UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL ORIENTE

ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS III
GUÍA PARA EL PROFESOR

AUTORES

Profr. Francisco Javier Rodríguez Pérez

Profra. Leticia Aguilar Pascual

Profr. Ricardo Yadel Murillo Pérez

Profr. Juan Humberto Zendejo Sánchez

Profr. Isidro Marín Romero

Profr. Ivonne Zenteno Canela

Profr. José Luis Hernández Hernández

Profr. María Dolores Martínez Gutiérrez

Prfor. Cristhian Miguel Prieto Villalba

Grupo 401C
2018

I

INTRODUCCIÓN

El curso de Matemáticas III comprende los temas de trigonometría básica y los elementos de la Geometría Analítica en dos dimensiones. Asimismo se tratan los conceptos básicos de la recta, la parábola, la circunferencia y la elipse; así como su ecuación cartesiana correspondiente. En ese orden.

La unidad I corresponde a la trigonometría, cuyo propósito fundamental es utilizar las razones e identidades trigonométricas, así como las leyes de senos y cosenos mediante la resolución de problemas en distintos contextos. Tal vez el alumno ya tuvo un acercamiento anterior a este tema, sin embargo, es importante que el profesor formalice los conceptos de tal manera que los relacione adecuadamente con conceptos de la geometría y con conceptos posteriores.

En el caso de la unidad II, el tema central de la unidad es el de los elementos básicos de la geometría analítica. Recordemos que en el programa de Estudios del Colegio se contempla un análisis de los conocimientos que el alumno ha adquirido en los niveles precedentes. Tanto los programas de Matemáticas I como los de Matemáticas II, se presentan en esta unidad, induciendo en el alumno procesos deductivos, constructivos y analíticos de los conocimientos que ha adquirido. Por tal razón es importante tener presente los conceptos que se han introducido en los cursos anteriores, retomándolos y mostrando al alumno la etapa en la cual ahora se introducirá: la Geometría Analítica. La estrecha relación entre un proceso algebraico y uno geométrico, toma aquí forma, volviéndolo accesible y familiar, del mismo modo que las aplicaciones presentadas buscan un acercamiento a problemas que ha conocido al alumno desde los niveles básicos en matemáticas.

Los temas relativos a Matemáticas I y II, como *son: razón, proporción, semejanza, teorema de Pitágoras, cálculo de áreas; trigonometría, entre otros,* toman importancia al extenderse a un plano cartesiano los distintos métodos geométricos que el alumno conoce, al igual que los algebraicos. Por esta razón es de suma importancia retomar y valorar puntos medulares de los objetivos y contenidos de los Programas de Estudio del Colegio, estableciendo la relación y seguimiento entre los tiempos marcados para éstos.

El presente documento considera como parte de sus objetivos, contemplar que nuestros alumnos deben egresar con una formación básica, además de preparatoria, pues sabemos que nuestros alumnos, deben ingresar a sus estudios de licenciatura en la medida de sus posibilidades, las cuales no deben ser pobres y sí muy ricas en conocimientos. El objetivo primordial de la Universidad es contribuir a la formación de profesionales y en este espíritu el alumno egresado del CCH debe ingresar como parte de un programa curricular contemplado en los Programas y Planes de Estudios, así como tener una preparación básica que

I

le permita tener bases formativas.

Los procesos de análisis deductivo, constructivo que se presentan en el texto, deben rescatarse para contribuir a la formación del alumno de acuerdo al perfil que ha seguido el Colegio que debe fortalecerse acorde a los tiempos de reformas que presenta el bachillerato y los distintos modelos que se conocen de él, pues es en este marco donde el Modelo; *aprender a aprender, aprender a ser, aprender a hacer* retoma, además de vigencia, suma importancia en la búsqueda de una mejor formación del alumno para enfrentar las diversas situaciones que enfrente en su formación posterior.

Un mayor tratamiento de la Geometría Analítica, lo encontraremos en las unidades 3, 4 y 5, donde extenderemos el análisis y la aplicación. Se mantiene como un seguimiento de los cursos anteriores y que se rescata en estas unidades, así como el énfasis que se hace de extender los procesos al considerar el tema de la recta en la unidad 3. Del mismo modo el tratamiento de las cónicas en las unidades 4 y 5, construyendo geométricamente a la parábola, circunferencia y elipse; estableciendo sus elementos utilizando conocimientos de la Geometría Euclidiana para después extender dicho estudio al plano cartesiano, muestra la búsqueda de relacionar los cursos anteriores con este tema tan importante. El análisis y tratamiento que se hace de las cónica deriva posteriormente en el concepto de parábola, circunferencia y elipse, que se tratan generalmente en los textos de Geometría Analítica básica, queda contemplado así la relación existente entre las representaciones geométricas, sus propiedades, y las ecuaciones de ellas.

Los problemas de aplicación que aparecen en el documento tienen como objetivo que el profesor impulse a que el alumno se relacione con los temas que se enfrentará de acuerdo con la disciplina a la que pretenda dirigirse en sus posteriores estudios; de donde, se presenta una variedad de temas para aplicar los métodos algebraicos y analíticos que se describen, así como algunos que puede utilizar en otras disciplinas que esté cursando.

La formalidad para tratar ciertos temas esperamos sirva de guía para el profesor y de motivación para el alumno; en particular a los integrantes del Grupo 401C le ha preocupado que este aspecto sea tratado con sumo cuidado, y sin olvidar las aplicaciones, se le muestre al alumno las cualidades que ha conjuntado y que puede utilizar con cierta soltura.

Unidad 1. Elementos de trigonometría

PRESENTACIÒN

La unidad de trigonometría tiene el propósito de utilizar las razones e identidades trigonométricas; así como las leyes de senos y cosenos, las cuales se trabajarán mediante la resolución de problemas en distintos contextos que involucren triángulos.

Los aprendizajes que se pretende que logren los alumnos en esta unidad son:

- Comprender el concepto de razón trigonométrica.
- Determinar los valores de las razones trigonométricas para los ángulos de 30°, 45° y 60°
- Resolver problemas que involucren triángulos rectángulos.
- Comprender la deducción de algunas identidades trigonométricas.
- Comprender la deducción de las leyes de senos y de cosenos
- Resolver problemas sobre triángulos oblicuángulos

A continuación, se presentarán **estrategias** para abordar los diferentes temas, los cuales se irán desglosando en los siguientes párrafos, en donde se hará referencia a un documento anexo que contiene el desarrollo de **secuencias** para presentar los temas, así como **ejercicios** inherentes a los mismos.

Los **conceptos clave** en esta unidad son: **razón, trigonometría, seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante, secante, ley de senos y ley de cosenos.**

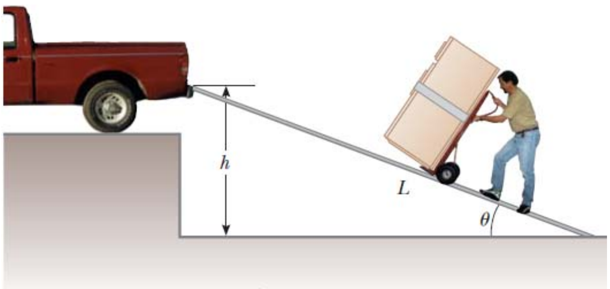
Razones Trigonométricas para los ángulos agudos de un triángulo rectángulo

Se sugiere trabajar con los alumnos los siguientes problemas para introducir el tema de trigonometría.

La idea es que los alumnos propongan algunas ideas de cómo resolverlos. Si no se le ocurre a nadie como resolverlos, el maestro propone que se construyan figuras con los instrumentos geométricos y midan las distancias requeridas. Si el maestro los propone en la primera clase, debe llevar sus instrumentos geométricos. Se sugiere resolver dos en clase y dejar los otros dos de tarea.

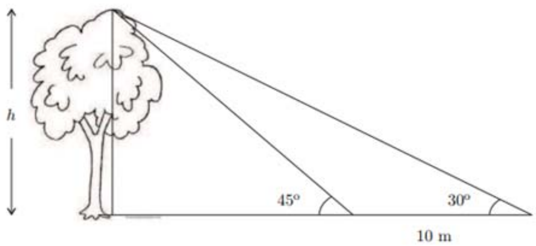
1.- Javier quiere subir un refrigerador a su camioneta con el uso de una rampa, le recomendaron que el ángulo $\theta = 15°$, la altura h que debe subir el refrigerador es de 1.5 m

¿Cuál es la longitud L de la rampa?

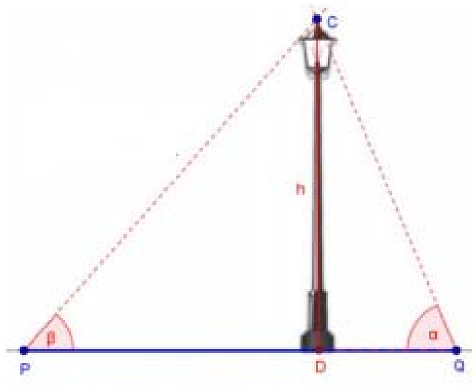


2.- El piloto de un avión que vuela a una altura de 10 Km, desciende de tal manera que su trayectoria forme un ángulo de 3° con el suelo. ¿A qué distancia horizontal se encuentra el aeropuerto?

3.- Determinar la altura de un árbol si se sabe que el ángulo de elevación disminuye desde 45° a 30° cando nos alejamos 10 metros.



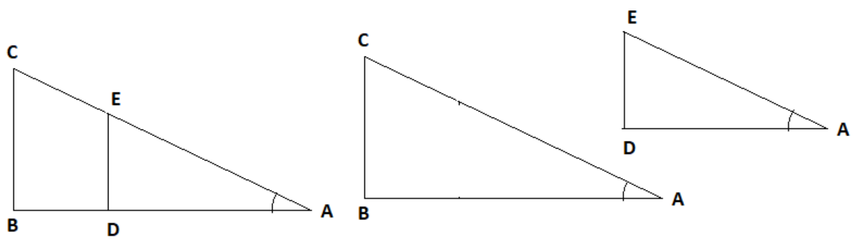
4.- Se quiere determinar la altura h de un poste, para esto se miden los ángulos $\alpha = 60°$ y $\beta = 45°$. Si la distancia entre P y Q es de 10 metros, obtén dicha altura.



Una vez realizado lo anterior, el inicio del estudio de la trigonometría, lo debemos hacer, realizando un repaso del concepto de razón, en particular con la comparación de las magnitudes de dos segmentos, lo cual lo realizamos con un cociente, lo cual, aunado a encontrar la razón de la magnitud de dos lados del triángulo, nos permitirá introducir las razones trigonométricas.

Un aspecto importante es que el Profesor repase el concepto de semejanza en triángulos y trabaje la invariancia del valor de las razones entre los lados correspondientes, lados que comprenden el mismo ángulo.

Veamos a considerar el triángulo rectángulo ΔABC, y trazar el segmento $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$



Podemos observar que el triángulo ΔABC es semejante al ΔADE, por lo tanto las razones $\frac{BC}{DE}$; $\frac{AB}{AD}$ y $\frac{AC}{AE}$ son iguales,

Es decir $\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ esto se cumple para cualquier par de triángulos semejantes.

El profesor debe conducir a que los alumnos establezcan las igualdades.

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD}, \ \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}, \ \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}, \ \frac{AC}{BC} = \frac{AE}{DE}, \ \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}, \ \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$$

y posteriormente hacer notar que las proporciones se obtienen por medio de razones con respecto de los lados de los triángulos ΔABC y ΔADE y con respecto a la posición que guardan con respecto del ángulo A.

El profesor mencionará que a estas razones invariantes se les dará un nombre especial.

Posteriormente a esta introducción, se debe trabajar con un triángulo rectángulo y definir las razones trigonométricas, y calcularlas para ciertos valores de ángulos, usar anexo **A1**. Además, es importante mostrar cuales razones trigonométricas son razones reciprocas entre sí, además de explicar la complementariedad de las funciones seno-coseno; tangente-cotangente, secante-cosecante, esto es, $sen\alpha = \cos\beta$, $tan\alpha = cot\beta$, $sec\alpha = csc\beta$ donde $\alpha+\beta=90^0$, es decir son ángulos complementarios.

Una vez realizado lo anterior, es importante establecer la definición de trigonometría y realizar un bosquejo histórico de la misma.

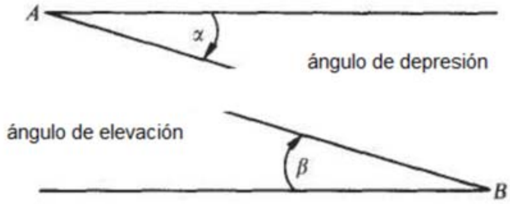
Una vez definidas las razones trigonométricas, para ir teniendo idea de los valores de las razones trigonométricas de diversos ángulos, vamos a calcular los valores de estas razones para ángulos de 30^0 y 60^0. Procedemos de la siguiente manera.

Ángulos de elevación y depresión

Problemas que encontramos en la trigonometría es donde se involucran los llamados ángulos de depresión y elevación.

Un ***ángulo de depresión*** es aquel que se forma desde la línea de vista horizontal del observador hasta un objeto abajo de ésta.

El ***ángulo de elevación*** es aquel que se forma desde la línea de vista horizontal del observador hasta un objeto situado arriba de ésta.



Razones trigonométricas de 30^0 y 60^0

Para calcular las razones trigonométricas de 30^0 y 60^0, utilizaremos un triángulo equilátero con cualquier medida de sus lados iguales. La altura, mediana, mediatriz y bisectriz, que en este caso coinciden, desde uno de sus vértices. Con dicho trazo, dividimos el triángulo equilátero en dos triángulos rectángulos. Dichos triángulos son congruentes y tienen ángulos de 30^0, 60^0 y 90^0. Con las definiciones dadas, procedemos al cálculo de las razones trigonométricas, en el anexo **A1,** se muestra el desarrollo para calcularlas. Además, se ejemplifica con problemas utilizando los conceptos de ángulos de elevación y depresión, así como cálculo de áreas.

Razones trigonométricas de 45^0

Para calcular las razones trigonométricas de 45^0, utilizamos un triángulo rectángulo e isósceles, con lados iguales de cualquier magnitud, los ángulos de dicho triángulo son 90^0, 45^0 y 45^0, procedemos a calcular las razones trigonométricas correspondientes al ángulo de 45^0. el desarrollo se muestra en el mismo anexo **A1.**

Es conveniente que el alumno realice una tabla con los valores encontrados y se sugiere que haga una comprobación con una calculadora científica. Es importante que el alumno comprenda las diferentes unidades que le presenta la calculadora (dg, rad, grad), por lo que es Importante trabajar la equivalencia entre radianes y grados, aunque ya se trabajó en el tema de geometría

El Profesor debe incluir transformación de ángulos dados en el sistema sexagesimal (dado en grados, minutos y segundos), a decimales de grados y viceversa.

1.- Transformar a grados y decimales de grado el ángulo $\alpha = 85° \, 40' \; 55''$.

Solución: $85 + \dfrac{40 + \frac{55}{60}}{60} = 85.68°$

2.- Escribir el ángulo $\alpha = 68.74°$ en grados, minutos y segundos.

Solución: $68° \, 44' \, 24°$

En la resolución de triángulos rectángulos se sugiere que el alumno determine la longitud de los lados y la medida de los ángulos agudos. Para la determinación de la medida de los ángulos se sugiere usar una calculadora científica.

También se sugiere incluir problemas del tipo

1.- Sí $coseca\alpha = \frac{13}{5}$ determinar $\tan\alpha$

Solución: $\frac{5}{12}$

2.- Sí $\tan\alpha = \frac{m}{n}$ determinar $\cos\alpha$

Solución: $cos\alpha = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}$

Identidades trigonométricas

En este apartado trabajaremos relaciones trigonométricas fundamentales, en particular las razones trigonométricas inversas, las razones $\frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$; la razón inversa $\frac{\cos\alpha}{sen\alpha} = co\tan\alpha$.

Otras de las relaciones trigonométricas importantes son las relaciones Pitagóricas, que como su nombre lo dice, emanan del teorema de Pitágoras

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad ; \quad \cos ec^2\alpha = 1 + \cot an^2\alpha \qquad \text{y} \qquad \sec^2\alpha = 1 + tan^2\alpha$$

En el anexo **A2** se muestra una forma de proceder.

Seno y coseno de la suma de dos ángulos

Es importante trabajar la suma de dos ángulos para poder calcular seno y coseno de ángulos mayores a 90^0 y que el alumno comprenda la importancia de esta relación.

En el anexo **A3** se muestra una deducción del seno y el coseno de la suma de dos ángulos

$$sen(\alpha + \beta) = sen\alpha\cos\beta + \cos\alpha sen\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta$$

En el mismo anexo **A3** se muestran algunos ejemplos de cálculo de razones trigonométricas de ángulos iguales a 90^0 utilizando el seno y coseno de la suma de dos ángulos.

Con los resultados obtenidos, podemos extender nuestra tabla de razones trigonométricas para ángulos de 30^0, 45^0, 60^0 y 90^0.

Se sugiere como ejercicio que el alumno determine las razones trigonométricas de 75° y 105^0.

En este punto es importante establecer las unidades de los ángulos (grados-radianes) y solicitarles a los alumnos que transformen los grados en radianes y viceversa, además que calculen razones trigonométricas de ángulos en grados y de ángulos en radianes, todo ello con la calculadora en el modo adecuado.

Además, es importante el manejo de ángulos suplementarios, es por eso que debemos introducir dos nuevas relaciones, a saber, en el anexo **A4** se encuentran seno y coseno de ángulos obtusos considerándolos como la suma de dos ángulos agudos y aplicando las relaciones encontradas, y de proporcionan elementos para las demostraciones siguientes:

- **Si dos ángulos son suplementarios, esto es;**

  Si $\alpha + \beta = 180^0$ **, entonces** $\cos\alpha = -\cos\beta$ **, que es equivalente a** $\cos\beta = -\cos\alpha$

  O equivalentemente $cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$

- **Si dos ángulos son suplementarios, esto es;**

  Si $\alpha + \beta = 180^0$ **, entonces** $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$

  O equivalentemente $sen\alpha = sen(180° - \alpha)$

Ley de senos y cosenos

Las denominadas ley de cosenos y ley de senos nos permitirán resolver triángulos oblicuángulos (obtusángulos, acutángulos); el procedimiento consiste en dividir un triángulo oblicuángulo en dos triángulos rectángulos trazando la altura adecuada. La idea en ley de cosenos es relacionar los tres lados del triángulo con uno de los ángulos del mismo, de igual manera, obtener la relación de dos de los ángulos con dos lados del triángulo; se propone resolver con los alumnos ejercicios como los que se muestran en el anexo **A5,** para a continuación presentar un procedimiento de deducción como se muestra en el anexo, se obtiene la ley de cosenos en un triángulo oblicuángulo y en un triángulo acutángulo, además se obtiene la ley de senos en un triángulo oblicuángulo, sugiriendo obtenerla en un triángulo acutángulo. Trabajar ejercicios del tipo mostrados en el **Anexo A5.**

En el anexo **A6**, se proporcionan ejercicios suplementarios para **el proceso de enseñanza aprendizaje** de los temas aquí tratados. Todos ellos cubren los aprendizajes requeridos en el programa de estudios.

Identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución

Se consideran varios puntos problemáticos para esta unidad,

1. El alumno no maneja la expresión adecuada $senA$, mucha de las veces escribe, solo sen, olvida el argumento.
2. La transformación de las unidades de los ángulos; grado-radián
3. El manejo de la ley de senos
4. El manejo de la ley de cosenos

Las propuestas de solución a los puntos anteriores, en el marcado con el número 1, es trabajar expresiones de varios tipos y mostrar que se requiere un argumento, es importante hacer énfasis en este tipo de expresiones. Para el punto 2, se requiere que el alumno comprenda el sistema sexagedecimal y se realicen ejercicios varios de este tipo. Para el manejo de las leyes de senos y cosenos, es importante hacer comprender a los alumnos la diferencia del manejo de triángulos rectángulos y triángulos oblicuángulos.

Unidad 2. Elementos básicos de geometría analítica

PRESENTACIÒN

La unidad de elementos básicos de geometría analítica tiene el propósito de que el alumno maneje algebraicamente algunos conceptos básicos de la geometría euclidiana y algunos lugares geométricos con la finalidad de introducir el método analítico.

Los aprendizajes que lograr en esta unidad son:

- Representación de puntos en el plano de coordenadas rectangulares
- Condiciones necesarias y suficientes para determinar un segmento:
- Longitud de un segmento
- Ángulo de inclinación. Pendiente.
- Condiciones necesarias y suficientes para localizar un segmento.
    - ✓ Punto extremo (inicial o final), longitud e inclinación.
- Puntos especiales de un segmento.
    - ✓ Punto que divide al segmento en una razón dada.
    - ✓ Punto medio
- Lugares geométricos en el plano cartesiano

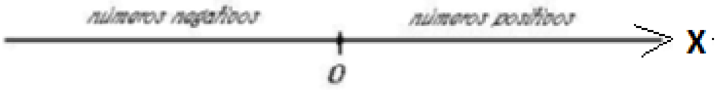
A continuación, se presentarán **estrategias** para abordar los diferentes temas, los cuales se irán desglosando en los siguientes párrafos, en donde se hará referencia a un documento anexo que contiene el desarrollo de **secuencias** para presentar los temas, así como **ejercicios** inherentes a los mismos.

Los **conceptos clave** de esta unidad son: **coordenadas rectangulares, ángulo de inclinación, pendiente, razón de división, lugar geométrico.**

Coordenadas

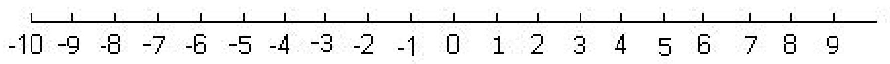
Introducción. Antes de establecer un sistema de coordenadas bidimensional (plano cartesiano), se considera que es necesario realizar un repaso de la recta numérica real, con el fin de establecer un sistema direccional. Dediquemos un breve espacio a esta idea.

Es importante que el Profesor establezca en una recta, la relación biunívoca de los números reales con los puntos geométricos de la recta, establecer el punto que le corresponde al cero, y en consecuencia la orientación de la misma, negativos y positivos, hacer énfasis que en una orientación como la que se muestra



Hemos utilizado como referencia el cero, el cual inicialmente es un punto arbitrario de la recta (este punto se representa generalmente con “0”)

Como cada número queda relacionado con un punto de la recta y a cada punto solo le corresponde uno de ellos entonces todos los puntos quedan “ocupados”.



Recordar que no existen únicamente números enteros.

En la GEOMETRÍA ANALÍTICA, es de suma importancia localizar puntos en una dimensión (recta), en dos dimensiones (plano) ó en tres dimensiones (espacio). En el presente documento se trabajará a lo más en un plano.

COORDENADAS EN UNA DIMENSIÓN

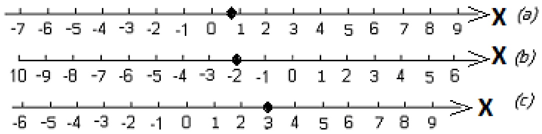
Localización de un punto en una dimensión

Ejemplo 1. Localizar sobre una línea recta el punto mostrado en la figura

Solución

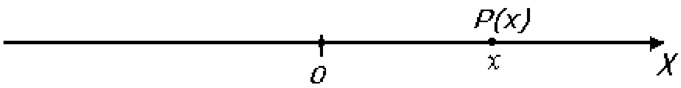
Para localizar el punto, no basta decir**,** *“se encuentra en algún lugar de la página”;* la respuesta es ambigua, lo que requiere es tener precisión.

Para lograrlo, establecemos una recta numérica que contenga el punto y de esa manera, una vez establecida, decimos que se tiene un sistema de referencia. Por ejemplo, con la recta numérica



En el caso (a), el punto estará localizado en un número menor que uno y mayor que cero, esto es en un número fraccionario, en este caso en *x = 0.8*. En el caso (b) el punto estará localizado en *x = -2* y en el caso (c) el número estará localizado en *x = 3*.

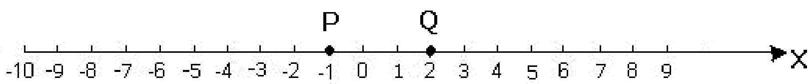
Observar que el punto se localiza de acuerdo con la referencia del número cero.



Además el Profesor, debe recordar al alumno que al orientar la recta de esta manera, un número a la derecha de un número b siempre es mayor $a > b$, es importante es indicar con una punta de flecha la dirección positiva y si la recta es horizontal denominarla como "eje X", en caso de tener una recta numérica vertical, en geometría analítica conviene orientar la parte positiva hacia arriba y denominar a esta recta como "eje Y" y en este caso un número indicado arriba del eje c es mayor a un número por debajo de él d , esto es, $c > d$.

En una dimensión al número x se le llama la ***COORDENADA*** del punto y se representa por $P(x)$ (P es el nombre del punto) y la recta X con el punto $0 \equiv P(0)$ se llama ***SISTEMA DE COORDENADAS EN UNA DIMENSIÓN***; donde 0 es el origen de coordenadas. Conviene representar al sistema con $0 - X$.

Ejemplo 2. Escribir la coordenada del punto P y la coordenada del punto Q .



Solución

El punto P se localiza en la coordenada $x = -1$ y el punto Q se localiza en la coordenada $x = 2$.

En conclusión, para localizar un punto en el sistema $O - X$ (es decir sobre la recta X) solamente es necesario conocer la coordenada x del punto respecto al origen establecido, si es hacia la derecha x es positivo y si es hacia la izquierda x es negativo.

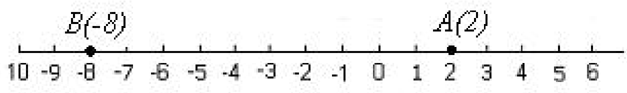
Representación de puntos en una dimensión

El símbolo X siempre representará la recta numérica y el punto de coordenada x lo representaremos con (x). También le podemos asignar un nombre como $A,\ B,\ C,..$ etc. Con esto, al punto de coordenada x lo podemos representar como el punto $A(x)$ donde la A es solamente el nombre del punto.

Ejemplo 3. 1) El punto A de coordenada 2 se representa como $A(2).$

2) El punto B de coordenada -8 se representa como $B(-8).$

Su localización en una recta numérica es:



Distancia entre dos puntos en una dimensión. Para encontrar la distancia entre dos puntos en una dimensión, simplemente debemos realizar la resta; del valor del punto que está a la derecha menos el valor del punto que está a la izquierda. En ocasiones el alumno se equivoca y hace la resta al revés, es importante, que el Profesor introduzca el concepto de valor absoluto de la resta.
En el ejemplo 3, la distancia entre los puntos A y B es

$$d_{AB} = 2 - (-8) = 2 + 8 = 10$$

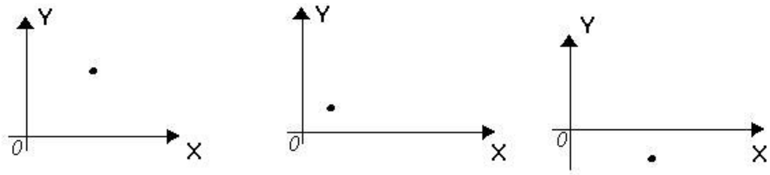
Si se escriben al revés, es probable que el alumno lo haga, esto es $d_{AB} = -8 - 2 = -10$, observar que resulta negativo, Cuidado, es importante usar el valor absoluto $d_{AB} = |-8-2| = |-10| = 10$, las distancias nunca serán negativas.

Ver ejemplos y ejercicios en el anexo **B1**

Coordenadas en dos dimensiones

Nuestro siguiente problema es localizar puntos en dos dimensiones (en un plano). El plano puede ser esta hoja, el pizarrón un mapa u otro cualquiera.

Una de las formas para localizar el punto en un plano es utilizando la forma convencional, esto es, dos rectas numéricas orientadas, una horizontal y otra vertical (perpendiculares entre sí) las cuales se intersectan en el punto cero de cada una de ellas, como se dijo anteriormente, a estas rectas numéricas se les nombrara, en particular, ***X*** al eje horizontal y ***Y*** al eje vertical, formando de esta manera un sistema de coordenadas rectangulares. La orientación de las rectas se dará con una flecha que indicará la parte positiva de la misma.



Observar que dependiendo de donde se elija el punto de referencia (cero) la intersección de las rectas numéricas perpendiculares (ejes), la localización del punto cambia. Por ello es importante que una vez que se establezcan los ejes, estos no se cambien, esto es, debemos establecer el sistema de referencia en forma ***absoluta*** para localizar puntos en una misma situación.

Plano cartesiano

Como se sabe, el plano cartesiano, es el plano que se forma con la intersección de dos rectas numéricas perpendiculares (para formar un sistema de coordenadas rectangulares) en el punto cero (0), en forma descriptiva, es el conjunto de todos los puntos del plano y se representa de la siguiente manera

$$\Re^2 = \Re \ x \ \Re = \{(x,y) \ \mid \ x \in \Re, \ y \in \Re\}$$

Las dos rectas se extienden al infinito y a cada punto del plano le corresponde un solo par ordenado (x,y); de tal manera que todos los puntos del plano quedan "ocupados" por las parejas ordenas, de manera formal, la correspondencia biunívoca de que a cada punto el plano le corresponde una pareja ordenada y viceversa $\Re^2$.

Podemos representar el punto P como $P(x,y)$ ó simplemente con la pareja ordenada (x,y). Los números x y y se llaman coordenadas del punto *P*: en particular a la coordenada x se le llama la ABSCISA del punto P y a la coordenada y se le llama la ORDENADA del punto P.

Debemos tener claro las regiones que se forman con las limitantes de las rectas numéricas, definirlas como cuadrantes y establecer los signos que corresponden a las componentes de las parejas ordenadas, además la expresión de las parejas ordenadas de los puntos localizados sobre los ejes, ver anexo **B2**.

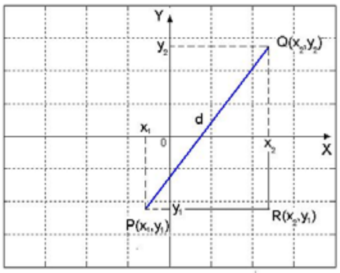
Finalmente debemos realizar ejercicios de localización de puntos y características de puntos en las diferentes regiones.

Una vez que sabemos localizar puntos, trazamos segmentos de recta, recordando que, para trazarlo, requerimos de dos puntos o un punto inicial, su longitud y su dirección (ángulo que forma con la recta paralela al eje X que pasa por el punto o el punto final del segmento, su longitud y dirección , una característica del segmento es su longitud), por ello nos dedicaremos a calcular la distancia entre los dos puntos que corresponde a la longitud del segmento.

Distancia entre dos puntos localizados en el plano cartesiano

Si tenemos un segmento en un plano definido por dos puntos, que no sea horizontal o vertical, ya que para este caso ya lo realizamos, entonces, si los puntos de un extremo son los puntos $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$ procedemos de la siguiente manera:

1. Graficamos los puntos en el plano cartesiano y a continuación el segmento correspondiente.
2. Con trazos auxiliares horizontal y vertical, formamos un triángulo rectángulo.



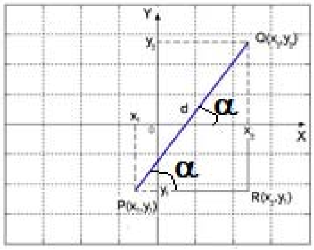
3. Observamos que la longitud (d) de la hipotenusa del triángulo rectángulo (longitud del segmento) se puede calcular usando el teorema de Pitágoras, previo cálculo de la longitud de los catetos, que son segmentos horizontal y vertical.
4. Al realizar lo anterior, obtenemos

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

La secuencia didáctica se muestra en el anexo **B3.**

Ángulo de inclinación. Pendiente

Un segmento de recta localizado en el plano cartesiano forma un ángulo α respecto a la parte positiva del eje X, el cual se denomina ***ángulo de inclinación de la recta***



El ángulo de inclinación tendrá una variación entre 0^0 y 180^0, con este parámetro, podemos dar las condiciones necesarias y suficientes para localizar un segmento; esto es, requerimos para ello, el punto denominado inicial (donde comienza), su magnitud y ángulo de inclinación. Se propone realizar ejercicios de graficar segmentos, dados estos tres elementos.

Ahora, un concepto importante dentro del tema de recta en la geometría analítica es el de **pendiente de una recta,** como su nombre sugiere, se refiere a la inclinación de la recta.

La **pendiente de la recta** representada por m**,** se define como la tangente del ángulo de inclinación, esto es:

$$m = \tan\alpha$$

Es importante trabajar con la variación de la tangente del ángulo de inclinación, a saber:

- ✓ Si el ángulo de inclinación es 0^0, la recta es horizontal y por lo tanto su pendiente es $m = \tan 0^0 = 0$
- ✓ Si el ángulo es agudo $0 < \alpha < 90^0$, la tangente de un ángulo agudo es mayor que cero (positivo), por lo tanto, la pendiente es $m > 0$
- ✓ Si el ángulo de inclinación es 90^0, la recta es vertical y por lo tanto su pendiente es $m = \tan 90^0 = \infty$, también se dice que es infinita o de otra manera no existe.
- ✓ Si el ángulo es agudo $90^0 < \alpha < 180^0$, la tangente de un ángulo obtuso es menor que cero (negativo), por lo tanto, la pendiente es $m < 0$
- ✓ Si el ángulo de inclinación es 180^0, la recta es horizontal, coincide con el de 0^0 y por lo tanto su pendiente es $m = \tan 180^0 = 0$

Si queremos encontrar el ángulo de inclinación de la recta, conociendo su pendiente, lo hacemos como:

$$\alpha = ang\tan m = \tan^{-1} m$$

Finalmente, queda encontrar la expresión de la pendiente de un segmento cuando se conocen sus extremos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$. La expresión es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad x_1 \neq x_2$$

Después de esto se sugiere solicitarle al alumno sobre las condiciones necesarias y suficientes para que un segmento quede determinado.

Por ejemplo. Dibujar el segmento en cada caso

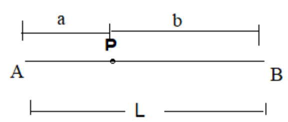
- El punto inicial es A(3,4) y tiene una longitud de 5 cm
- El punto inicial es A(3,4) y forma un ángulo de inclinación de 5°
- El punto final es A(-3,4), tiene una longitud de 5 cm y el ángulo de inclinación de su recta correspondiente es 120°
- El punto inicial es A(-3, -4), tiene una longitud de 6 cm y el ángulo de inclinación de su recta correspondiente es 30°
- El punto inicial es A(-3,4) y su punto final es (7, 0)

El desarrollo secuencial se describe en el anexo **B4,** así como algunos ejemplos.

División de un segmento en una razón dada

Es el momento de repasar el concepto de razón, pero ahora lo utilizaremos con dos partes de un segmento.

Supongamos que un segmento de longitud L, se divide en dos partes, tal que una parte mide a y la segunda parte mide b, es claro que $L = a + b$. ¿Como comparamos las dos partes del segmento? La respuesta que nos da la matemática es comparando los segmentos por medio de su cociente, es decir, calculando la razón de división, a saber:

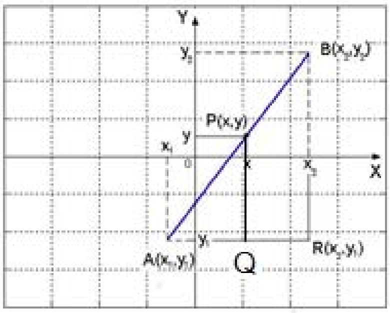


El punto P divide al segmento $\overline{AB}$ en la razón $r = \frac{AP}{PB}$, observar que se tomó la dirección de A hacía B. Si tomamos la dirección de B hacía a A, la razón de división es $r' = \frac{BP}{PA}$, que como observamos es la razón reciproca de r. Esto es $r = \frac{1}{r'}$ o viceversa $r' = \frac{1}{r}$ y en este caso siempre son menor que 1.

Ahora en geometría analítica vamos a encontrar la expresión que determina el punto que divide a un segmento en una razón dada r, cuando se conocen los extremos del segmento. Veamos dos secuencias para obtener las coordenadas del punto que divide a un segmento.

Procedimiento 1. Para obtener la expresión correspondiente de las coordenadas del punto que divide a un segmento en una razón dada es el siguiente:

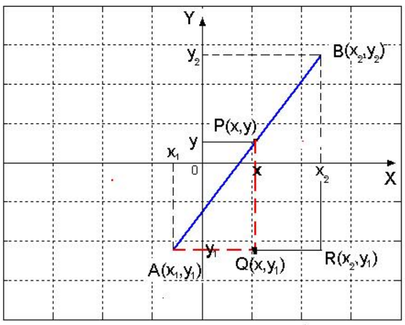
De acuerdo con la figura



Escribimos la razón en que el punto P divide al segmento AB, $r=\frac{AP}{PB}$, de acuerdo con la figura, el punto Q divide al segmento AR en la misma razón $r=\frac{AQ}{QR}$ y de igual manera los segmentos PQ y BR tienen la misma razón, esto es $r=\frac{PQ}{BR}$, ahora establecemos las magnitudes de las razones involucradas y realizando el proceso algebraico correspondiente obtenemos las coordenadas del punto P

$$P\left(\frac{x_1+rx_2}{1+r},\ \frac{y_1+ry_2}{1+r}\right)\text{.......(1)}$$

Procedimiento 2. Una segunda opción es cuando definimos la razón de la siguiente manera



Separamos los triángulos ΔARB y ΔAQP, los cuales son semejantes, utilicemos la proporción entre los lados correspondientes, esto es la igualdad de las razones correspondientes

$$\frac{AB}{AP}=\frac{RA}{QA}=\frac{RB}{QP}=r$$

Establecemos las distancias correspondientes en términos de las abscisas y ordenadas correspondientes y al realizar el álgebra correspondiente obtenemos las coordenadas del punto P. El resultado es:

$$P\left(\frac{x_2 + x_1(r-1)}{r}, \frac{y_2 + y_1(r-1)}{r}\right) \ldots\ldots (2)$$

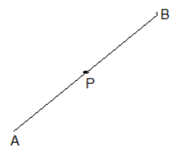
Las expresiones (1) y (2) proporcionan el mismo resultado. Se debe tener cuidado con la definición de la razón.

Un resumen respecto al concepto de ***razón de división*** de un ***segmento de recta.***

1. El punto de división debe estar sobre la recta que contiene al segmento que se va a dividir.
2. De acuerdo con el punto anterior, el punto P puede estar ***fuera*** del segmento de recta.
3. Como todos los segmentos involucrados en la definición: $r = \frac{AP}{PB}$ son dirigidos, entonces r puede resultar ***positiva o negativa***.

División de un segmento. Punto medio

Caso particular. Un caso particular y de gran importancia, es la división de un segmento en dos partes iguales, es decir cuando la razón es $r = \frac{AP}{PB} = 1$



Al aplicar la expresión $P\left(\frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \frac{y_1 + ry_2}{1+r}\right)$ se tiene:

$$P\left(\frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \frac{y_1 + ry_2}{1+r}\right) = P\left(\frac{x_1 + (1)x_2}{1+1}, \frac{y_1 + (1)y_2}{1+1}\right) = P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Los procedimientos secuenciales se presentan en el anexo **B5.**

En el anexo **B6** se sugieren diversos problemas donde se aplican los diferentes conceptos hasta aquí tratados. Se resuelven problemas de índole geométrico.

Lugares Geométricos

En esta sección se trata brevemente el tema de lugares geométricos, el cual requiere de una base de conocimientos matemáticos, que regularmente a estas alturas no se tiene, por lo que su desarrollo será limitado, pero a la vez se proporcionará lo necesario para su comprensión.

Es importante establecer la siguiente definición y los problemas fundamentales de la geometría analítica, a saber:

DEFINICIÓN. El conjunto de puntos en el plano, y solamente aquellos puntos cuyas coordenadas satisfagan una ecuación, se llama ***GRÁFICA*** de la ecuación o bien, su ***LUGAR GEOMÉTRICO.***

De otra manera:

Un lugar geometrico es un conjunto de puntos de un plano que cumplen algunas condiciones o propiedades geométricas.

En este tema vamos a determinar una ecuación o ecuaciones para ciertos lugares geométricos

Problemas de la Geometría Analítica

Problema 1. Dada la condición o condiciones que deben cumplir los puntos de un lugar geométrico, determinar su ecuación.

Problema 2. Dada una ecuación interpretarla geométricamente, esto es, conocida una ecuación, construir la gráfica correspondiente.

El alumno ya tiene un antecedente para graficar una ecuación, puede ser tabulando o apoyado en un software como GeoGebra, podemos comenzar con el Problema 2.

Se sugiere graficar las siguientes ecuaciones

a)	$3x+2y-18=0$	b)	$-2x+4y+12=0$
c)	$y^2-x+8=0$	d)	$x^2+y-10=0$
d)	$x^2+y^2=25$	e)	$x^2+y^2=36$
f)	$x^2+y^2=-4$	g)	$x^2+y^2=-25$

La idea es inducir al alumno para que identifique que las ecuaciones tienen diferente gráfica y que inclusive hay algunas que no tienen gráfica.

En los problemas relativos a lugares geométricos es necesario que el alumno comprenda lo siguiente:

a) Todos los puntos que satisfacen la condición dada pertenecen al lugar geométrico.

b) Todos los puntos del lugar geométrico, satisfacen la condición dada.

Además, es importante que el alumno comprenda que el lugar geométrico tiene un conjunto de puntos y que todos ellos cumplen una condición; ¿Qué hacer? Representar cada uno y todos los puntos con $P(x, y)$, y que $(x \text{ e } y)$ se manejan como variables.

Una vez explicado lo anterior proceder a realizar ejercicios, se sugieren los siguientes:

Encontrar la ecuación que representa la siguiente condición

a) Puntos que equidistan (misma distancia) de un fijo dado $C(h,k)$.
b) Puntos que, al tomar cualquier pareja de ellos, tienen la misma pendiente m.
c) Puntos que equidistan de una recta fija y de un punto fijo.

Se sugiere que los ejercicios utilizados sean con valores numéricos, además que el alumno identifique los resultados obtenidos.

Los ejercicios anteriores permitirán repasar los conceptos de distancia, pendiente e introducirse en la distancia de un punto a una recta. Y que el alumno identifique la gráfica de cada una de las ecuaciones encontradas.

En el anexo **B7**, se muestran algunas secuencias didácticas para trabajar los lugares geométricos.

Finalmente, en el anexo **B8** se presentan una serie de ejercicios inherentes a los aprendizajes de esta unidad.

Identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución

Se consideran varios puntos problemáticos para esta unidad,

Dado que es el inicio a un nuevo tratamiento de la matemática, en particular la interacción de procedimientos algebraicos con la geometría euclidiana, el alumno tiene diversos problemas, a saber:

1. A lo largo de toda la unidad, el manejo del álgebra
2. El manejo del concepto de razón

3. Comprender que cuando se dice, cualquier punto de la gráfica $P(x,y)$, nos referimos a todos y cada uno de los puntos.

Una sugerencia de cómo resolver esta problemática, es incidir en los cursos de álgebra anteriores, y en este curso realizar tantos repasos como sea necesario tanto en el álgebra como en el manejo de las razones, en particular trabajando ejercicios de semejanza.

En el caso del manejo de las variables x e y, al trabajar las tabulaciones, debemos hacer énfasis que son casos particulares de los puntos representados por $P(x,y)$.

Unidad 3. La recta y su ecuación cartesiana

PRESENTACIÒN

La unidad de recta y su ecuación cartesiana tiene el propósito de que el alumno será capaz de obtener la ecuación cartesiana de la recta, dados diversos elementos definitorios. Resolverá problemas geométricos en diversos contextos, a fin de que se avance en la comprensión del método analítico

Los aprendizajes que los alumnos deben lograr en esta unidad son:

- Describe a la recta como un lugar geométrico, identificando los elementos que la definen.
    - ✓ Entiende a la pendiente de una recta, como un invariante.
    - ✓ Obtiene la ecuación de una recta, dadas dos condiciones
- Determina el ángulo que se forma cuando dos rectas se cortan, en términos de sus pendientes.
- Determina cuando dos rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos, a partir de sus ecuaciones.
- Dada la ecuación de una recta el alumno es capaz de encontrar las ecuaciones de rectas paralelas y/o perpendiculares a ella.
- Identifica y transita en las diferentes formas la ecuación de la recta (ordinaria o canónica, general y simétrica).
- Resuelve problemas de corte euclidiano usando geometría analítica

A continuación, se presentarán **estrategias** para abordar los diferentes temas, los cuales se irán desglosando en los siguientes párrafos, en donde se hará referencia a anexos que contienen el desarrollo de **secuencias** para presentar los temas, así como **ejercicios** inherentes a los mismos.

Los **conceptos clave** en esta unidad son: **ecuación cartesiana de la recta, ecuación ordinaria, general y simétrica.**

Ecuación cartesiana de la recta

Para comprender y encontrar la ecuación de la línea recta en la geometría analítica, es importante invocar el problema 1 de la geometría analítica, esto es; en la geometría analítica debemos localizar todos y cada uno de los puntos que pertenecen a la línea recta. Para ello, debemos establecer un sistema de coordenadas, el cual, como se estableció en la unidad 2 debe ser un sistema absoluto, ya que, para cada sistema de coordenadas diferente, los puntos están ubicados en diferente lugar.

Es conveniente que se repase las condiciones que deben cumplir los puntos de una recta, esto es su definición como lugar geométrico, a saber,

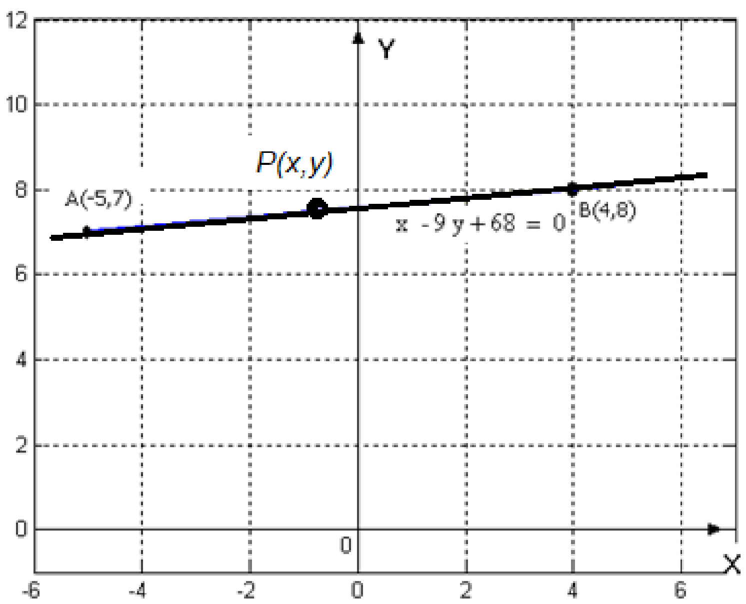
Los puntos de una recta deben cumplir con la condición de que cualquier pareja de puntos deben tener la misma pendiente.

Ecuación de la recta dados dos puntos

Podemos comenzar con un ejemplo particular, esto es, trabajar con una recta que pasa por dos puntos dados, y que $P(x, y)$, representa cualquier otro punto de la recta, sea el siguiente ejemplo

Ejemplo 3. Encontrar la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos $A(-5,7)$ y $B(4, 8)$ y escribirla en su forma $Ax + By + C = 0$

Solución. Inicialmente graficamos



Vamos a utilizar la condición que cumplen los puntos, recordar que $P(x, y)$, representa todos y cualquiera de los puntos de la recta. Hacer énfasis que la pendiente es invariante..

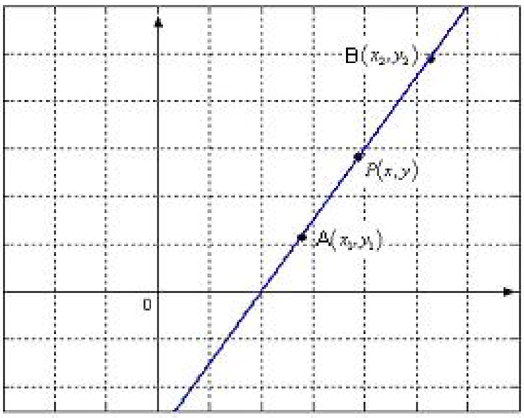
Al aplicar la condición $m_{AP} = m_{AB} = m_{PB}$ tenemos

$$\frac{y-7}{x+5} = \frac{8-7}{4+5}$$

Realizar el álgebra hasta obtener $x - 9y + 68 = 0$.; es importante mencionar que escribir la ecuación en la forma $Ax + By + C = 0$ es fundamental ya que se conoce como la ECUACIÖN GENERAL de recta.

Si se considera adecuado, se debe realizar el tratamiento formal, esto es:

Con la condición dada, consideremos que $P(x, y)$ representa todos y cada uno de los puntos de la línea recta, entonces para encontrar la ecuación (relación entre las variables x y y, utilizamos dos puntos conocidos de ella, por ejemplo $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,



De acuerdo con la condición de que deben de cumplir los puntos se tiene

$$m_{AP} = m_{AB}$$

Al utilizar la expresión de pendiente para segmentos de recta cuando se conocen dos puntos la expresión se convierte en

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

de donde

$$(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1)$$

$$y-y_1=\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x-x_1)$$

La cual representa la ecuación de la recta cuando se conocen dos puntos de ella, esto es x_1,y_1,x_2,y_2 son conocidos y x,y las variables.

Al simplificar la expresión anterior se tiene una expresión de la forma $Ax+By+C=0$ donde A, B y C son constantes, en consecuencia el lugar geométrico (gráfica) de la recta se define como el lugar geométrico de parejas de puntos ordenados tales que cumplen con la relación $Ax+By+C=0$

Ecuación de la recta dado un punto y su pendiente

Consideremos que $P_1(x_1,y_1)$ es el punto dado de la recta, en un plano cartesiano *XY* y que la línea recta tiene pendiente *m* y al considerar otro punto cualquiera de la recta $P(x,y)$ y de acuerdo a la definición, se tiene $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

En la expresión $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ es la pendiente m dada de la recta, esto es

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$$

Por lo tanto

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

Esta expresión algebraica es la ecuación de la recta en su forma **punto pendiente.**

Ecuación de la recta dada su pendiente y la ordenada al origen

Es un caso especial del punto anterior, ya que se conoce un punto y su pendiente, a saber; la ordenada al origen es el punto donde la recta intersecta al eje Y, recordemos que todo punto sobre el eje Y tiene coordenadas de la forma $P(0,y)$.

Se acostumbra escribir las coordenadas del punto intersección de la recta con el eje Y con la notación $P(0,b)$, b coordenada al origen. Por lo que la ecuación, en este caso es:

$y-b=m(x-0)$ de donde $y=mx+b$, en la generalidad de los libros de geometría analítica, a esta expresión se le conoce como la FORMA ORDINARIA DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

Es conveniente realizar ejercicios en forma directa e inversa.

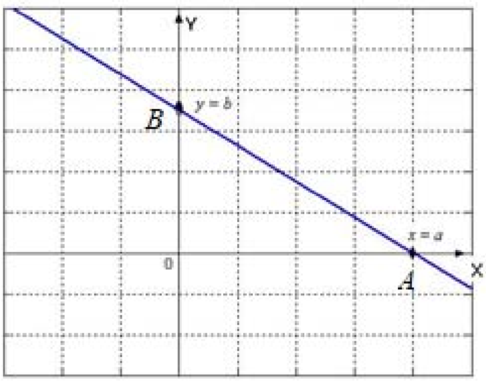
Ecuación de la recta conocido un punto y el ángulo de inclinación

En este caso, se conoce el ángulo de inclinación α y en consecuencia su pendiente m, ya que $m=\tan\alpha$. Por lo tanto, conocemos punto y pendiente, finalmente podemos decir que la ecuación se escribe como

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

Ecuación de la recta en su forma simétrica

Vamos a suponer que se conocen los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados, esto es, la intersección con el eje Y es $B(0,b)$ y la intersección con el eje X es $A(a,0)$, veamos la figura



La ecuación de la recta conocidos dos puntos es

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)$$

Al sustituir los puntos se tiene:

$$y-b=\frac{0-b}{a-0}(x-0)$$

Al desarrollar $-ay+ab=bx$; en su forma general $bx+ay-ab=0$

La cual se puede escribir como: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, expresión conocida como la **Ecuación simétrica de la recta.**

Si la escribimos de esta forma, inmediatamente conoceremos la intersección con los ejes coordenados y en consecuencia graficar la recta, recordemos que, para ello, solo requerimos dos puntos de la misma.

En el anexo **C1,** se establece la ecuación de la recta, en el anexo **C2** se trabajan las secuencias para obtener cada una de las expresiones aquí descritas, y en anexo **C3,** se ejemplifican con ejercicios las diferentes formas de la ecuación de la recta.

Un caso particular importante son las **líneas rectas horizontal y vertical**, a saber:

Supongamos que una **línea recta es horizontal** y que intersecta al eje Y en cualquiera de sus puntos, sea este $P(0,b)$, la recta tiene pendiente 0, usando la expresión $y-y_1=m(x-x_1)$ y sustituyendo el punto la pendiente, tenemos $y-b=0(x-x_1)$, de donde $y-b=0(x-x_1)$, finalmente la ecuación de la recta horizontal es $y=b$ intersecta al eje

Ahora supongamos que la **línea recta es vertical** y que intersecta al eje X en cualquiera de sus puntos, sea este $P(a,0)$, la recta no tiene pendiente o la podemos manejar como infinita, ahora usamos la expresión $\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$, si la pendiente no existe (infinita), entonces se cumple $(x-x_1)=0$ y sustituyendo el punto tenemos $x-a=0$, finalmente la ecuación de la recta vertical es $x=a$.

Un aspecto importante de la ecuación de la línea recta es su manejo desde su ecuación general de la siguiente manera:

Dada la ecuación en su forma general, escribirla en su forma ordinaria.

Recordar que la forma punto pendiente es $y=mx+b$, al despejar la variable y de la expresión en su forma general, se puede obtener la pendiente y la intersección con el eje *Y* en términos de los coeficientes A,B y C.

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B} \qquad B\neq 0$$

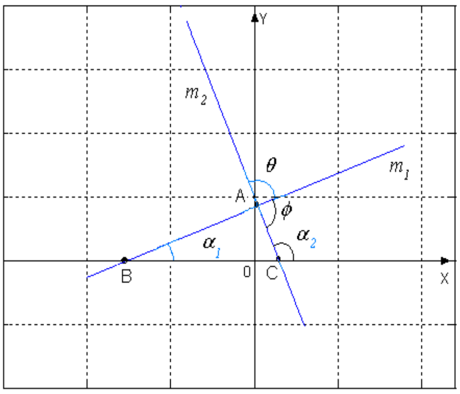
Al comparar con la expresión en la forma ***pendiente-ordenada,*** se observa que la pendiente es $m=-\frac{A}{B}$ y la ordenada al origen es $b=-\frac{C}{B}$, y trabajar de esta manera la algoritmia para que el alumno logre mecanizar.

Ángulo entre dos rectas

Un manejo importante en la geometría analítica para trabajar conceptos básicos de la geometría euclidiana es el ángulo entre dos rectas.

Siendo el concepto fundamental de la recta, su pendiente, vamos a encontrar la expresión que nos permite encontrar el ángulo entre dos rectas en términos de sus pendientes, a saber

Consideremos el caso de tener dos segmentos de recta con pendientes m_1 y m_2 respectivamente como se muestra en la figura



Es importante medir los ángulos como lo establece la trigonometría, esto es, en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Tratamiento geométrico para encontrar el ángulo que forman los segmentos de recta.

Los intervalos de valores válidos para los ángulos $(\theta \text{ y } \phi)$ son

$$0 \le \theta \le 180^0 \quad \text{y} \quad 0 \le \phi \le 180^0$$

En la figura observamos que si se calcula uno de ellos $(\theta \text{ o } \phi)$, el otro queda completamente determinando ya que los ángulos son suplementarios $\theta+\phi=180^0$.

El punto de intersección de los segmentos y los puntos de intersección de cada uno de los segmentos con el eje horizontal forma el triángulo *ABC*, en el cual se cumple la relación

$$\theta + \alpha_1 = \alpha_2$$

Con el uso de las pendientes, determinamos los ángulos de inclinación de cada uno de los segmentos, utilizando $m = tan\alpha$.

Se observa que α_1 es el ángulo de inclinación de la recta m_1, por lo tanto $\alpha_1 = ang\tan m_1$ y que α_2 es el ángulo de inclinación de la recta m_2, por lo tanto $\alpha_2 = ang\ tan\ m_2$.

Como $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$ Entonces $\theta = ang\ tan\ m_2 - ang\ tan\ m_1$

Ahora, vamos a realizar el tratamiento analítico

De acuerdo con la propiedad del ángulo externo (***la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual al ángulo externo***), de acuerdo con la figura $\theta + \alpha_1 = \alpha_2$, luego $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$, aplicando la función trigonométrica en ambos lados de la expresión y la relación trigonométrica correspondiente, obtenemos:

$$tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

En el anexo **C4**, se realiza la secuencia correspondiente para obtener la expresión anterior, esto es, para obtener el ángulo entre dos rectas conocidas sus pendientes.

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

Se deberá hacer la observación que $1 + m_2 m_1 \neq 0$, y si se considera pertinente trabajar el caso cuando $1 + m_2 m_1 \to 0$, entonces

$$\lim_{1+m_2m_1 \to 0} tan\theta = \lim_{1+m_2m_1 \to 0} \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \to \infty$$

Mostrar que, en este caso, lo anterior ocurre cuando el ángulo $\theta \to \frac{\pi}{2} = 90^0$.

De esta manera establecemos la ***condición de perpendicularidad*** para dos segmentos de recta/rectas dados $1 + m_2 m_1 = 0$, la expresión es equivalente a

$$\boxed{m_2 m_1 = -1 \quad \text{o} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1} \quad \text{o} \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}}$$

Esto es, *las pendientes de dos segmentos de recta perpendiculares tienen pendientes* recíprocas y de signo contrario.

La expresión no es válida para rectas paralelas a los ejes coordenados

$$m_2 = m_1 = 0$$

En el caso de que las rectas sean paralelas, el ángulo que forman es de $0^0 \quad \therefore \quad tan\, 0^0 = 0$, por lo que la expresión $tan\,\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = 0$, la cual se cumple sólo cuando el numerador es igual a cero, esto es

$$m_2 - m_1 = 0$$

Lo cual equivale a

$$\boxed{m_2 = m_1}$$

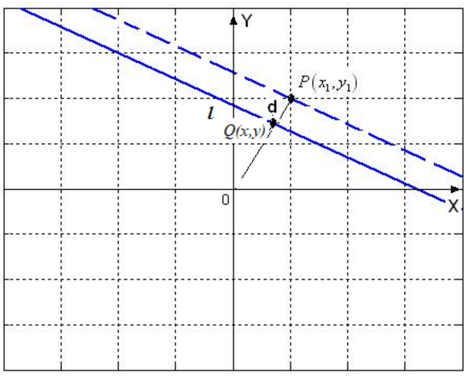
Esto es, las pendientes de dos segmentos de recta paralelas tienen pendientes iguales***. Condición de paralelismo.***

En el anexo **C5** se presentan ejercicios relativos al tema de ángulo entre rectas.

Intersección entre dos rectas

Para trabajar este tema, debemos recordar los diferentes métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, esto nos permitirá encontrar el punto de intersección de dos rectas.

Distancia de una recta a un punto



Queremos encontrar la distancia del punto $P(x,y)$ a la recta $\boldsymbol{l}$ con pendiente m_1 procedemos de la siguiente manera; Calculamos la pendiente de la recta perpendicular que pasa por el punto P y que es perpendicular a la recta $\boldsymbol{l}$, m_2; ya con el punto P y la pendiente de la recta perpendicular m_2, encontramos su ecuación.

Ya tendremos dos ecuaciones con dos incógnitas, la de la recta $\boldsymbol{l}$ y la de la recta perpendicular trazada, con ellas encontramos el punto donde se intersectan, $Q(x,y)$

Finalmente calculamos la distancia entre los puntos $P\ y\ Q$. Esta distancia corresponde a la distancia entre el punto y la recta, recordemos que la distancia corresponde a la longitud del segmento más corto entre el punto y la recta, este segmento corresponde al que es perpendicular a la recta dada.

Podemos encontrar una expresión para calcular la distancia entre un punto y una recta, se utilizan dos procedimientos, uno de ellos utilizando la ecuación normal de la recta, la secuencia se muestra en el anexo **C6.**

Finalmente, en el anexo **C7**, se presentan secuencias para diversos problemas de corte de la geometría euclidiana.

Finalmente, en el Anexo **C8,** se proporcionan ejercicios de retroalimentación.

Identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución

Se consideran varios puntos problemáticos para esta unidad,

Como en la unidad anterior, el tratamiento de la geometría analítica, en particular la interacción de procedimientos algebraicos con la geometría euclidiana, el alumno tiene diversos problemas, a saber:

1. A lo largo de toda la unidad, el manejo del álgebra.
2. Manejo del concepto de razón
3. Resolver ecuaciones simultáneas
4. Comprender que $P(x,y)$ representa cualquier punto de la recta.

Una sugerencia de cómo resolver esta problemática, es incidir en los cursos de álgebra anteriores, y en este curso realizar tantos repasos como sea necesario tanto en el álgebra como en el manejo de las razones, en particular trabajando ejercicios de semejanza.

Trabajar con resolución de ecuaciones y cantidades racionales, en su forma decimal y fraccionaria.

La forma de hacerlo es trabajar en cursos anteriores con mayor formalidad.

En el caso del manejo de las variables x e y, al trabajar las tabulaciones, debemos hacer énfasis que son casos particulares de los puntos representados por $P(x,y)$.

Unidad 4. La parábola y su ecuación cartesiana

PRESENTACIÒN

La unidad de la parábola y su ecuación cartesiana tiene como propósito que el alumno sea capaz de obtener la ecuación de una parábola a partir de su definición (foco y directriz) o de elementos necesarios y suficientes. Identificará sus elementos a partir de la ecuación. Resolverá problemas que involucren a la parábola y sus propiedades.

Los aprendizajes que se pretenden lograr en esta unidad son:

- Identifica los elementos que definen la parábola.
    - ✓ Reconoce la simetría de esta curva.
    - ✓ Obtiene por inducción la definición de la parábola como lugar geométrico
- Deduce la ecuación de la parábola con vértice en el origen y fuera de él.
- Entiende que un punto pertenece a una parábola sí y sólo sí, sus coordenadas satisfacen la ecuación correspondiente.
- Determina el vértice, foco, directriz, el eje de simetría y el lado recto de la parábola, a partir de su ecuación cartesiana.
- Grafica parábolas dadas sus ecuaciones y viceversa.
- Transforma la ecuación general a la ordinaria para encontrar sus elementos
- Resuelve problemas que involucren la intersección de una recta con una parábola y entre parábolas.
- Resuelve problemas de aplicación

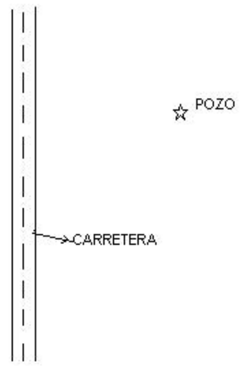
A continuación, se presentarán **estrategias** para abordar los diferentes temas, los cuales se irán desglosando en los siguientes párrafos, en donde se hará referencia a anexos que contienen el desarrollo de **secuencias** para presentar los temas, así como **ejercicios** inherentes a los mismos.

Los **conceptos clave** en esta unidad son: **definición de parábola, ecuación de parábola, elementos de una parábola (*vértice, foco, directriz, lado recto, eje de simetría).***

La parábola como lugar geométrico

Inicialmente, se sugiere que el alumno trabaje con el siguiente problema

Ejemplo 4. La empresa constructora MICA S. A. de C. V. Necesita determinar la ubicación de 15 casas que se construirán en el estado de San Luis Potosí. Las casas tienen la característica que se ubicarán a la misma distancia de la carretera internacional (que por ciento en esa parte es recta) y también se ubicarán a la misma distancia de un pozo de agua ubicado cerca de la carretera el cual abastecerá de agua a esta comunidad. Un croquis de la ubicación de la carretera y el pozo se presenta en la siguiente figura.



Con la guía del profesor obtendremos una construcción de una parábola, la cual identificará el alumno, ya que está familiarizado con este tipo de curva.

Es importante que el Profesor conduzca al alumno a que justifique los trazos realizados y que aplique resultados de la geometría euclidiana.

Finalmente se debe estructurar las condiciones que cumplen los diferentes puntos encontrados.

Un ejercicio de construcción de una parábola cuando se conoce una recta fija y un punto fijo se puede realizar con compás. Es importante que el alumno lo realice ya que esto permitirá que fortalezca las condiciones que los puntos que están sobre la parábola construida deben satisfacer.

Como un agregado, se pueden trabajar ambas construcciones con ayuda de GeoGebra.

La solución al problema introductorio y la construcción con compás se muestran en el anexo **D1.**

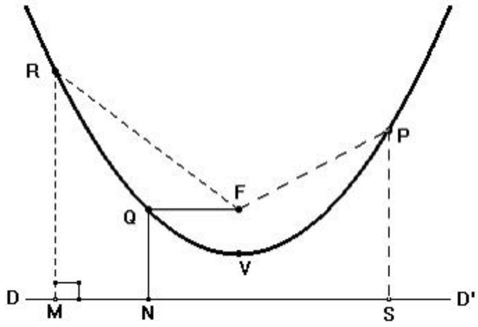
La definición ya se estableció previamente en la unidad 2. en el tema de lugares geométricos. Es el momento de retomarla, con ello, podemos comenzar a trabajar en forma analítica.

Definición de la parábola como lugar geométrico

La parábola es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano (o la trayectoria de un punto), que equidistan de un punto fijo (foco) y de una recta fija (directriz).

En otras palabras, la distancia de cualquier punto P de la parábola al punto fijo (F) es igual a la distancia del punto a la recta fija ($\overleftrightarrow{DD'}$), Observemos

$RF = RM$, $QF = QN$, $PF = PS$



Observación: El punto fijo (F) no puede ser un punto sobre la recta fija.

Podemos ejemplificar con el siguiente ejercicio

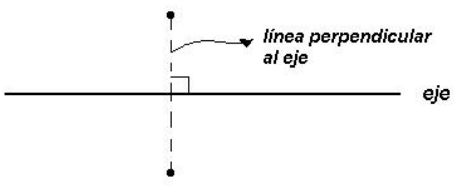
¿Los puntos $P(5,\ 10)$, $Q(14,\ -8)$ y $R(9,\ 12)$, pertenecen a una parábola cuyo foco se localiza en el punto $F(5,\ 4)$ y cuya ecuación de la directriz es $x = -1$?

Solución. Calculamos la distancia de cada punto al punto fijo F y a la recta fija $x = -1$, si son iguales, el punto pertenece a la parábola.

Elementos que determinan una parábola: Foco, Directriz, Eje de simetría, Vértice y Lado recto

Es importante mostrar inicialmente que una parábola tiene un eje de simetría, el cuál es perpendicular a la recta fija y pasa por el punto fijo. Recordemos como se define un eje de simetría

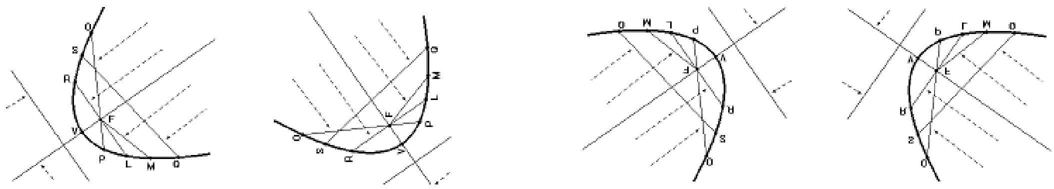
NOTA: Dos puntos son simétricos con respecto a una recta (eje), si ésta es perpendicular al segmento que une a los puntos y pasa por el punto medio..



Los puntos son simétricos respecto al eje

DEFINICIÓN. Se dice que la gráfica de una ecuación es simétrica respecto a un eje de simetría si para cada punto de la curva existe un punto correspondiente de la gráfica, tal que estos dos puntos son simétricos con respecto al eje.

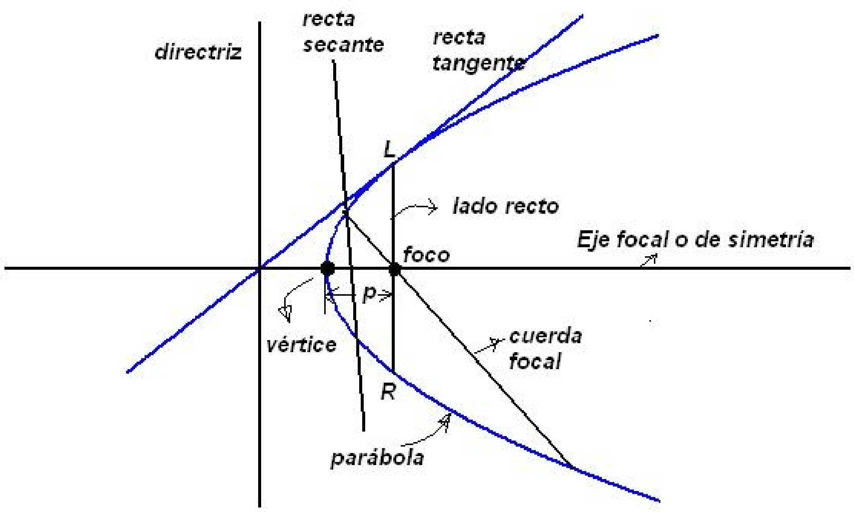
Con ayuda de esta definición, se debe mostrar que no importa la dirección del eje de simetría la parábola permanece invariante,



Una vez que se comprende lo anterior, estamos en condiciones de definir los elementos de la parábola

Elementos de una parábola

Antes de trabajar con la ecuación de la parábola, trabajaremos en términos generales de los elementos. De acuerdo con la siguiente figura



Definimos los siguientes elementos

FOCO: Punto fijo (F).

DIRECTRIZ: Recta fija ($\overleftrightarrow{DD'}$)

EJE FOCAL O DE SIMETRIA: Recta perpendicular a la directriz ($\overleftrightarrow{VF}$) que pasa por el foco.

VERTICE: Punto (V) sobre el eje focal que se localiza en el punto medio entre el foco y la directriz.

DISTANCIA FOCAL: Distancia del foco al vértice (VF), se designa por la letra p. Es decir, $VF = p$.

CUERDA: Segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la parábola.

CUERDA FOCAL: Segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la parábola y pasa por el foco.

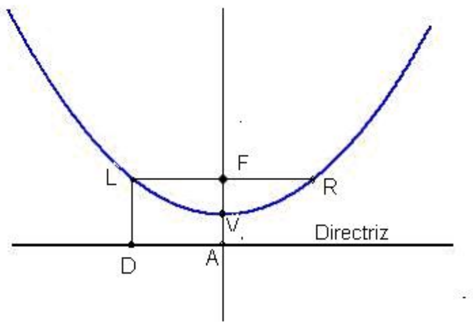
LADO RECTO: Cuerda focal ($\overline{LR}$) perpendicular al eje de la parábola.

RECTA TANGENTE: Recta que toca a la parábola en un punto

RECTA SECANTE: Recta que corta a la parábola en dos puntos

Longitud del lado recto de una parábola

Dentro de las definiciones de los elementos de la parábola, uno que tiene importancia fundamental es la ***DISTANCIA FOCAL,*** que es la distancia del foco al vértice (VF), se designa por la letra p. Es decir, $VF = p$. Observemos la siguiente figura



En la figura se muestra, el foco (F), el vértice (V), el punto de intersección del eje de simetría y la directriz (A), el lado recto (LR) y la distancia del punto L a la directriz.

Como el punto L pertenece a la parábola, se cumple por definición que $LF = LD$ pero $LD = AF$, entonces $LF = AF$

De la figura se tiene $AF = AV + VF$, pero $AV = VF = p$ entonces $AF = 2p$

Por lo tanto $LF = 2p$, como la parábola es simétrica con respecto al eje de simetría entonces $LF = FR$ con esto afirmamos que $LR = 4p$

Observar que prácticamente se hace un repaso de definiciones y axiomas de igualdad, así como distancias congruentes.

Así mismo, lo anterior lo podemos obtener para parábolas con eje de simetría en cualquier dirección y observar que el valor de p es la magnitud de una distancia.

En el anexo **D2,** se muestran ejercicios relativos al manejo de los elementos de una parábola.

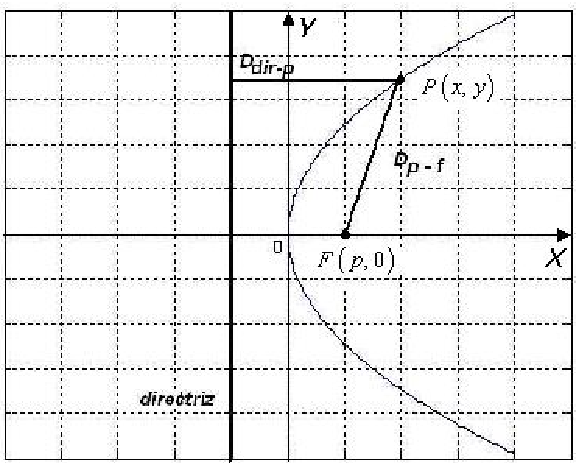
PARÁBOLA HORIZONTAL Y PARÁBOLA VERTICAL

Estableceremos que una parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje X , es una **parábola horizontal**, y como se observó, si la abscisa del foco es mayor que la abscisa del vértice entonces abre a la derecha. En caso contrario abrirá a la izquierda.

Estableceremos que una parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje Y, es una **parábola vertical**, y como se observó, si la ordenada del foco es mayor que la ordenada del vértice entonces abre hacia arriba. En caso contrario abrirá hacía abajo. Aquí es importante mencionar que, si la parábola abre hacia arriba, se dice que es cóncava hacia arriba, en caso contrario, es cóncava hacia abajo.

Ecuación de la parábola con eje de simetría sobre uno de los ejes de coordenadas y vértice en el origen

a) ***Ecuación ordinaria de la parábola horizontal (eje de simetría el eje X) con vértice en el origen $V(0,0)$ y foco en el punto $F(p,0)$.***



En virtud de que el foco de la parábola se encuentra en el punto $F(p,0)$, la directriz (recta vertical) tiene por ecuación $x + p = 0$.

Utilizando la definición de parábola se tiene que:

La distancia del foco a un punto cualquiera de la parábola $P(x,y)$ es igual a la distancia del punto $P(x,y)$ a la directriz.

Por lo tanto, la distancia del punto $P(x,y)$ al foco $F(p,0)$ es:

$$D_{pf} = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}$$

Usando la fórmula para la distancia de un punto a una recta, la distancia del punto

$P(x,y)$ a la directriz es: $$D_{dirp} = \frac{x+p}{\sqrt{1}}$$

Igualamos las distancias y realizamos el proceso algebraico correspondiente hasta obtener

$$y^2 = 4px$$

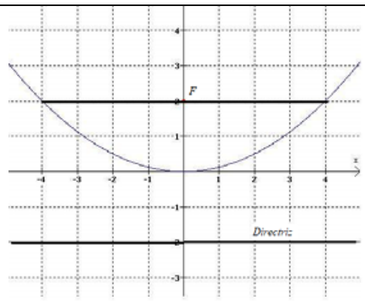
Recordemos que la distancia del vértice al foco es la distancia focal y la representamos por p, y debemos tener cuidado con el signo que le corresponde en la ecuación, esto es debemos utilizar distancias dirigidas,

Si p es positivo $(p>0)$ la parábola se abre hacia la derecha.

Si p es negativo $(p<0)$ la parábola se abre hacia la izquierda.

Ecuación ordinaria de la parábola vertical (eje de simetría el eje y) con vértice en el origen $V(0,0)$ ***y foco en el punto*** $F(0, p)$***. La cual es***:

$$x^2 = 4py$$

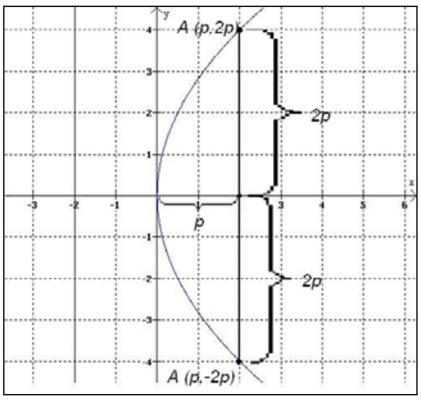
	Si p es positivo $(p>0)$ la parábola se abre hacia arriba. Si p es negativo $(p<0)$ la parábola se abre hacia abajo

Cálculo de la longitud del lado recto (anchura focal) utilizando un tratamiento analítico la ecuación cartesiana de la parábola.

Recordemos que la longitud del lado recto es igual para cualquier parábola.

El cálculo se realizará en particular para una parábola horizontal con vértice en el origen.

Como el foco se encuentra en el punto $F(p,0)$, los extremos del lado recto son los puntos L y R.



En virtud de que la abscisa de los puntos L y L' es $x = p$, al sustituir en la ecuación de la parábola se tiene:

$$y^2 = 4px = 4p(p) = 4p^2$$

En consecuencia, las ordenadas correspondientes de los extremos del lado recto son:

$$y = \pm\sqrt{4p^2} = \pm 2p$$

Los extremos del lado recto tienen coordenadas $L(p, 2p)$ y $L'(p, -2p)$ y la distancia entre los dos puntos corresponde a la longitud del mismo

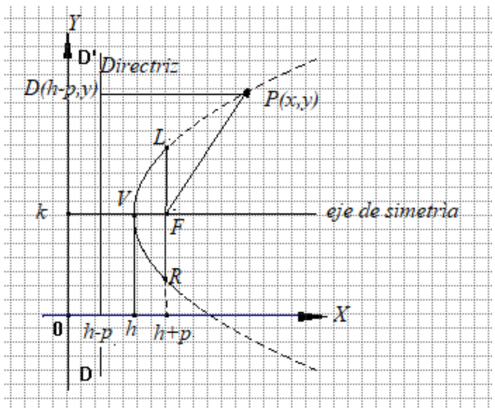
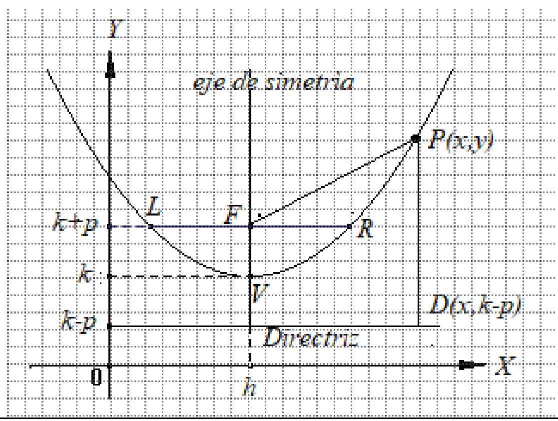
$$LR = \sqrt{(p-p)^2 + (2p-(-2p))^2} = \sqrt{16p^2} = |4p|$$

Observar que la longitud del lado recto se escribe como valor absoluto ya que calculamos una magnitud y recordemos que p puede ser positivo o negativo.

Ecuación ordinaria de la parábola y la interpretación de sus parámetros.

En la solución de problemas relativos a la parábola con vértice en el origen se sugiere utilizar el siguiente esquema

TABLA DE ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA CON VÈRTICE EN EL ORIGEN

<table>
<tr><th>Parábola horizontal</th><th>Parábola vertical</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ecuación ordinaria (clásica)
$$y^2 = 4px$$
Si p > 0 la parábola se abre hacia la derecha.

Si p < 0 la parábola se abre hacia la izquierda.</td><td>Ecuación ordinaria (clásica)
$$x^2 = 4py$$
Si p > 0 la parábola se abre hacia arriba.

Si p < 0 la parábola se abre hacia abajo.</td></tr>
<tr><td>Elementos
Vértice: $V(0,0)$

Foco: $F(p,0)$

Ecuación del eje de simetría: $y = 0$

Ecuación de la directriz: $x = -p$

Lado recto (Anchura focal): $LR = |4p|$

Extremos del lado recto:

$L(p,2p)$ $R(p,-2p)$</td><td>Elementos
Vértice: $V(0,0)$

Foco: $F(0,p)$

Ecuación del eje de simetría: $x = 0$

Ecuación de la directriz: $y = -p$

Lado recto (Anchura focal): $LR = |4p|$

Extremos del lado recto:

$L(-2p,p)$ $R(2p,p)$</td></tr>
</table>

Y a continuación trabajar con ejemplos como los que se muestran a continuación

Ejercicio 1. Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en el punto $F(4,0)$ y graficar.

Ejercicio 2. Obtener la ecuación de la parábola con vértice en el origen y directriz $x = 3$

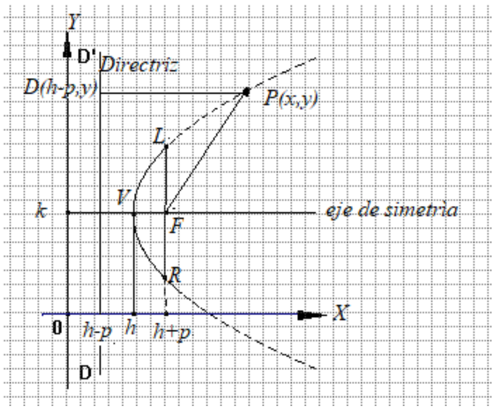
Ejercicio 3. Obtener la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en $F(0,-3)$. Graficar

Ejercicio 4. Obtener la ecuación de la parábola con foco en $F(0,2)$ y directriz $y = -2$

Ecuación de la parábola con vértice fuera del origen

Ecuación ordinaria de la parábola Horizontal con vértice en $V(h,k)$, a partir de la definición de lugar geométrico.

Obtener la ecuación de la parábola con vértice en $V(h\ ,\ k)$ el foco se encuentra en $F(h + p,\ k)$ y la directriz es $x = h - p$



Sea $P(x\ ,\ y)$ un punto cualquiera de la parábola, la distancia de este punto al foco debe ser igual a la distancia del punto a la directriz. Las distancias son:

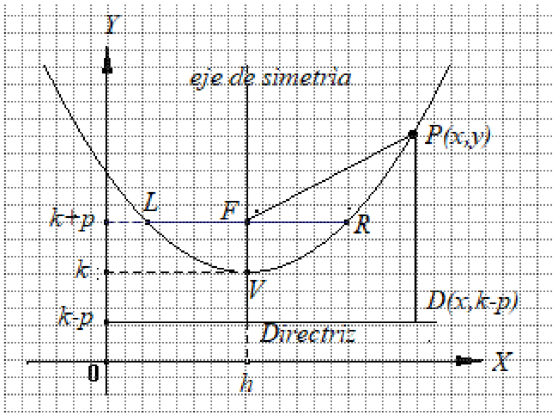
$$D_{pf} = \sqrt{(x-(h-p))^2 + (y-k)^2} \qquad \text{y} \qquad D_{dir-f} = \frac{x-h+p}{\sqrt{1}}$$

Las igualamos y realizamos el álgebra correspondiente, Finalmente obtenemos la ecuación ordinaria de la ecuación de la parábola horizontal.

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)\text{............(A)}$$

Ecuación ordinaria de la parábola Vertical con vértice en $V(h,k)$, a partir de la definición de lugar geométrico.

De manera similar se obtiene la ecuación general de la parábola vertical con vértice en $V(h\,,k)$ y foco en $F(h, k + p\,)$.



Sea $P(x\,,y)$ un punto cualquiera de la parábola, la distancia de este punto al foco debe ser igual a la distancia del punto a la directriz. Las distancias son:

$$D_{pf} = \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+p))^2} \qquad \text{y} \qquad D_{dir-f} = \frac{y-k+p}{\sqrt{1}}$$

Las igualamos y realizamos el álgebra correspondiente, Finalmente obtenemos la ecuación ordinaria de la parábola vertical.

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \text{..........(B)}$$

En las ecuaciones (A) y (B), los parámetros (h,k) son las coordenadas del vértice de la parábola y p es la distancia focal, conociendo estos parámetros, podemos encontrar el lugar geométrico de la ecuación (grafica).

Es importante hacer énfasis que cualquier punto $P(x,y)$ que pertenezca a la parábola cumple con la ecuación (satisface la ecuación); es decir al sustituirlo se cumple la igualdad.

En el anexo **D3** se encuentra primero la ecuación ordinaria de parábolas horizontal y vertical con vértice fuera del origen y se obtienen como caso particular las ecuaciones con vértice en el origen. También se presenta la ecuación de la parábola en su forma general, que a continuación desarrollamos.

Ecuación general de la parábola con eje de simetría paralelo a alguno de los ejes coordenados.

Parábola horizontal

La ecuación de la parábola horizontal con vértice en $V(h\ ,k)$ y foco en $F(h+\ p\ ,k)$. Esta dada por la ecuación

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

Desarrollando tenemos: $y^2-2ky+k^2=4px-4ph$

igualando a cero, queda la ecuación: $y^2-2ky+k^2-4px+4ph=0$

ordenando tenemos: $y^2-4px-2ky+k^2+4ph=0$

Sí definimos $D=-4p$; $E=-2k$ y $F=k^2\ +4ph$ entonces se tiene

$$y^2+Dx+Ey+F=0$$

en caso de que alguno de los coeficientes fuera un numero fraccionario, podemos volver entera la ecuación y tendríamos:

$$By^2+Dx+Ey+F=0$$

esta expresión se conoce como **ecuación general de la parábola horizontal**.

Parábola vertical

De manera similar se obtiene la ecuación general de la parábola vertical con vértice en $V(h\ ,k)$ y foco en, a partir de desarrollar la expresión ordinaria $(x-h)^2=4p(y-k)$

Obtenemos: $Ax^2+Dx+Ey+F=0$

El siguiente esquema es un resumen de las ecuaciones y elementos de la parábola que ayuda en la solución de problemas y ejercicios relativos a la misma, observar que la ecuación está dada cuando el vértice se encuentra en $V(h,k)$ pero se puede usar el esquema para una parábola con vértice en el origen dándoles el valor cero a h y a k.

Es importante que el alumno maneje el concepto y la estructura de la gráfica de la parábola, sin embargo, es fundamental que trabaje el tratamiento analítico, a continuación, se propone que se reduzca la ecuación general a su forma ordinaria con el fin de obtener los parámetros h, k y p.

En el anexo **D4** se desarrollan secuencias para solucionar diferentes problemas que ejemplifican ejercicios de obtener ecuaciones ordinaria y general de parábolas, con vértice fuera del origen, y la obtención, en su caso de la ecuación general.

Transformación de la ecuación general de la parábola a su forma ordinaria

a) **Parábola horizontal**

Su ecuación general es: $By^2 + Ey + Dx + F = 0$

Vamos a dividir toda la ecuación entre el coeficiente B y completamos el trinomio cuadrado perfecto del trinomio correspondiente.

$$y^2 + \frac{E}{B}y + \left(\frac{E}{2B}\right)^2 + \frac{Dx}{B} + \frac{F}{B} = \left(\frac{E}{2B}\right)^2$$

De donde $$\left(y + \frac{E}{2B}\right)^2 = \frac{Dx - F}{B} + \left(\frac{E}{2B}\right)^2 = -\frac{D}{B}x + \frac{E^2 - 4FB}{4B^2}$$

Finalmente $$\left(y + \frac{E}{2B}\right)^2 = -\frac{D}{B}\left(x - \frac{E^2 - 4FB}{4DB}\right)$$

Al comparar con la ecuación ordinaria $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, tenemos los parámetros

$$k = -\frac{E}{2B} \quad ; \quad p = -\frac{D}{4B} \quad \text{y} \quad h = \frac{E^2 - 4FB}{4DB}$$

b) **Parábola vertical**

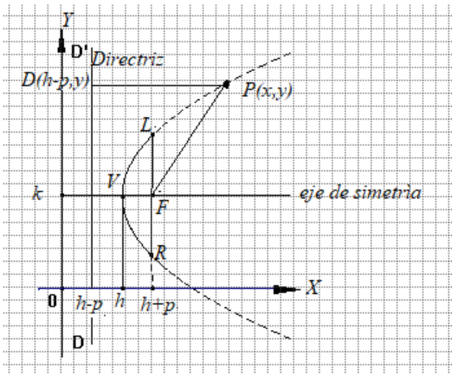
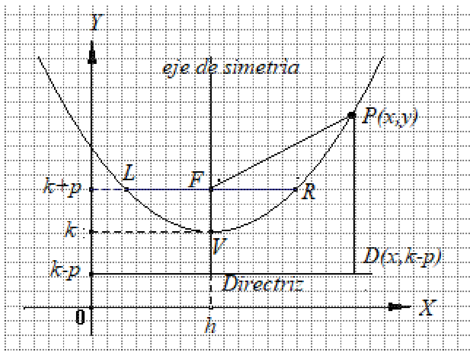
Su ecuación general es: $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

Su transformación a la ecuación ordinaria es

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A}\left(x - \frac{D^2 - 4AF}{4AE}\right)$$

Los parámetros son: $h = -\dfrac{D}{2A}$; $p = -\dfrac{E}{4A}$ y $k = \dfrac{d^2 - 4AF}{4AE}$

En el anexo **D5** se presentan dos ejercicios correspondientes al tema. Y También se puede considerar trabajar con la siguiente tabla.

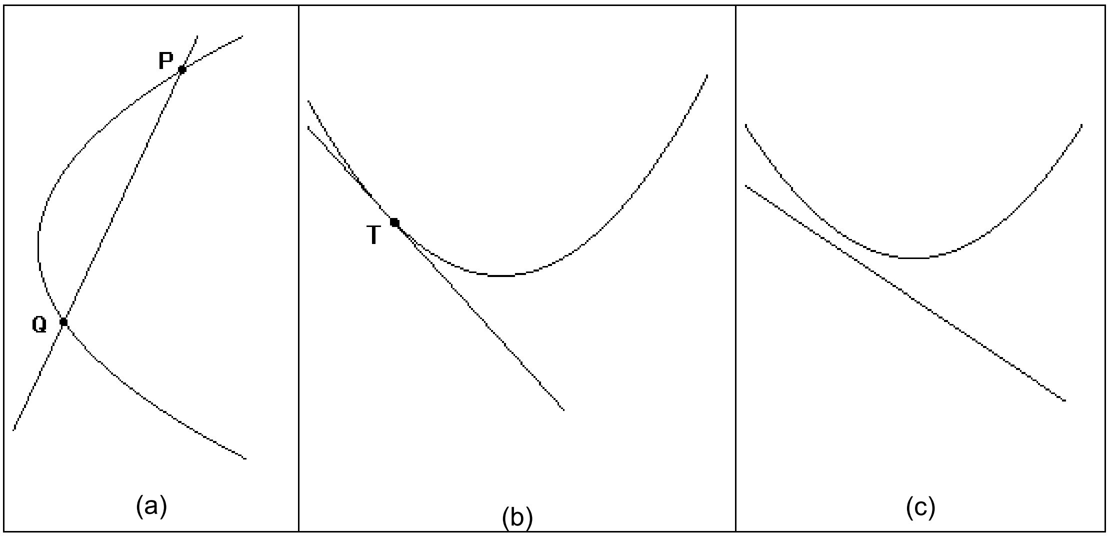
Parábola horizontal	Parábola vertical
Ecuaciones: Clásica: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ General: $By^2 + Dx + Ey + F = 0$	Ecuaciones: Clásica: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ General: $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$
 Si p > 0 la parábola se abre hacia la derecha Si p < 0 la parábola se abre hacia la izquierda	 Si p > 0 la parábola se abre hacia arriba (es cóncava hacia arriba) Si p < 0 la parábola se abre hacia abajo (es cóncava hacia abajo)
Elementos: Vértice: $V(h,k)$ Foco: $F(h+p,k)$ Ecuación del eje de simetría: $y = k$ Ecuación de la directriz: $x = h - p$ Anchura focal (lado recto): $LR = \|4p\|$	Elementos: Vértice: $V(h,k)$ Foco: $F(h,k+p)$ Ecuación del eje de simetría: $x = h$ Ecuación de la directriz: $y = k - p$ Anchura focal (lado recto): $LR = \|4p\|$
La ecuación general: $By^2 + Dx + Ey + F = 0$ Al llevarla a su forma clásica obtenemos $\left(y + \dfrac{E}{2B}\right)^2 = -\dfrac{D}{B}\left(x - \dfrac{E^2 - 4BF}{4BD}\right)$ De aquí se tiene	La ecuación general: $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ Al llevarla a su forma clásica obtenemos $\left(x + \dfrac{D}{2A}\right)^2 = -\dfrac{E}{A}\left(x - \dfrac{D^2 - 4AF}{4AE}\right)$ Se tiene

$k = -\dfrac{E}{2B}$ $h = \dfrac{E^2 - 4FB}{4DB}$ $p = -\dfrac{D}{4B}$	$h = -\dfrac{D}{2A}$ $k = \dfrac{d^2 - 4AF}{4AE}$ $p = -\dfrac{E}{4A}$

Es importante resolver ejercicios donde el alumno transforme la ecuación de su forma general a su forma ordinaria y viceversa.

Posiciones relativas de una recta y una parábola

Se tienen tres casos, la recta y la parábola se pueden intersectan en dos puntos, un punto o no se cortan, como se muestra en la figura.



Recordemos las expresiones de las ecuaciones de una recta y de una parábola

$Ax + By + C = 0$	ecuación general de una recta
$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$	ecuación general de parábola vertical
$By^2 + Dx + Ey + F = 0$	ecuación general de parábola horizontal

Recordar que para encontrar la intersección entre una reta y una parábola, debemos resolver un sistema lineal-cuadrático de dos ecuaciones con dos incógnitas.

En el caso del inciso (a) tendremos como solución del sistema de ecuaciones dos puntos, que significan la intersección de la recta y la parábola.

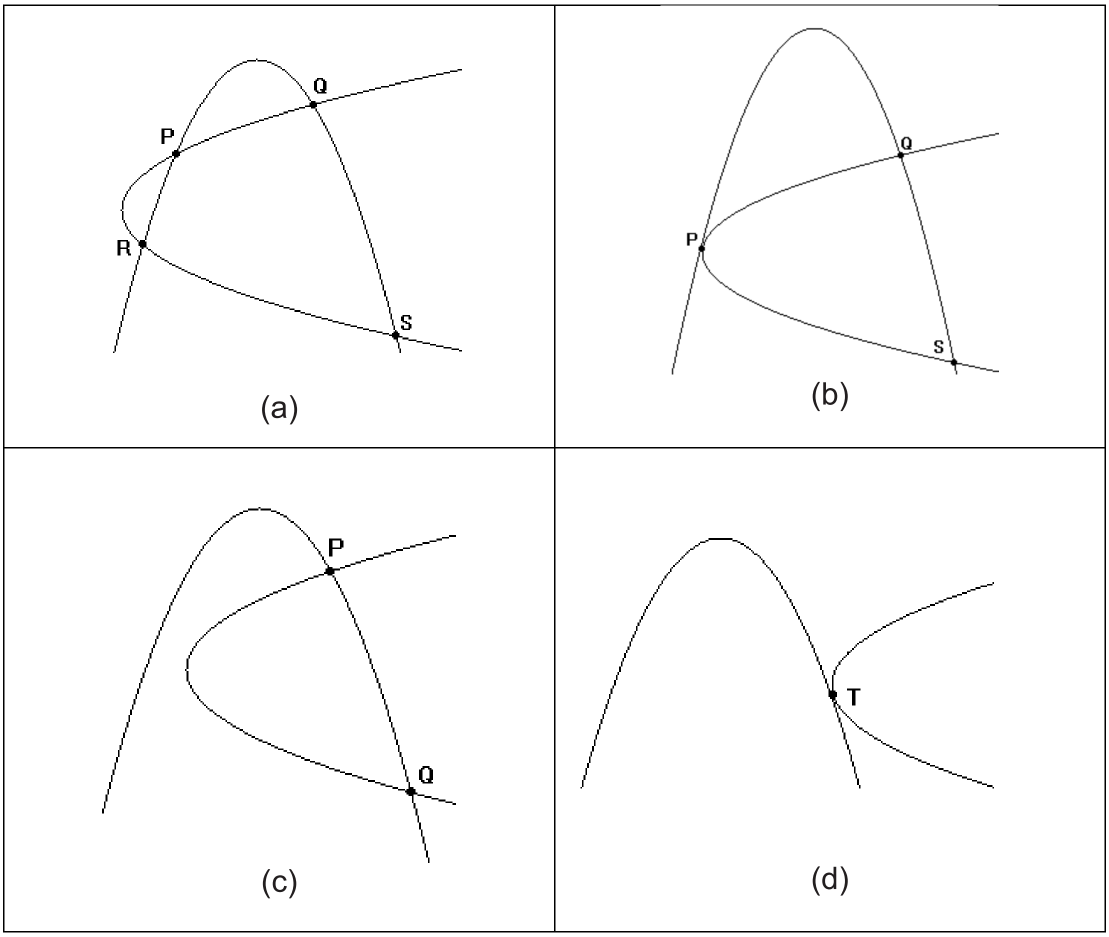
En el caso del inciso (b) tendremos como solución del sistema de ecuaciones un punto, que significa la intersección de la recta y la parábola. Es el caso de una recta tangente a la parábola.

Finalmente, en el caso del inciso (c) no tendremos solución del sistema de ecuaciones, lo que significa la no hay intersección de la recta y la parábola.

Es importante hacer ejercicios de este tipo y repasar las soluciones de ecuaciones cuadráticas con el análisis de la discriminante correspondiente.

Posiciones relativas entre dos parábolas

Se presentan los siguientes esquemas de cuatro casos, se pueden cortar en cuatro puntos, en tres, en dos, en uno, o no se cortan.



Recordemos las expresiones de las ecuaciones de dos parábolas, pueden ser una vertical y una horizontal; dos verticales, o dos horizontales.

$A`x^2+D`x+E`y+F`=0$ ecuación general de parábola vertical

$B`y^2+D`x+E`y+F`=0$ ecuación general de parábola horizontal

Para encontrar los puntos de intersección de las parábolas resolvemos el sistema de dos ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas, las soluciones de ellas nos indicaran el número de intersecciones de las parábolas.

Tal vez sea necesario reiterar el tipo de solución que tiene una ecuación de segundo grado con una incógnita.

En el anexo **D6** se realizan secuencias que ejemplifican el tema de intersección de una recta con una parábola y de parábola con parábola.

En el anexo **D7** se muestran algunos problemas de aplicación, en particular el tiro parabólico.

Finalmente, en el anexo **D8.** Se proponen problemas de retroalimentación-

Identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución

Se consideran varios puntos problemáticos para esta unidad,

Aunque el alumno conoce la parábola, en particular la parábola vertical, ya que se trabajó en las funciones cuadráticas de un curso anterior, el tratamiento de la parábola en la geometría analítica presenta al alumno su característica de construcción y sus elementos básicos, y cuando se trabaja de esta manera la interacción de procedimientos algebraicos con el aspecto gráfico, el alumno tiene diversos problemas, a saber:

1. A lo largo de toda la unidad, el manejo del álgebra.
2. Confusión entre parábola vertical y parábola horizontal
3. Resolver ecuaciones simultáneas
4. Comprender que $P(x, y)$ representa cualquier punto de la recta.

Una sugerencia de cómo resolver la problemática del álgebra, es incidir en los cursos de álgebra anteriores, y en este curso realizar tantos repasos como sea necesario tanto en el álgebra (en particular desarrollo de binomios al cuadrado, factorización), así como en solución de ecuaciones simultáneas.

La forma de hacerlo es trabajar en cursos anteriores con mayor formalidad.

En el caso del manejo de las variables x e y, al trabajar las tabulaciones, debemos hacer énfasis que son casos particulares de los puntos representados por $P(x, y)$. Reiterar el papel que juega la representación de un punto. $P(x, y)$

Unidad 5. Circunferencia, la elipse y sus ecuaciones cartesianas

PRESENTACIÒN

La unidad de Circunferencia y Elipse tiene el propósito de obtener sus ecuaciones cartesianas y trazar sus gráficas correspondientes, dado cualquier conjunto que cumpla su definición de lugar geométrico. Resolverá problemas donde tales curvas se presenten, con el fin de avanzar en la consolidación del método analítico y desarrollar su habilidad de reconocimiento de formas y estructuras

Los aprendizajes que se pretenden lograr por el alumno en esta unidad serán:

- ✓ Deduce la ecuación ordinaria de la circunferencia e identifica sus elementos (radio y coordenadas del centro).
- ✓ Obtiene la ecuación general de la circunferencia
- ✓ Obtiene la ecuación ordinaria a partir de la ecuación general y determina el centro y el radio de una circunferencia.
- ✓ Resuelve problemas de corte geométrico.
- ✓ Obtiene la definición de elipse como lugar geométrico e identificará sus elementos.
- ✓ Obtiene la ecuación cartesiana de una elipse, con ejes paralelos a los ejes cartesianos
- ✓ Reconoce los tipos diferentes de simetría de la elipse.
- ✓ Identifica el papel de los parámetros *a, b, c* en la gráfica de la elipse y los emplea en su construcción.
- ✓ Determina los elementos de la elipse transformando la ecuación general a su forma ordinaria
- ✓ Resuelve problemas geométricos y en otros contextos

A continuación, se presentarán **estrategias** para abordar los diferentes temas, los cuales se irán desglosando en los siguientes párrafos, en donde se hará referencia a anexos que contienen el desarrollo de **secuencias** para presentar los temas, así como **ejercicios** inherentes a los mismos.

Los **conceptos clave** en esta unidad son: **elipse, ecuación ordinaria de circunferencia, ecuación ordinaria de elipse.**

CIRCUNFERENCIA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

Se puede iniciar el tema con la *Construcción de una circunferencia utilizando el método del jardinero*

Actividad que realizar

1. Sobre una hoja blanca, colocar un alfiler (o sujetador de recados para pizarrones de corcho).
2. Amarrar una cuerda de 20 cm de longitud en el alfiler (figura 1),
3. Colocar un lápiz al final de la cuerda (figura 2) y manteniéndola tensa deslizar el lápiz hasta completar una vuelta.

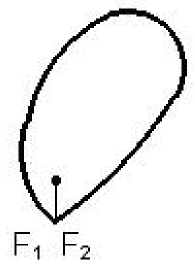


figura 1

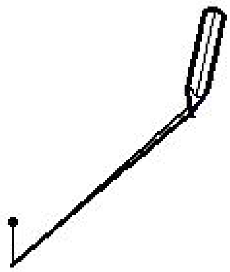
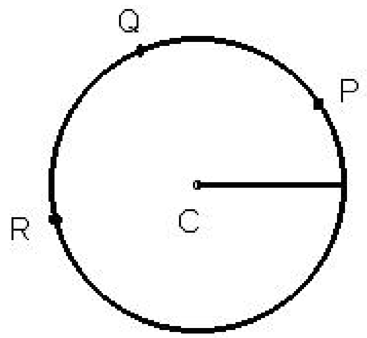


figura 2

El alumno reconoce la figura y puede decir su nombre.

Se le pide a los alumnos situar sobre la circunferencia tres puntos por ejemplo P, Q y R, y se les indica que midan la distancia que hay de cada punto a los focos (el punto común), el cual designamos con la letra C.

Preguntar ¿cuál es la condición (propiedad) que cumplen los puntos de la circunferencia?

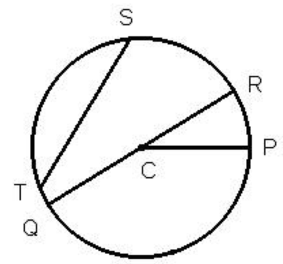
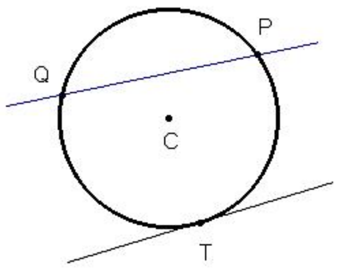
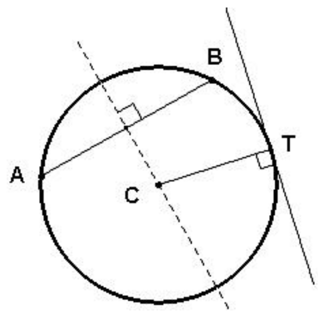


Tratamiento analítico

Definición, La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano, que equidistan (se encuentran a una misma distancia) de un punto fijo llamado centro de la circunferencia. A la distancia constante se le llama radio de la circunferencia y se denota por r.

Nota. Es importante manifestar el carácter dinámico del lugar geométrico, para la circunferencia, por medio de la trayectoria que sigue un punto que siempre se mantiene equidistante de un punto fijo.

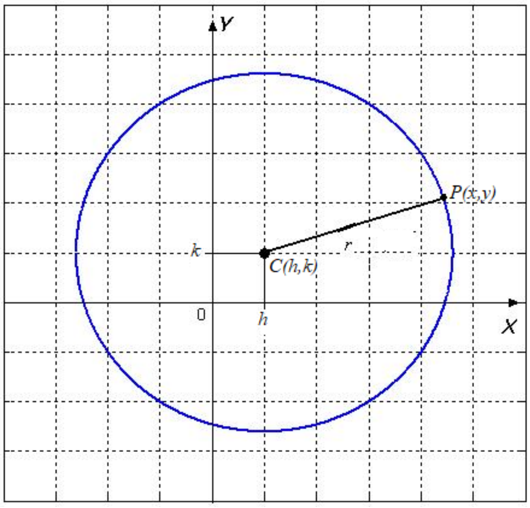
Antes de obtener su ecuación cartesiana, recordemos elementos en la circunferencia.

Radio: Segmento del centro a cualquier punto de la circunferencia: $\overline{CP}$ ***Cuerda:*** Segmento que une dos puntos de la circunferencia: $\overline{TS}$ ***Diámetro:*** Cuerda que pasa por el centro $\overline{QR}$ ***Ángulo central.*** Ángulo subtendido por dos radios $\measuredangle RCP$ ***Arco.*** Segmento curvo $\overset{\frown}{RS}$	
Recta secante: Recta que pasa (corta) por dos puntos de la circunferencia. La recta que pasa por los puntos P y Q es una recta secante. ***Recta tangente:*** Recta que corta (toca) en un punto a la circunferencia. La recta que pasa por el punto T es una recta tangente	
Propiedades de la circunferencia La longitud del diámetro es dos veces la del radio. La mediatriz de una cuerda AB pasa por el centro C La recta tangente en el punto de contacto T es perpendicular al radio que une el centro con el punto de tangencia T	

ECUACIÒN CARTESIANA DE LA CIRCUNFERENCIA

Recordemos que en la unidad dos, ya manejamos en forma breve la obtención de la circunferencia a partir de su definición de lugar geométrico.

Consideremos que la circunferencia tiene centro en el punto $C(h,k)$ y que tiene radio r , El punto $P(x,y)$ representa a cualquiera de los puntos de la circunferencia.



Al aplicar la definición, se tiene

La distancia del punto $P(x,y)$ al punto $C(h,k)$, debe ser igual a la distancia r.es y

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

De donde $$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Lo cual es la ecuación cartesiana de la circunferencia, establecer que x e y son variables y parámetros h,k y r. Escrita de esta manera se le denomina ecuación ordinaria de la circunferencia.

Caso particular cuando el centro está en el origen, esto es $C(0,0)$

En este caso, al sustituir en la ecuación (1), se tiene

$(x-0)^2+(y-0)^2=r^2$ de donde $x^2+y^2=r^2$, es la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio r.

En el anexo **E1**, encontramos la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y con centro fuera del origen.

En el anexo **E2,** se muestran secuencias al resolver diversos ejercicios donde se encuentra la ecuación de la circunferencia y donde a partir de condiciones dadas se encuentra la ecuación de la circunferencia correspondiente.

Ecuación general de la circunferencia

Si desarrollamos los binomios al cuadrado de la ecuación ordinaria

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Tenemos

$$x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2=r^2$$

Ordenando $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$

Y si definimos $D=-2h$; $E=-2k$ y $F=h^2+k^2-r^2=0$

Tenemos $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

Sí existen coeficientes racionales en la ecuación, entonces la ecuación se puede escribir como

$$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$$

El coeficiente A es el número entero que corresponde al mínimo común múltiplo de los coeficientes racionales que existan en la expresión y D, E y F son nùmeros enteros. Observar que los coeficientes de los términos cuadráticos son iguales.

En el anexo **E3,** se trabajan ejercicios para obtener la ecuación general de la circunferencia.

Transformar la ecuación general de la circunferencia a su forma ordinaria.

La ecuación general de circunferencia es de la forma

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \textbf{\textit{.........(5.1)}}$$

representa una circunferencia o un punto o no representa ningún conjunto de puntos en los números reales (lugar geométrico) de acuerdo con la relación que guardan sus coeficientes D,E y F.

Para establecer la condición que deben tener los coeficientes D,E y F se considera transformar la ecuación a su forma clásica.

Debemos factorizar la expresión general para obtener la correspondiente ecuación ordinaria, es decir escribirla de la forma

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Para ello, dividimos expresión (5.1) entre el coeficiente A y ordenamos en términos de la variable x, de la variable y y términos independientes.

Completamos los correspondientes trinomios cuadrado-perfectos

Al comparar con la ecuación de la circunferencia en su forma clásica

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Se observa que el centro se localiza en el punto $C\left(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2A}\right)$ y longitud del radio debe ser

$$r = \sqrt{\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}}$$

Al estar involucrado un radical, se debe garantizar que el término D^2+E^2-4AF debe ser mayor que cero para que se tenga como lugar geométrico una circunferencia. Si $D^2+E^2-4AF=0$ el lugar geométrico corresponde a un punto y si $D^2+E^2-4AF<0$ no existe lugar geométrico.

En el anexo **E4,** se desarrolla el álgebra correspondiente y se presentan ejercicios relativos al tema.

Problemas Geométricos

En el anexo **E5** se presentan ejercicios con diversos problemas geométricos como los siguientes:

- ✓ Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyos extremos de un diámetro son los puntos de intersección de una recta con los ejes coordenados.
- ✓ Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en un punto dado y que es tangente una recta.
- ✓ Encontrar la ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos
- ✓ Encontrar la ecuación general de la circunferencia que pasa por dos puntos y cuyo centro se encuentra sobre una recta.
- ✓ Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por dos puntos y determinado radio.

Y en el anexo **E6**, se trabajan ejercicios de recta tangente a una parábola, se consideran en este punto, ya que se requiere el manejo de la ecuación de la recta y de la circunferencia, Y en el anexo **E7** se presentan problemas suplementarios de la circunferencia para una retroalimentación.

LA ELIPSE Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

LA ELIPSE, SU CONOCIMIENTO Y SUS ELEMENTOS

Para el conocimiento geométrico de la elipse y sus elementos, se recomienda dibujar elipses por medio del método del jardinero (sugerencia de actividad en casa).

Actividad que realizar

1.- Sobre una hoja blanca, colocar dos alfileres (o sujetadores de recados para pizarrones de corcho), a una distancia que sea menor de 20 cm.

2.- Amarrar una cuerda de 20cm de longitud en los alfileres (figura 1).

3.- Colocar un lápiz en el cordel (figura 2) y manteniendo tensa la cuerda deslizar el lápiz hasta completar una vuelta.

Figura 1

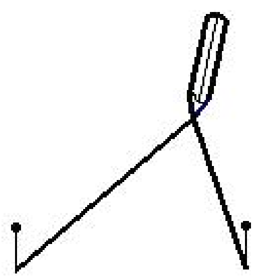
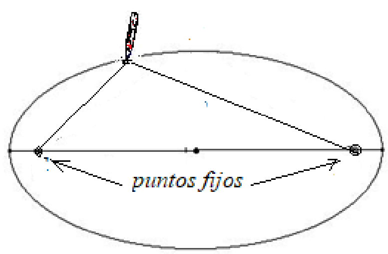
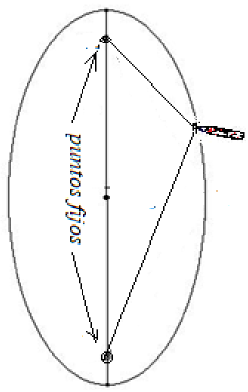


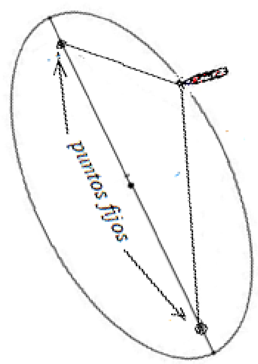
Figura 2

Obtener la elipse y a continuación establecer sus elementos.

acuerdo como De se elijan los puntos fijos, esto es la recta que pase por ambos puntos la elipse la podemos llamar Elipse horizontal, Elipse vertical o elipse Oblicua.







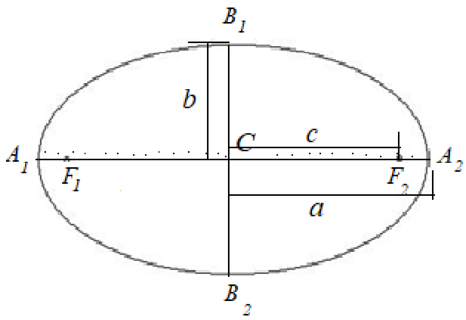
ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE LA ELIPSE

Una vez que se ha dibujado la curva, con construcciones de regla y compás se comienza a establecer los elementos de la elipse.

Con la curva dibujada se debe ir construyendo lo que se le pide.

Al inicio se debe mencionar que la curva que se trazó se llama elipse y es importante recordar el concepto de simetría, solicitar al alumno que determine los ejes y puntos de simetría. Revisar el anexo **B7** inciso c referente a lugares geométricos.

A continuación, en base a la figura, vamos a establecer la definición del centro, de los focos, los vértices, el eje mayor, el eje menor, podemos usar cualquier elipse, horizontal, vertical u oblicua. Trabajamos aquí con la elipse horizontal.



Ahora vamos a definir las longitudes del eje menor, eje mayor y distancia entre focos.

Establecemos la magnitud del segmento F_1F_2 como la distancia focal y a esta distancia la denotamos por *2c*, es decir $F_1F_2 = 2c$

.A la magnitud del segmento A_1A_2 se le llama longitud del eje mayor y se denota por $2a$, es decir, la longitud del segmento $A_1A_2 = 2a$.

Al trazar un segmento perpendicular al eje mayor, hasta cortar a la curva en dos puntos que llamaremos B_1 y B_2, tendremos el segmento $\overline{B_1B_2}$ al cual denominaremos eje menor, B_1 y B_2 son los extremos del eje menor.

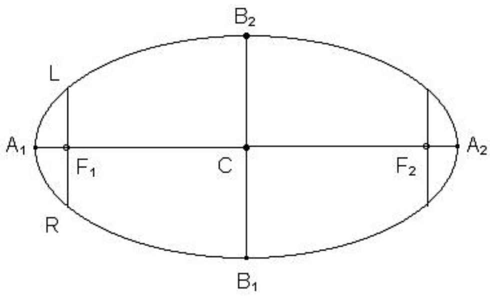
Al punto de intersección de los dos ejes, le llamaremos centro de la elipse y lo representamos con C .

A la distancia entre los extremos del eje menor B_1 y B_2 le llamamos longitud del eje menor y la denotamos por $2b$. Es decir $B_1B_2 = 2b$

En este momento es importante mostrar al alumno la simetría de la curva respecto al eje mayor, respecto al eje menor y al centro.

Definición de la anchura focal o lado recto de una elipse

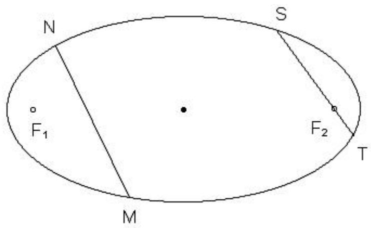
Por los focos F_1 y F_2 se traza un segmento perpendicular al eje mayor, hasta cortar a la curva en dos puntos, que se representan, por ejemplo con L y R, al segmento $\overline{LR}$ se le llama anchura focal o lado recto, L y R son los extremos del lado recto. En la elipse se tienen dos lados rectos.



Otras rectas en la elipse

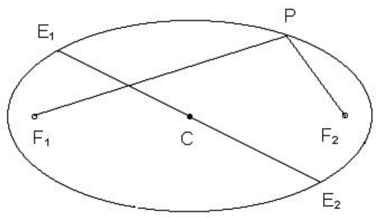
Una cuerda es el segmento de recta que une dos puntos de la elipse, el segmento $\overline{MN}$ es una cuerda de la elipse.

En particular, una cuerda que pasa por uno de los focos es una cuerda focal, el segmento $\overline{ST}$ es una cuerda focal.



Un diámetro es una cuerda que pasa por el centro, el segmento $\overline{E_1E_2}$ es un diámetro.

Si P es un punto de la elipse, los segmentos $\overline{F_1P}$ y $\overline{F_2P}$ que unen los focos F_1 y F_2 con el punto P se llaman radios vectores

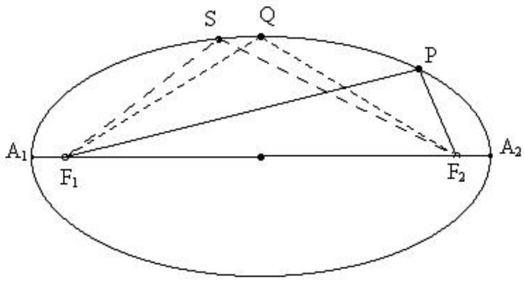


Los elementos de la elipse son invariantes cuando esta se orienta en diferentes direcciones.

En el anexo **E8,** se trabajan construcciones alternas de la elipse.

DEFINICION Y PROPIEDADES DE LA ELIPSE

Marcar en una elipse previamente construida, los focos F_1, F_2, el eje mayor y sus extremos $A_1 \ y \ A_2$ y situar tres puntos $P, Q \ y \ S$ sobre la misma.



Medir las distancias, se sugiere que se utilice un compás para ello.

$A_1A_2,\ PF_1,\ PF_2,\ PF_1 + PF_2,\ QF_1,\ QF_2,\ QF_1 + QF_2,\ SF_1,\ SF_2 \ y \ SF_1 + SF_2.$

.

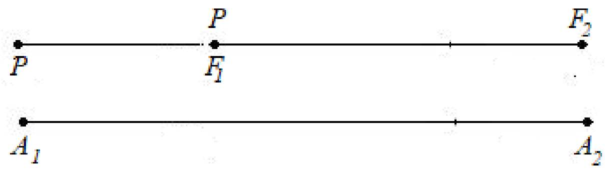
Observar y escribir la relación que guardan las cantidades:

$$A_1A_2,\ PF_1 + PF_2,\ QF_1 + QF_2 \ y \ SF_1 + SF_2$$

De manera alternativa se puede trabajar de la siguiente manera:

1) Reproducir las distancias sobre una recta, por ejemplo, primero reproducir la distancia A_1A_2 sobre una recta usando el compás y marcando los puntos $A_1 \ y \ A_2$.

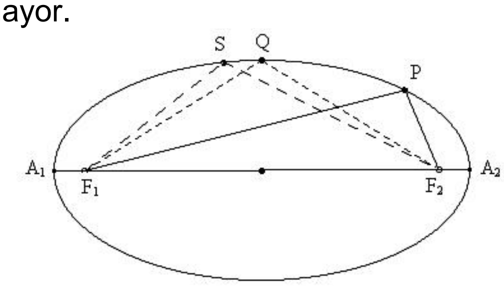
2) Con el uso del compás, se reproduce, tomando como punto inicial el punto A_1, la distancia PF_1 y el punto al que llega dicho segmento lo usamos como punto inicial para reproducir la distancia PF_2 y comparamos.



Lo anterior permite enunciar la definición de elipse

Para definir la elipse, se deben considerar el lugar geométrico en su carácter estático (como un conjunto de puntos de un plano) y en su carácter dinámico (como un punto que se mueve siguiendo cierta trayectoria)
Recordar que un lugar geométrico (curva o trayectoria) es el conjunto de puntos que cumplen con una condición dada.

Definición. La elipse es el lugar geométrico del conjunto de puntos en el plano, cuya suma de distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es una constante, igual a la longitud del eje mayor.

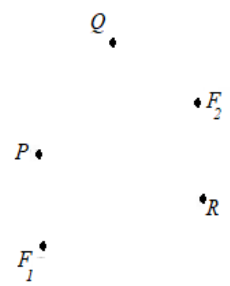


$$PF_1 + PF_2 = QF_1 + QF_2 = SF_1 + SF_2 = A_1A_2 = 2a$$

Observar que

- La definición excluye los puntos que se encuentran en el segmento que une los extremos del eje mayor (vértices).
- La constante ($2a$) que se menciona en la definición debe ser positiva.
- La constante ($2a$) debe ser mayor que la distancia entre los focos.

Se pueden trabajar los siguientes ejemplos

Ejemplo 4.3. Con una distribución de puntos como los de la figura, Indicar, si ¿los puntos P, Q y R pertenecen a la misma elipse con focos en los puntos F_1 y F_2 ?	

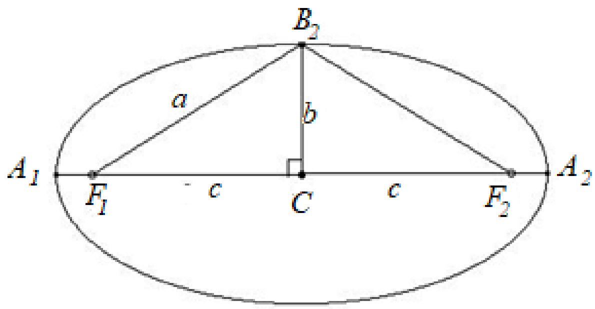
O en coordenadas cartesianas

Ejemplo 4.2 ¿Los puntos $P(-9,\ 3),\ Q(4,-2)\ y\ R(5,\ 10),$ pertenecen a una elipse cuyos focos están en los puntos $F_1(-8,\ 3)\ \ y\ \ F_2(16,\ 3)$?

Ejemplo 4.4. ¿En un sistema de coordenadas cartesiano, los puntos $P(-1,\ 5),\ \ Q(4,\ 9)\ y\ \ R(8,\ 2.6)$ pertenecen a la misma elipse de focos en los puntos $F_1(1,\ 5)\ y\ \ F_2(7,5)$?

Relación entre los parámetros a (longitud del semieje mayor), b (longitud del semieje menor) y c (longitud del centro al foco).

Considerar uno de los extremos del eje menor, por ejemplo, B_2



Recordemos que $F_1C = F_2C = c$ y que la longitud del semieje menor CB_2 es b

Por otro lado, de la definición de elipse tenemos que:

$$B_2F_1 \ + \ B_2F_2 \ = \ A_1A_2 \ = \ 2a \qquad \text{.....(1)}$$

Observamos que los triángulos $(F_1CB_2\ \ y\ \ F_2CB_2)$ son triángulos rectángulos y a la vez son congruentes, por lo tanto $B_2F_1 \ = \ B_2F_2$ por ser lados correspondientes de los triángulos.

Entonces $\qquad B_2F_1 \ + \ B_2F_2 \ = \ 2(B_2F_1)$

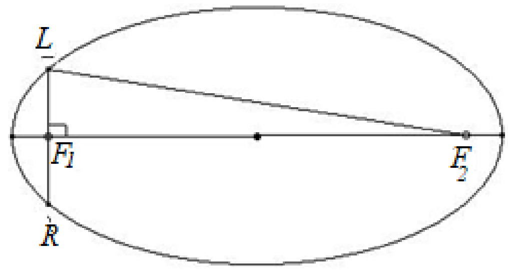
Al sustituir en la ecuación (1) $\qquad 2(B_2F) \ = \ 2a \quad \therefore \quad B_2F_1 \ = \ a$

Y al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo F_1CB_2 se obtiene la relación entre los parámetros a, b y c

$$a^2 = b^2 + c^2$$

En el anexo **E9,** se trabaja la definición de la Elipse, la relación Pitagórica y se desarrollan ejercicios inherentes al tema.

LONGITUD DE LA ANCHURA FOCAL O LADO RECTO LR



En la figura se observa que la longitud del lado recto es $LR = 2(LF_1)$

Por la definición de elipse se tiene $LF_1 + LF_2 = 2a$

Despejando LF_2 se tiene $LF_2 = 2a - LF_1$ .....(1)

Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo LF_1F_2

$$(LF_1)^2 + (F_1F_2)^2 = (LF_2)^2$$

donde $F_1F_2 = 2c$

Por lo tanto $(LF_1)^2 + 4c^2 = (LF_2)^2$ …..(2)

Sustituyendo la ecuación (1) en la ecuación (2) se tiene

$$(LF_1)^2 + 4c^2 = (2a - LF)_1^2$$

Al desarrollar el cuadrado del binomio y reducir. Se tiene

$$4c^2 = 4a^2 - 4a(LF_1)$$

Y al simplificar la expresión $\therefore\ a(LF_1) = a^2 - c^2 = b^2$

El valor de LF_1 es: $LF_1 = \dfrac{b^2}{a}$

Por lo tanto, la anchura focal o longitud del lado recto es: $LR = 2\left(LF_1\right) = \dfrac{2b^2}{a}$

LA EXCENTRICIDAD DE LA ELIPSE

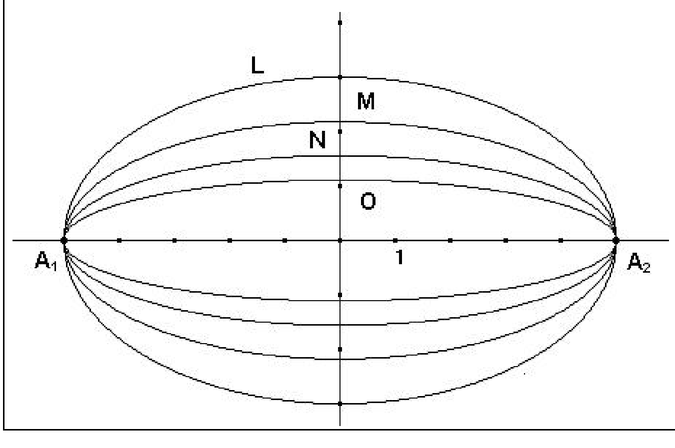
La forma de la elipse, en su curvatura, la podemos conocer con su parámetro excentricidad de la elipse, la cual se define como el cociente $\dfrac{c}{a}$,

Para el estudio de la excentricidad conviene realizar diferentes dibujos de elipses con la misma longitud del eje mayor y con los focos primero cercanos a los extremos del eje mayor y posteriormente cercanos al centro para observar su comportamient0.

Finalmente, como uno de los parámetros importantes de la elipse es su excentricidad, podemos trabajar el siguiente ejemplo

Ejemplo 4.14. Elipses con el mismo centro y la misma longitud de su eje mayor. En particular, las siguientes elipses tienen el mismo centro y la misma longitud del eje mayor $2a = 10$,

a) Grafiquemos elipses con distancia focal cada vez mayor; por ejemplo, la elipse L tiene distancia focal $2c = 8$, mientras que la elipse M tiene distancia focal $2c = 2\dfrac{9}{2} = 9$, la elipse N tiene distancia focal $2c = 2\dfrac{19}{4} = 2\left(4.75\right) = 9.5$, y la elipse O tiene $2c = 2\left(\dfrac{39}{8}\right) = 2\left(4.875\right) = 9.75$. Observar que cuando los focos se van acercando a los extremos del eje mayor, las elipses se van comprimiendo cada vez más.



Consideremos la razón $\dfrac{c}{a}$ para cada una de las elipses.

Para L, tiene el resultado 0.8

Para M, tiene el resultado 0.9

Para N, tiene el resultado 0.95

Para O, tiene el resultado 0.975

Se puede observar que esta razón se acerca al valor de 1, cuando los focos s acercan a los extremos del eje mayor.

Analizar el caso cuando la distancia focal va disminuyendo.

La excentricidad de la elipse se denota por medio de la letra e y como ya se mencionó se define por medio de la relación $e = \dfrac{c}{a}$

Como $c < a$ la excentricidad siempre es menor que uno.

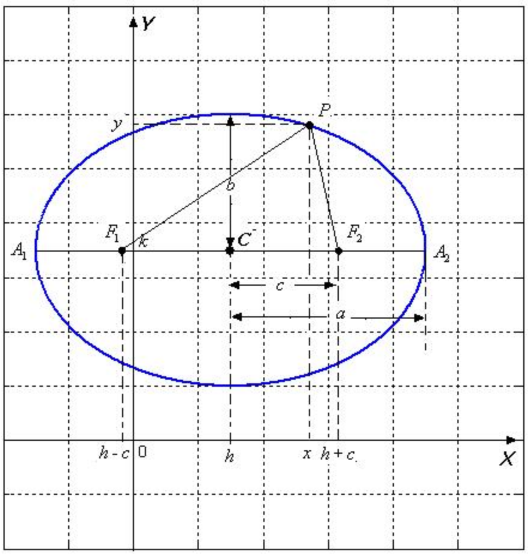
Una vez que conocemos los parámetros de la elipse, vamos a trabajar el tratamiento analítico.

En el anexo **E10** se trabajan ejercicios relacionados con la longitud del eje mayor y su excentricidad.

ECUACIÒN CARTESIANA DE LA ELIPSE EN SU FORMA ORDINARIA

Ecuación ordinaria de la elipse con ejes paralelos a los ejes cartesianos

a) Ecuación de la elipse horizontal (eje mayor paralelo al eje X) con centro en el punto de coordenadas C(h, k).



De la definición de elipse se tiene

$$PF_1 + PF_2 = A_1A_2$$

$$PF_1 + PF_2 = 2a \text{ .....(1)}$$

Para obtener las distancias PF_1 y PF_2 se requiere conocer las coordenadas de los focos F_1 y F_2.

Se tiene que $CF_1 = CF_2 = c$

Por lo tanto $F_1(h\text{-}c, k)$ y $F_2(h+c, k)$

Las coordenadas del punto P son $P(x, y)$

Por lo tanto

$$PF_1 = \sqrt{\left[x-(h-c)\right]^2+(y-k)^2} = \sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2}$$

$$PF_2 = \sqrt{\left[x-(h+c)\right]^2+(y-k)^2} = \sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}$$

Sustituyendo en la ecuación (1), la definición de lugar geométrico de la elipse se tiene:

$$\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2} + \sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2} = 2a$$

Desarrollando la expresión y realizando el álgebra correspondiente

$$a^2\left[(x-h-c)^2+(y-k)^2\right] = a^4-2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$

De donde se obtiene

$$\left(a^2-c^2\right)\left(x-h\right)^2+a^2\left(y-k\right)^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$$

Y utilizando la relación de Pitágoras $a^2-c^2=b^2$ se tiene

$$b^2\left(x-h\right)^2+a^2\left(y-k\right)^2=a^2b^2$$

Y al dividir entre a^2b^2

$$\frac{b^2\left(x-h\right)^2}{a^2b^2}+\frac{a^2\left(y-k\right)^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

Finalmente, al simplificar

$$\frac{\left(x-h\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y-k\right)^2}{b^2}=1$$

Se tiene la ecuación de la elipse en forma ordinaria con eje mayor paralelo al eje *X*, cuyo centro se encuentra en el punto $C\left(h,\,k\right)$

Caso particular. Elipse horizontal con centro en el origen $C(0,0)$.

En este caso los valores de los parámetros h y k son cero, por lo tanto, la ecuación se reduce a la expresión

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

En el anexo **E11,** se deduce la ecuación ordinaria y con centro en el origen de la elipse horizontal, se trabajan ejercicios del tema.

Ecuación general de la elipse horizontal

Para obtener la forma general de la ecuación de la elipse, simplemente se desarrollan los productos involucrados y se reduce a una expresión de la forma $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$

Esto es, la ecuación en su forma ordinaria o clásica es

$$\frac{\left(x-h\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y-k\right)^2}{b^2}=1$$

Al desarrollar la expresión racional se tiene:

$$\frac{a^2(x-h)^2+b^2(y-k)^2}{a^2b^2}=1$$

Al desarrollar los productos notables y multiplicar por a^2b^2 se tiene:

$$a^2\left(x^2-2xh+h^2\right)+b^2\left(y^2-2yk+k^2\right)^2=a^2b^2$$

de donde:

$$a^2x^2-2a^2xh+a^2h^2+b^2y^2-2b^2yk+b^2k^2-a^2b^2=0$$

Al ordenar términos en forma descendente de monomios de grado mayor en las variables se tiene:

$$a^2x^2+b^2y^2-2a^2hx-2b^2ky+a^2h^2+b^2k^2-a^2b^2=0$$

Al definir los coeficientes

$$A=a^2\ ;B=b^2\ ;C=-2a^2h\ ;\ D=-2b^2k\ \text{y}\ \ F=a^2h^2+b^2k^2-a^2b^2$$

Se escribe:

$$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$$

Una ecuación cuadrática de la forma $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ con $A<B$, representa (lugar geométrico), una elipse horizontal o un punto o no representa ningún conjunto de puntos en los números reales.

En el anexo **E12,** se realizan secuencias para obtener la ecuación general de la elipse horizontal a partir de su ecuación ordinaria y viceversa. Se ejemplifica cuando la expresión general no pertenece a una elipse.

b) Ecuación de la elipse vertical (eje mayor paralelo al eje Y, con centro en el punto $C(h,k)$.

De manera análoga a como se obtuvo la ecuación de la elipse horizontal se obtiene la ecuación de la elipse vertical, esto es a partir de la definición de lugar geométrico de elipse.

La ecuación en su forma ordinaria de la elipse vertical es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Y su ecuación general de la elipse vertical es de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{con} \quad A > B$$

Es importante el manejo de los coeficientes A y B, ya que si $A<B$, en caso de ser una elipse, será horizontal, en todo caso si $A > B$ será una elipse vertical.

Recordar que la ecuación puede no representar la ecuación de una elipse.

Los elementos de una elipse vertical con centro en el punto $C(h, k)$ están localizados en los puntos dados por las siguientes expresiones:

Focos: $F_1(h, k - c, k)$, $F_2(h, k + c)$

Extremos del eje mayor (vértices):

$$A_1(h, k - a)\ ;\ A_2(h, k + a)$$

Extremos del eje menor:

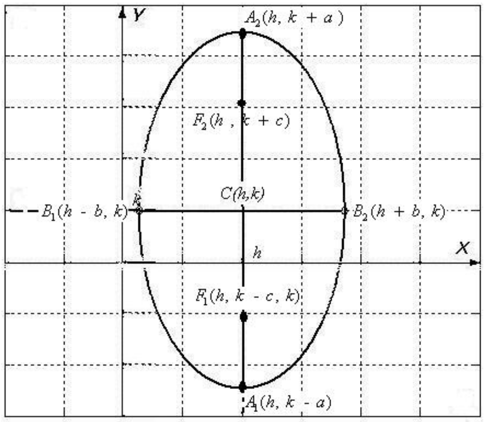
$$B_1(h - b, k)\ ;\ B_2(h + b, k)$$

Anchura focal: $LR = \dfrac{2b^2}{a}$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}$

Área: $A = \pi ab$

Figura de elipse vertical con centro en $C(h, k)$



Ecuación de la elipse vertical con centro en el origen de coordenadas $C(h, k)$ **.**

En este caso, los valores de h y k son igual a cero, por lo tanto, la ecuación ordinaria o clásica de la elipse vertical se convierte en:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

La forma general en este caso es $Ax^2 + By^2 + F = 0$ en dónde $A > B$.

Observar que no contiene términos lineales.

En el anexo **E13,** se trabaja la ecuación de la elipse vertical, su ecuación ordinaria, su ecuación con centro en el origen y se obtiene su ecuación general. Se resuelven ejercicios

Transformar la ecuación de la elipse de su forma general a su forma ordinaria.

Si la ecuación general de la elipse es

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{con} \quad A > B$$

Debemos transformarla a la ecuación ordinaria de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Si la ecuación general de la elipse es

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{con} \quad A < B$$

Debemos transformarla a la ecuación ordinaria de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

En el anexo **E14**, se realizan ejercicios de transformar la ecuación general de la elipse a su forma ordinaria.

En el anexo **E15**, se presentan problemas suplementarios.

Identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución

1. A lo largo de toda la unidad, el manejo del álgebra.
2. Confusión entre elipse vertical y elipse horizontal
3. Resolver ecuaciones simultáneas
4. Comprender que $P(x, y)$ representa cualquier punto de un lugar geométrico.

Para ayudar a solucionar estos puntos se propone, seguir trabajando el álgebra cuando es necesario, esto es los desarrollos algorítmicos repasarlos y solicitar a los alumnos que realicen desarrollos semejantes, respecto a la confusión de elipses horizontales y verticales, trabajar con ejercicios que los intercalen, esto es, un ejercicio de elipse horizontal y uno de elipse vertical.

Trabajar las ecuaciones simultaneas en diversos ejercicios e incidir en cursos anteriores para que se realice un trabajo más formal y finalmente en cada ejercicio de Recta, circunferencia, parábola y elipse reiterar el concepto de punto de una curva, su representación y el significado. Insistir en lugares geométricos.

BIBLIOGRAFÍA

1. Ayres, F. Jr *Trigonometría Plana y Esférica*, Mc graw–Hill / Interamericana de México, 2ª edición.
2. Carrillo, De Oteyza, Hernández, Lamm, Ramírez, *Geometría Analítica*, Pearson educación, 3ª
3. Colette, Jean-Paul *Historia de las matemáticas* Vol I, Siglo XXI editores 1986.
4. Fleming W., Varber, D. Algebra y trigonometría con Geometría Analítica, Prentice Hall, 3ª ed.
5. González Urbaneja, P. Los orígenes de la Geometría Analítica, Fundación Canaria de Historia de la Ciencia,
6. Rodríguez, Gaona, Luisillo, Morales, et al… *Matemáticas III*, Grupo de trabajo 401C, ENCCH UNAM, “2002.
7. Lehmann, C., *Geometría Analítica,* Editorial Limusa 2008 México
8. Newman, James R *Sigma el mundo de las matemáticas* Vol 1 Grijalbo Ediciones, 1968.
9. Real Sociedad Matemática española, Divulgamat, 2014.
10. Rees P. Sparks F., *Álgebra y Trigonometría*, Editorial Reverté México
11. Zill, D., Dewar, J. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, McGraw-Hill,