$

8.- La suma de tres números impares consecutivos es 69. ¿Cuáles son esos números?. Suponga que 2x-1 es el número impar más pequeño.

a) $(2x - 1) + (2x + 1) + (2x + 3) = 69$ ok
b) $(2x - 1) + (2x + 1) + (2x + 2) = 69$
c) $x + (x + 1) + (x + 3) = 69$
d) $x + (2x + 1) + (3x + 2) = 69$

9.- Un número es tres unidades más que el doble de otro. Su suma es 54. ¿Cuáles son los números? Suponga que x es el número más pequeño.

a) $x + (2x + 3) = 54$ ok
b) $x + 2(x + 3) = 54$
c) $x - 2(x + 3) = 54$
d) $x + (2x - 1) = 54$

10.- De tres números dados, el segundo es tres veces mayor que el primero y el tercero es cuatro unidades mayor que la mitad de la suma de los dos primeros. Suman los tres 52 unidades. ¿Cuáles son esos números?. Suponga que x es el número más pequeño.

a) $x + (x + 3) + (\frac{4x}{2}) + 4 = 52$
b) $x + (3x) + (\frac{4+x}{2}) + 4 = 52$
c) $x + (3x) + (\frac{4x}{2})4 = 52$
d) $x + (3x) + (\frac{4x}{2}) + 4 = 52$ ok

11.- La edad de Alicia es tres veces la edad de Juana. Dentro de 8 años la suma de sus edades será 28 años. ¿Cuáles son sus edades actuales?. Suponga que la edad de Juana es x.

a) $(x + 8) + 3(x + 8) = 28$
b) $(x + 8) + (3x + 8) = 28$ ok
c) $(x + 8) + 8(3x) = 28$
d) $x + 8 + (3x) = 28$

12.- Un terreno rectangular tiene perímetro de 24 cm. La siguiente tabla muestra varias posibilidades para la medida de su *base* x y de su *altura* y. Escribe los valores que faltan:

Base $b = x$ cm	2	3,5	5	6	7	7,5	8		11	12
altura $a = y$ cm	10	8,5		6	5	4,5	4	3	1	0

a) 7 y 9 b) 7,5 y 4,5 c) 6,5 y 3,5 d) 8 y 5 e) 7,3 y 3,7

13.- Expresa la relación entre la *base* y la *altura* del *problema 12* por medio de una ecuación

a) $x = y$ b) $x = 12 + y$ c) $y = 12 + x$ d) $x + y = 12$ e) $x - y = 12$

14.- La tabla siguiente muestra la relación entre la base y el área del terreno rectangular del *problema 12*. Indica los valores que faltan

Base $b = x$ cm	2	3	5	6	7	7,5	8	10	11	12
área $A = y$ cm²	20	27		36	35	33,75	32		11	0

a) 30 y 23 b) 35 y 20 c) 34 y 27 d) 30 y 18 e) 32 y 17

15.- Indica la ecuación que muestra la relación entre la longitud de la base y el área del rectángulo en el *problema 12*.

a) $y = (12 - y)x$ b) $y = (12 - x)x$ c) $y = (12 + x)x$

d) $y = (12 + y)x$ e) $y = (y)x$

16.- Un pantalón que se encuentra en promoción tiene un precio de \$450. Si la promoción afirma que se ha aplicado un descuento de 30% sobre el precio original, ¿cuál es entonces la ecuación que describe el precio del pantalón sin descuento?

a) $450 = x - 0,3x$ b) $\frac{450}{3} = x$ c) $450 = x + 0,30x$ d) $\frac{450}{3} = x$ e) $450 = \frac{x}{3} + x$

17.- Indica la ecuación que permite encontrar el precio x de un neumático para auto si el precio de promoción que tiene es de $780 y la promoción es de 25% de descuento sobre el precio original.

a) $780 = x + 0,25x$ b) $780x = 780 - 0,25x$ c) $780 = x - 0,25x$

d) $x = 780 - 0,25$ e) $x = 780 - 0,25x$

18.- Una arrendadora paga $\frac{5}{16}$ de sus ingresos por mes en impuestos, mientras que $\frac{2}{3}$ se invierten en el pago a sus trabajadores, le restan de $6 400.00 ¿cuál es su ingreso x en el mes? Indica la ecuación que `permite encontrar esta cantidad?

a) $x = 6400 - \frac{5}{16}x - \frac{2}{3}$ b) $x = \frac{5}{16}x + \frac{2}{3}x + 6400$ c) $6400 = \frac{5}{16}x + \frac{2}{3}x$

e) $x = \frac{5}{16} + \frac{2}{3} + 6400$ d) $\frac{5}{16}x - \frac{2}{3}x = 6400$

19.- Hace 3 años la edad de un joven era la mitad de la edad que tendrá en 10 años. Encuentra la ecuación que permite encontrar la edad x actual de este joven

a) $x - 3 = \frac{(x+10)}{2}$ b) $\frac{x-3}{2} = x + 10$ c) $x - 3 = 2(x+10)$

d) $x + \frac{10}{2} = x - 3$ e) $x + 10 = \frac{x}{2} - 3$

20.- Una imprenta compró un lote de papel y no contó la cantidad que paquetes que recibió. Se tomó la mitad de paquetes de papel, mientras que después se tomaron una décima parte del resto. Si quedaron 20 paquetes de papel, indica la ecuación que permite encontrar la cantidad x de papel que se tenía en el lote.

a) $x + 20$ b) $\frac{x+20}{10} = \frac{1}{2}$ c) $\frac{x}{10} + 20 = \frac{x}{2}$

d) $\frac{\frac{x}{2}}{10} + \frac{x}{2} + 200 = x$ e) $\frac{\frac{x}{10}}{2}x + 20x = x$

21.- Una fábrica requiere los servicios de dos maquiladoras para realizar un trabajo que éstas realizan en 12 hrs, si sólo contrata una maquiladora el trabajo se realiza en 20 hrs. ¿cuánto tiempo se llevaría la otra maquiladora si sólo ella realiza el trabajo? Indica la ecuación que permite responder esta pregunta.

a) $x + 12 = x$ b) $\frac{x}{12} + \frac{10}{x} = x$ c) $\frac{1}{12} = \frac{1}{20} + \frac{1}{x}$ d) $\frac{x}{12} + \frac{x}{10} = x$ e) $\frac{1}{12} + 10 = x$

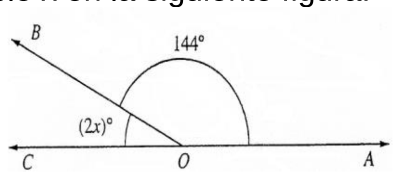
Aprendizajes:

Una vez expresada algebraicamente la condición que satisface la incógnita de un problema, el alumno la utiliza para resolverlo, empleando las reglas de transposición o las propiedades de la igualdad.

Temática:

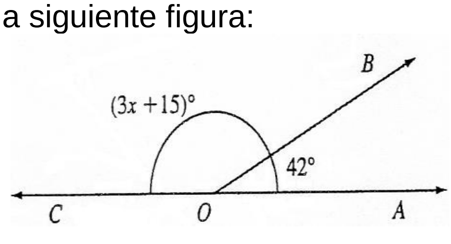
- Reducción de una ecuación de primer grado con una incógnita a la forma: $ax + b = 0$.
- El concepto de ecuaciones equivalentes.
- Las reglas algebraicas que producen ecuaciones equivalentes:
- Las reglas de transposición o las propiedades de la igualdad y las condiciones de su aplicación.
- La propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma.
- Resolución de una ecuación de primer grado con una incógnita transformándola a la forma: $ax + b = 0$

1.- Se solicita encontrar el valor de la variable x en la siguiente figura:



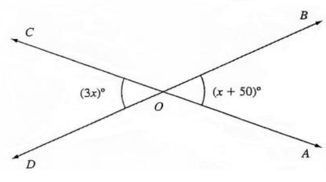
a) $x = 100^o$
b) $x = 14^o$
c) $x = 162^o$
d) $x = 18^o$ ok

2.- Encuentra el valor de la variable x en la siguiente figura:



a) $x = 17^o$
b) $x = 32^o$
c) $x = 42^o$
d) $x = 41^o$ ok

3.- Encuentra el valor de la variable x en la siguiente figura:



a) $x = 18^o$
b) $x = 15^o$
c) $x = 25^o$ ok
d) $x = 26^o$

4.- Si un número es tres unidades mayor que otro y su suma es 61, ¿Cuál es el número más pequeño?. Suponga que x es el número más pequeño.

a) $x = 61$
b) $x = 32$
c) $x = 29$ ok
d) $x = 31$

5.- La suma de dos números enteros consecutivos es 77. ¿Cuáles son esos números?. Suponga que x es el número más pequeño.

a) $x = 17$
b) $x = 15$
c) $x = 38$ ok
d) $x = 17$

6.- La suma de dos números pares consecutivos es 118. ¿Cuál es el número más pequeño?. Suponga que x es el número par más pequeño.

a) $x = 58$ ok
b) $x = 18$
c) $x = 12$
d) $x = 20$

7.- La suma de dos números enteros impares consecutivos es 136. ¿Cuál es el número más pequeño?. Suponga que x es el número más pequeño.

a) $x = 13$
b) $x = 17$
c) $x = 67$ ok
d) $x = 7$|

8.- La suma de tres números impares consecutivos es 69. ¿Cuál es número más pequeño?. Suponga que x es el número impar más pequeño.

a) $x = 21$ ok
b) $x = 11$
c) $x = 13$
d) $x = 69$

9.- Un número es tres unidades más que el doble de otro. Su suma es 54. ¿Cuá les el número más grande? Suponga que x es el número más pequeño.

a) $x = 37$ ok
b) $x = 17$
c) $x = 24$
d) $x = 54$

10.- De tres números dados, el segundo es tres veces mayor que el primero y el tercero es cuatro unidades mayor que la mitad de la suma de los dos primeros. Suman los tres 52 unidades. ¿Cuáles son esos números?. Suponga que x es el número más pequeño.

a) $x = 8,\ y = 24\ y\ z = 20$ ok
b) $x = 5,\ y = 15\ y\ z = 14$
c) $x = 4,\ y = 12\ y\ z = 20$
d) $x = 8,\ y = 24\ y\ z = 12$

11.- La edad de Alicia es tres veces la edad de Juana. Dentro de 8 años la suma de sus edades será 28 años. ¿Cuáles son sus edades actuales?. Suponga que la edad de Juana es x.

a) $x = 12, y = 36$
b) $x = 3, y = 9$ ok
c) $x = 8, y = 24$
d) $x = 11, y = 33$

12.- Encuentre soluciones de la ecuación lineal $5x - 16 = 35x\text{-}6$

a) $x = 3$ b) $x = \frac{1}{3}$ c) $x = \frac{35}{3}$ d) $x = 1$ e) $x = -3$

13.- Indica la solución de la ecuación $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = 7$

a) $x = -2$ b) $x = 2$ c) $x = 6$ d) $x = -8$ e) $x = 8$

14.- Resuelve la ecuación siguiente e indica la solución $\frac{5x-2}{6x+1} = \frac{5x+2}{6x+1}$

a) $x = -1$ b) $x = 0$ c) $x = 1$ d) $x = -3$ e) $x = 3$

15.- Señala la solución de la ecuación $\frac{2x}{3} + \frac{3x}{5} = \frac{9x}{15} + 40$

a) $x = 10$ b) $x = 20$ c) $x = -10$ d) $x = 60$ e) $x = 13$

16.- Resuelve la ecuación $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} - \frac{x+3}{2} = 0$ e indica la solución

a) $x = 1$ b) $x = 5$ c) $x = -5$ d) $x = 10$ e) $x = -10$

17.- Resuelve la ecuación $5\left(3 + \frac{1}{5}x\right) = 14\left(x - \frac{1}{7}\right)$ e indica la solución

a) $x = -1$ b) $x = \frac{1}{2}$ c) $x = 1$ d) $x = -\frac{1}{2}$ e) $x = 0$

18.- Resuelve la ecuación $\frac{2x+3}{3} + \frac{3x-4}{6} = \frac{x-2}{2}$ e indica la solución

a) $x = 2$ b) $x = -2$ c) $x = 1$ d) $x = -1$ e) $x = 4$

19.- ¿Qué interés producen 12, 000.00 euros, en tres años, colocados al 5% anual sin invertir interés?

a). 1,800.00 **b). 600.00** c). 1,200.00 d). 1,800.00

20.- Un CD de música es de 17.25 euros, pero la tienda hace un descuento del 20%. ¿Cuánto costará el CD?

a). 20.25 € **b). 13.8 €** c). 13.26 € d). 43.00 €

21.- Una camiseta cuesta 18 euros ya con el 20% de descuento, ¿cuánto costaba antes de ser rebajada?

a). 22.5 € b). 19.6 € c). 32.5 € d). 26.0 €

22.- Despeja la variable q, de la siguiente expresión: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$

a). $q=\frac{f}{p-f}$ b). $q=-\frac{pf}{p-f}$ **c)**. $q=\frac{pf}{p-f}$ d). $q=\frac{pf}{p+f}$

23.- El impuesto recaudado por el gobierno sobre venta de un auto nuevo es directamente proporcional al precio de venta del auto. Si un auto de $150,000 paga $1,750 de impuesto sobre ventas. ¿Cuál es el precio de venta de un coche nuevo que tiene un impuesto sobre ventas de $3 500?

a). $ 225,000.00 **b). $ 300,000.00** c). $ 350,000.00 d).$ 200,000.00

24.- Despeja la variable C, de la siguiente expresión: $F=\frac{9}{5}C+32$

a). $C=\frac{9}{5}(F+32)$ b). $C=\frac{5}{9}(F+32)$ **c)**. $C=\frac{5}{9}(F-32)$ d). $C=\frac{9}{5}(F-32)$

25.- Resuelve la ecuación: 2(x+1) +3(x−2) = x + 3.

a). $\mathbf{7/4}$ b). $-7/4$ c). $4/7$ d). $6/7$

UNIDAD 4

Sistemas de ecuaciones lineales

Propósito:

Al finalizar el alumno:

1. Será capaz de modelar y resolver situaciones problemáticas que conduzcan a sistemas de ecuaciones lineales de orden 2x2 y 3x3.

2. Utilizar la representación algebraica como un sistema de símbolos útiles en la resolución de situaciones problemáticas.

Aprendizajes:

Ante un problema que potencialmente lleve a una ecuación con dos variables, el alumno comprende que existe una infinidad de soluciones que satisfacen la condición.

Temática:

- Solución de una ecuación lineal con dos variables.
- Representación tabular de las soluciones a un problema con dos variables que satisfacen una sola condición.

Resuelve los siguientes problemas:

1.- Marco tiene dos cuentas de Banco y, en total, la suma depositada en ellas es $10 000.00. Si nombramos la cantidad de dinero depositada en el Banco A como x y a la cantidad de dinero depositada en el Banco B con la letra y, Determina: El modelo matemático que representa la cantidad de dinero ahorrada por Marco en ambas cuentas de Banco.

a)	b)	c)	d)
$x+y=10\,000$	.$x+y=-10\,000$	$x-y=10\,000$	$x+y=1\,000$

2.- Luisa tiene dos cuentas de Banco y, en total, la suma depositada en ellas es $10 000.00. Si nombramos la cantidad de dinero depositada en el Banco **A** como **x** y a la cantidad de dinero depositada en el Banco **B** con la letra **y**, Determina la cantidad de dinero ahorrado por Luisa en el Banco B, si en el Banco A tiene ahorrado $10,000.00.

a)	b)	**c)**	d)
$x=0$	.$y=10\,000$	$y=0$	$x=20\,000$

3.- Doña Adriana tiene dos cuentas de Banco y, en total, la suma depositada en ellas es $30 000.00. Si nombramos la cantidad de dinero depositada en el Banco **A** como **x** y a la cantidad de dinero depositada en el Banco **B** con la letra **y**. Determina la cantidad de dinero ahorrado por Doña Adriana en el Banco A, si en el Banco B tiene ahorrado $3,000.00.

a)	**b)**	c)	**d)**
$x=13\,000$	.$y=23\,000$	$y=27\,000$	$x=27\,000$

3.- Don Andrés tiene dos cuentas de Banco y, en total, la suma depositada en ellas es $12 000.00. Si nombramos la cantidad de dinero depositada en el Banco **A** como

x y a la cantidad de dinero depositada en el Banco **B** con la letra **y**. Determina la cantidad de dinero ahorrado por Don Andrés en el Banco A, si en el Banco B tiene ahorrado $1,500.00.

a) $x = 10\,500$ b) $.y = 10\,000$ c) $y = 10\,500$ **d)** $x = 11\,500$

4.- Una solución salina contiene 6% de minerales y se mezclará con el agua de una alberca que contiene 20% de minerales. Indica la ecuación que permite encontrar la cantidad de minerales que se tendrán si se toman x litros de la solución que se mezclarán con y litros de agua de la alberca.

a) $x + y = minerales$ b) $6x + 20y = minerales$ c) $y = 0{,}2x + 0{,}06y$

d) $0{,}06x + 0{,}2y = minerales$ e)0,06 $x - 0{,}2y = 12$

5.- Una solución salina contiene 6% de minerales y se mezclará con el agua de una alberca que contiene 20% de minerales. Si se considera que la alberca contiene 2000 litros, indica la cantidad de minerales que se tendrán si se tienen 1500 litros de agua en la alberca y 500 litros de solución salina

a) $1500 + 500 = minerales$ b) $(0{,}06)500 + (0{,}20)1500 = minerales$

c) $6x + 20y = minerales$ d) $(6)500 + (20)1500 = minerales$ e) 500

6.- Una solución salina contiene 6% de minerales y se mezclará con el agua de una alberca que contiene 20% de minerales. Si la alberca contiene 2 000 litros señala el par de coordenadas (x, y) que satisfacen la condición anterior,

$x \approx litros\ de\ solución\ con\ 6\%\ de\ minerales,$

$y \approx litros\ del\ agua\ de\ alberca\ con\ 20\%\ de\ minerales$

a) $(300, 1200)$ y $(-200, 2200)$ b) $(-200, 2200)$ y $(300, 700)$ c) $(50, 1950)$ y $(6, 1994)$

d) $(300, 1200)$ y $(20, 1980)$ e) $(200, 1800)$ y $(300, 700)$

7.- Una solución salina contiene 6% de minerales y se mezclará con el agua de una alberca que contiene 20% de minerales. Indica la cantidad de minerales que se tendrán en las parejas $(300, 1\,200)$ y $(80, 1\,920)$

a) $258\ \ y\ 388.8$ b) $258.8\ y\ 300$ c) $0\ y\ \ 0.2$ d) $400\ \ y\ \ 200$ e) $0588\ y\ 220$

Aprendizajes:

- Grafica las soluciones a un problema con dos variables e identifica el patrón geométrico que siguen las representaciones gráficas de las ecuaciones y su utilidad.
- Expresa algebraicamente las coordenadas de las soluciones a un problema con dos variables y una sola condición.
- Con el conocimiento anterior, el alumno resuelve gráficamente un problema que potencialmente lleve a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, aplicando la heurística de tratar cada una de las condiciones por separado.

Temática:

- Exploración gráfica de las soluciones a un problema con dos variables que deben satisfacer una sola condición.
- Las coordenadas como expresión general de los puntos que perteneces a la recta que representa las soluciones de un problema que lleva a una ecuación lineal con dos variables y que se reduce a la forma: ax+by=c

Resuelve los siguientes ejercicios

Indica si el punto dado es o no una solución del sistema de ecuaciones.

1.- $\begin{array}{rrcr} 3x & -4y & = & -19 \\ x & +2y & = & 5 \end{array} : (-1, 4)$

Sí ( )
No ( )

2.- $\begin{array}{rrcr} x & +y & = & 8 \\ x & -y & = & 2 \end{array} : (-2, 10)$

Sí ( )
No ( )

3.- $\begin{array}{rrcr} 2x & -y & = & 4 \\ x & +2y & = & -8 \end{array} : (4, -2)$

Sí ( )
No ( )

4.- $\begin{array}{rrcr} 3x & -2y & = & -5 \\ x & +3y & = & -9 \end{array} : (-3, -2)$

Sí ( )
No ( )

5.- $\begin{array}{ccc} 3x & -4y & = -19 \\ x & +2y & = 5 \end{array} : (-1, 4)$

Sí ( )
No ( )

6.- $\begin{array}{ccc} x & -5y & = 13 \\ 2x & +3y & = 0 \end{array} : (3, -2)$

Sí ( )
No ( )

7.- $\begin{array}{ccc} 4x & -y & = -6 \\ 2x & -3y & = 8 \end{array} : (1, -2)$

Sí ( )
No ( )

8.- $\begin{array}{ccc} 5x & -y & = -16 \\ 8x & +3y & = 21 \end{array} : (-3, 1)$

Sí ( )
No ( )

9.- En una tienda de ropa, Andrés pagó $190.00 por una playera y un pantalón, mientras que Alexis $400.00 por dos playeras y tres pantalones. ¿Cuánto cuesta cada pantalón y cada camisa? Plantea cada condición, Grafica las dos condiciones y encuentra las coordenadas de intersección y responde la pregunta. Suponer que x es el número de playeras y y el número de pantalones.

Solución: x=170; y=20

10.- Un boleto de entrada a cierto lugar cuesta $3.50 a los estudiantes y $6.00 a los adultos. Se vendieron 500 boletos en total, y se recaudó $2,545.00 ¿Cuántos adultos asistieron?

a).	b).	c).	d).
adultos: 318	adultos: 182	adultos: 320	adultos: 200

Aprendizajes:

- Resuelve algebraicamente problemas que lleven a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.

Temática:
Solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables por los métodos de:

- Igualación.
- Sustitución.

1.- Encuentra el precio y la cantidad de equilibrio de las rectas demanda y oferta siguientes utiliza el método se igualación y sustitución. Comprueba tus respuestas:

$$\begin{aligned} (D) \quad 2p + 3x &= 100 \\ (O) \quad p &= \frac{1}{10}x + 2 \end{aligned}$$

Solución: x= 30; p= 5

2.- Encuentra el precio y la cantidad de equilibrio de las rectas demanda y oferta siguientes utiliza el método se igualación y sustitución. Comprueba tus respuestas:

$$\begin{aligned} (D) \quad 4p + x &= 50 \\ (O) \quad 6p - 5x &= 10 \end{aligned}$$

Solución: x=10; p=10

3.- Encuentra el precio y cantidad de equilibrio, mediante los métodos de sustitución e igualación. Comprueba tus resultados. Solución: x= 200 , p= 3 000

$$\begin{aligned} (D) \quad 300x + 180p &= 600\,000 \\ (O) \quad 300x - 40p &= -60\,000 \end{aligned}$$

4.- Encuentra el precio y la cantidad de equilibrio por los métodos de sustitución e igualación y comprueba tus resultados.

$$\begin{aligned} (O) \quad 5x - 400p &= -2\,000 \\ (D) \quad 5x + 100p &= 17\,000 \end{aligned}$$

Solución: x= 2 640, p= 38.

5.- Resuelve por igualación:

$$\begin{cases} \mathbf{5x - 2y = 2} \\ \mathbf{x + 2y = 2} \end{cases} \quad \textit{Solución}: \; x = \frac{2}{3} \; ; \; y = \frac{2}{3}$$

6.- Resuelve por sustitución:

$$\begin{cases} 5x - y = 3 \\ -2x + 4y = -12 \end{cases}$$

Solución: x =0 ; y = 3

5.- Resuelve por sustitución:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ 2x - 3y = -9 \end{cases}$$

6.- Resuelve por igualación:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 2 \\ 6x + 5y = 1 \end{cases}$$

Solución: 5) x =0 ; y =3 6) x = -1/4, y = 1/2

7.- Resuelve los siguientes sistemas por el método que consideres más conveniente:

a) $\begin{cases} 4x - y = -9 \\ 2x + 2y = -2 \end{cases}$ Solución: a) x =2 ; y =1

b) $\begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ -10x + 8y = -6 \end{cases}$ Solución: b) El sistema tiene infinitas soluciones.

8.- Resuelve este sistema de ecuaciones por el método que tu elijas.

$\begin{cases} \dfrac{2(x+1)}{3} - y = -3 \\ 3(x + 5 - y) + 3x = 12 \end{cases}$ Solución: x = 2; y = 5

9.- Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución e igualación.

a)

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{2} + \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{11}{6} \\ -\dfrac{2x}{5} + \dfrac{y-1}{10} = -\dfrac{6}{5} \end{cases}$$

Sol. x=8, y=1

b)

$$\begin{aligned} m &= 3n - 22 \\ 2m &+ 7n = 60 \end{aligned}$$

m=2, n=8

Aprendizajes:

- Comprende el concepto de sistemas equivalentes de ecuaciones lineales en el caso de sistemas lineales 3x3.
- Obtiene sistemas equivalentes de ecuaciones lineales.

Temática:

- Sistemas equivalentes de ecuaciones.
- El método de suma o resta y la multiplicación de una de las ecuaciones por un escalar para obtener sistemas de ecuaciones equivalentes a partir de un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 y 3x3.

1.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones equivalentes por cualquier método (igualación o sustitución) y comprueba que tienen la misma solución.

a). $\begin{array}{cccc} x & + & y & = 1 \\ x & - & 3y & = -7 \end{array}$ b). $\begin{array}{cccc} -x & - & y & = -1 \\ x & - & 3y & = -7 \end{array}$ c). $\begin{array}{cccc} -x & - & y & = -1 \\ & - & 4y & = -8 \end{array}$

Solución: x= -1, y= 2.

2.- Obtener un sistema equivalente de ecuaciones lineales al sistema dado mediante el intercambio de ecuaciones y resolver ambos por el método que consideres para comprobar que tienen la misma solución.

a) Ordenando el sistema: Sistema equivalente:

$\begin{array}{cccc} x & = 2y & - 3 & \\ -3y & +2 & & = x \end{array}$

Solución: x= -1, y= 1.

b) Ordenando el sistema: Sistema equivalente:

$\begin{array}{cccc} 2x & = y & + 14 \\ 2x = & -3y & -26 \end{array}$

Solución: x= $\frac{17}{2}$, y= 3.

3.- Obtener un sistema equivalente de ecuaciones lineales al sistema dado mediante la multiplicación o división de la ecuación uno por un número (escalar) diferente de cero y resolver ambos por el método que consideres para comprobar que tienen la misma solución.

a) Multiplicando el primer renglón por un número cualquiera: Sistema equivalente:

$\begin{array}{cccc} 2x & -2y & = & 30 \\ x & +2y & = & 0 \end{array}$

$\begin{array}{ccccc} \_\_\, x & - & \_\_\_\, y & = & \_\_\_ \\ x & & +2y & = 0 & \end{array}$

Solución: x= 10, y= -5.

4.- Encuentra el sistema equivalente a $4x - 6y = -10$

$8x + 18y = 70$

a) $8x - 2y = -10$

$8x + 18y = -10$

b) $8x - 12y = 20$

$8x + 18y = 70$

c)) $8x - 2y = 44$

$8x - 12y = -10$

d) $8x - 2y = 44$

$8x + 36y = 140$

e) $8x - 2y = 44$

$8 + 18y = 70$

5.- Encuentra el sistema equivalente a $3x + 2y = 7$

$3x + y = 5$

a) $3x - 2y = 7$

$3x + y = 5$

b) $3x + 2y = 7$

$-3x + y = 5$

c) $3x + 2y = 7$

$-3x - y = -10$

d) $8x - 2y = 44$

$8x + 36y = 140$

e) $3x + 2y = 7$

$-3x - y = -5$

6.- Encuentra el sistema equivalente al formado por $a - b = 27$ y $a + b = 33$

a) $a + b = -10$

$a - b = -10$

b) $a - b = 27$

$2a + 2b = 33$

c) $8a - 8b = 44$

$8a - 8b = -10$

d) $a - b = 27$

$-a - b = -33$

e) $3a + 3b = 27$

$3a - 3b = 33$

7.- Encuentra la solución al sistema equivalente al formado por $a - b = 27$ y $a + b = 33$

a) $a = 3, b = 3$

b) $a = 30,\ b = 3$

c) $a = -30, b = -30$

d) $a = -30, b = -3$

e) $a = -3, b = 3$

8.- Encuentra el sistema equivalente a $x + y + z = 6$

$x + 2y + z = 8$

$x + y + 2z = 9$

a) $2x + 2y + 2z = 12$

$-x - 2y - z = -8$

$-x - y - 2z = -9$

b) $3x + 3y + z = 6$

$x + 2y + z = 16$

$x + y + 2z = 9$

c) $8x - 8y + 4z = 44$

$x + 2y + z = 16$

$x + y + 2z = 9$

d) $2x + 2y + 2z = 0$

e) $2x + 2y + 2z = 12$

$-x - 2y - z = -1$ $\qquad$ $-x - 2y - z = -8$

$-x - y - 2z = -9$ $\qquad$ $-x - y - 2z = 0$

9.- Indica el sistema equivalente a

$$x + y + z = 6$$
$$x + y + 3z = 2$$
$$x + 2y + 2z = 9$$

a) $2x + 2y + 2z = 12$, $x + 2y + z = 16$, $x + y + 2z = 9$

b) $3x + 3y + z = 6$, $-x - 2y - z = -8$, $-x - y - 2z = -9$

c) $x + y + z = 6$, $-2z = -4$, $-y - z = -3$

d) $2x + 2y + 2z = 10$, $-x - 2y - z = -1$, $-x - y - 2z = -9$

e) $2x + 2y + 2z = 12$, $-x - 2y - z = -8$, $-x - y - 2z = 1$

10.- En una granja hay gallinas y conejos, 34 animales en total, y sus patas suman 96. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay?

a).	b).	c).	d).
gallinas: 20	gallinas: 14	gallinas: 13	gallinas: 21
conejos: 14	Conejos: 20	conejos: 21	conejos: 13

Aprendizajes:

- Resuelve sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y 3x3 a través de obtener un sistema triangular equivalente de ecuaciones.
- Resuelve problemas en diversos contextos empleando los métodos algebraicos vistos con anterioridad.

Temática:

- Transformación de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 o 3x3 a un sistema triangular equivalente de ecuaciones.
- Problemas de aplicación.

1.- Una botella y su tapón cuestan ambos 110 pesos. La botella cuesta 100 pesos más que el tapón. ¿cuánto cuesta cada artículo por separado?

Solución:
Si
x= costo de la botella
y= costo del tapón

$$x + y = 110$$
$$x = 100 + y$$

Resolviendo:

x=$105.00
y=$5.00

2.- No se quitaban los años, pero hacían lo posible para que no fuera fácil para que no fuera fácil saber sus edades:
Emiliano dice tener el triple de años que Isabel, pero dentro de dos años Emiliano sólo doblará la edad de Isabel. ¿Cuántos años tiene cada uno?

Solución:

Si
x= la edad actual de Isabel
y= la edad actual de Emiliano

$$y = 3x$$
$$y + 2 = 2(x + 2)$$

Resolviendo:

x= 2 años
y= 6 años

3.- Analiza los siguientes sistemas de ecuaciones e indica sus soluciones, si es que existen.

a)
$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 6 \\ 2x & - & y & = & 0 \end{array}$$

Sol. (2,4)

b)
$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 10 \\ x & + & y & = & 1 \end{array}$$

No tiene solución

b)
$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 4 \\ 2x & + & 2y & = & 8 \end{array}$$

Infinitas soluciones

4.- Encuentra el precio y la cantidad de equilibrio de las rectas demanda y oferta siguientes utiliza el método se igualación y sustitución y comprueba tus respuestas.

a). $\begin{matrix} (D) & 2p + 3x & = 100 \\ (O) & p & = \frac{1}{10}x + 2 \end{matrix}$ Solución: x= 30; p= 5

b) $\begin{matrix} (D) & 4p + x & = 50 \\ (O) & 6p - 5x & = 10 \end{matrix}$ Solución: x=10; p=10

5.- A un precio de $2,400.00, la oferta de cierto artículo es de 120 unidades, mientras que la demanda es de 560 unidades. Si el precio se eleva a $2,700.00 por unidad, la oferta y la demanda serán de 160 unidades y 380 unidades, respectivamente.

a) Determina las ecuaciones de la oferta y la demanda.

Sol. $\begin{matrix} (D) & 300x + 180p & = 600\,000 \\ (O) & 300x - 40p & = -60\,000 \end{matrix}$

b). Encuentra el precio y cantidad de equilibrio, mediante los métodos gráfico, sustitución e igualación. Comprueba tus resultados. Solución: x= 200 , p= 3 000

6.- Un fabricante puede ofrecer 2 000 pares de zapatos al mes a un precio de $30.00 por par de zapatos, mientras que la demanda es de 2 800 pares. A un precio de $35.00 el par, puede ofrecer 400 pares más. Sin embargo, con este incremento de precio la demanda se reduce en 100 pares.

a). Suponiendo relaciones lineales, determina las relaciones de demanda y oferta.

Solución: $\begin{matrix} (O) & 5x - 400p & = -2\,000 \\ (D) & 5x + 100p & = 17\,000 \end{matrix}$

b). Encuentra el precio y la cantidad de equilibrio, por los métodos de sustitución e igualación y comprueba tus resultados. Solución: x= 2 640, p= 38.

7.-. En una fábrica hay tres máquinas: A, B y C. Cuando las tres están trabajando, producen 222 trajes por día. Si A y B trabajan, pero C no, producen 159 por día. Si B y C trabajan, pero A no, producen 147 trajes por día. ¿Cuál es la producción diaria de cada máquina?.

a). 75, 84, 63 b). 63, 84, 75 c). 84, 75, 63 d).75, 63, 84

8.- Resuelve el siguiente sistema por el método de triangulación:

$$\begin{array}{rrrcr} 2x & -y & +2z & = & -8 \\ x & +2y & -3z & = & 9 \\ 3x & -y & -4z & = & 3 \end{array}$$

a). -1, 2, -2 b). 2, 1, -2 c). 1, 2, -2 d).-1, -2, 2

9. Un comerciante vende alimento para animales domésticos. Tiene dos clases de productos de alimento para perro: La marca Perrito se vende a $35.00 el kilogramo, mientras que el kilogramo de alimento Sabueso se vende a $18.00. Los clientes no compran el producto Perrito, por caro, ni el producto Sabueso por barato, por considerar que es de baja calidad. Por lo anterior, se le ocurre hacer una mezcla de ambos que pueda vender a $27.00 el kg, y nos pregunta qué cantidades debe tomar, por kg de cada producto?

a). Producto perrito**:** $\boldsymbol{\frac{9}{17}\,/kg}$ Producto Sabueso: $\boldsymbol{{}^{8}/_{17}\,/kg}$

b). Producto perrito: $\frac{8}{17}\,/kg$ Producto Sabueso: ${}^{9}/_{17}\,/kg$

c). Producto perrito: $\frac{7}{17}\,/kg$ Producto Sabueso: ${}^{10}/_{17}\,/kg$

d). Producto perrito: $\frac{10}{17}\,/kg$ Producto Sabueso: ${}^{7}/_{17}\,/kg$

10.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de triangulación y comprueba tu solución sustituyendo los resultados en cada una de las ecuaciones originales.

a). $\begin{array}{rrcr} -2x & +\ p & = & -\ 290 \\ x & +\ p & = & 250 \end{array}$

Solución: x= 180 y= 70

b). $\begin{array}{rrcr} x & +\ y & = & 0 \\ 2x & -\ y & = & 12 \end{array}$

Solución: x= 4 y= -4

c). $\begin{array}{rrrr} 3x & -y & = & -\ 10 \\ y & = 5x & + & 12 \end{array}$

Solución: x= -1 y= 7

d). $\begin{array}{rrrr} x & = 2y & - & 3 \\ -3y & +\ 2 & = & x \end{array}$

Solución: x= -1 y= 1

e). $\begin{array}{rrcr} x & -2\ y & = & -2 \\ 2x & +4y & = & 12 \end{array}$

Solución: x= 2 y= 2

f). $\begin{array}{rrcr} 2x & -2y & = & 30 \\ x & +\ 2y & = & 0 \end{array}$

Solución: x= 10 y= -5

g). $\begin{array}{rrcr} 2x & -\ 4y & = & -\ 6 \\ -7x & +\ y & = & -18 \end{array}$

Solución: x= 3 y= 3

h). $\begin{array}{rcrr} 2x & = & y & +\ 14 \\ 2x & = & -3y & -\ 26 \end{array}$

Solución: x= 2 y= -10

i). $\begin{array}{rrrcr} 3x & -2y & +z & = & -1 \\ x & -2y & +3z & = & 1 \\ & 6y & -2z & = & 4 \end{array}$

Solución: x=0, y=1, z= 1

j). $\begin{array}{rrrcr} x & +2y & +2z & = & 11 \\ 2x & +y & +z & = & 7 \\ 3x & +4y & +z & = & 14 \end{array}$

Solución: x=1, y=2, z= 3

k). $\begin{array}{rrrcr} x & +3y & +4z & = & 14 \\ x & +2y & +z & = & 7 \\ 2x & +y & +2z & = & 2 \end{array}$

Solución: x= -2, y= 4, z= 1

l). $\begin{array}{rrrcr} x & +4y & +3z & = & 17 \\ 3x & +3y & +z & = & 16 \\ 2x & +2y & +z & = & 11 \end{array}$

Solución: x=2, y=3, z=1

m). $\begin{array}{rrrcl} 3x & -2y & +z & = & 2 \\ 2x & +3y & -z & = & 5 \\ x & +y & +z & = & 6 \end{array}$

Solución: x= 1, y= 2, z= 3

n). $\begin{array}{rrrcl} 2x & +y & +z & = & 16 \\ x & +2y & +z & = & 9 \\ x & +y & +2z & = & 3 \end{array}$

Solución: x= 9, y= 2, z=-4

o). $\begin{array}{rrrcl} x & -2y & +3z & = & 2 \\ 2x & -3y & +z & = & 1 \\ 3x & -y & +2z & = & 9 \end{array}$

Solución: x= 3, y= 2, z=1

p). $\begin{array}{rrrcl} 3x & +2y & -z & = & 20 \\ 2x & +3y & +6z & = & 70 \\ x & -y & +6z & = & 41 \end{array}$

Solución: x= 5, y= 6, z=7

q). $\begin{array}{rrrcl} 2x & -y & +z & = & 3 \\ x & +3y & -2z & = & 11 \\ 3x & -2y & +4z & = & 1 \end{array}$

Solución: x=3, y=2, z=-1

r). $\begin{array}{rrrcl} 2x & -y & +2z & = & -8 \\ x & +2y & -3z & = & 9 \\ 3x & -y & -4z & = & 3 \end{array}$

Solución: x=-1, y=2, z= -2

11.- Averigua cuántas soluciones tiene el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de triangulación.

$$\begin{cases} -x+y=5 \\ -2x+2y=2 \end{cases}$$

Solución: Son paralelas. El sistema no tiene solución.

12.-El perímetro de un terreno rectangular es de 300, si el largo mide 30 m más que el ancho, encuentra las dimensiones del terreno.

a)$largo = 30\ m, ancho = 120\ m$ b)$largo = 90\ m, ancho = 60\ m$

c)$largo = 45\ m, ancho = 105\ m$ d)$largo = 50\ m, ancho = 100\ m$

a)$largo = 60\ m, ancho = 90\ m$

13.- Dos llaves de agua abiertas al mismo tiempo, llenan un tanque en 4 horas. Ambas llaves permanecen abiertas 2 horas, para después cerrar la primera y a razón de ello, la segunda debe permanecer 3 horas abierta para llenar el tanque, ¿Cuánto tarda cada llave en llenar el tanque por sí sola cada una?

a) $10\ hrs\ y\ 5\ hrs$ b) $7\ hrs\ y\ 14\ hrs$ c) $8\ hrs\ y\ 16\ hrs$

d) $9\ hrs\ y\ 4\ hrs$ e)$12\ hrs\ y\ 6\ hrs$

14.- Hallar dos números cuya suma es 169 y su cociente es 12.

a) $112\ y\ 57$ b) $100\ y\ 69$ c) $150\ y\ 19$ d) $156\ y\ 13$ e) $143\ y\ 27$

15.- Un capital de inversión está dividido en tres partes y se distribuye en tres planes que otorgan 3%, 4% y 5% de interés anual cada uno. Pasados 3 años, se tiene que las ganancias de las inversiones a 3% y 4% de interés anual suman $ 2,790, mientras que si se juntan las ganancias de las inversiones al 3% y 5% se tienen $3,300. La suma de las ganancias de las inversiones al 4% y 5% es de $3,390. ¿Cuánto fue el capital invertido en cada plan?

a)$15000, 10000\ y\ 20000$ b) $1500, 1000\ y\ 200$ c) $15000, 12000\ y\ 13000$

a)$5000, 1000\ y\ 2000$ b) $1000, 7000\ y\ 200$

16.- Tres personas pueden hacer un trabajo en 3 días si trabajan juntas. Si únicamente trabajan la primera y la segunda terminarán el trabajo en $\frac{16}{5}$ de día, mientras la segunda y la tercera se llevarán 12 días. ¿cuántos días utilizará cada persona en terminar el trabajo si lo realiza sola?

a)$4\ días, 16\ días\ y\ 48\ días$ $b)3\ días, 10\ días\ y\ 2\ días$ c) $5\ días,\ \ 5\ días\ y\ 30\ días$

d) $8\ días,\ \ 2\ días\ y\ \ 20\ días$ e)$2\ días,\ \ 8\ días\ y\ 5\ días$

Tabla de especificaciones

De acuerdo al propósito general de la **unidad 1: el significado de los números y operaciones básicas**:

Al finalizar el alumno será capaz de:

- Operar con los números racionales (enteros y no enteros) y resolver problemas aritméticos, aplicando algunas heurísticas para facilitar la comprensión, la búsqueda de un plan de resolución y su ejecución, con la finalidad de que haga suyos los recursos básicos para iniciarse en el uso del lenguaje algebraico para expresar la generalidad.

Desde esta perspectiva, consideramos que los aprendizajes que pueden ser susceptibles para corroborar que se cumpla son:

Clave	Aprendizaje
1.3	Opera correctamente con los números racionales (enteros y no enteros), en los casos de una sola operación y una secuencia de operaciones.
1.5	Traduce relaciones contextuales en operaciones entre números racionales (enteros y no enteros) y las resolverá correctamente.
1.6	Resuelve problemas aritméticos que involucren una secuencia de relaciones contextuales, auxiliándose de estrategias heurísticas en las etapas de comprensión, elaboración de un plan y su ejecución.

De acuerdo al propósito general de la **unidad 2: Variación directamente proporcional y funciones lineales**:

Al finalizar el alumno será capaz de:

- Modelar y analizar situaciones que involucren la variación entre dos cantidades en los casos en que la razón de sus incrementos sean proporcionales; utilizando los registros tabular, gráfico y algebraico, con la finalidad de que se inicie en el estudio de la variación, la idea de relación funcional, sus conceptos asociados y, continúe la comprensión del lenguaje algebraico como la representación de la generalidad.

Desde esta perspectiva, consideramos que los aprendizajes que pueden ser susceptibles para evaluar son:

Clave	Aprendizaje
2.2	Dada una situación donde existe variación entre dos cantidades, el alumno identifica los elementos que corresponden a los conceptos de variable independiente y dependiente, razón de cambio y su cálculo dado un incremento de la variable independiente.

2.5	Representa algebraicamente la variación directamente proporcional entre dos cantidades y obtener a partir de ella información sobre ésta.
2.8	Dada una variación que se modela con una función lineal, el alumno calcule estados específicos de variación, su rapidez de cambio y estado inicial empleando sus representaciones gráfica y analítica.

De acuerdo al propósito general de la **unidad 3: Ecuaciones de primer grado con una incógnita** que dice:

Al finalizar el alumno será capaz de:

- Será capaz de modelar y resolver situaciones problemáticas que conduzcan a una ecuación de primer grado con una incógnita.
- Aplicará los conocimientos adquiridos en la manipulación algebraica del modelo, con la finalidad de que la representación algebraica sea una herramienta en la resolución de tales situaciones.

Desde esta perspectiva, consideramos que los aprendizajes que pueden ser susceptibles para evaluar porque engloban los propósitos son:

Clave	Aprendizaje
3.1	Comprende el concepto de "ecuación" en el contexto de la resolución de problemas y lo expresa en el lenguaje algebraico.
3.2	Una vez expresada algebraicamente la condición que satisface la incógnita de un problema, el alumno la utiliza para resolverlo, empleando las reglas de transposición o las propiedades de la igualdad.

De acuerdo al propósito general de la **unidad 4: Sistemas de ecuaciones lineales** que dice:

Al finalizar el alumno será capaz de:

- Será capaz de modelar y resolver situaciones problemáticas que conduzcan a sistemas de ecuaciones lineales de orden 2x2 y 3x3.
- Utilizar la representación algebraica como un sistema de símbolos útiles en la resolución de situaciones problemáticas.

Desde esta perspectiva, consideramos que los aprendizajes que pueden ser susceptibles para evaluar porque engloban los propósitos son:

Clave	Aprendizaje
4.5	Resuelve algebraicamente problemas que lleven a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.
4.7	Obtiene sistemas equivalentes de ecuaciones lineales.
4.9	Resuelve problemas en diversos contextos empleando los métodos algebraicos vistos con anterioridad.

Unidad	**Aprendizaje**	**Nivel**	**Niveles de conocimiento**						**número**
			Conocimiento	comprensión	aplicación	análisis	síntesis	evaluación	
1	1.3	3			✓				2
	1.5	3, 4			✓	✓			2
	1.6	3			✓				1
2	2.2	3			✓				2
	2.5	2		✓					2
	2.8	3			✓				2
3	3.1	3			✓				1
	3.2	3			✓				2
4	4.7	4				✓			1
	4.9	4				✓			1
Total de reactivos									**16**

Nivel de conocimientos de acuerdo a Bloom.

El nivel, tiene que ver con el grado de complejidad. Esto se valora en el puntaje de los reactivos. Así, Un reactivo nivel dos de comprensión, se le asigna un puntaje de 0.5, mientras que uno de nivel 3, se le asignan 2 puntos. Cabe aclarar que todo este proceso es subjetivo, dado que depende del criterio de quién lo realiza. No cabe duda que la experiencia y el criterio del profesor es lo más importante en el proceso de la evaluación. Existen tablas que aplican porcentajes para dar importancia a determinados aprendizajes y también son válidas, siempre y cuando no se caiga en la tentación de que la acreditación quede exclusivamente determinada al resultado del examen.

De acuerdo a lo anterior, y siguiendo con los lineamientos establecidos en el Protocolo de equivalencias, se presentan tres exámenes realizados con los reactivos y elaborados con una tabla de especificaciones, pero debemos aclarar que cada profesor debe valorar, según su criterio, qué aprendizajes debe evaluar y en qué nivel de aprendizaje. Hay muchos criterios y todos son válidos. Lo que se recomienda es que las instrucciones deben ser claras y precisas, teniendo en mente que el examen representa solo una parte de la evaluación y no debe considerarse como la única forma de acreditación. Lo que nos muestra un examen es que el alumno supo las respuestas que le preguntamos, pero lo anterior no es definitivo para afirmar que el alumno ya domina cierto tema.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MODELO DE EXAMEN MATEMÁTICAS I

Examen **tipo 1** Gpo:_______

Nombre: ____________________________

Instrucciones: Lee con atención y contesta lo que se pide. Anexa a tu examen los cálculos que realizaste de manera limpia y ordenada, numerando la pregunta.

Simplifica las siguientes operaciones:

1). $-\left(-\frac{1}{5}\right)-\frac{3}{25}+\frac{3}{25}+\frac{124}{125}$ (1 punto)

a). $\boldsymbol{\frac{149}{125}}$ b). $\frac{126}{125}$ c). $\frac{135}{125}$ d). $-\frac{149}{125}$

2). $\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}+\frac{4-\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{4}}=$ (1 punto)

a). $\frac{14}{2}$ **b).** $\boldsymbol{\frac{9}{2}}$ c). $\frac{5}{2}$ d). $-\frac{9}{2}$

3).- La dieta de la tía Margarita consiste en $2/3$ de taza de queso cottage al día. Si en el refrigerador hay cuatro tazas y media de queso, ¿para cuántos días le alcanzará esa dotación de queso? (1 punto)

a). 3 b). 4 **c). 6** d). 7

4.- Un jardinero termina su trabajo en un edificio en 4 días, mientras que otro lo termina en tres días. ¿Cuánto tiempo utilizarán para arreglar el jardín en el mismo edificio si trabajan juntos? (2 puntos)

a) $\left(2+\frac{1}{2}\right)$días b) 2 días c) $\left(1+\frac{5}{7}\right)$días d) $\left(1+\frac{7}{12}\right)$ e) (3)

días

5).- Si en un patio cerrado tenemos una pareja de conejos recién nacidos y éstos originan una nueva pareja cada mes a partir del segundo, ¿cuántas parejas tendremos al cabo de 5 meses? (1 punto)

a). 3 b). 4 **c). 5** d). 6

6).- Una mezcla química tiene una concentración que contiene 20 g de azufre por 17 g de cloruro de sodio. Encuentra la cantidad de cloruro de sodio que corresponde a 18 g de azufre para mantener la misma concentración. (1 punto)

a) 10 g b) 14,7 g c) 17 g **d) 15,3 g** e) 25 g

7).- Una mezcla química tiene una concentración que contiene 3 g de ácido sulfúrico por 10 g de cadmio. Encuentra la cantidad Ácido sulfúrico que corresponde a 17g de Cadmio para mantener la misma concentración. (1 punto)

a) 1,4 g b) 0,3 g **c) 5,1 g** d) 7 g e) 5 g

8).- Representa el siguiente enunciado como una ecuación. *"El interés simple (**I**) que produce un determinado capital es directamente proporcional al capital inicial (C)*". (0.5 punto)

a) $I - C = 0$ b) $I = kC$ c) $I = \frac{1}{k}C$ d) $IC = k$ e) $C = \frac{1}{k}I$

9).- Representa el siguiente enunciado como una ecuación. "*La distancia (d) de un cuerpo* que *cae es directamente proporcional al tiempo (t) que transcurre cuando cae". (0.5 punto)*

a) $d\ t = k$ b) $t = \frac{1}{k}d$ c) $d = \frac{1}{k}t$ d) $d - t = 0$ e) $d = kt$

10).- Un empleado de una zapatería gana \$30.00 por día más \$5.00 por cada par de zapatos que venda (x), ¿Cuál es el modelo lineal que describe el sueldo (y) por día? (1 punto)

a). $y = 5x + 30$ ok
b). $y = 30x + 5$
c). $y = -5x + 30$
d). $y = 5x - 30$

11).- Un pantalón que se encuentra en promoción tiene un precio de \$450. Si la promoción afirma que se ha aplicado un descuento de 30% sobre el precio original, ¿cuál es entonces la ecuación que describe el precio del pantalón sin descuento? (1 punto)

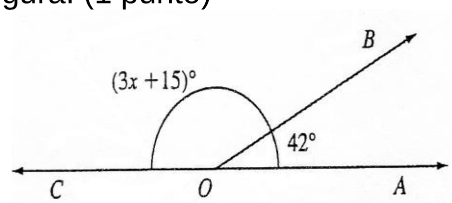
a) $450 = x - 0,3x$ b) $\frac{450}{3} = x$ c) $450 = x + 0,30x$ d) $\frac{450}{3} = x$

e) $450 = \frac{x}{3} + x$

12).- La edad de Alicia es tres veces la edad de Juana. Dentro de 8 años la suma de sus edades será 28 años. ¿Cuáles son sus edades actuales?. Suponga que la edad de Juana es x. (1 punto)

e) $(x + 8) + 3(x + 8) = 28$
f) $(x + 8) + (3x + 8) = 28$ ok
g) $(x + 8) + 8(3x) = 28$
h) $x + 8 + (3x) = 28$

13).- Encuentra el valor de la variable x en la siguiente figura: (1 punto)



e) $x = 17^o$
f) $x = 32^o$
g) $x = 42^o$
h) $x = 41^o$ ok

14).- Resuelve la ecuación $5\left(3+\frac{1}{5}x\right)=14\left(x-\frac{1}{7}\right)$ e indica la solución. (1 punto)

a) $x=-1$ b) $x=\frac{1}{2}$ c) $x=1$ d) $x=-\frac{1}{2}$ e) $x=0$

15).- Resuelve el siguiente sistema por el método de triangulación: (2 puntos)

$$\begin{array}{rrrcr} 2x & -y & +2z & = & -8 \\ x & +2y & -3z & = & 9 \\ 3x & -y & -4z & = & 3 \end{array}$$

a). -1, 2, -2 b). 2, 1, -2 c). 1, 2, -2 d).-1, -2, 2

16).- Un comerciante vende alimento para animales domésticos. Tiene dos clases de productos de alimento para perro: La marca Perrito se vende a $35.00 el kilogramo, mientras que el kilogramo de alimento Sabueso se vende a $18.00. Los clientes no compran el producto Perrito, por caro, ni el producto Sabueso por barato, por considerar que es de baja calidad. Por lo anterior, se le ocurre hacer una mezcla de ambos que pueda vender a $27.00 el kg, y nos pregunta qué cantidades debe tomar, por kg de cada producto? (1 puntos)

a).	b).	c).	d).
Producto perrito**:**	Producto perrito:	Producto perrito:	Producto perrito:
$\boldsymbol{\frac{9}{17}\,/kg}$	$\frac{8}{17}\,/kg$	$\frac{7}{17}\,/kg$	$\frac{10}{17}\,/kg$
Producto Sabueso:	Producto Sabueso:	Producto Sabueso:	Producto Sabueso:
$\boldsymbol{{}^{8}/_{17}\,/kg}$	${}^{9}/_{17}\,/kg$	${}^{10}/_{17}\,/kg$	${}^{7}/_{17}\,/kg$

Elaboró Grupo de trabajo.
Escala de calificación:

1 -9	NA
10-13	6
14-15	8
16-17	10

	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO *EXAMEN MATEMÁTICAS II* Examen **tipo 2** Gpo:_______ Nombre: ___________________________	

Instrucciones: Lee con atención y contesta lo que se pide. Anexa a tu examen los cálculos que realizaste de manera limpia y ordenada, numerando la pregunta.

Simplifica las siguientes operaciones:

1). $-\left(-\frac{1}{5}\right)-\frac{3}{25}+\frac{3}{25}+\frac{124}{125}$ (1 punto)

a). $\boldsymbol{\frac{149}{125}}$ b). $\frac{126}{125}$ c). $\frac{135}{125}$ d). $-\frac{149}{125}$

2). $\dfrac{\frac{2}{3}\div\frac{10}{9}+\frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)-1}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}-\frac{6}{5}\div\frac{2}{3}}=$ (1 punto)

a). 1 **b).** $\boldsymbol{-1}$ c). $\frac{5}{2}$ d). $-\frac{5}{2}$

3).

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{7}{2}-\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{1}{6^2}}\right)^2=$$

(1 punto)

a). $\frac{14}{2}$ b). $\boldsymbol{\frac{49}{18}}$ c). $\frac{5}{2}$ **d).** $\boldsymbol{-\frac{49}{18}}$

4).- En una fábrica de ropa, se le ofrecen a cada costurera \$13.00 por cada 10 piezas en las que realizan ojales. Indica el racional asociado a esta proporción si x representa el número de piezas con ojales realizados, mientras que y representa el dinero que se deberá pagar la fábrica a la costurera. (2 puntos)

a) $y=\frac{10}{13}x$ b) $y=\frac{13}{10}x$ c) $y=\frac{3}{1}x$ d) $y=\frac{1}{3}x$ e) $\frac{13}{10}y=x$

5).- Si en un patio cerrado tenemos una pareja de conejos recién nacidos y éstos originan una nueva pareja cada mes a partir del segundo, ¿cuántas parejas tendremos al cabo de 5 meses? (1 punto) a). 3 b). 4 **c). 5** d). 6

6).- Una amalgama se compone de 2 g de plata por 5 g de Hierro. Encuentra la cantidad de plata si se tienen 18.7 g de Hierro para mantener la misma amalgama. (1 punto)

a) 4,3 g b) 7,2 g c) 7,48 d) 6 g e) 7 g

7).- Un analgésico se prepara con 35 g de Paracetamol y 15 g de Cafeína. ¿Qué cantidad de cafeína se necesita para 2.5 g de Paracetamol si se debe tener la misma composición para este medicamento? (1 punto)

a) 1, 071…g b) 2,05 g c) 3,82 d) 5 g e) 2,5 g

8).- ¿Cuál son las operaciones qué utilizas para resolver lo que se conoce como *regla de tres*? (0.5 puntos)

a) raíz cuadrada b) suma y resta c) multiplicación y división
d) multiplicación y resta e) suma y multiplicación

9).- Una mezcla química contiene 15 g de Cloruro de sodio por 25 g de carbonato. Describe la ecuación asociada para encontrar la cantidad y en gramos de carbonato si se tienen 22 g de cloruro de sodio. (0.5 puntos).

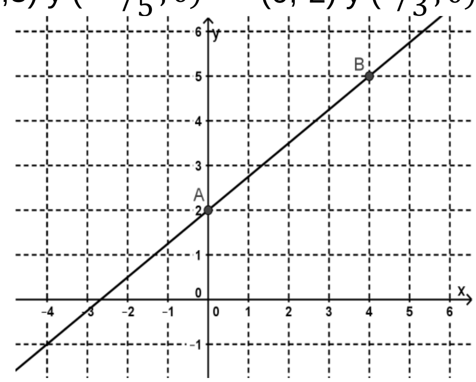
a) $y = \frac{(22)(15)}{x}$ b) $y = \frac{(22)(25)}{15}$ c) $y = \frac{(15)(25)}{22}$ d) $y = \frac{(x)(25)}{15}$ e) $y = \frac{(22)(15)}{20}$

10).- escribe la pendiente de la recta (m) y las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados: $y = 5x + 3$. (1 punto).

a). m=5 (0,2) y $({}^{3}/_{5}, 0)$
b). m=-5 (2,0) y $(-3,0)$
c). m=5 0k (0,3) y $({}^{-3}/_{5}, 0)$
d). m=5 (0,-2) y $({}^{5}/_{3}, 0)$

11).- Con relación a la gráfica adjunta, determina:

a) la ordenada al origen (0.25 puntos)
b) la pendiente (0.25 puntos)
c) la función lineal (0.5 puntos)



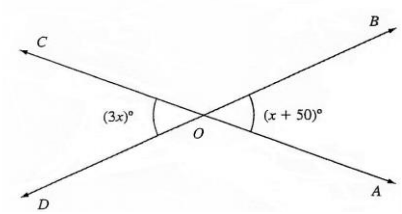
12.- Determina la expresión que resuelve: La suma de tres números impares consecutivos es 69. ¿Cuáles

a). $(2x - 1) + (2x + 1) + (2x + 3) = 69$
b). $(2x - 1) + (2x + 1) + (2x + 2) = 69$
c). $x + (x + 1) + (x + 3) = 69$

son esos números?. Suponga que 2x-1 es el número impar más pequeño. (1 punto)

d). $x + (2x+1) + (3x+2) = 69$

13.- Encuentra el valor de la variable x en la siguiente figura: (1 punto)



(Recuerda que la medida de los lados opuestos por el mismo vértice son iguales)

a) $(3x + 50) = 180$
b) $(3x) + (x + 50) = 180$
c) $3x = x + 50$ ok
d) $(3x) + (x + 15) = -180$

14). Resuelve la ecuación: $x - x(x-2) = 6 + x(-x)$ (1 punto).

a). -2 b). -1 c). 1 **d).** 2

15).- Resuelve el siguiente sistema por el método de triangulación: (2 puntos)

$$\begin{array}{cccc} x & +y & +z & = 4 \\ x & -y & +z & = 0 \\ x & -y & -z & = -2 \end{array}$$

a). -1, 2, -2 b). 2, 1, -2 **c). 1, 2, 1** d).-1, -2, 2

16. En una granja hay gallinas y conejos, 34 animales en total, y sus patas suman 96. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay? (1 punto)

a).	b).	c).	d).
gallinas: 20	gallinas: 14	gallinas: 13	gallinas: 21
conejos: 14	Conejos: 20	conejos: 21	conejos: 13

Elaboró Grupo de trabajo.

Escala de calificación:

1 -9	NA
10-13	6
14-15	8
16-17	10

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EXAMEN MATEMÁTICAS II

Examen **tipo 3** Gpo:_______

Nombre: ___________________________

Instrucciones: Lee con atención y contesta lo que se pide. Anexa a tu examen los cálculos que realizaste de manera limpia y ordenada, numerando la pregunta.

Simplifica las siguientes operaciones:

1). $\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{2}\right)-3\div\frac{2}{5}=$ (1 punto)

a). $\mathbf{-\frac{41}{8}}$ b). $\frac{41}{8}$ c). $\frac{14}{41}$ d). $-\frac{14}{41}$

2). $-\frac{1}{2}-\dfrac{4-\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}{2-\frac{3}{4-\frac{1}{2}}}=$ (1 punto)

a). $-\frac{5}{2}$ **b).** $\mathbf{-\frac{15}{4}}$ c). $\frac{5}{2}$ d). $-\frac{7}{2}$

3). $\dfrac{2^{-2}+2^{-3}}{2^{-4}}=$ (1 punto)

a). -3 b). $\mathbf{3}$ c). -6 **d).** $\mathbf{6}$

4). $-5-\frac{3}{4}\left(-\frac{8}{3}+5\left(\frac{2}{3}-2\right)\right)=$ (1 punto)

a). 3 b). $\mathbf{-2}$ **c). 2** d). $-\frac{2}{3}$

5). Diez toneles de iguales contienen 800 litros de vino, ¿Cuántos toneles son necesarios para almacenar 36,000 litros de vino? (1 punto)

a). 28 litros b). 32 litros c). 40 litros **d). 45 litros**

6). Despeja la variable C, de la siguiente expresión: $F=\frac{9}{5}C+32$ (1 punto) a). $C = \frac{9}{5}(F + 32)$ b). $C = \frac{5}{9}(F + 32)$ **c)**. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ d). $C = \frac{9}{5}(F - 32)$

7). ¿Qué interés producen \$ 150,000.00 en tres años, colocados al 8% anual sin invertir interés? (1 punto)

a). \$ 25,000.00 b). \$ 30,000.00 c). \$ 35,000.00 d**). \$ 36,000.00**

8). Un cliente de un Banco retira el 15% de sus ahorros, recibiendo \$25,500.00 ¿Cuánto dinero tenía en su cuenta? (1 punto)

a). \$ 170,000.00 b). \$ 172,000.00 c). \$ 175,000.00 d). \$ 180,500.00

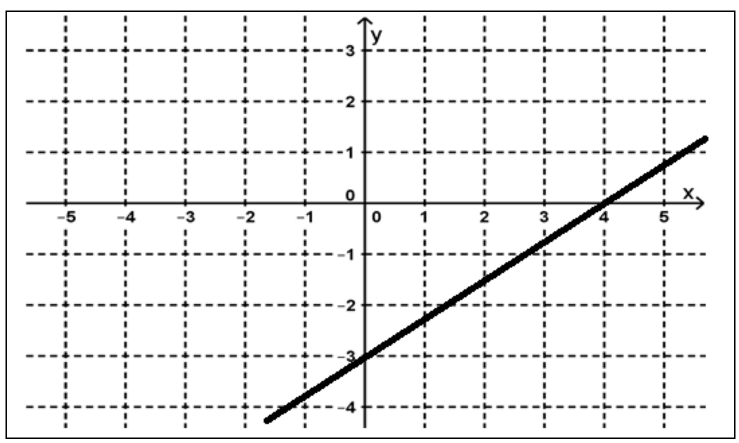
9). Un suéter cuesta \$180.00 ya con el 20% de descuento, ¿cuánto costaba antes de ser rebajada? (1 punto)

a). \$200.00 **b). \$225.00** c). \$250.00 d). \$900.00

10). Un empleado de una zapatería gana \$100.00 al día más \$15.00 adicionales por cada par de zapatos que venda. ¿Cuánto ganaría el empleado si vende 5 pares de zapatos en un día? (1 punto)

a). \$ 150,000.00 **b). \$ 175,000.00** c). \$ 180,000.00 d).\$ 200,000.00

11. Con relación a la gráfica adjunta, determina la ecuación de la recta en la forma y=mx+b. (1 punto).



a). $\boldsymbol{y = \frac{3}{4}x - 3}$

b). $y = \frac{3}{4}x + 4$

c). $y = -\frac{3}{4}x - 3$

d). $y = -\frac{3}{4}x - 4$

12). Resuelve la ecuación: $4x - 5(x + 4) = 6x + 8$ (1 punto).

a). -2 **b). -4** c). 2 d). 4

13). Los obreros A y B trabajando juntos pueden realizar una tarea en 4 días, B y C juntos pueden hacerlo en 3 días y A y C en 2.4 días. Hallar el tiempo que tardaría cada obrero en realizar cada tarea actuando independientemente. (2 puntos).

a). a = 6, b = 12, c = 4 días

b). a = 12, b = 6, c = 4 días

c). a = 4, b = 12, c = 6 días

d). a = 4, b = 6, c = 12 días

14. Resuelve el siguiente sistema por el método de triangulación: (2 puntos)

$$\begin{array}{cccc} x & +y & +z & = & 4 \\ x & -y & +z & = & 0 \\ x & -y & -z & = & -2 \end{array}$$

a). -1, 2, -2 b). 2, 1, -2 **c). 1, 2, 1** d).-1, -2, 2

15. Un boleto de entrada a cierto lugar cuesta \$3.50 a los estudiantes y \$6.00 a los adultos. Se vendieron 500 boletos en total, y se recaudó \$2,545.00 ¿Cuántos adultos asistieron? (2 puntos)

a). adultos: 318

b). adultos: 182

c). adultos: 320

d). adultos: 200

Elaboró Grupo de trabajo.

Escala de calificación:

1 -9	NA
10-13	6
14-16	8
17-18	10