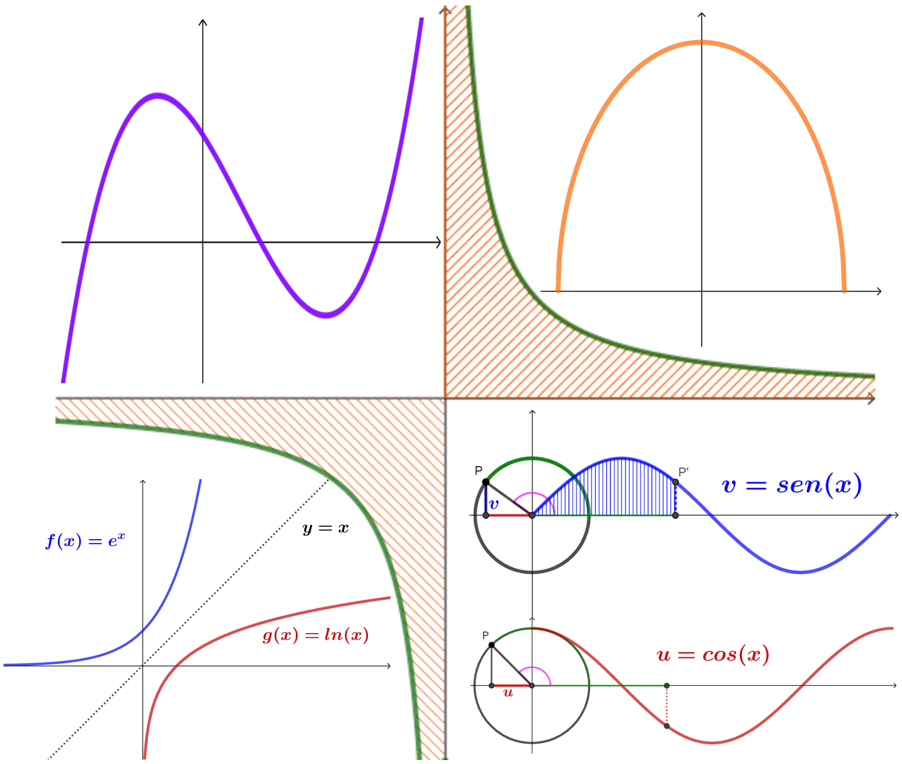
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

PLANTEL VALLLEJO

CUADERNO DE TRABAJO

MATEMÁTICAS 4

Modalidad Mixta



ELABORADO POR:

De Jesús López Wilbert
Vázquez Hernández Maritza
Monroy Martínez Cinthya Annel
Basurto Gamero Beatriz Susel
Martínez Victoria Ruth Paulina

INFOCAB PB101422

Diciembre 2022

Contenido

PRESENTACIÓN

El presente cuaderno de trabajo se diseñó con base en el enfoque disciplinario y didáctico contemplado en el Programa de estudio de Matemáticas IV del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) y se fundamenta en el modelo de Aprendizaje híbrido (*hybrid learning*). Qi y Tian (2011) consideran que el aprendizaje híbrido tiene cuatro propiedades: (1) combinación de aprendizaje grupal e individual, (2) combinación de aprendizaje sincrónico y asincrónico, (3) una combinación de aprendizaje a su propio ritmo (*self-paced learning*) y aprendizaje a ritmo de grupo (*group-paced learning*), y (4) combinación de aprendizaje formal y aprendizaje informal en términos de incorporación del aprendizaje a lo largo de toda la vida.

En este cuaderno de trabajo se contempla varias actividades y ejercicios para que funcione como un verdadero instrumento de aprendizaje y de evaluación en un ambiente híbrido:

1. *Uso de las TIC*. Se plantean actividades de aprendizaje en donde se debe hacer uso de las herramientas y recursos tecnológicos como videos educativos, enlaces a páginas web con información relevante, *Applets* realizados en *GeoGebra* y cuestionarios en línea (*Microsoft Forms*). El acceso a estas herramientas es a través de los códigos *Quick Response* (QR).
2. *Trabajo presencial*. El material, además de permitir el trabajo a distancia contempla actividades para el trabajo en el salón de clases de manera presencial. Se plantean actividades que se pueden trabajar de manera individual, en equipos o grupal. La decisión de será del profesor que imparte el curso.
3. *Aula invertida*. El material contiene enlaces para que el estudiante revise antes de que inicie la clase presencial. Hay enlaces a páginas web con información importante, videos, *applets*, infografías, etc.
4. *Resolución de problemas reales, contextualizados e interdisciplinarios.* Se plantean problemas que tiene un contexto real y cercano a los estudiantes, lo que favorecerá su interés en el trabajo escolar.
5. *Aprendizaje Basado en Juegos.* Para motivar y generar interés en los estudiantes es necesario implementar el uso de juegos y dinámicas divertidas, sin descuidar los significados y el rigor matemático requerido, puesto que muchos ven a las matemáticas como abstractas, monótonas o estáticas; sin embargo, se puede aprender jugando. En

este cuaderno se plantean actividades empleando crucigramas, sopa de letras y un memorama.

6. *Autoevaluación*. Para que el estudiante ponga a prueba sus conocimientos, al finalizar cada unidad se proporciona un código QR para acceder a un cuestionario a través de *Microsoft Forms*.

Este cuaderno de trabajo cumple con lo que se señala en el Protocolo de Equivalencia (2020), en el cual se define como:

> Una publicación que indica las actividades tanto teóricas como prácticas sobre una o varias unidades del Programa de Estudio, su desarrollo tiene como base las tareas o problemas dosificados por su grado de complejidad y estructurados por medio de estrategias de enseñanza-aprendizaje, que resolverán los estudiantes con orientación del profesor, incluyendo alternativas para el tratamiento de cada uno de los temas. Deberá incluir: a) una guía para su uso; b) propósitos; c) aprendizajes; d) estrategias de aprendizaje con sus correspondientes actividades; e) formas e instrumentos de evaluación; f) valoración del profesor de los resultados obtenidos y g) las fuentes consultadas deberán presentarse en formato APA.

El alcance que podría tener este cuaderno de trabajo radica en que puede ser empleado como material didáctico de apoyo para los profesores que imparten el curso de manera presencial, semipresencial o completamente en línea, y como un instrumento de aprendizaje para los alumnos que cursan esta materia ya sea en ordinario o dentro del Programa de Apoyo al Egreso (PAE); incluso, podría ser de utilidad para los estudiantes de matemáticas IV que se preparan para el examen extraordinario. En general, se busca que este material impacte positivamente en el trabajo de los profesores y alumnos del Colegio.

Este cuaderno de trabajo se realizó gracias al apoyo del proyecto

INFOCAB PB101422

GUÍA PARA SU USO

El presente cuaderno de trabajo está diseñado para cubrir los aprendizajes y temáticas de las cuatro unidades de la asignatura de Matemáticas IV. Cada una de las unidades está dividida por sesiones, conforme al número de horas indicadas en el Programa de estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades (2016).

Unidad	**Nombre de la unidad**	**Número de sesiones**	**Horas**
1	Funciones polinomiales	15	25
2	Funciones racionales y funciones con radicales	9	15
3	Funciones exponenciales y logarítmicas	12	20
4	Funciones trigonométricas	12	20

En cada una de las sesiones se plantea una serie de ejercicios para el trabajo en el salón de clases. Cada uno de los ejercicios cuenta con suficiente espacio para que el alumno escriba el procedimiento que conlleva a la solución. Se recomienda al profesor revisar y calificar estas actividades sesión por sesión.

Al final de cada sesión, se presentan algunos ejercicios para que el estudiante lo realice como actividad extraclase, permitiendo reforzar lo aprendido en la sesión presencial. Es recomendable que el profesor revise estas actividades en la sesión posterior y dar retroalimentación en caso necesario.

Al final de cada unidad se presenta un código QR que da acceso a un cuestionario de autoevaluación a través de *Microsoft Forms*. Este cuestionario no tiene límite de tiempo y al finalizar, proporciona los resultados obtenidos de manera inmediata, por lo que no se requiere que el profesor lo revise; sin embargo, se deja un espacio en el cuaderno de trabajo para que el estudiante escriba sus procedimientos. El profesor puede solicitar al alumno los procedimientos realizados para responder el cuestionario, con el objetivo de revisar el avance de cada estudiante.

En algunos ejercicios se plantea el uso de *Applets* realizados en GeoGebra para que el estudiante obtenga algunos datos o para el análisis gráfico de alguna función. Es importante solicitarle al alumno que descargue la aplicación de GeoGebra en su celular para que lo pueda usar en forma *off line*, aunque se puede usar directamente desde el navegador, teniendo conexión a internet. Se recomienda realizar estas actividades en equipos, puesto que no todos los alumnos tienen smartphone o conexión a internet.

A lo largo del cuaderno de trabajo aparecerán algunos códigos QR, que le darán acceso al alumno recursos digitales como videos educativos, *Applets*, páginas web, cuestionarios, entre otras, por lo que es necesario solicitar a los estudiantes que descarguen algún lector de QR en su celular.

Este material y otros recursos de apoyo tanto para el profesor como para el estudiante se encuentran disponible a través del QR siguiente.

PROPÓSITOS

Los propósitos que se pretenden lograr en cada una de las unidades de Matemáticas 4 a lo largo de este cuaderno de trabajo, son los establecidos en el Programa de Estudio, los cuales son:

Unidad 1. Al finalizar, el alumno: Habrá avanzado en el estudio de las funciones al introducir la notación funcional y la noción de dominio y rango. Relacionando la expresión algebraica de una función polinomial con su gráfica y analizará su comportamiento. Con base en la resolución de problemas y en contexto, usará las gráficas, tablas, expresión matemática para explicar los procesos involucrados.

Unidad 2. Al finalizar, el alumno: Modelará algunas situaciones que dan lugar a funciones racionales y con radicales, analizará una gráfica para identificar su dominio, rango, asíntotas y relacionar estas características con la situación problemática planteada.

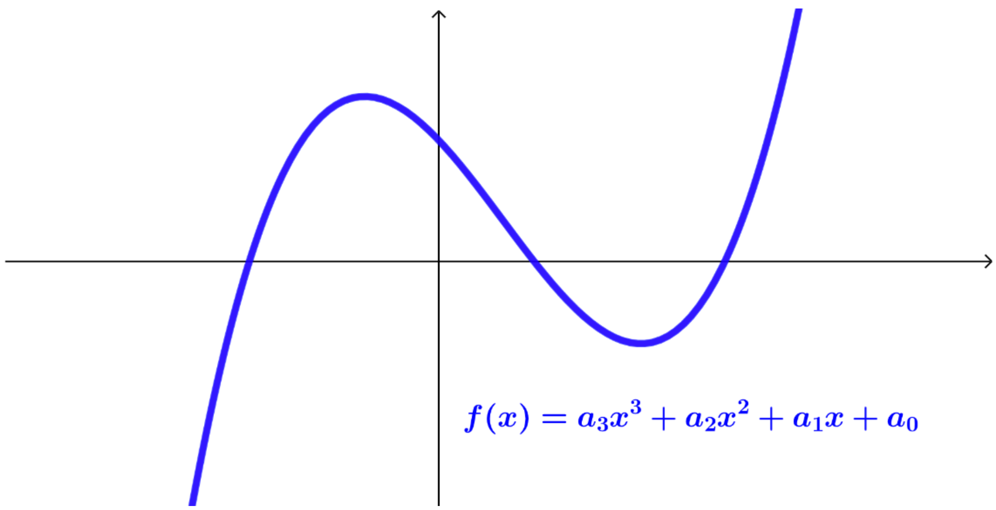
Unidad 3. Al finalizar, el alumno: Utilizará las funciones exponencial y logarítmica para representar formas de variación de fenómenos de la naturaleza, que éstas permitan modelar. Retomará los conceptos de dominio y rango, así como el análisis de las relaciones entre los parámetros de estas funciones y su gráfica.

Unidad 4. Al finalizar, el alumno: Comprenderá la extensión del concepto de razón trigonométrica a función trigonométrica. Estudiará las funciones seno y coseno en su forma característica de variación y el análisis de sus parámetros. Modelará situaciones de comportamiento periódico para resolver problemas.

Para lograr cada uno de los propósitos anteriores, en el cuaderno de trabajo se proporcionan los aprendizajes que se pretenden lograr sesión por sesión.

UNIDAD I

FUNCIONES POLINOMIALES



PROPÓSITO

Al finalizar, el alumno: Habrá avanzado en el estudio de las funciones al introducir la notación funcional y la noción de dominio y rango. Relacionando la expresión algebraica de una función polinomial con su gráfica y analizará su comportamiento. Con base en la resolución de problemas y en contexto, usará las gráficas, tablas, expresión matemática para explicar los procesos involucrados.

SESIÓN 1 (2 HORAS)

Aprendizaje: Explora diferentes relaciones, reconociendo las condiciones necesarias para determinar si una relación es función, la simboliza y distingue el dominio y el rango.

Tema: Relación. Noción generalizada de función. Regla de correspondencia. Dominio y rango.

Trabajo en clase.

EJERICICIO 1.1. Escribe qué es una relación.

EJERICICIO 1.2. Escribe qué es una función y cómo se representa.

EJERICICIO 1.3. ¿Cuál es la diferencia entre relación y función?

EJERICICIO 1.4. ¿Qué elementos definen a una función?

EJERICICIO 1.5. Define los siguientes elementos.

Dominio:

Contradominio o Codominio:

Rango, Imagen o Recorrido:

Regla de correspondencia:

EJERICICIO 1.6. Según los conceptos de relación y función, indica si las siguientes situaciones corresponden a una función o solo a una relación.

a) Lo que cobra un taxi con respecto a la distancia que viajas.

( ) Relación ( ) Función

Argumento:

b) El número de bacterias en un cultivo que crece 10 veces cada mes y el mes inicial tiene 100 bacterias.

( ) Relación ( ) Función

Argumento:

c) El peso de un bebé respecto a su estatura.

( ) Relación ( ) Función

Argumento:

d) El peso de un bebé respecto a su estatura.

( ) Relación ( ) Función

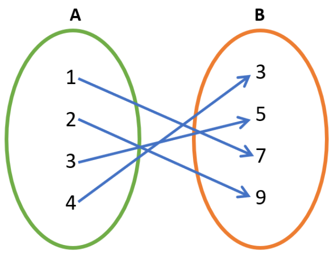
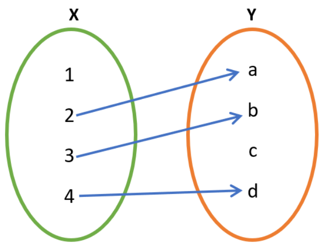
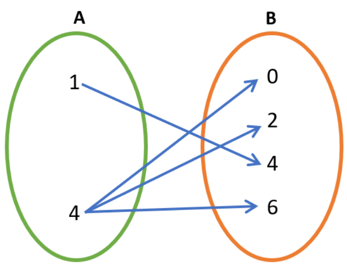
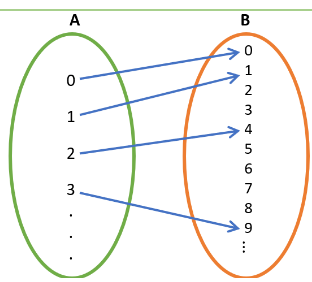
Argumento:

e) La amistad entre 10 amigos en el salón de clase.

( ) Relación ( ) Función

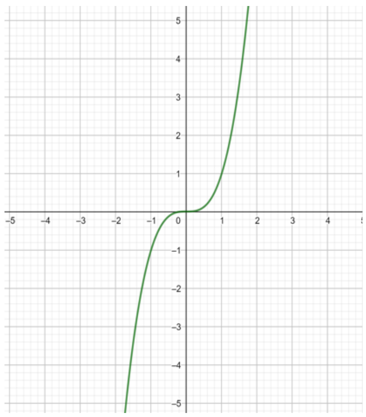
Argumento:

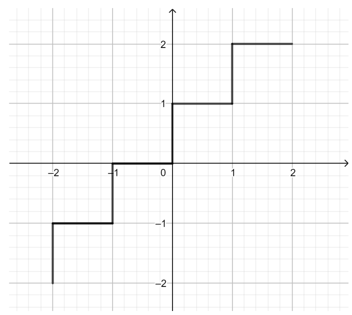
EJERICICIO 1.7. De los siguientes diagramas Sagitales, identifica si corresponden a una relación o función y determina la regla de correspondencia, el dominio y el rango de cada una.

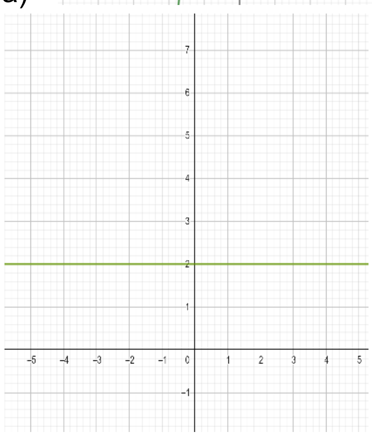
 a)	¿Relación o Función?: Dominio: Contradominio: Rango:	Regla de correspondencia:
 b)	¿Relación o Función?: Dominio: Contradominio: Rango:	Regla de correspondencia:
 c)	¿Relación o Función?: Dominio: Contradominio: Rango:	Regla de correspondencia:
 d)	¿Relación o Función?: Dominio: Contradominio: Rango:	Regla de correspondencia:

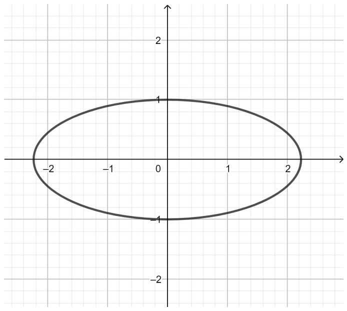
EJERICICIO 1.8. Observando una gráfica en el plano cartesiano, ¿Cómo podrías determinar si corresponde a una función?

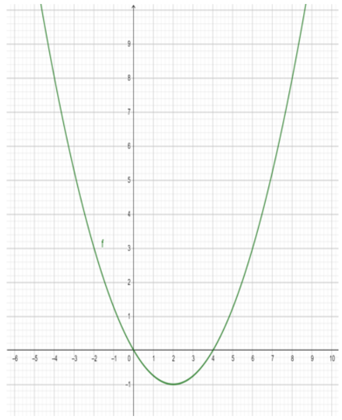
EJERICICIO 1.9. De las siguientes gráficas, indica cuales corresponden a funciones.

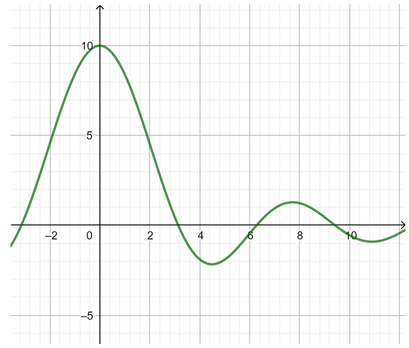
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

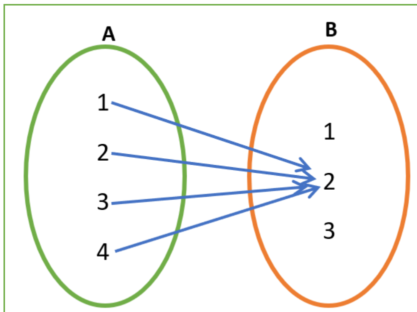
Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

EJERICICIO 1.10. Según los conceptos de relación y función, argumenta, de las siguientes situaciones, porqué considerarías que es una función o una relación.

a) La cantidad de dinero que tengo siempre es igual a lo que tiene mi hermana más 100. ( ) Relación ( ) Función Argumento:
b) Cuando se mide el peso de un recién nacido. ( ) Relación ( ) Función Argumento:

EJERICICIO 1.11. De los siguientes diagramas Sagitales, identifica si corresponden a una función y determina la regla de correspondencia, el dominio y el rango de cada una.



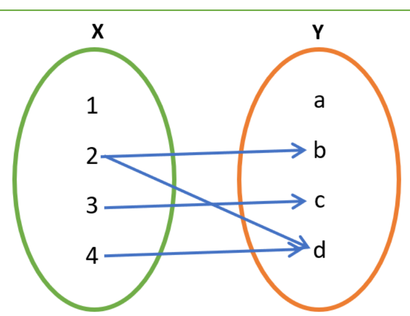
a)

¿Es función? Regla de correspondencia:

Dominio:

Contradominio:

Rango:



b)

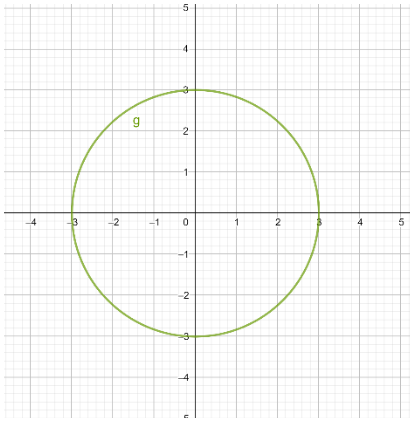
¿Es función? Regla de correspondencia:

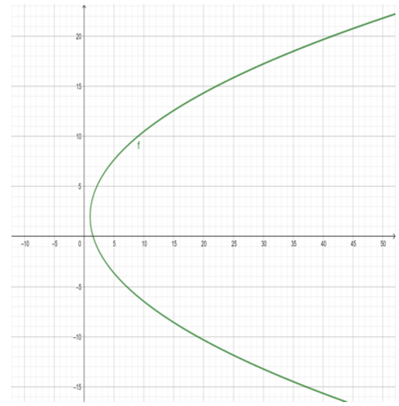
Dominio:

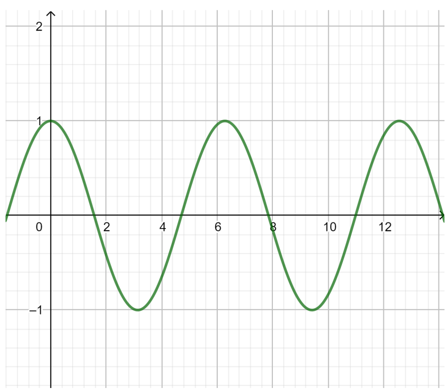
Contradominio:

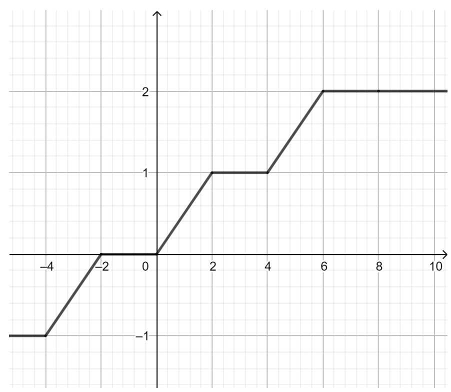
Rango:

EJERICICIO 1.12. De las siguientes gráficas, indica cuales corresponde a una función.

a) 

b) 

c) 

d) 

SESIÓN 2 (2 HORAS)

Aprendizaje: Explora diferentes relaciones, reconociendo las condiciones necesarias para determinar si una relación es función, la simboliza y distingue el dominio y el rango.

Tema: Relación. Noción generalizada de función. Regla de correspondencia. Dominio y rango.

Trabajo en clase.

EJERCICIO 2.1. A continuación se plantean situaciones en las que se relacionan dos magnitudes, identifica lo solicitado en cada caso para llenar la tabla.

a) El peso que debe tener una persona dependiendo de su estatura.

<table>
<tr><td>Variable independiente X:

Variable Dependiente Y:

¿Es relación o función?</td><td>Relación entre las variables (regla de correspondencia):</td></tr>
<tr><td>Tabla de Posibles datos de ambas variables:
<table><tr><th>X</th><th>Y</th></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table></td><td>Simbolización sagital:</td></tr>
</table>

b) Si ahorro en una alcancía y cada día tengo $100 más que el día anterior.

Variable independiente X: Variable Dependiente Y: ¿es relación o función?	Relación entre las variables (regla de correspondencia):
Tabla de Posibles datos de ambas variables:	Simbolización sagital:

X	Y

c) El costo por pagar de acuerdo con la distancia recorrida por un Uber.

Variable independiente X: Variable Dependiente Y: ¿es relación o función?	Relación entre las variables (regla de correspondencia):
Tabla de Posibles datos de ambas variables:	Simbolización sagital:

X	Y

d) Cuando asignamos una calificación a un alumno en la lista.

<table>
<tr><td>Variable independiente X:

Variable Dependiente Y:

¿es relación o función?</td><td>Relación entre las variables (regla de correspondencia):</td></tr>
<tr><td>Tabla de Posibles datos de ambas variables:<table><tr><th>X</th><th>Y</th></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table></td><td>Simbolización sagital:</td></tr>
</table>

e) El consumo de combustible de un vehículo y la distancia recorrida.

<table>
<tr><td>Variable independiente X:

Variable Dependiente Y:

¿es relación o función?</td><td>Relación entre las variables (regla de correspondencia):</td></tr>
<tr><td>Tabla de Posibles datos de ambas variables:<table><tr><th>X</th><th>Y</th></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table></td><td>Simbolización sagital:</td></tr>
</table>

EJERCICIO 2.2. De las situaciones en el **EJERCICIO 2.1**, considera solamente las que son funciones y formula con las variables x e y, un modelo matemático que satisfaga las condiciones de cada una de ellas. Determina su dominio y su rango.

Situación: Modelo matemático: Dominio: Rango:	Situación: Modelo matemático: Dominio: Rango:	Situación: Modelo matemático: Dominio: Rango:

Trabajo extraclase

EJERCICIO 2.4 Calcula el dominio y el rango de la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

EJERCICIO 2.5 Calcula el dominio y el rango de la función $f(x) = 2x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 5$.

EJERCICIO 2.6. Calcula el dominio y el rango de la función $f(x) = \frac{2x^2-3}{5}$.

SESIÓN 3 (1 HORA)

Aprendizaje: Comprende el significado de la notación funcional, la utiliza para representar y evaluar funciones polinomiales.

Tema: Notación funcional: $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$.

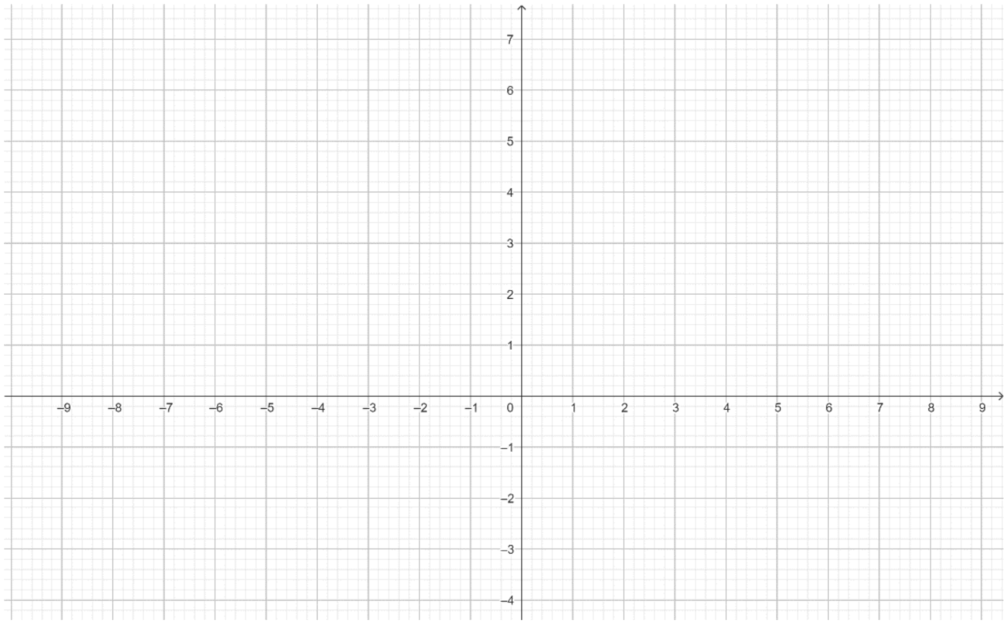
Trabajo en clase.

EJERCICIO 3.1. En el siguiente espacio escribe la definición de una Función Polinomial y presenta algunos ejemplos.

Ejercicio 3.2 De manera general, ¿cuál es la notación para representar una función polinomial de grado n?

EJERCICIO 3.3. Elabora la gráfica de la siguiente función $f(x) = 4x + 5$. Corrobora la gráfica usando GeoGebra e identifica los siguientes elementos.

Gráfica:



Grado:

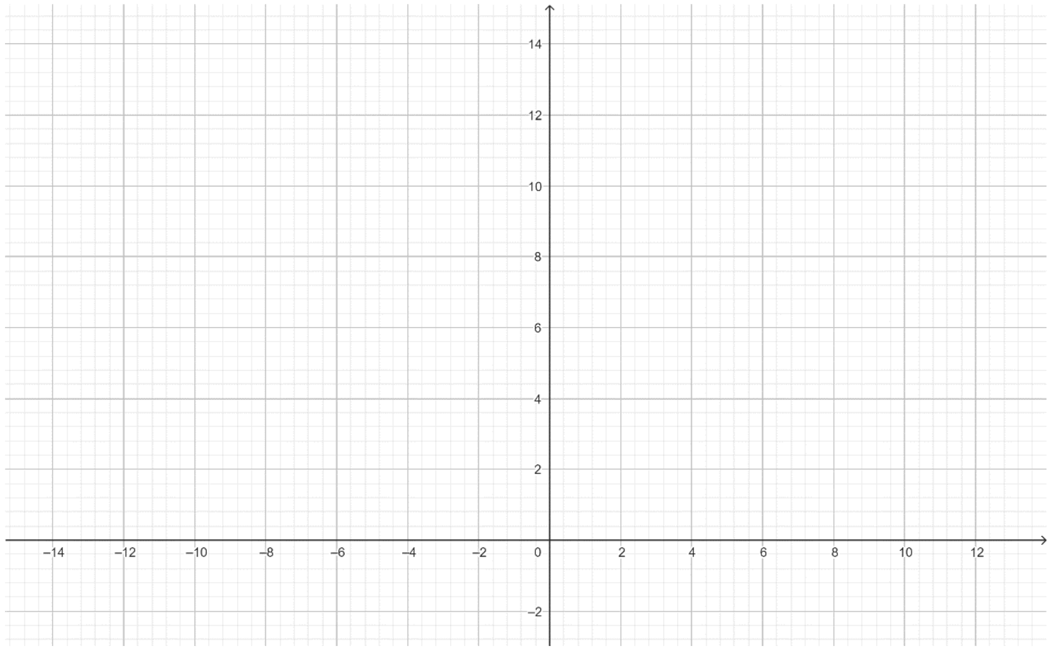
Dominio:

Contradominio:

Rango:

EJERCICIO 3.4. Elabora la gráfica de $f(x) = x^2 + 3x + 6$. Corrobora la gráfica usando GeoGebra e identifica los siguientes elementos.

Gráfica:



Grado:

Dominio:

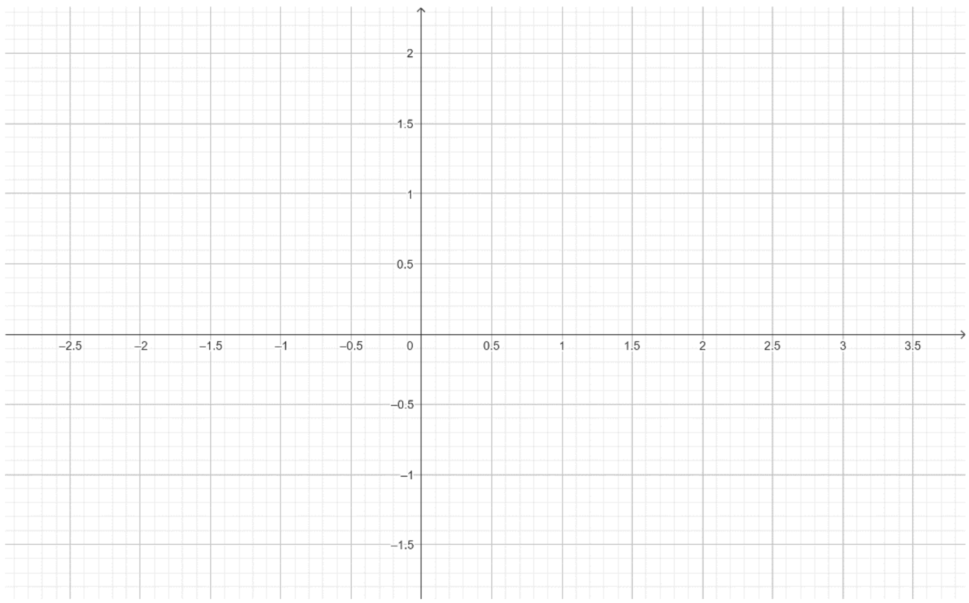
Contradominio:

Rango:

Trabajo extraclase

EJERCICIO 3.5. Elabora la gráfica de la función $f(x) = 7x^3 + 8x^2 + x$. Corrobora la gráfica usando GeoGebra e identifica los siguientes elementos.

Gráfica:



Grado:

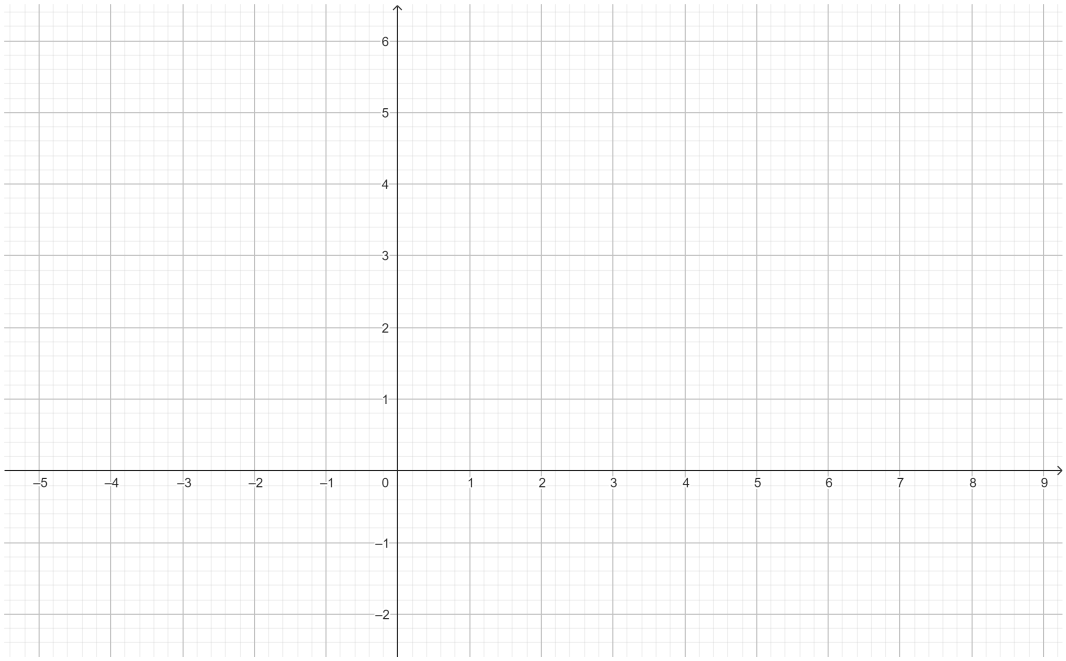
Dominio:

Contradominio:

Rango:

EJERCICIO 3.6. Elabora la gráfica de $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2$; corrobora la gráfica en el Graficador GeoGebra y clasifica el grado de polinomio al que corresponde.

Gráfica:



Grado:

Dominio:

Contradominio:

Rango:

SESIÓN 4 (2 HORAS)

Aprendizaje: Usa la notación de intervalos para representar dominio y rango de una función.

Tema: Intervalos

Trabajo en clase

EJERCICIO 4.1. En el siguiente espacio escribe tu propia definición de intervalo, su simbología y condiciones en las que se usan.

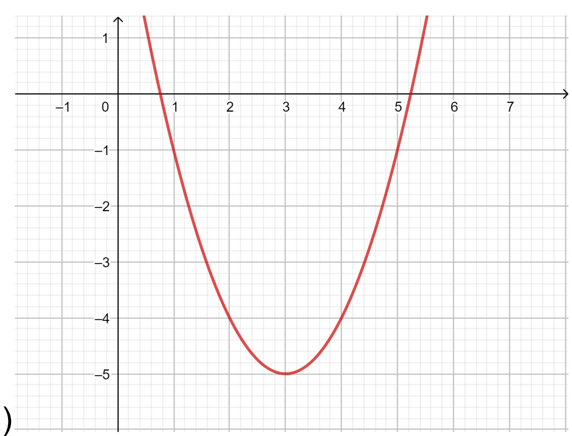
EJERCICIO 4.2. Escribe los intervalos que corresponden a los conjuntos de la izquierda (siempre que sea posible).

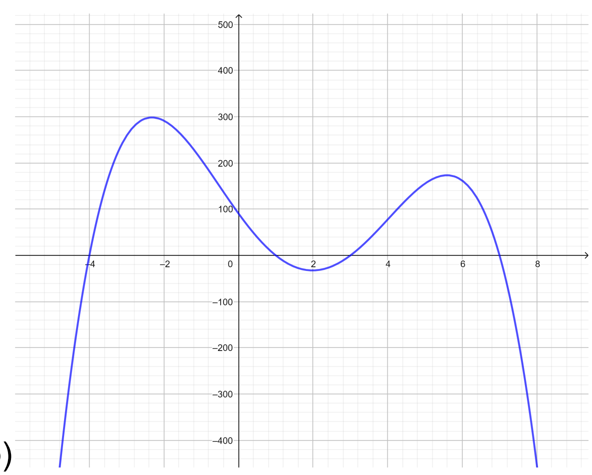
Notación conjuntista o simbólica	Intervalo
a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$	
b) $\mathbb{R}$	
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x\}$	
d) $\{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$	
e) $\{z \in \mathbb{Z} \mid -4 < z \leq 2\}$	
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \geq x\}$	
g) $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$	

EJERCICIO 4.3. Escribe los intervalos que corresponden a los conjuntos de la izquierda (siempre que sea posible).

Enunciado	Intervalo
a) Conjunto de números reales mayores que menos tres y menores que cuatro.	
b) Conjunto de números enteros mayores a seis.	
c) Conjunto de números reales diferentes de menos uno y diez.	
d) Conjunto de valores reales iguales o mayores a menos uno.	
e) Todos los números reales entre tres **y** cinco.	
f) Todos los números reales no positivos.	
g) Todos los números reales no negativos.	
h) Todos los números reales mayores tres **o** menores que menos cinco.	

EJERCICIO 4.4. Revisa las siguientes gráficas e identifica el dominio y el rango.

a) 

b) 

Trabajo extraclase

Ejercicio 4.5. Determina el dominio y rango de las siguientes funciones. Escríbelas en notación de intervalos o la notación conjuntista. Realiza las gráficas usando GeoGebra.

a) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

b) $g(x) = (x + 1)^4 - 2$

b) $g(x) = (x + 1)^4 - 2$

c) $h(x) = -(x - 1)(x - 2)(x + 1)(x + 2)$

SESIÓN 5 (2 HORAS)

Aprendizaje: Aplica la división sintética, el teorema del residuo, el teorema del factor, su recíproco para determinar los ceros de $f(x)$ y su gráfica.

Tema: División sintética, teorema del residuo, teorema del factor y su recíproco. Ceros de la función y raíces reales y complejas de la ecuación. Raíces de multiplicidad impar o par, para observar el comportamiento gráfico. Graficación de funciones.

Trabajo en clases

EJERCICIO 5.1. Realiza las siguientes divisiones de polinomios usando la división larga. Identifica el cociente y el residuo.

a) $x+3 \,\overline{\big)\, x^2+x-5}$

b) $x-1 \,\overline{\big)\, 3x^3 \quad -8x+5}$

c) $x-3 \,\overline{\big)\, x^4 \quad -9x^2+x+3}$

EJERCICIO 5.2. Realiza las divisiones de polinomios del **EJERCICIO 5.1**, empleando la división sintética. Identifica el cociente y el residuo. Puedes revisar el enlace proporcionado a través del QR de la derecha para analizar el procedimiento de la división sintética.

a)

b)

c)

EJERCICIO 5.3. Realiza las divisiones siguientes empleando el método de tu preferencia. Identifica el cociente, el residuo y escribe el resultado de la operación.

a) $\frac{2x^3-x^2-18x+9}{2x-1}=$

b) $\frac{x^4+x^3-6x^2-4x+8}{x+3}=$

c) $\frac{-6+23x+39x^2-13x^3-33x^4-10x^5}{x+1}=$

d) $\frac{x^4-7x^2+12}{x+2}=$

Trabajo extraclase

Ejercicio 5.4 Practica ambos procedimientos de la división de polinomios. Identifica el cociente, el residuo, escribe el resultado de la operación y comprueba aplicando el Algoritmo de la división.

a) $(x^3 + 5x^2 - 2x - 24) \div (x - 2)$

b) $(x^2 + 11x + 30) \div (x + 5)$

c) $(3x^3 + 10x^2 - 6x - 20) \div (x + 2)$

SESIÓN 6 (1 HORA)

Aprendizaje: Aplica la división sintética, el teorema del residuo, el teorema del factor, su recíproco para determinar los ceros de $f(x)$ y su gráfica.

Tema: División sintética, teorema del residuo, teorema del factor y su recíproco. Ceros de la función y raíces reales y complejas de la ecuación. Raíces de multiplicidad impar o par, para observar el comportamiento gráfico. Graficación de funciones.

Trabajo en clase

EJERCICIO 6.1. Escribe qué establece el Teorema del residuo y para qué sirve.

EJERCICIO 6.2. Escribe qué establece el Teorema del factor y su recíproco. ¿Cuál es su utilidad?

EJERCICIO 6.3. Aplica el Teorema del Residuo para determinar el residuo de las siguientes divisiones.

a) $\frac{x^3+3x^2-14x+2}{x-1}$

b) $\frac{15x^4+10x^3-6x^2+14x}{x-3}$

c) $\frac{8x^4-14x^3-71x^2-10x+24}{x+2}$

d) $\frac{x^{101}-1}{x+1}$

EJERCICIO 6.4. Verifica si $d(x)$ es factor de $p(x)$ en las siguientes expresiones.

a) $p(x) = -20 + x + x^2$, $d(x) = x - 4$

b) $p(x) = 36 - 32x + 5x^2 + x^3$, $d(x) = x + 9$

c) $p(x) = -18 + 81x + 56x^2 - 53x^3 - 10x^4$, $d(x) = x + 1$

d) $p(x) = -126 + 333x - 31x^2 - 37x^3 + 5x^4$, $d(x) = x - 7$

Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 6.5. Determina la función polinomial $f(x)$ que compla con las siguientes propiedades:

a) De grado 2, como factor a $x-3$ y $f(1)=0$.

b) De grado 3, como factor a x y $f(-1)=0$.

c) De grado 3, con factor $x+1$ y $f(0)=0$.

d) De grado 2 y $f(3)=f(-2)=0$.

EJERCICIO 6.6. Dada la función $f(x) = x^3 + bx^2 + 4x$, si $f(-4) = 0$, determina el valor de b.

EJERCICIO 6.7. Dada la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 8x + 3$, si $x - 1$ es un factor de $f(x)$, determina el valor de a.

SESIÓN 7 (2 HORAS)

Aprendizaje: Aplica la división sintética, el teorema del residuo, el teorema del factor, su recíproco para determinar los ceros de $f(x)$ y su gráfica.

Tema: División sintética, teorema del residuo, teorema del factor y su recíproco. Ceros de la función y raíces reales y complejas de la ecuación. Raíces de multiplicidad impar o par, para observar el comportamiento gráfico. Graficación de funciones.

Trabajo en clase

EJERCICIO 7.1. ¿Qué son los ceros de una función? ¿Los términos *raíz* y *cero* se refieren a lo mismo?

EJERCICIO 7.2. ¿Cuáles son los ceros de la función $f(x) = (x + 4)\,(x - 7)$?

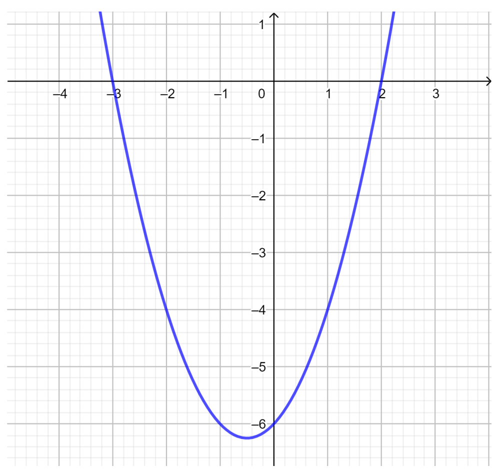
EJERCICIO 7.3. Determina una función polinomial que cumpla las siguientes propiedades:

a) Grado 2, tenga como coeficiente principal -4 y ceros a $x = -1$ y $x = 3$.

b) Grado 3, y tenga como factor a $2x - 1$, $f(3) = -50$ y ceros a $x = 5$ y $x = -7$.

c) Grado 5, y tenga como factores a $x - 1$, $3x - 4$, $f(3) = -50$ y ceros a $x = 5$ y $x = -7$.

EJERCICIO 7.4. Determina una función polinomial de menor grado asociada a la gráfica que se muestra a continuación. Indica cuáles son sus ceros.



EJERCICIO 7.5. Escribe el Teorema Fundamental del Álgebra.

EJERCICIO 7.6. ¿Qué es la multiplicidad de la raíz de una ecuación polinomial?

EJERCICIO 7.7. Relaciona las funciones dadas con la multiplicidad de sus ceros.

a) $f(x) = (x-1)\,(x-4)^{\,4}$	( ) Ceros de multiplicidad triple en $x = 1$.
b) $f(x) = (x-3)\,(x-1)^{\,3}$	( ) Ceros de multiplicidad triple en $x = -1$.
c) $f(x) = (x+1)^3\,(2x+1)^{\,2}$	( ) Ceros de multiplicidad doble en $x = 2$.
d) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$	( ) Ceros de multiplicidad cuádruple en $x = -4$.

EJERCICIO 7.8. Determina una función polinomial de menor grado que cumpla las siguientes propiedades:

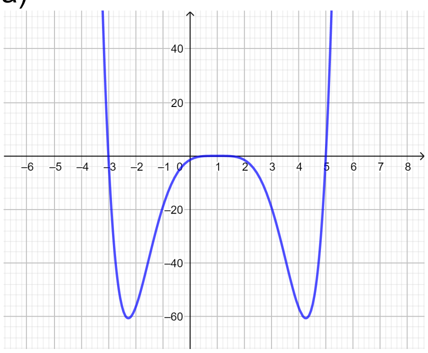
a) Tenga como ceros de multiplicidad 3 en $x = -1$ y $f(2) = 0$.

b) Tenga como ceros de multiplicidad 2 en $x = -10$, ceros de multiplicidad 4 en $x = \frac{2}{7}$, como factor a $5x + 9$ y $f(2) = f(-7) = 0$.

Trabajo extraclase

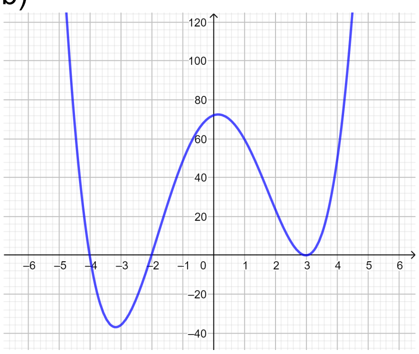
EJERCICIO 7.7. Relaciona cada gráfica con la multiplicidad de los ceros de su función polinomial correspondiente.

a)



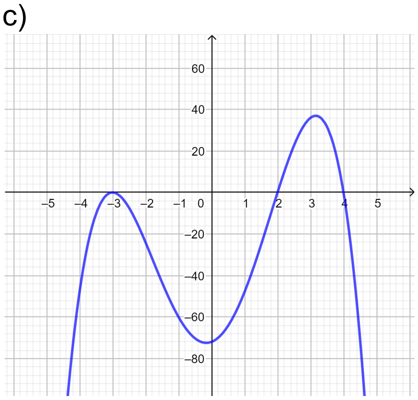
( ) Ceros de multiplicidad triple en $x = 1$.

b)



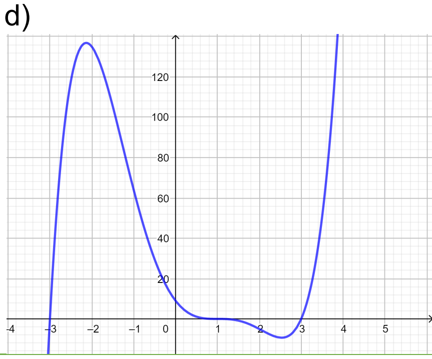
( ) Ceros de multiplicidad triple en $x = 3$.

c)



( ) Ceros de multiplicidad doble en $x = 3$.

d)



( ) Ceros de multiplicidad cuádruple en $x = 1$.

EJERCICIO 7.8. Completa el texto que se muestra a continuación, usando algunas de las siguientes palabras: *residuo, factor, cero, raíz, función, ecuación, polinomio, gráfica* y *multiplicidad*.

Sea p una función polinomial de grado n y r el residuo de la operación $\frac{p}{x-a}$, entonces:

1. El ___________ se obtiene evaluando a en la _____________ polinomial p, es decir, $r = p(a)$.
2. Si $r = 0$, entonces $x - a$ es un ____________ de p.
3. Si $x - a$ es un ____________ de p, entonces el ____________ es _____________.
4. Si $p(a) = 0$, entonces $x = a$ es una ____________ de $p = 0$ y la ______________ de p interseca al eje de las abscisas en $(a, 0)$.
5. Si $x - a$ es un ________________ de p, entonces $x = a$ es un ______________ de la ______________ polinomial p.
6. Si $x = a$ es una ________________ de la _______________ polinomial $p = 0$, entonces $r = 0$.

SESIÓN 8 (2 HORAS)

Aprendizaje: Aplica la división sintética, el teorema del residuo, el teorema del factor, su recíproco para determinar los ceros de $f(x)$ y su gráfica.

Tema: División sintética, teorema del residuo, teorema del factor y su recíproco. Ceros de la función y raíces reales y complejas de la ecuación. Raíces de multiplicidad impar o par, para observar el comportamiento gráfico. Graficación de funciones.

Trabajo en clase.

EJERCICIO 8.1. Escribe el Teorema de las raíces racionales (ceros racionales).

EJERCICIO 8.2. Dada la ecuación polinomial $2x^2 + 3x - 2 = 0$.

a) Determina su grado.

b) Establece sus posibles raíces racionales.

c) Escribe sus raíces racionales.

EJERCICIO 8.3. Dada la ecuación polinomial $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = 0$.

a) Determina su grado.

b) Escribe sus posibles raíces racionales.

c) Utiliza la división sintética para determinar las raíces racionales y escríbelas.

EJERCICIO 8.4. Dada la ecuación polinomial $10x^3 - 27x^2 + 2x + 24 = 0$.

a) Determina su grado.

b) Escribe sus posibles raíces racionales.

c) Utiliza la división sintética para determinar las raíces racionales y escríbelas.

EJERCICIO 8.5. Dada la ecuación $15 - 14x - 33x^2 + 4\,x^4 = 0$

a) Determina su grado.

b) Escribe sus posibles ceros racionales.

c) Utiliza la división sintética para determinar los ceros racionales y escríbelos.

EJERCICIO 8.6. Dada la ecuación bicuadrática $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

a) Determina su grado.

b) Escribe sus posibles ceros racionales.

c) Utiliza la división sintética para determinar sus raíces racionales y escríbelas. La ecuación tiene también raíces irracionales, ¿cuáles son?

Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 8.8. Dada la ecuación $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$.

a) Determina su grado.

b) Escribe sus posibles raíces racionales.

c) Utiliza la división sintética para determinar las raíces racionales y escríbelas.

EJERCICIO 8.9. Dada la ecuación $x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 = 0$.

a) Determina su grado.

b) Escribe sus posibles raíces racionales.

c) Utiliza la división sintética para determinar las raíces racionales y escríbelas.

EJERCICIO 8.10. Dada la ecuación $3x^4 + 13x^3 + 2x^2 + 52x - 40 = 0$.

a) Determina su grado.

b) Escribe sus posibles raíces racionales.

c) Utiliza la división sintética para determinar sus raíces racionales y escríbelas. La ecuación también tiene raíces complejas, ¿cuáles son?

EJERCICIO 8.11. La ecuación bicuadrática $3x^4 + 46x^2 - 32 = 0$ no tiene raíces racionales, pero aún así podrás resolverla, ¿cómo lo harías?

SESIÓN 9 (1 HORA)

Aprendizaje: Construye una función polinomial a partir de las raíces de su ecuación y bosqueja su gráfica y a partir de una función polinomial calcula los ceros y realizará su gráfica.

Tema: Cálculo de ceros y graficación de funciones.

Trabajo en clase

EJERCICIO 9.1. Construye ecuaciones polinomiales con las siguientes propiedades.

a) Grado 3, raíces: $x_1 = 1, x_2 = 2$ y $x_3 = 5$, con coeficiente principal $a_3 = 2$.

b) Grado 3, raíces: $x_1 = -3,$ y $x_2 = 4$ de multiplicidad 2, con coeficiente principal $a_3 = -4$.

c) Grado 4, raíces: $x_1 = -\frac{1}{2},$ y $x_2 = 3$, ambas de multiplicidad 2, con coeficiente principal $a_4 = 2$.

d) Grado 4, raíces: $x_1 = \frac{3}{4}$, y $x_2 = -1$ de multiplicidad 3, con coeficiente principal $a_4 = -1$.

e) Grado 5, raíces: $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = 3$, $x_3 = 7$ y $x_4 = -5$ de multiplicidad 2, con coeficiente principal $a_5 = 4$.

Trabajo extraclase

Realiza los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 9.2. Construye ecuaciones polinomiales con las siguientes propiedades.

a) Grado 3, raíces: $x_1 = -1, x_2 = -2$ y $x_3 = \frac{1}{3}$, con coeficiente principal $a_3 = 3$.

b) Grado 3, raíces: $x_1 = 1$ de multiplicidad 3, con coeficiente principal $a_3 = -1$.

c) Grado 6, raíces: $x_1 = -\frac{1}{2}$, y $x_2 = 3$, ambas de multiplicidad 3, con coeficiente principal $a_6 = 1$.

SESIÓN 10 (2 HORAS)

Aprendizaje: Construye una función polinomial a partir de las raíces de su ecuación y bosqueja su gráfica y a partir de una función polinomial calcula los ceros y realizará su gráfica.

Tema: Cálculo de ceros y graficación de funciones.

Trabajo en clase

EJERCICIO 10.1. Revisa el applet que te da acceso el QR de la derecha. Modifica el grado de la función polinomial y el signo del coeficiente principal. Observa el comportamineto de las gráficas y con base en tus observaciones contesta las siguientes preguntas:

a) Si el coeficiente principal a_n de la función polinomial es negativo, cuando a la variable x se le asignan valores extremadamente pequeños (negativos cada vez más alejados del cero), ¿Qué sucede con la gráfica de la función polinomial?

b) Si el coeficiente principal a_n de la función polinomial es positivo, cuando a la variable x se le asignan valores extremadamente grandes (positivos cada vez más alejados del cero), ¿Qué sucede con la gráfica de la función polinomial?

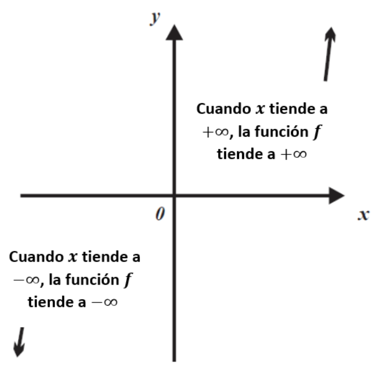
EJERCICIO 10.2. Revisa el applet que te da acceso el QR de la derecha. Modifica el grado de la función polinomial y el signo del coeficiente principal. Observa el comportamineto de las gráficas y con base en tus observaciones contesta las siguientes preguntas:

a) Si el coeficiente principal a_n de la función polinomial es negativo, cuando a la variable x se le asignan valores extremadamente pequeños (negativos cada vez más alejados del cero), ¿Qué sucede con la gráfica de la función polinomial?

b) Si el coeficiente principal a_n de la función polinomial es negativo, cuando a la variable x se le asignan valores extremadamente grandes (positivos cada vez más alejados del cero), ¿Qué sucede con la gráfica de la función polinomial?

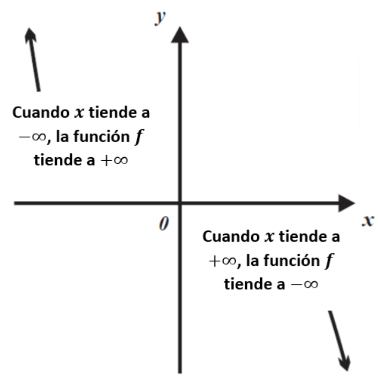
EJERCICIO 10.3. De acuerdo con lo observado en los dos ejercicios anteriores, relaciona cada comportamiento de la gráfica con las propiedades de la función:

a)



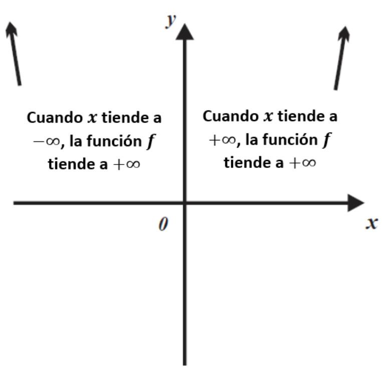
(   ) El grado de la función polinomial f es par y su coeficiente principal $a_n > 0$.

b)



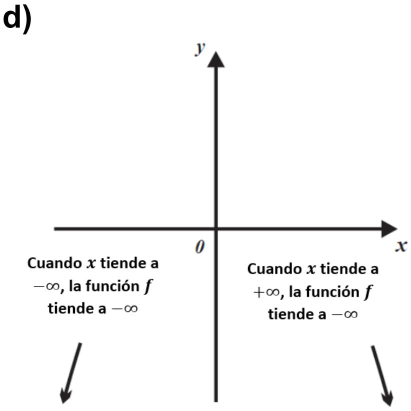
(   ) El grado de la función polinomial f es par y su coeficiente principal $a_n < 0$.

c)



(   ) El grado de la función polinomial f es impar y su coeficiente principal $a_n > 0$.

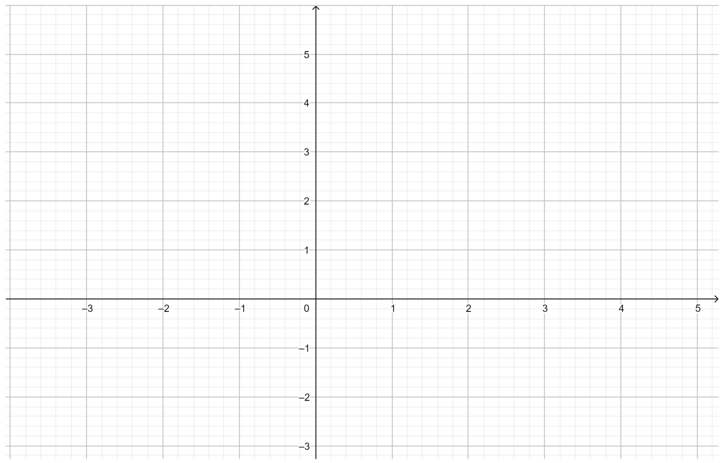
d)



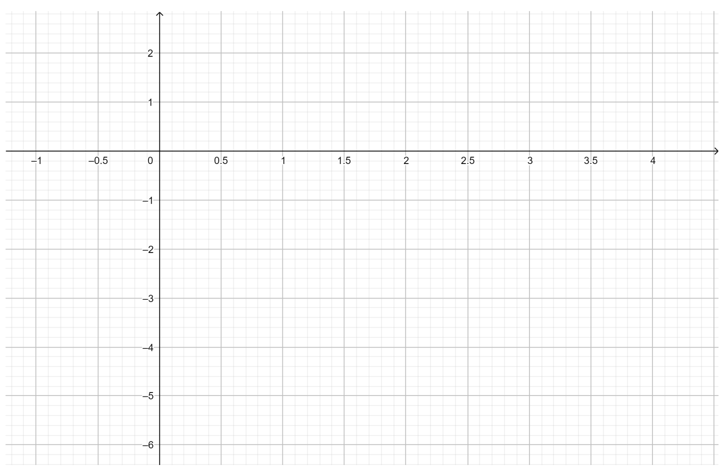
(   ) El grado de la función polinomial f es impar y su coeficiente principal $a_n > 0$.

EJERCICIO 10.4. Identifica los ceros, la ordenada al origen de las siguientes funciones polinomiales y bosqueja sus gráficas. Verifica tus gráficas usando GeoGebra.

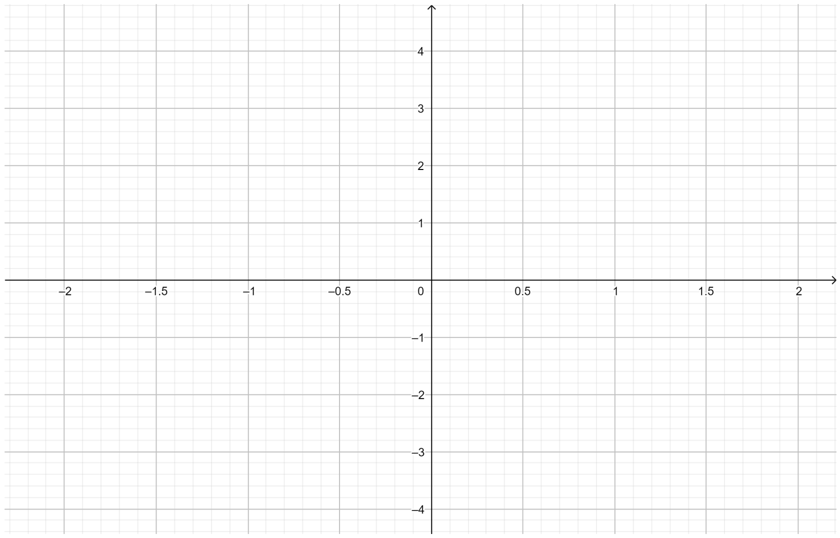
a) $f(x) = (x + 1)\,(x - 2)^2$



b) $f(x) = (3 - x)\,(x - 1)^3$

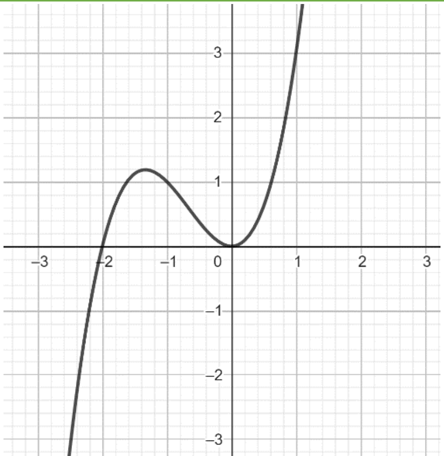


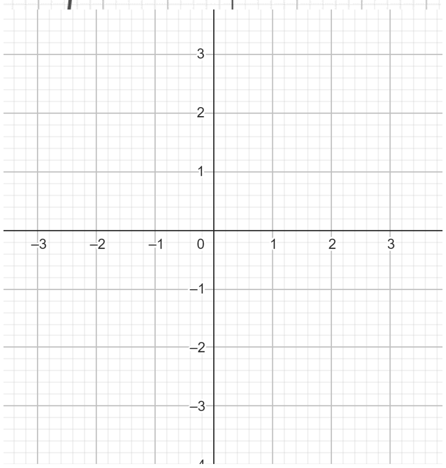
c) $f(x) = (x+1)^3\,(2x-1)^2$



EJERCICIO 10.5. Realiza las modificaciones solicitadas a la función proporcionada y grafícala.

$f(x) = x^3 + 2x^2$	Multiplica la función f por (-1), obteniendo $g(x) =$____________

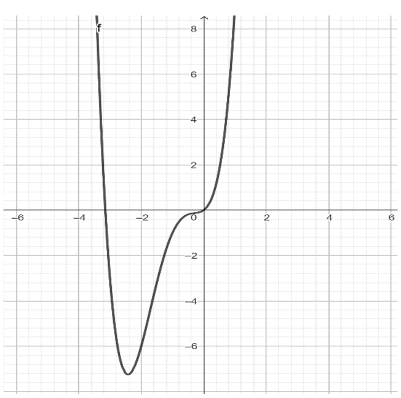


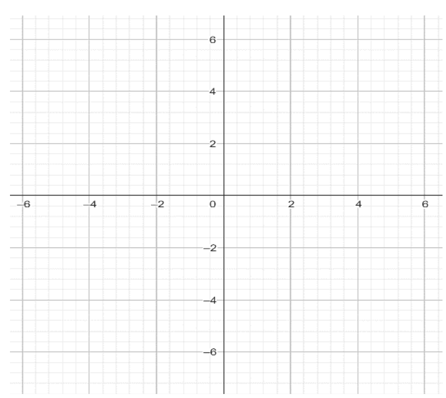


EJERCICIO 10.6. Realiza la modificación solicitada a la función proporcionada y grafícala.

$f(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x$

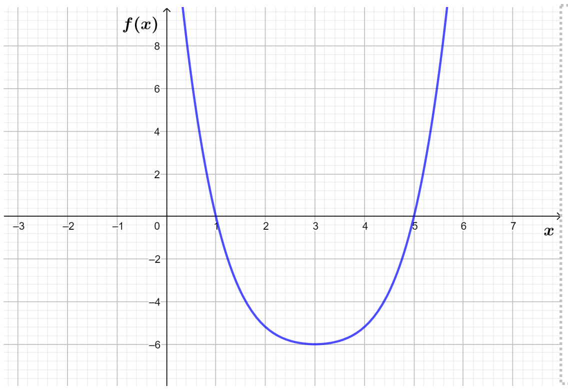
Multiplica por (-1) a la función f, obteniendo $g(x) =$ ____________________



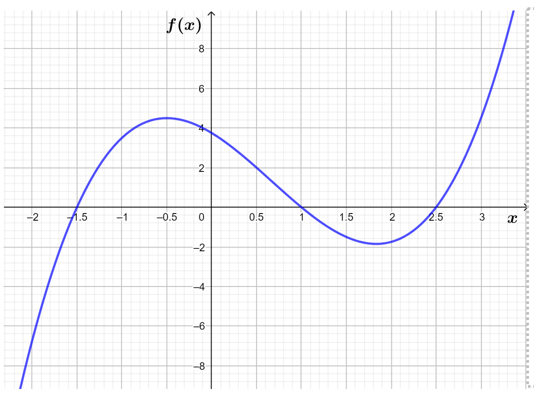


EJERCICIO 10.7. Observa las gráficas siguientes y escribe la función asociada a cada una, indicando su dominio, rango, ordenada al origen e intervalos donde la función es positiva o negativa.

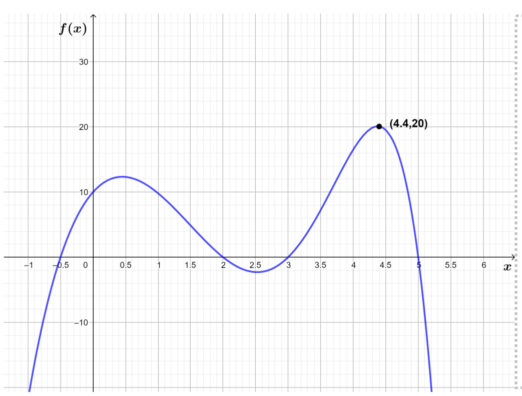
a)



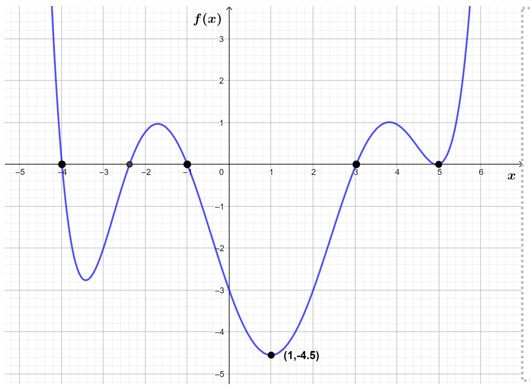
b)



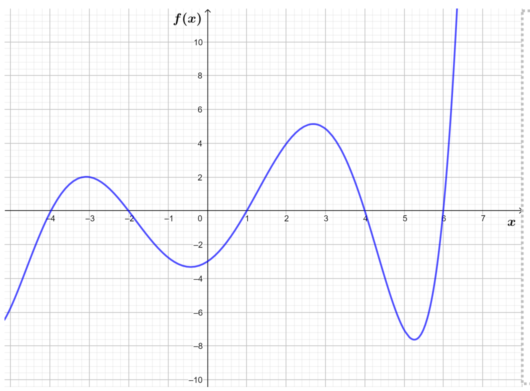
c)



d)



e)



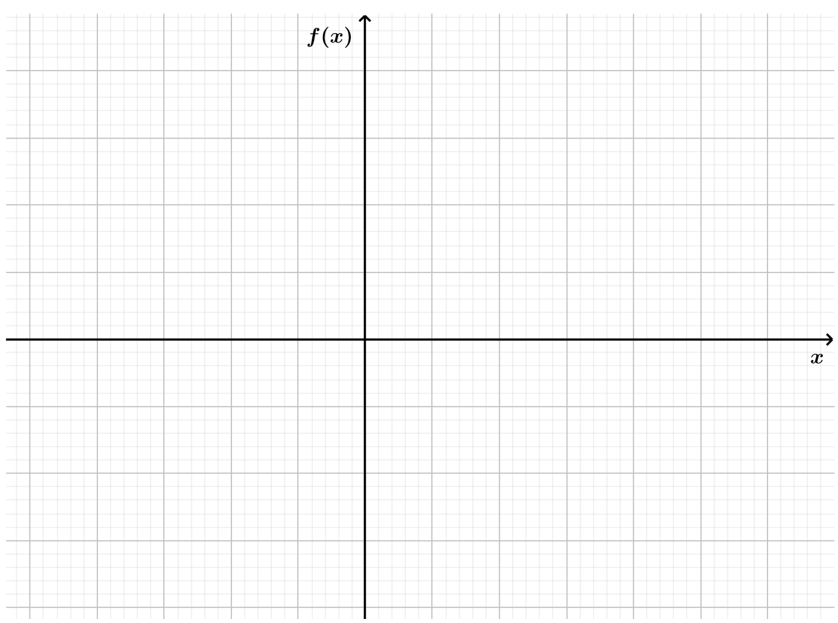
Trabajo extraclase

EJERCICIO 10.8. Dados los valores $x = -1$, $x = \frac{1}{3}$ y $x = 2$.

a) Determina una función polinomial $f(x)$ de menor grado que tiene ceros en esos valores.

b) Indica su dominio, ordenada al origen, rango e intervalos donde la función es positiva o negativa.

c) Bosqueja su gráfica.

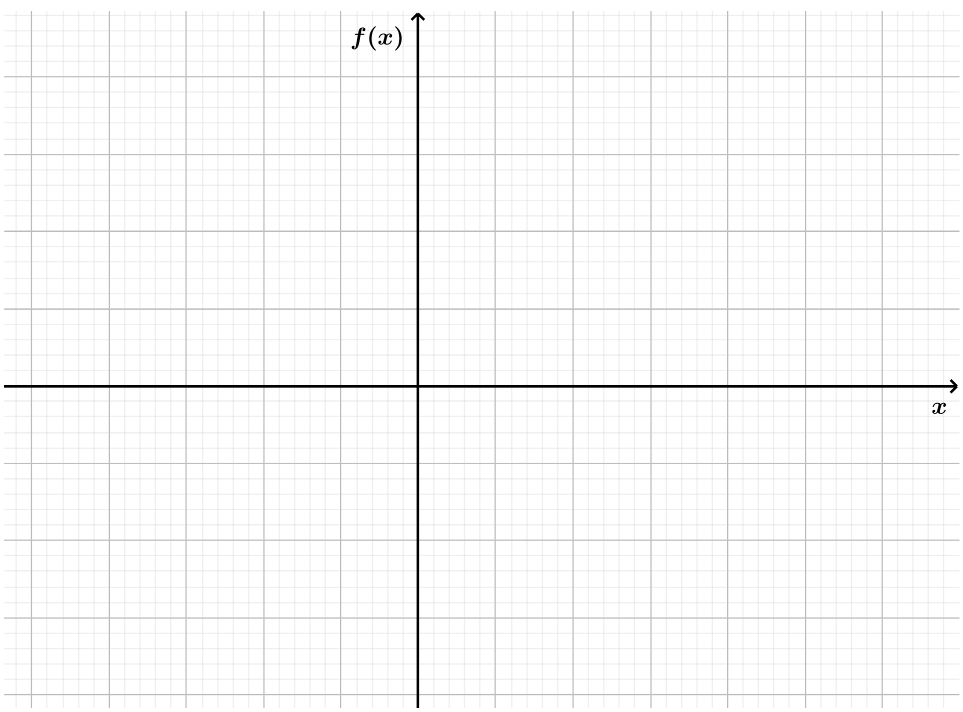


EJERCICIO 10.9. Dados los valores $x_1 = -\frac{7}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = 2$ y $x_4 = 5$.

a) Determina una función polinomial $f(x)$ de menor grado que tiene ceros en esos valores.

b) Indica su dominio, ordenada al origen, rango e intervalos donde la función es positiva o negativa.

c) Bosqueja su gráfica.



SESIÓN 11 (2 HORAS)

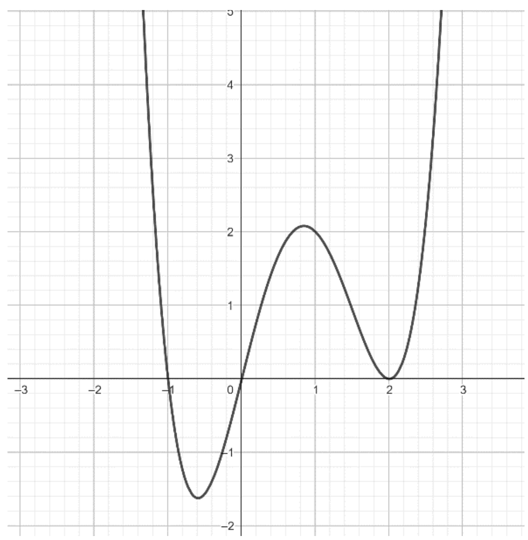
Aprendizaje: Construye una función polinomial a partir de las raíces de su ecuación y bosqueja su gráfica y a partir de una función polinomial calcula los ceros y realizará su gráfica.

Tema: Cálculo de ceros y graficación de funciones.

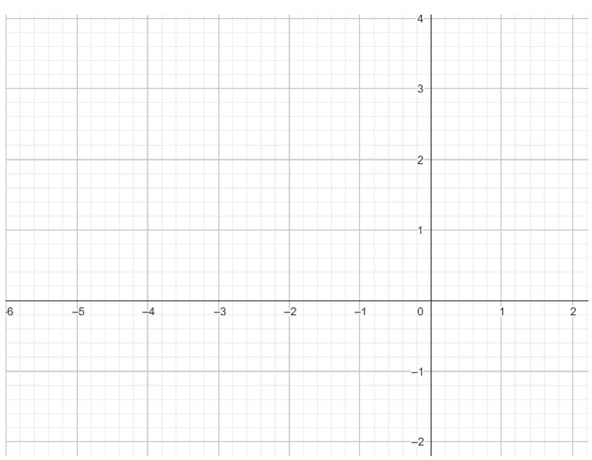
Trabajo en clase

EJERCICIO 11.1. Considerando la gráfica de $f(x)$ realiza los bosquejos de las gráficas trasladadas.

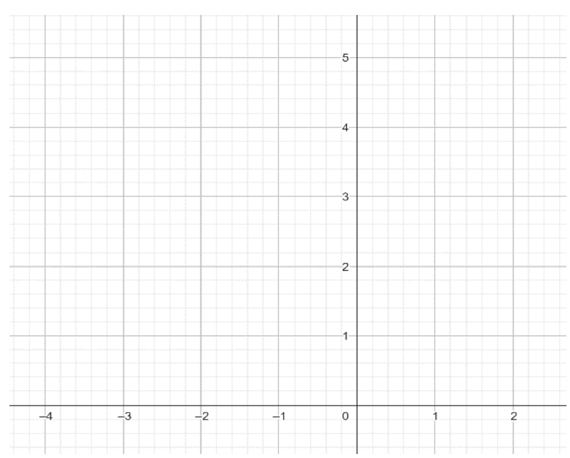
$f(x)$



$f(x+4)$

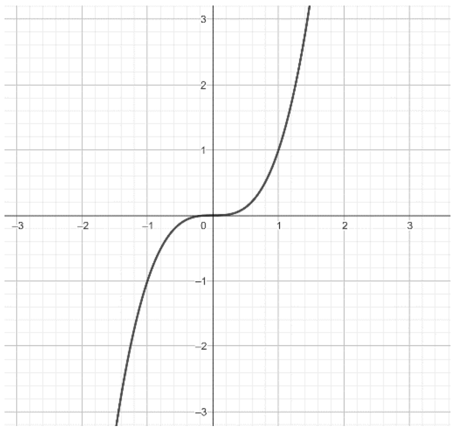


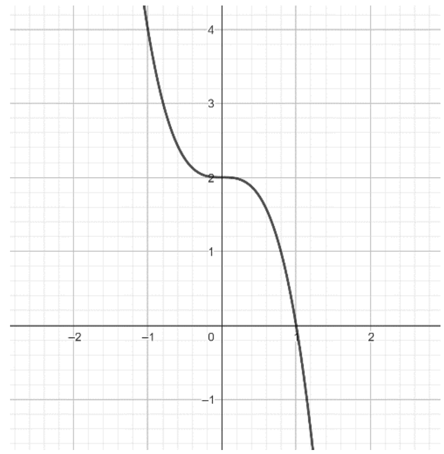
$f(-x)+3$



EJERCICIO 11.2. Una de las gráficas presentadas es $f(x) = x^3$ y la otra está modificada, escribe la función que corresponde a la gráfica según sus cambios.

$f(x) = x^3$ $g(x) =$____________________



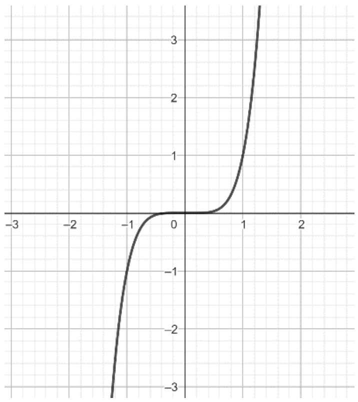
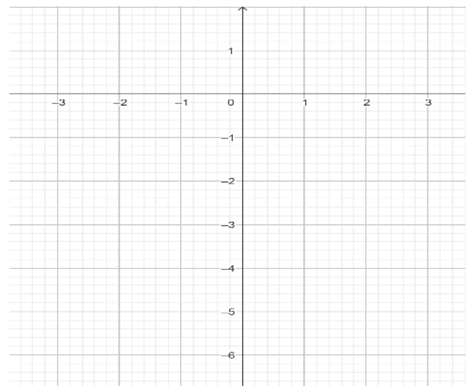


EJERCICIO 11.3. Describe en palabras los cambios que han sufrido las gráficas de cada función modificada.

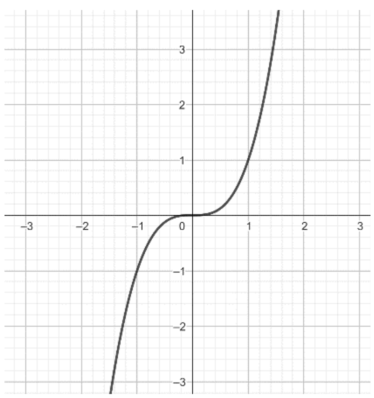
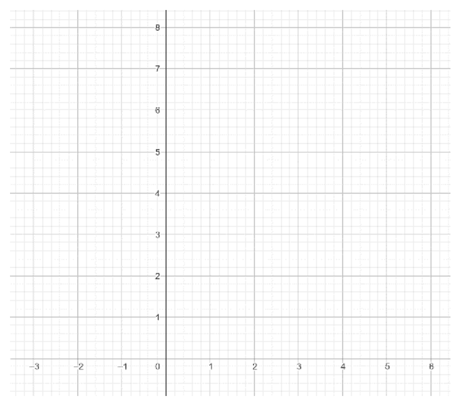
Original	Modificada	Descripción de los cambios en la gráfica.
$f(x) = 3x^3$	$f_1(x) = 3x^3 + 3$	
$f(x) = 2x^3 + 3$	$f_2(x) = -2x^3 + 7$	
$f(x) = x^4 + 2$	$f_3(x) = 3(x^4 + 2)$	
$f(x) = x^3$	$f_4(x) = \frac{1}{2}x^3$	

EJERCICIO 11.4. Utilizando la gráfica de $f(x)$ y los parámetros modificados realiza el bosquejo de las funciones $g(x)$.

a) $f(x) = x^5$ $g(x) = 2x^5 - 4$

b) $f(x) = x^3$ $f(x) = (x-4)^3 + 6$

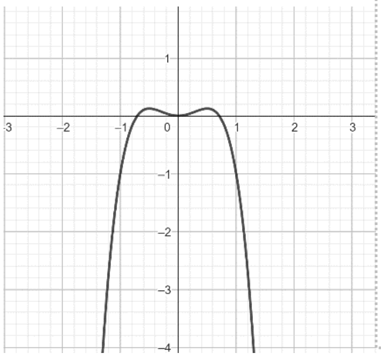



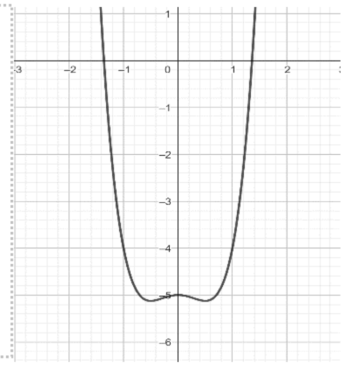
Trabajo Extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

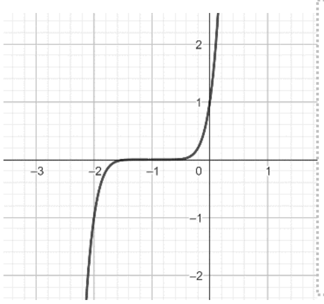
EJERCICIO 11.6. Describe la transformación en cada caso.

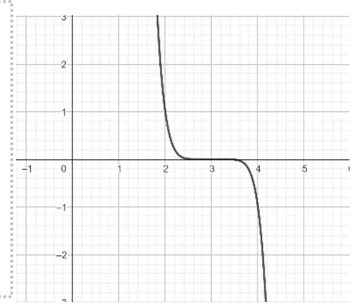
a) $f(x)$



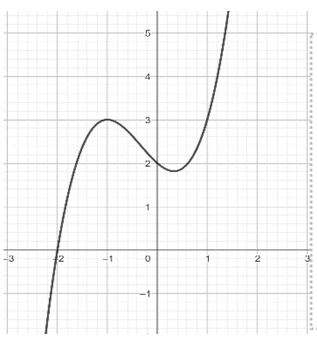


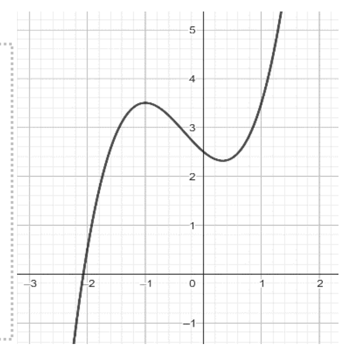
b) $f(x)$



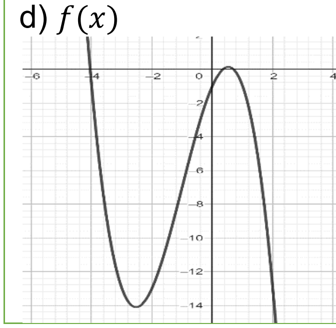


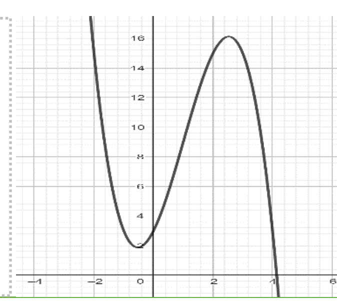
c) $f(x)$





d) $f(x)$





SESIÓN 12 (1 HORA)

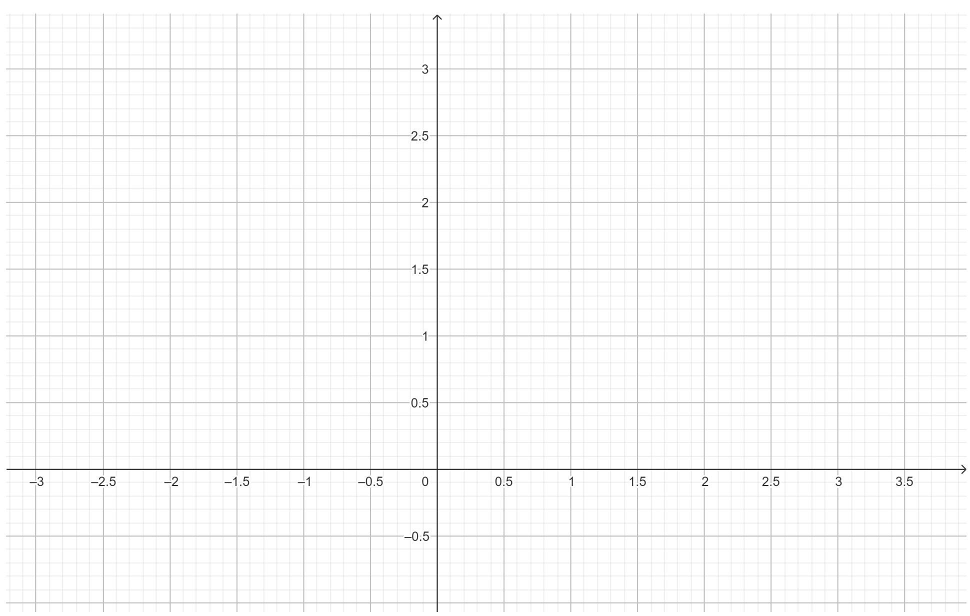
Aprendizaje: Construye una función polinomial a partir de las raíces de su ecuación y bosqueja su gráfica y a partir de una función polinomial calcula los ceros y realizará su gráfica.

Tema: Cálculo de ceros y graficación de funciones.

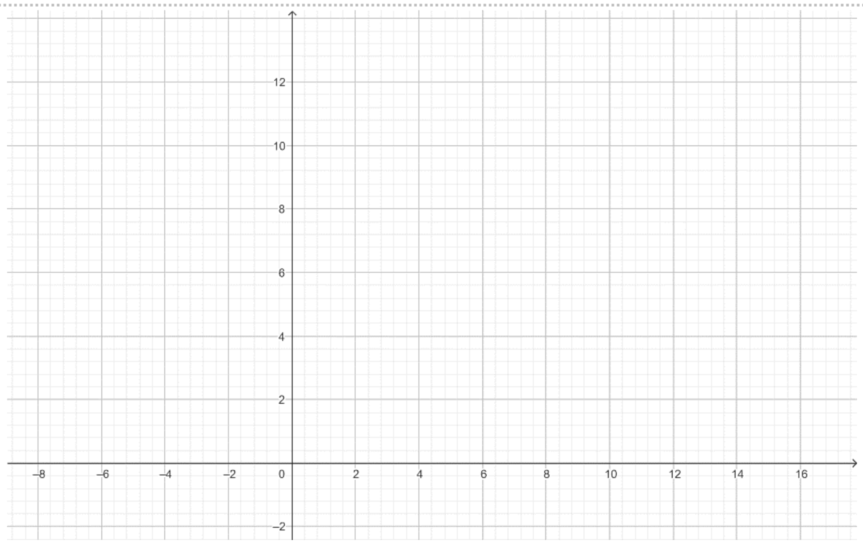
Trabajo en clase

EJERCICIO 12.1. Dadas las siguientes funciones, determina el dominio, ceros, ordenada al origen, rango (si es posible), intervalos donde es positiva o negativa y los intervalos donde es creciente o decreciente (si es posible) y realiza un bosquejo de su gráfica.

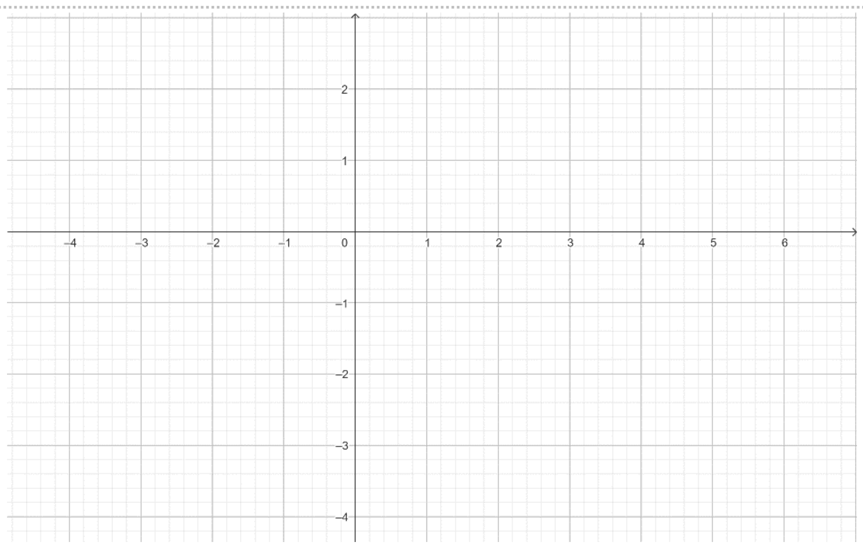
a) $f(x) = -2x^2 + x + 3$



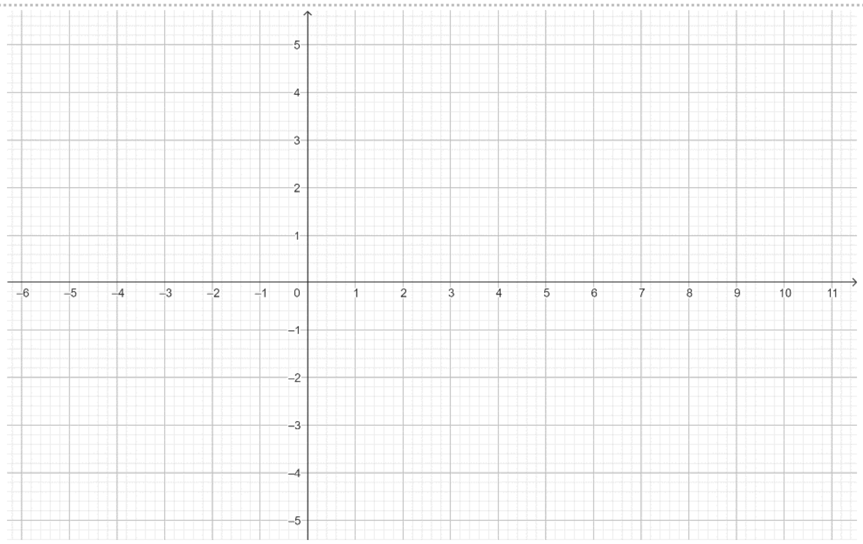
b) $f(x) = (x-2)^2(2x+3)$



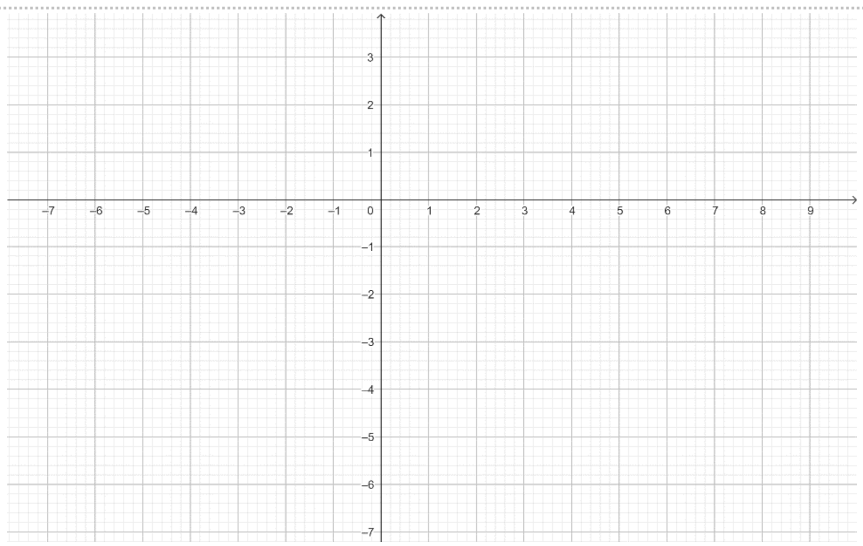
c) $f(x) = \frac{1}{30}(x+3)(x-2)^2(x-5)$



d) $f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$



e) $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

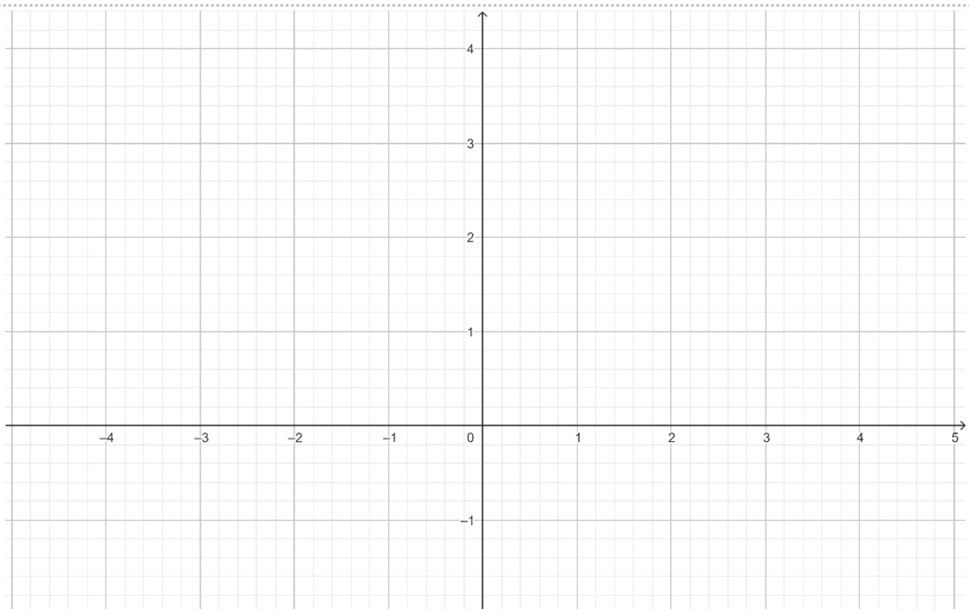


Trabajo extraclase

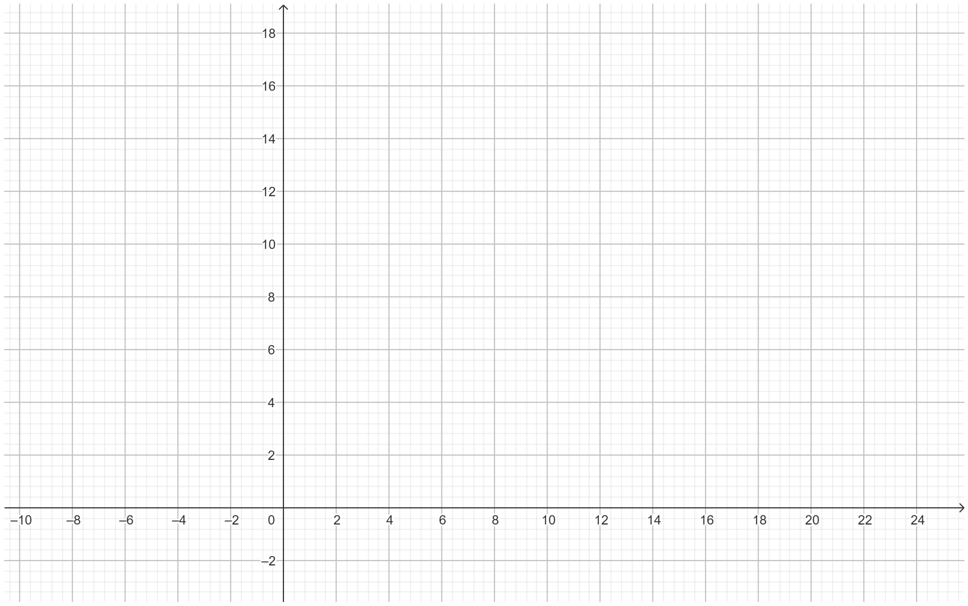
Realiza los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 12.2. Dadas las siguientes funciones, determina el dominio, ceros, ordenada al origen, rango (si es posible), intervalos donde es positiva o negativa y los intervalos donde es creciente o decreciente (si es posible) y realiza un bosquejo de su gráfica.

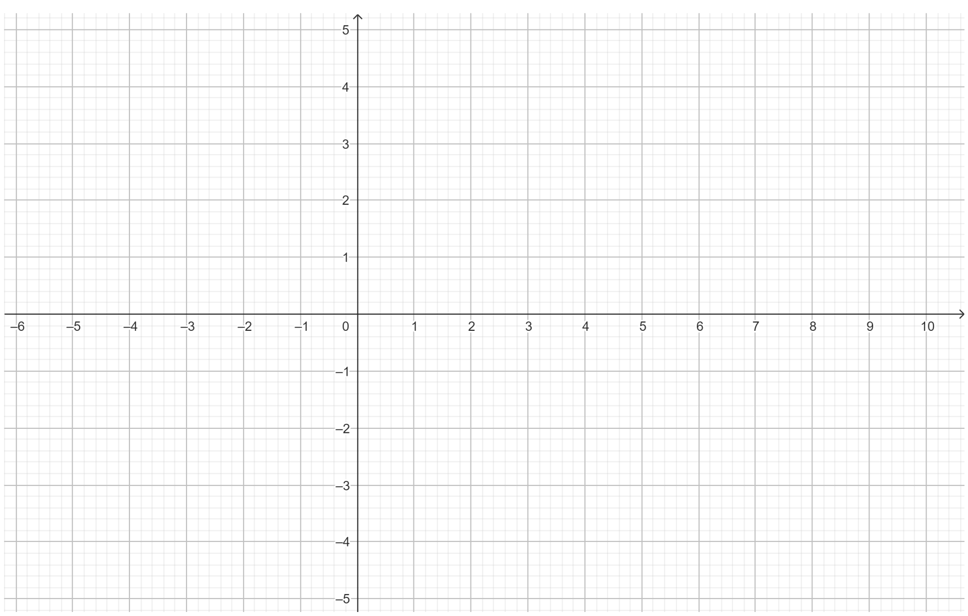
a) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$



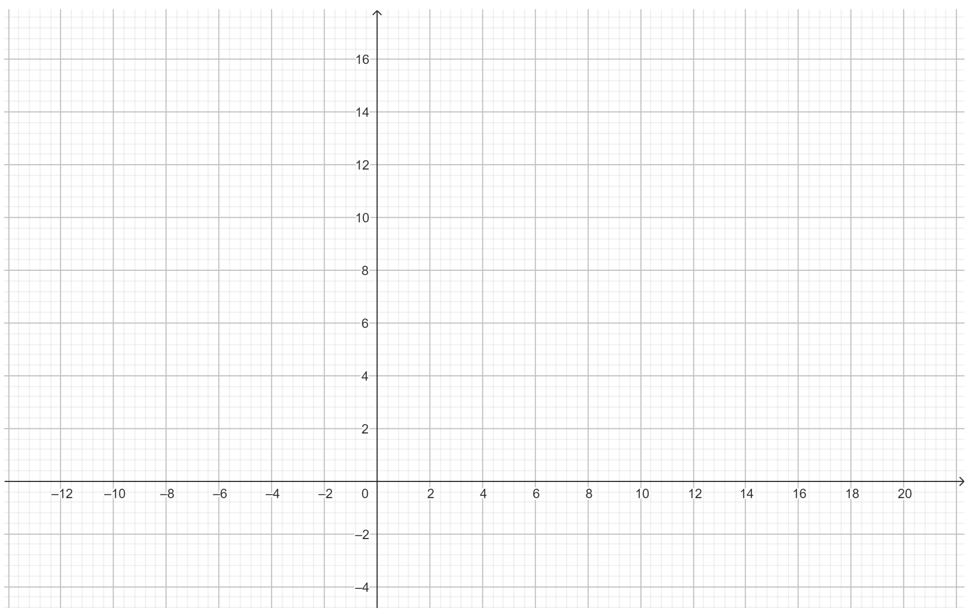
b) $f(x) = 2x^3 - 13x^2 + 17x + 12$


18
16
14
12
10
8
6
4
2
−2
−10 −8 −6 −4 −2 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24

c) $f(x) = -x^7 + 5x^3$


5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

e) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$



SESIÓN 13 (2 HORAS)

Aprendizaje: Reconoce a las funciones como modelos de variación de fenómenos naturales, económicos y sociales.

Tema: Problemas de aplicación.

Trabajo en clase

EJERCICIO 13.1. Un tanque contiene 30 litros de agua y se vacía por un tubo a una rapidez constante de 2 litros por hora.

a) Determina una función que permita calcular el volumen de agua que queda en el tanque en términos del tiempo.

b) ¿En cuánto tiempo se vaciará el tanque?

EJERCICIO 13.2. Se lanza desde el suelo hacia arriba un objeto con velocidad inicial de 40 m/s, su altura está dada por $h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, donde $h(t)$ se mide en metros, v_0 es la velocidad inicial con que se lanza el objeto y g es la aceleración de la gravedad cuyo valor es de $9.8 \ \frac{m}{s^2}$.

a) ¿En cuánto tiempo alcanza una altura de 60 m?

b) ¿Cuál es la altura máxima que puede alcanzar?

b) ¿En cuánto tiempo llegará al suelo?

EJERCICIO 13.3. Se pretende engordar una especie de tortugas para posteriormente liberarlas y repoblar cierto lugar. El peso de las tortugas depende de la dieta que se utilice. Se han implementado dos dietas: una empleando alimento orgánico y la segunda ha sido preparada en el laboratorio. Se ha encontrado que con la dieta preparada en el laboratorio, el aumento de peso en función del tiempo está dado por $p(x) = -2x^4 + 8x^2 + 4$, medido en kilogramos y x está dado en años. Si la tortuga sigue la dieta natural, su aumento de peso está dada por $q(x) = -2x^4 + 12x^2 + 4$. Se deja de alimentar a las tortugas cuando su peso deja de aumentar y se liberan.

a) ¿Cuál es el aumento de peso de cada tortuga al inicio de cada dieta?

b) ¿Cuál es el dominio de cada función?

c) ¿Qué representan los ceros de las funciones en el contexto del problema?

d) Realiza el bosquejo de ambas gráficas e indica cuál es la mejor dieta para este tipo de tortugas.

EJERCICIO 13.4. Se tiene un termo en forma de cilindro circular recto con tapas hemisféricas en cada extremo. El cilindro tiene 55 cm de largo. Sea x el radio común de los hemisferios y el cilindro.

a) Determina una función polinomial donde se represente el volumen respecto al radio.

b) ¿Cuál es el dominio de la función?

c) Si tiene $11000\ cm^3$, ¿cuáles son sus dimensiones?

d) ¿Cuál es el volumen máximo que puede contener el termo?

EJERCICIO 13.5. Un grupo de exploradores de montaña realizan un recorrido de aventura que es representado con la siguiente función $f(x) = -x^4 + 16x^3 - 83x^2 + 140x$, donde x es el tiempo en días y $f(x)$ es la altura sobre el nivel del mar a la que se encuentran en un momento determinado. Si el viaje dura 7 días.

a) ¿Cuál es el dominio y rango de la función?

b) ¿Qué representan los ceros de la función en el contexto del problema?

c) ¿Cuál es la altura mínima y máxima que pudieron alcanzar durante la exploración?

d) Utiliza GeoGebra u otro software para determinar en qué día estuvieron a 60 m de altura.

Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 13.6. Entre todos los rectángulos cuyo perímetro es 20m ¿qué dimensiones tiene el de área máxima?

EJERCICIO 13.8. Los ingresos que reciben las agencias de viajes estadounidenses por transacciones en línea (servicios a través de internet), en miles de millones de dólares, entre 1996 y 2002, se pueden calcular mediante la función polinomial $R(t) = 0.18t^2 + 0.37t + 0.28$; en donde t son los años desde 1996, o sea, $0 \leq t \leq 6$ y $R(t)$ es el ingreso en miles de millones de dólares. Realiza un análisis de la situación elaborando:

a) Un bosquejo de la gráfica.

b) Una tabla con diferentes años.

c) El cálculo del ingreso en 1996 y en 2002.

d) La descripción de los ingresos, mencionando dominio, rango y ceros de la función y la relación de estos datos en el contexto de la situación.

SESIÓN 14 (2 HORAS)

Aprendizaje: Reconoce a las funciones como modelos de variación de fenómenos naturales, económicos y sociales.

Tema: Problemas de aplicación.

Trabajo en clase

EJERCICIO 14.1. Disponemos de una barra de aluminio de 66 metros para construir una portería de fútbol. Si queremos que el área de la portería sea máxima, ¿cuánto deben medir los postes y el larguero?

EJERCICIO 14.2. En un trabajo de investigación sobre el rendimiento de una válvula (de 0 a 100) durante 24 horas de funcionamiento, unos ingenieros industriales han comprobado que dicho rendimiento se comporta de acuerdo a la siguiente función $R(t) = \frac{(30-t)(t+10)}{4}$, $0 \leq t \leq 24$. Analiza la situación.

a) ¿Cuánto tiempo debe permanecer funcionando la válvula para obtener su máximo rendimiento?

b) Realiza un bosquejo de la gráfica.

c) Con base en el contexto del problema, indica qué representa el dominio, rango y ceros de la función.

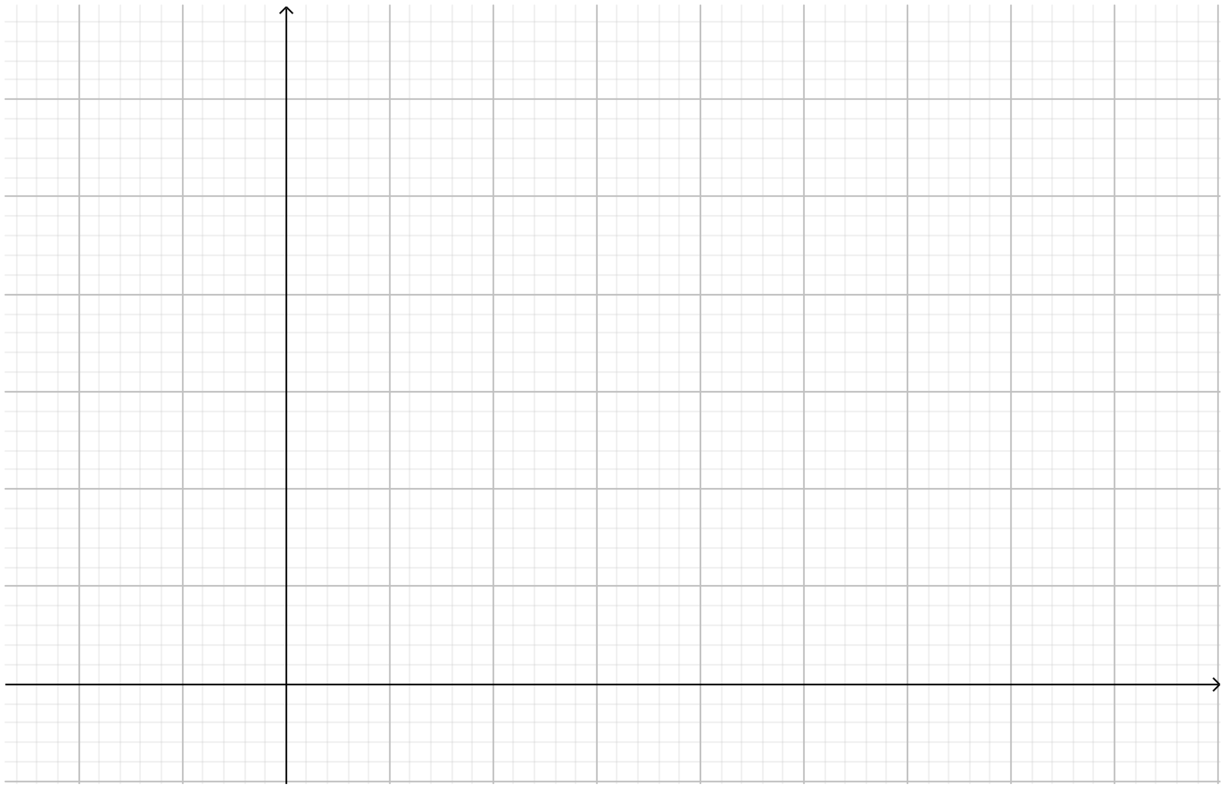
EJERCICIO 14.3. Se quiere construir una caja sin tapa a partir de una hoja de cartón de 16×8cm. Para ello, se corta un cuadrado de lado x en cada esquina y se dobla la hoja levantando los cuatro laterales de la caja.

a) Construye una función V que permita calcular el volumen de la caja en términos de x (altura de la caja).

b) ¿Cuál es el dominio de la función V?

c) Realiza una tabla con diferentes medidas de x.

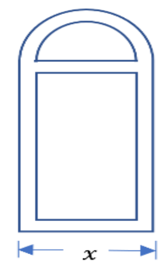
d) Traza la gráfica.



e) ¿Cuáles serían las dimensiones de la caja con volumen máximo? ¿Cuál es el volumen máximo?

Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.



EJERCICIO 14.4. La ventana que se muestra en la figura de la derecha consta de un rectángulo con un semicírculo en la parte superior.

a) Expresa el área A de la ventana como una función del ancho x indicado, si se sabe que el perímetro de la ventana es de 30 metros.

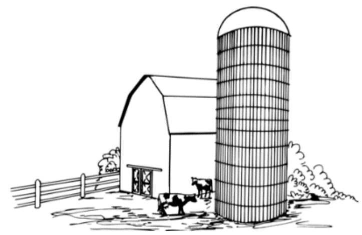
b) Indica el dominio, rango y ceros de la función y la relación de estos datos en el contexto del problema.

c) ¿Qué dimensiones debe tener la ventana para tener área máxima? Y ¿Cuál es el área máxima?

Trabajo Extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

Ejercicio 14.5. Para almacenar granos se usan contenedores en forma de un cilindro con una semiesfera en la base. La altura del cilindro es de 8 m.



a) Determina la función que representa el volumen del contenedor en términos del radio x.

b) Indica el dominio, rango y ceros de la función y la relación de estos datos en el contexto del problema.

c) Si se desea construir un almacén de 25 m^3, ¿Cuál debe ser el radio de la base?

Ejercicio 14.6. Investiga tres problemas que se puedan modelar o resolver empleando funciones polinomiales en la vida cotidiana. Ejemplifica.

SESIÓN 15 (1 HORA)

Aprendizaje: Reconoce a las funciones como modelos de variación de fenómenos naturales, económicos y sociales.

Tema: Problemas de aplicación.

Trabajo en clase

EJERCICIO 15.1. Escribe lo que hayas aprendido en esta unidad sobre las funciones polinomiales.

EJERCICIO 15.2. Realiza una reflexión sobre la importancia de las funciones polinomiales como modelos de diversas situaciones contextuales. Escribe tus conclusiones en el siguiente espacio y compártelos con tus compañeros.

AUTOEVALUACIÓN

Accede a través del código QR de la izquierda para abrir un cuestionario de autoevaluación. En el espacio siguiente escribe el procedimiento realizado para resolver cada reactivo, o bien, anota el argumento para tu respuesta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ángel, A. & Runde, D. (2013). *Álgebra Intermedia.* (8a Ed.). Pearson: México.

CCH (2006). *Orientación y Sentido de las Áreas del Plan de Estudios Actualizado*. UNAM.

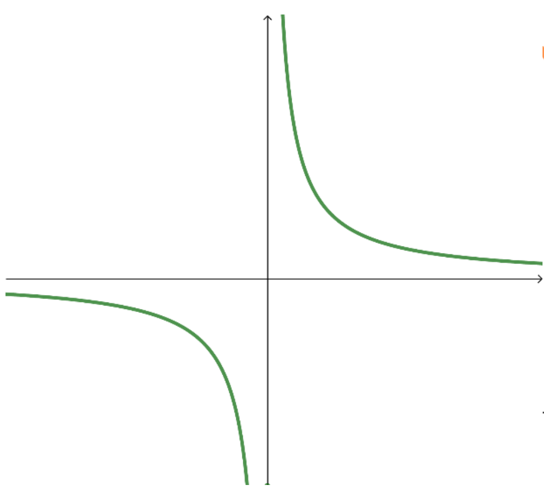
ENCCH (2016). *Programas de Estudio. Área Matemáticas. Matemáticas I-IV*. UNAM.

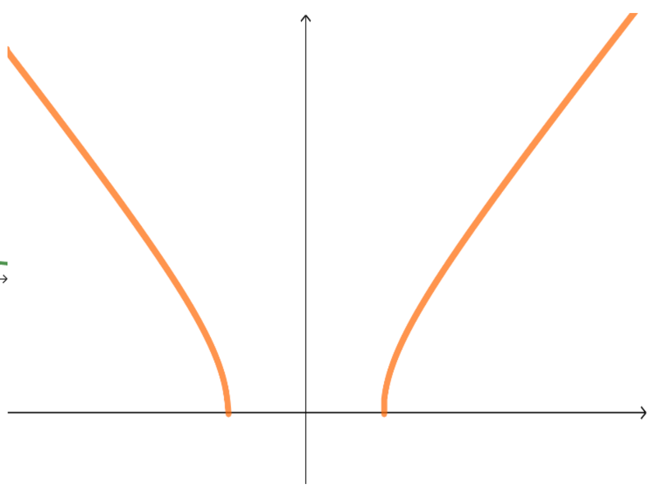
Martínez, A.I., Espinosa, M.A., Hernández, G.I. & Rayón, R.R. (2018). *Guía de estudio para examen Extraordinario de Matemáticas IV*. CCH Azcapotzalco.

Swokowski, E. & Cole, J. (2018). *Precálculo*. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* (13ª Ed.). CENGAGE Learning: México.

UNIDAD II

FUNCIONES RACIONALES Y FUNCIONES CON RADICALES





PROPÓSITO

Al finalizar, el alumno: Modelará algunas situaciones que dan lugar a funciones racionales y con radicales, analizará una gráfica para identificar su dominio, rango, asíntotas y relacionar estas características con la situación problemática planteada.

SESIÓN 16 (2 HORAS)

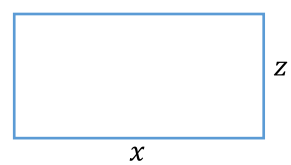
Aprendizaje: Explora situaciones que se modelan con funciones racionales.

Tema: Funciones de la forma: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x)$ y $q(x)$, polinomios de coeficientes reales, de grado menor o igual a dos.

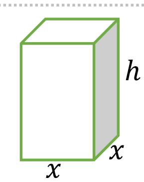
Trabajo en clase

EJERCICIO 16.1. Si un ciclista tarda t segundos para recorrer una pista recta de 1 km con movimiento uniforme, ¿Con qué rapidez v se desplaza en la pista?

EJERCICIO 16.2. Un rectángulo tiene área $A = 10\ m^2$, si su base mide x metros y su altura mide z metros**.** Hallar una expresión que permita calcular la altura en términos de la base.

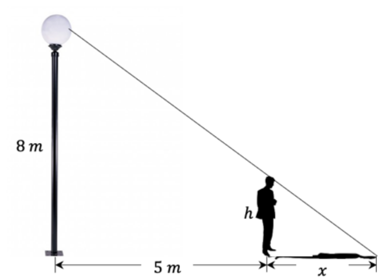


EJERCICIO 16.3. Una caja abierta con base cuadrada tiene un volumen de 10 centímetros cúbicos. Determina la altura h de la caja en términos de la longitud x del lado de la base.



EJERCICIO 16.4. Un proveedor de telefonía celular ofrece un teléfono nuevo por $600.00 con un plan mensual de $250.00. ¿Cuál será el costo promedio mensual por usar el teléfono?

EJERCICIO 16.5. Una persona se encuentra parada a 5 metros de un poste luminaria de 8 metros de altura. Determina la estatura h de la persona en términos de la longitud x de la sombra que proyecta. ¿Qué valores puede tomar x?



EJERCICIO 16.6. Un tanque con capacidad de 1000 litros contiene 50 litros de una solución de salmuera al 25%. Se agregan x litros de una solución de salmuera al 75% al tanque. Determina la proporción p de salmuera en la mezcla final.

Trabajo extraclase

EJERCICIO 16.7. Grafica las funciones obtenidas en los ejercicios 16.1 al 16.6, empleando tablas. Indica el dominio y el rango de cada función.

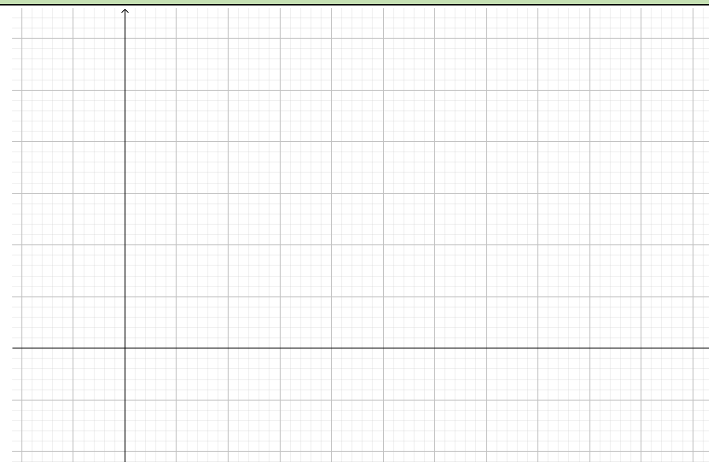
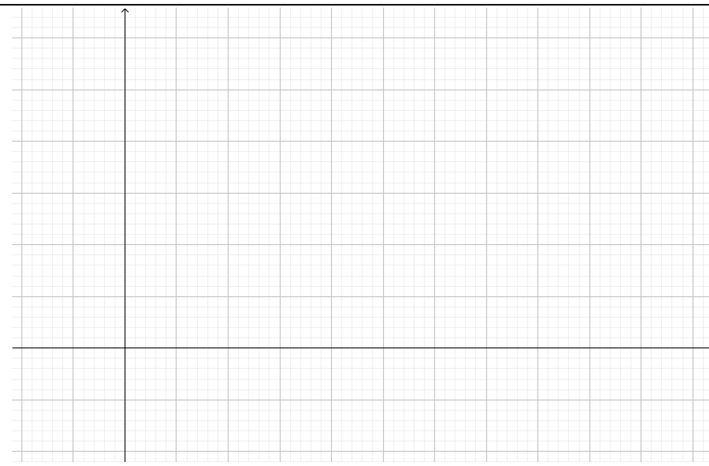
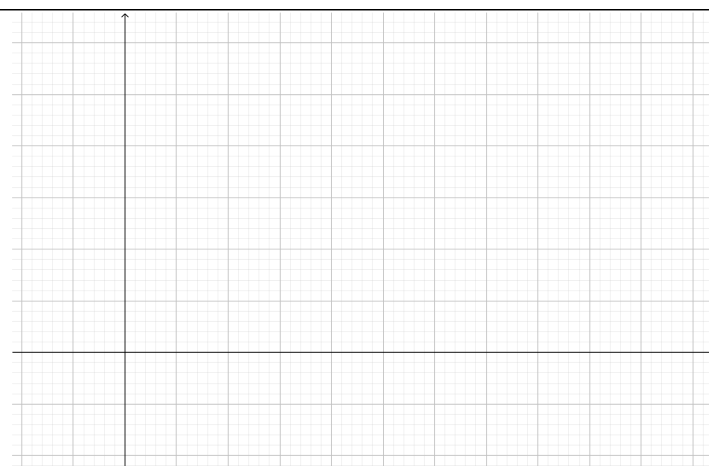
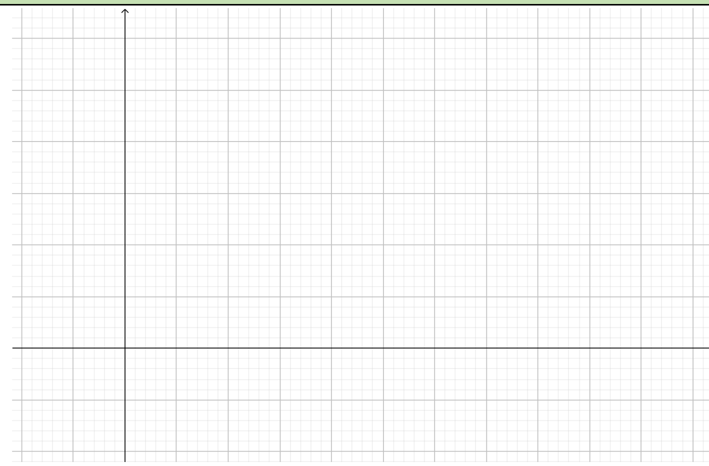
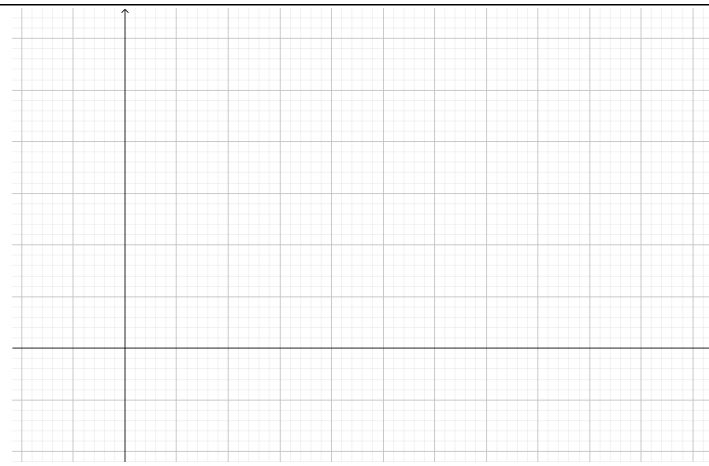
<table>
<tr><th>Tabla</th><th>Gráfica</th></tr>
<tr><td>a) EJERCICIO 16.1<table><tr><th></th><th></th></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>b) EJERCICIO 16.2<table><tr><th></th><th></th></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>c) EJERCICIO 16.3<table><tr><th></th><th></th></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table></td><td></td></tr>
</table>

Tabla	Gráfica
d) EJERCICIO 16.4	
e) EJERCICIO 16.5	
f) EJERCICIO 16.6	

SESIÓN 17 (2 HORAS)

Aprendizaje: Identifica los elementos de una función racional: ceros, asíntotas verticales y huecos, dominio y rango para graficarla.

Tema: Elementos de las funciones: Dominio, Rango, Asíntotas verticales, Puntos de discontinuidad y Ceros de la función.

Trabajo en clase

Las funciones obtenidas en la sesión anterior son ejemplos de funciones racionales; sin embargo, como las variables independientes x representan magnitudes no negativas, el dominio es el conjunto de los números reales mayores a cero. No obstante, cuando consideramos las funciones anteriores como funciones de variable real, el dominio dependerá del denominador.

EJERCICIIO 17.1. Escribe la definición de una función racional.

EJERCICIO 17.2. Proporciona tres ejemplos de funciones racionales.

EJERCICIO 17.3. Define los siguientes conceptos:

Punto de discontinuidad:

Asíntota vertical:

Asíntota horizontal:

EJERCICIO 17.4. Describe el procedimiento para determinar el dominio de una función racional.

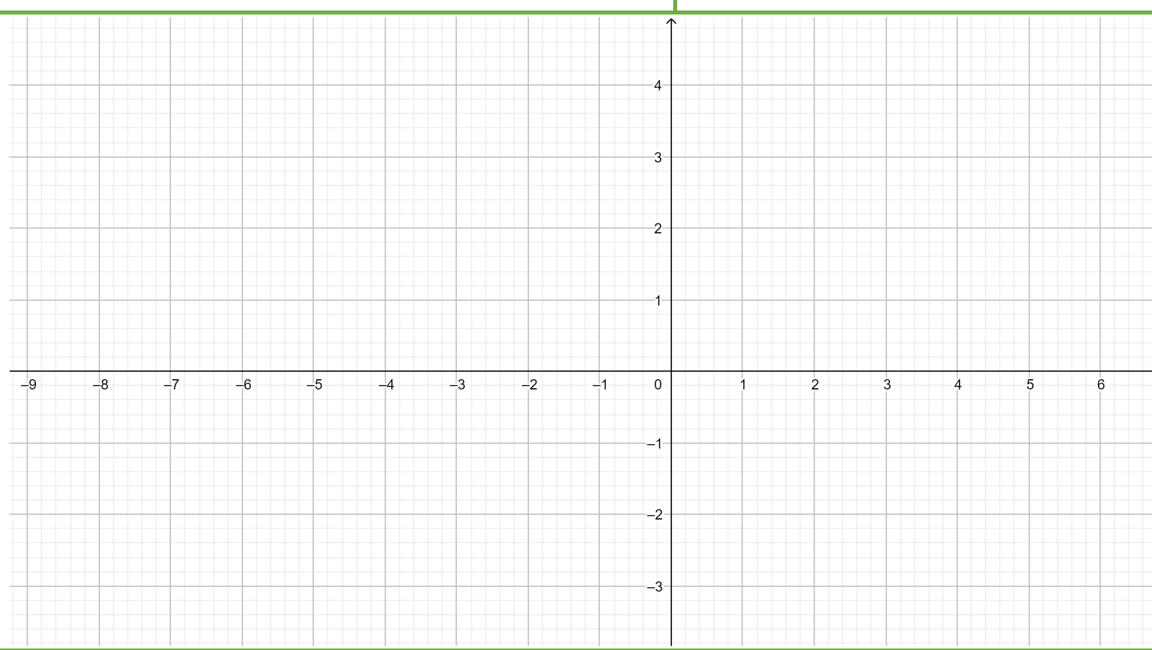
EJERCICIO 17.5. Describe el procedimiento para determinar la asíntota vertical de una función racional. Realiza un ejemplo.

EJERCICIO 17.6. Describe el procedimiento para determinar la asíntota horizontal de una función racional. Realiza un ejemplo.

Para responder los siguientes ejercicios puedes revisar el video que te da acceso el QR de la izquierda. Además, puedes explorar las gráficas de una función racional cuando el numerador y denominador son polinomios de grado 1. Accede al Applet con el QR de la derecha.

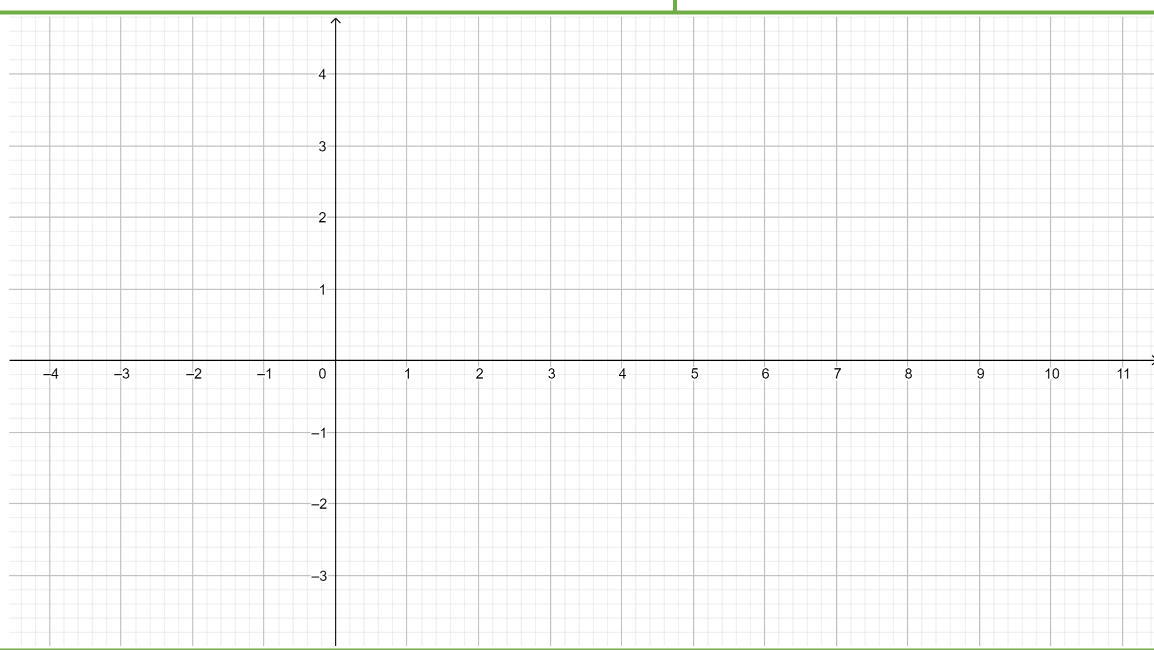
EJERCICIO 17.7. Determina los elementos de la función racional $f(x) = \frac{1}{x+3}$ y realiza el bosquejo de la gráfica. Comprueba tus resultados empleando GeoGebra.

Dominio	
Asíntota vertical	
Ordenada al origen	
Ceros	
Asíntota horizontal	
Rango	



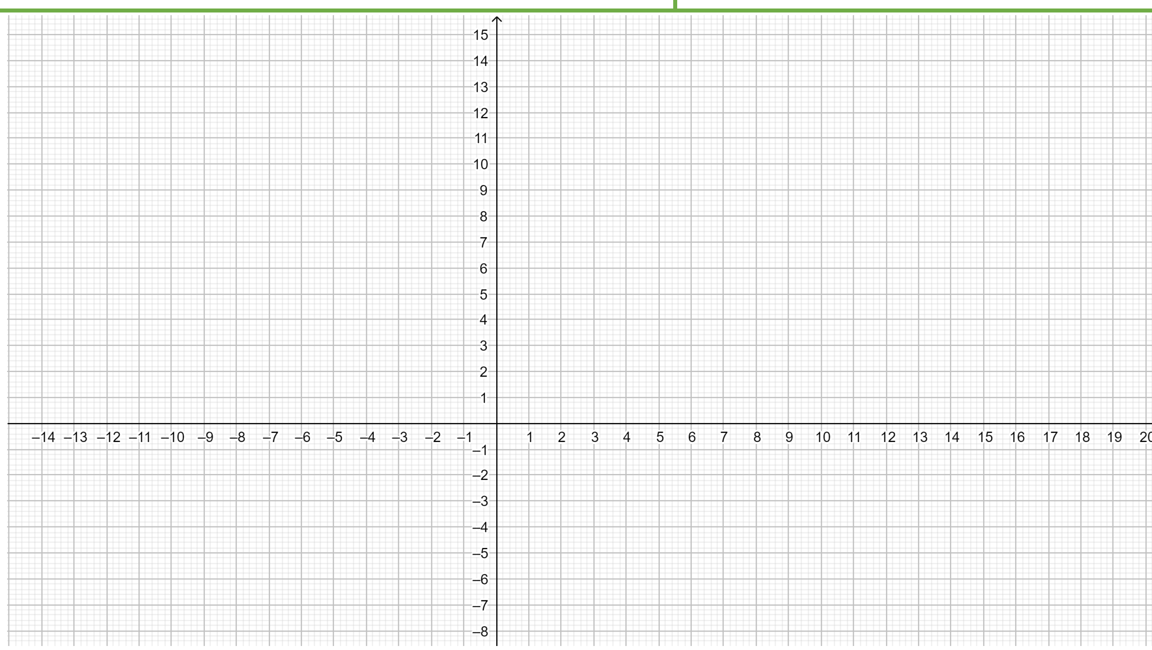
EJERCICIO 17.8. Determina los elementos de la función racional $f(x) = \frac{1}{x-5}$ y realiza el bosquejo de la gráfica. Comprueba tus resultados empleando GeoGebra.

Dominio	
Asíntota vertical	
Ordenada al origen	
Ceros	
Asíntota horizontal	
Rango	



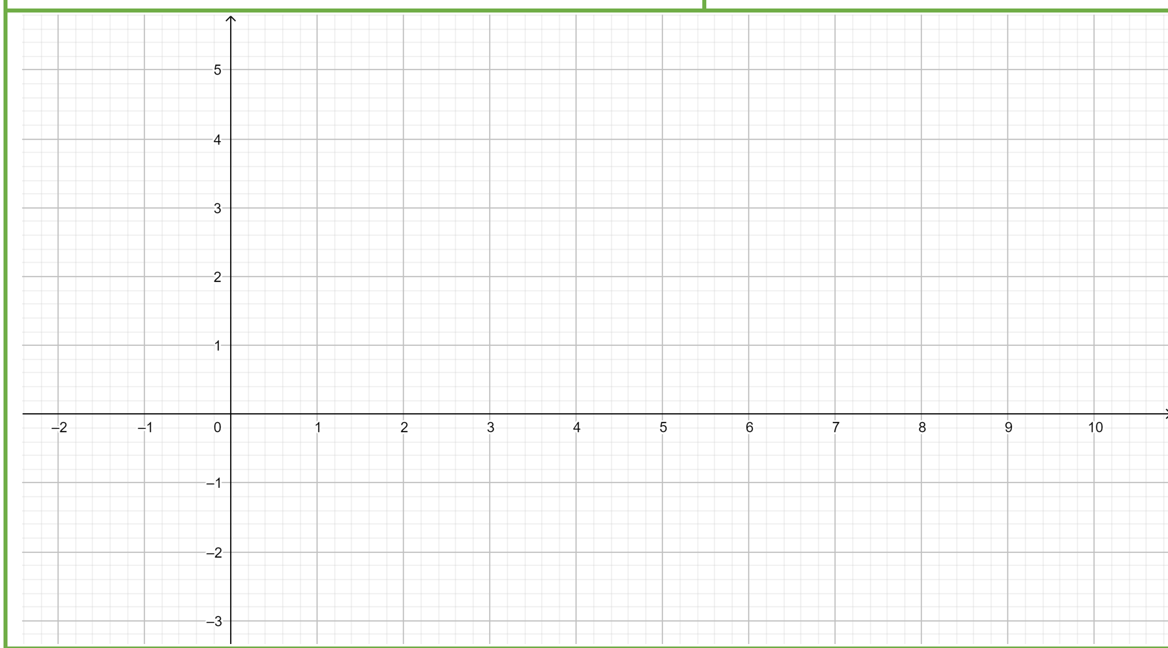
EJERCICICIO 17.9. Determina los elementos de la función racional $f(x) = \frac{5x}{x-4}$ y realiza el bosquejo de la gráfica. Comprueba tus resultados empleando GeoGebra.

Dominio	
Asíntota vertical	
Ordenada al origen	
Ceros	
Asíntota horizontal	
Rango	



EJERCICIO 17.10. Determina los elementos de la función racional $f(x) = \frac{2x-9}{x-5}$ y realiza el bosquejo de la gráfica. Comprueba tus resultados empleando GeoGebra.

Dominio	
Asíntota vertical	
Ordenada al origen	
Ceros	
Asíntota horizontal	
Rango	



Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 17.11. Determina los elementos de las funciones obtenidas en los ejercicios del 16.1 al 16.6, considerándolas como funciones de variable real.

Función	Elementos	
a) EJERCICIO 16.1	Dominio	
	Asíntota vertical	
	Ordenada al origen	
	Ceros	
	Asíntota horizontal	
	Rango	
b) EJERCICIO 16.2	Dominio	
	Asíntota vertical	
	Ordenada al origen	
	Ceros	
	Asíntota horizontal	
	Rango	
c) EJERCICIO 16.3	Dominio	
	Asíntota vertical	
	Ordenada al origen	
	Ceros	
	Asíntota horizontal	
	Rango	

Función	Elementos	
d) EJERCICIO 16.4	Dominio	
	Asíntota vertical	
	Ordenada al origen	
	Ceros	
	Asíntota horizontal	
	Rango	
e) EJERCICIO 16.5	Dominio	
	Asíntota vertical	
	Ordenada al origen	
	Ceros	
	Asíntota horizontal	
	Rango	
f) EJERCICIO 16.6	Dominio	
	Asíntota vertical	
	Ordenada al origen	
	Ceros	
	Asíntota horizontal	
	Rango	

SESIÓN 18 (1 HORA)

Aprendizaje: Identifica los elementos de una función racional: ceros, asíntotas verticales y huecos, dominio y rango para graficarla.

Tema: Elementos de las funciones: Dominio, Rango, Asíntotas verticales, Puntos de discontinuidad y Ceros de la función.

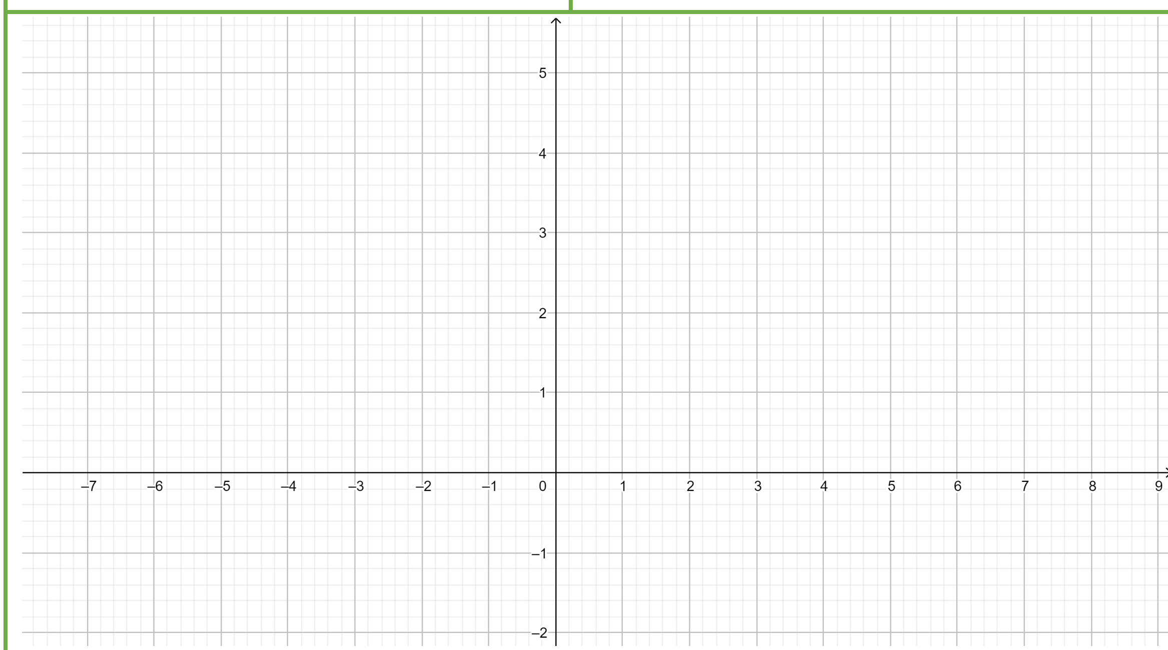
Trabajo en clase

EJERCICIO 18.1. ¿Qué es una discontinuidad removible o evitable?

EJERCICIO 18.2. Describe cómo se determina la discontinuidad removible en una función racional y cómo se representa en la gráfica.

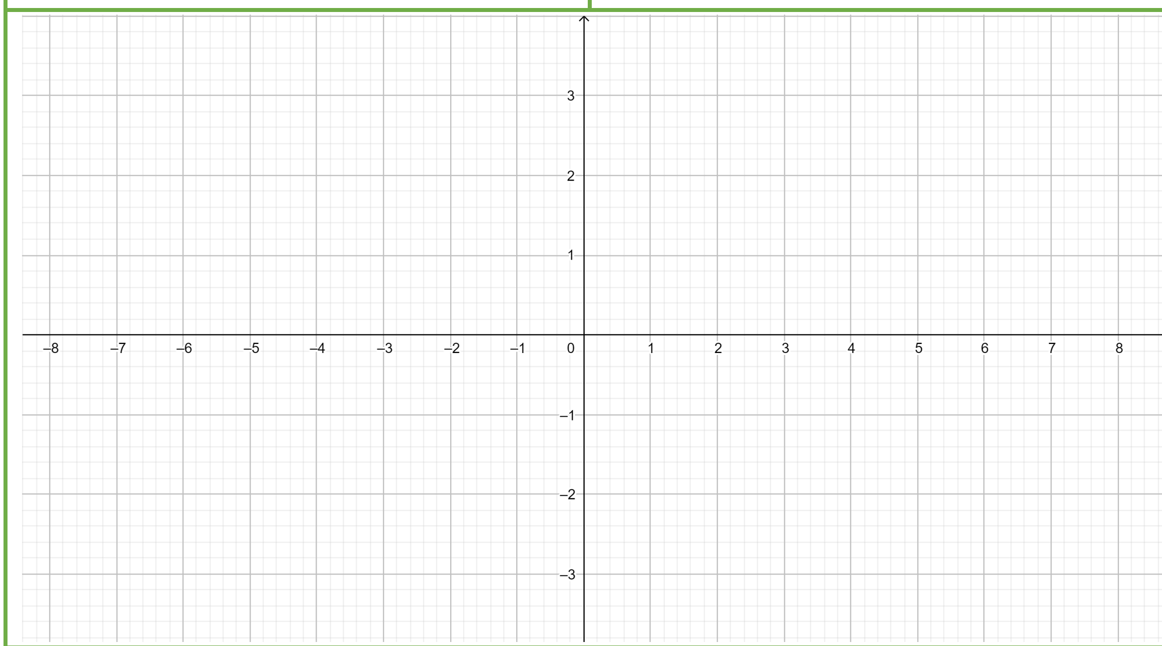
EJERCICIO 18.3. Determina los elementos de la función racional $f(x) = \frac{3x-3}{x-1}$ y realiza el bosquejo de la gráfica. Comprueba tus resultados empleando GeoGebra.

Dominio	
Asíntota vertical	
Discontinuidad removible	
Ordenada al origen	
Ceros	
Asíntota horizontal	
Rango	



EJERCICIO 18.4. Determina los elementos de la función racional $f(x) = \frac{8-2x}{x-4}$ y realiza el bosquejo de la gráfica. Comprueba tus resultados empleando GeoGebra.

Dominio	
Asíntota vertical	
Discontinuidad removible	
Ordenada al origen	
Ceros	
Asíntota horizontal	
Rango	



Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

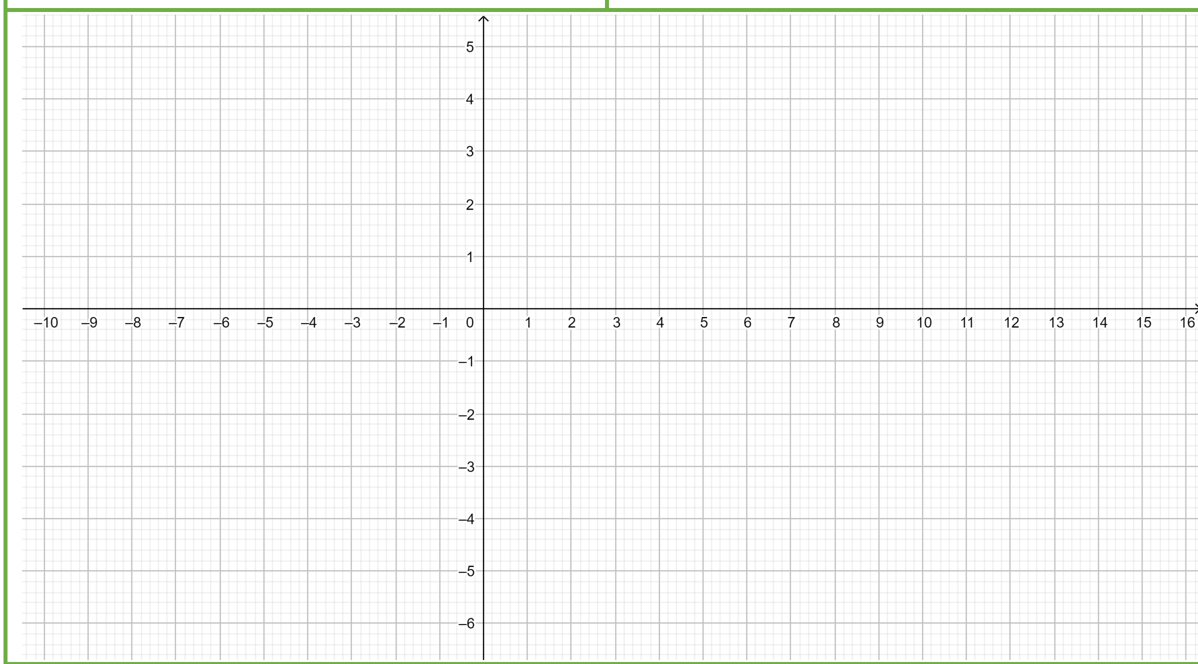
EJERCICIO 18.5. Determina el valor de a para que la función racional $f(x) = \frac{ax-12}{2x+3}$ tenga una discontinuidad removible. Determina sus elementos y realiza el bosquejo de la gráfica. Comprueba tus resultados empleando GeoGebra.

Dominio	
Asíntota vertical	
Discontinuidad removible	
Ordenada al origen	
Ceros	
Asíntota horizontal	
Rango	

EJERCICIO 18.6. Construya una función racional con las siguientes características, determina sus otros elementos y bosqueja su gráfica. Comprueba tus resultados empleando GeoGebra.

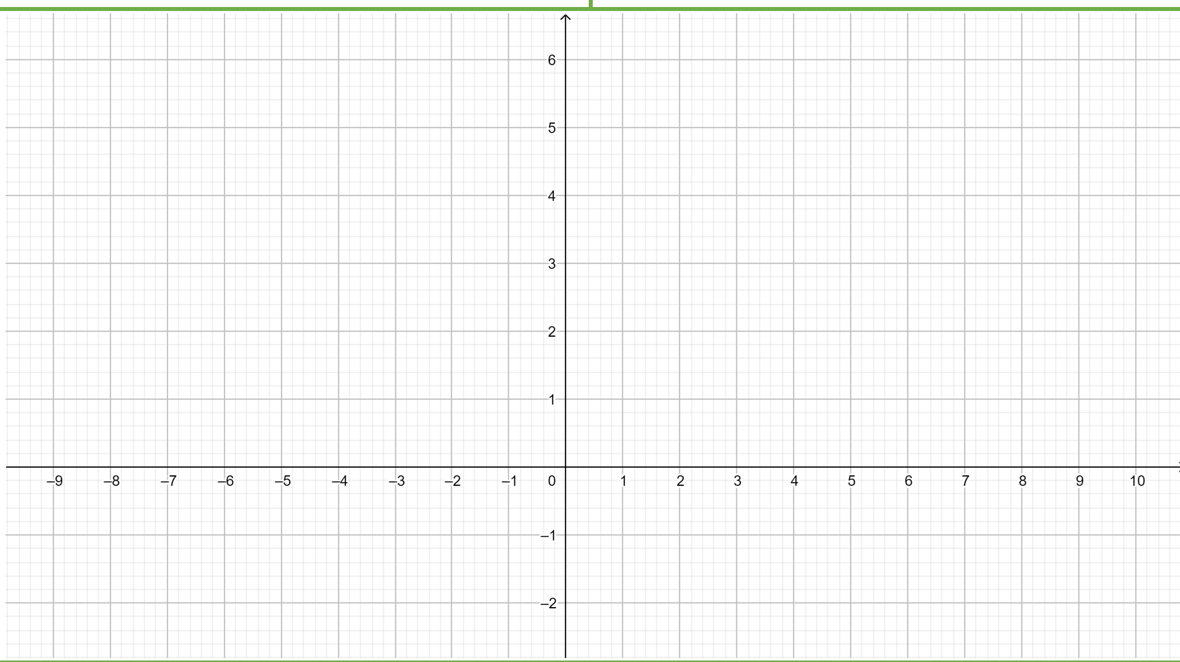
a) Un cero en $x = -8$, asíntota vertical en $x = 4$, asíntota horizontal en $y = -1$ y corte al eje y en (0,2).

Dominio	
Asíntota vertical	
Discontinuidad removible	
Ordenada al origen	
Ceros	
Asíntota horizontal	
Rango	

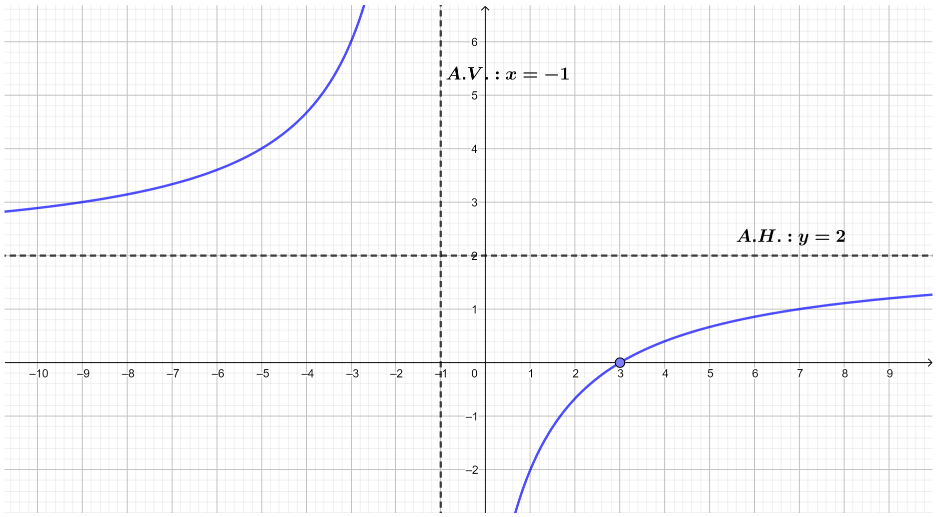


b) Sin ceros, discontinuidad removible $x = 7$ y corte al eje y en (0,-2).

Dominio	
Asíntota vertical	
Discontinuidad removible	
Ordenada al origen	
Ceros	
Asíntota horizontal	
Rango	



EJERCICIO 18.7. Determina una función racional que tenga como gráfica la que se muestra a continuación y encuentra sus otros elementos. Comprueba tu respuesta usando GeoGebra.



EJERCICIO 18.8. Un gran tanque de mezcla contiene actualmente 100 litros de agua en los que se han mezclado 5 kg de azúcar. Se abrirá una llave que vierte 10 litros por minuto de agua en el tanque al mismo tiempo que se vierte azúcar en el tanque a una velocidad de 1 kg por minuto. Encuentre la concentración (kg por litro) de azúcar en el tanque después de 12 minutos. ¿Es esa una mayor concentración que al principio?

SESIÓN 19 (2 HORAS)

Aprendizaje: Identifica los elementos de una función racional: ceros, asíntotas verticales y huecos, dominio y rango para graficarla.

Tema: Elementos de las funciones: Dominio, Rango, Asíntotas verticales, Puntos de discontinuidad y Ceros de la función.

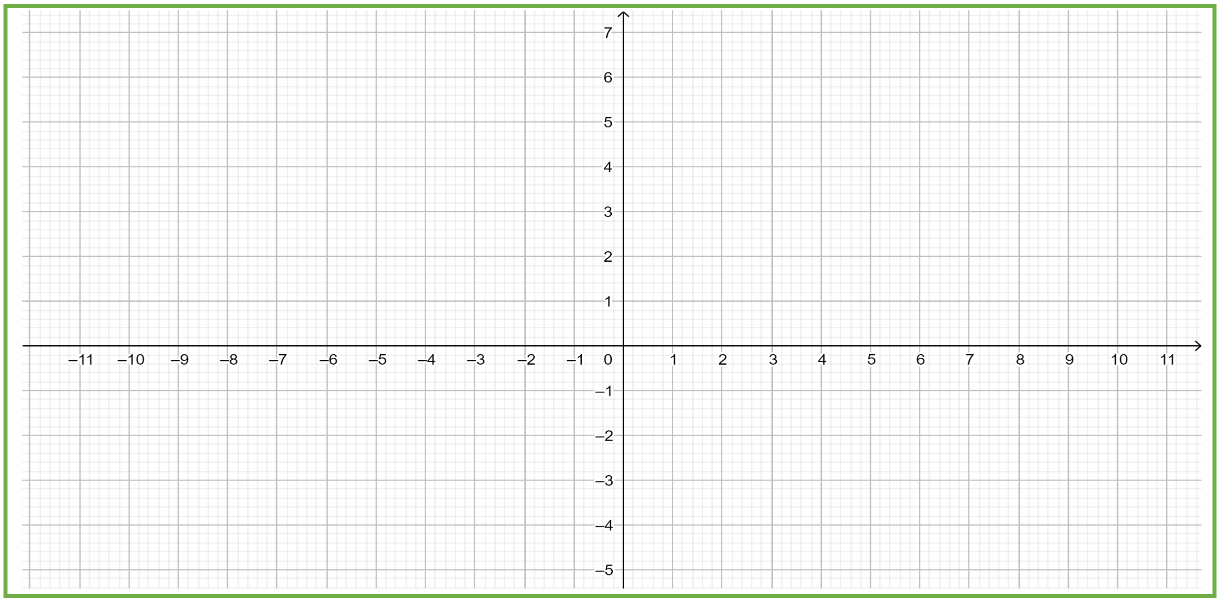
Trabajo en clase

Como apoyo para resolver estos ejercicios puedes consultar el video que te da acceso el QR de la izquierda.

EJERCICIO 19.1. Determina los elementos de la función racional $f(x) = \frac{5-x}{(x-2)(x+5)}$ y realiza el bosquejo de la gráfica. Comprueba tus resultados empleando GeoGebra.

Dominio	
Asíntota vertical	
Discontinuidad removible	
Ordenada al origen	
Ceros	
Asíntota horizontal	
Rango	

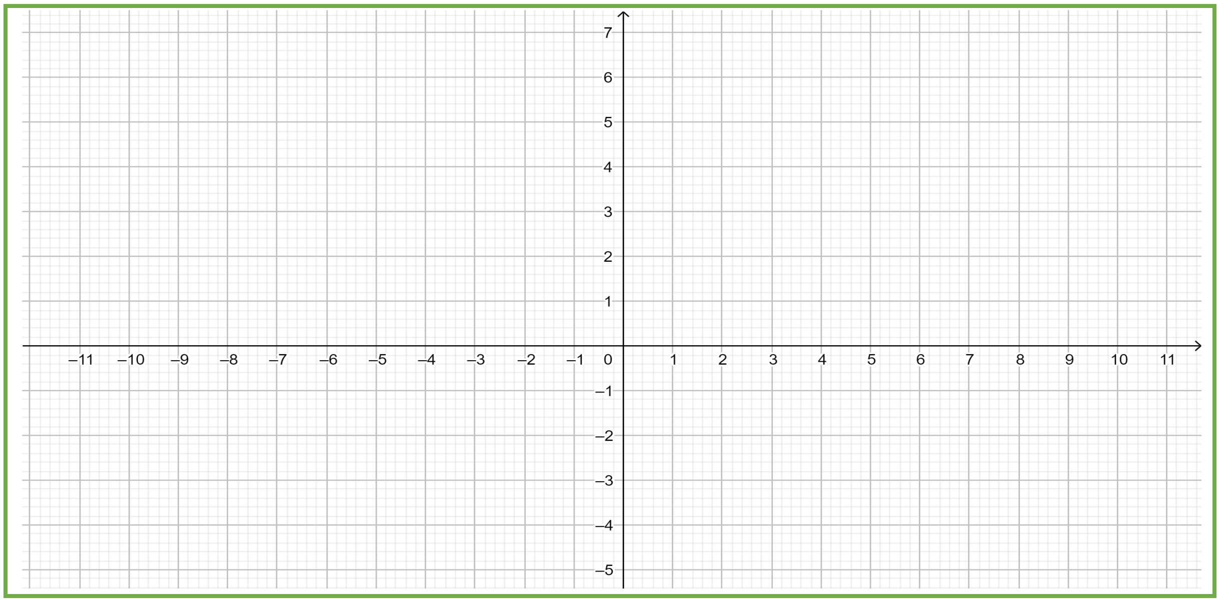
Análisis gráfico



EJERCICIO 19.2. Determina los elementos de la función racional $f(x) = \frac{5x-2}{(x+1)(x+3)}$ y realiza el bosquejo de la gráfica. Comprueba tus resultados empleando GeoGebra.

Dominio	
Asíntota vertical	
Discontinuidad removible	
Ordenada al origen	
Ceros	
Asíntota horizontal	
Rango	

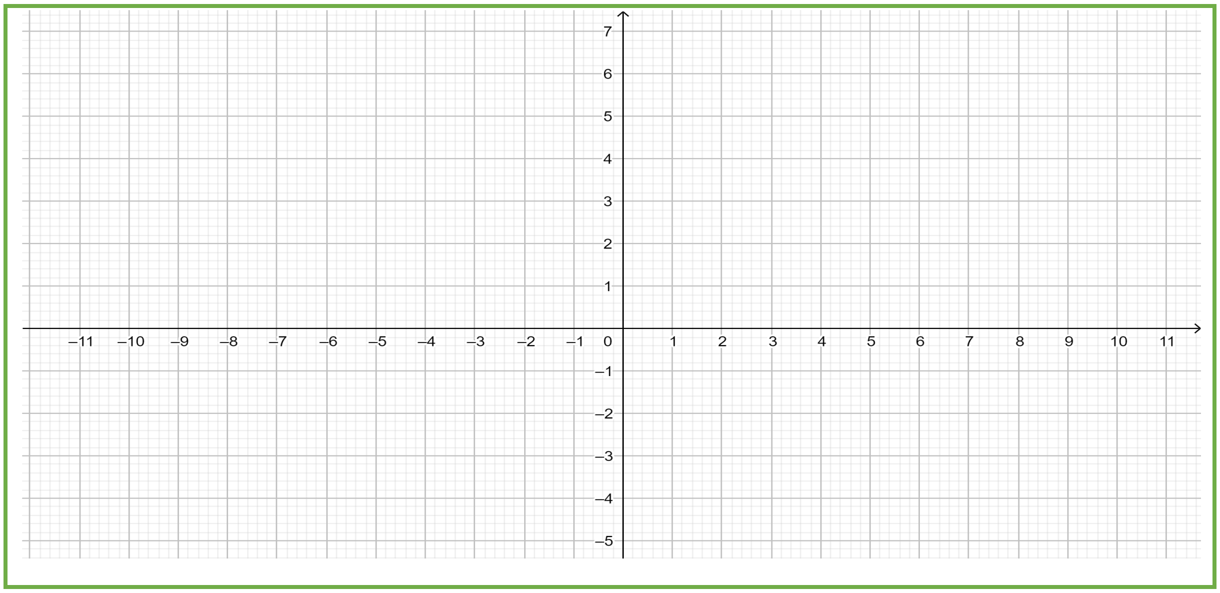
Análisis gráfico



EJERCICIO 19.3. Determina los elementos de la función racional $f(x) = \frac{(2x-1)(x-2)}{(x-2)(x+4)}$ y realiza el bosquejo de la gráfica. Comprueba tus resultados empleando GeoGebra.

Dominio	
Asíntota vertical	
Discontinuidad removible	
Ordenada al origen	
Ceros	
Asíntota horizontal	
Rango	

Análisis gráfico



EJERCICIO 19.5. Un automóvil se deprecia a causa de su uso. Supongamos que dentro de t años, el precio (en pesos) de cierto modelo de automóvil está dado por

$$p(t) = \frac{300000}{0.1t^2 + 1}$$

a) ¿Cuál es el precio actual de un automóvil?

b) ¿Cuál será el precio de un automóvil dentro de dos años?

c) ¿Cuánto se depreció un automóvil después de tres años?

d) ¿En qué tiempo el precio del automóvil será de $135 000.00 pesos? A largo plazo, ¿cuál será el precio de un automóvil?

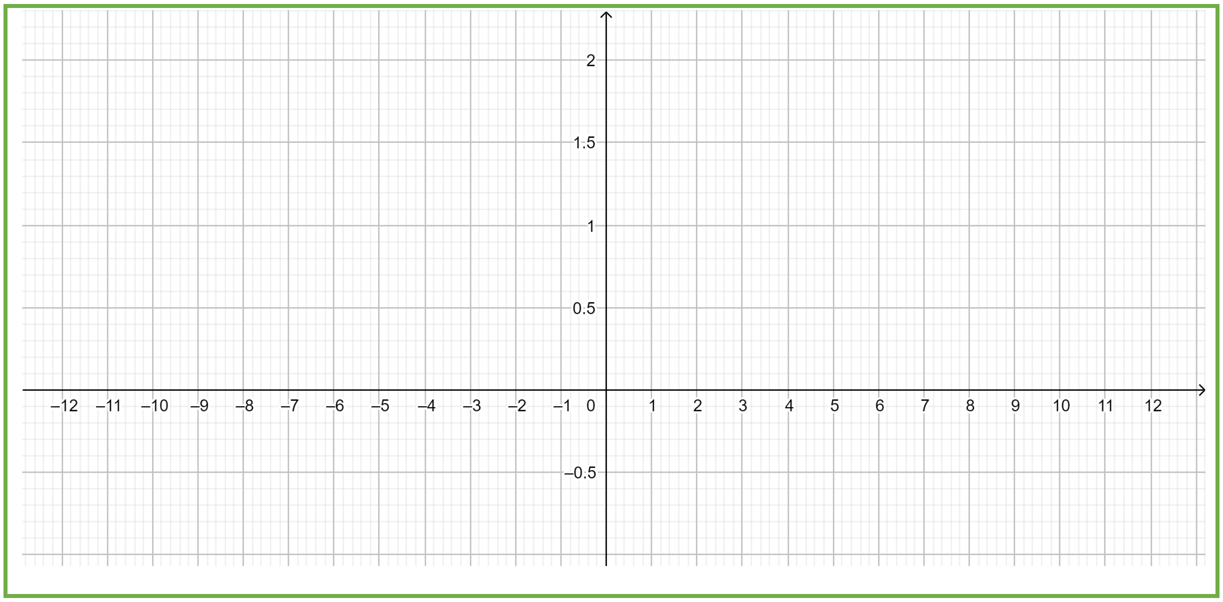
Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 19.6. Determina los elementos de la función racional $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-4\,x+13}$ y realiza el bosquejo de la gráfica. Comprueba tus resultados empleando GeoGebra.

Dominio	
Asíntota vertical	
Discontinuidad removible	
Ordenada al origen	
Ceros	
Asíntota horizontal	
Rango	

Análisis gráfico



EJERCICIO 19.7. La regla de Young es una fórmula que se usa para modificar las dosis de adultos, a fin de adaptarlas para niños menores de 12 años. Si a representa la dosis de adulto, en mg y t es la edad del niño en años, entonces la dosis del niño está dada por $d(t) = \frac{at}{t+12}$. Si a un adulto le administran 40 mg de Dexametasona,

a) ¿Qué valores puede tomar t?

b) ¿Qué valores puede tomar d?

c) ¿Qué cantidad que se le debe administrar a un niño de 5 años?

d) ¿Qué representa la asíntota horizontal?

e) Si a un niño le administraron 11 mg, ¿qué edad tiene?

SESIÓN 20 (2 HORAS)

Aprendizaje: Explorar problemas sencillos que se modelen con Funciones con Radicales.

Tema: Funciones de la forma: $f(x) = \sqrt{ax+b}$ y $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Elementos de las funciones: Dominio, Rango y Ceros de la función.

Trabajo en clase

EJERCICIO 20.1. Determina la longitud l del lado de un cuadrado, sabiendo que su área es $x\ cm^2$.

EJERCICIO 20.2. El volumen de un cilindro circular recto es $5\ cm^3$. Determina el área lateral del cilindro en función de su altura. Recuerda que el volumen de un cilindro recto está dado por $V = \pi r^2 h$, donde r es el radio de la base y h la altura.

EJERCICIO 20.3. El "tamaño" de las pantallas de televisores actuales se define como la longitud de su diagonal, medida en pulgadas. Determina el tamaño T de la pantalla en término de su altura x, sabiendo que de largo mide 19 pulgadas más que la altura.

EJERCICIO 20.4. Revisa el Applet al que te da acceso el QR de la derecha. Varía los parámetros a, b, c y d de la función con radical $f(x) = \sqrt{ax+b}$ con $a \neq 0$ y contesta las siguientes preguntas, indicando dominio, rango, ceros y ordenada al origen.

a) ¿Qué pasa si $a > 0$ y $b = 0$?

b) ¿Qué pasa si $a > 0$ y $b > 0$?

c) ¿Qué pasa si $a < 0$ y $b = 0$?

d) ¿Qué pasa si $a < 0$ y $b < 0$?

Trabajo Extraclase

Resuelve el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 20.5. Grafica e indica el dominio, rango, ordenada al origen y ceros (en caso de que existan) de las funciones obtenidas en el **EJERCICIO 20.1** y **20.2** Considera que son funciones de variable real.

a) EJERCICIO 20.1.

Dominio	
Rango	
Ordenada al origen	
Ceros	

b) EJERCICIO 20.2.

Dominio	
Rango	
Ordenada al origen	
Ceros	

EJERCICIO 20.6. El Sótano de las Golondrinas es una cueva natural a cielo abierto en el estado de San Luis Potosí, México. La cueva de 512 metros de profundidad era un destino popular para los saltadores BASE. La función $t(d) = \sqrt{0.2d}$ representa el tiempo t (en segundos) que le toma a un saltador BASE descender d metros.

a) ¿Cuánto tiempo le tomará descender 100 metros?

b) ¿Cuánto habrá descendido un saltador BASE después 3 segundos de su salto?

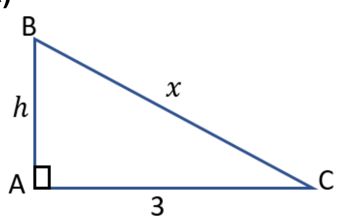
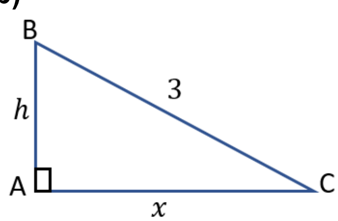
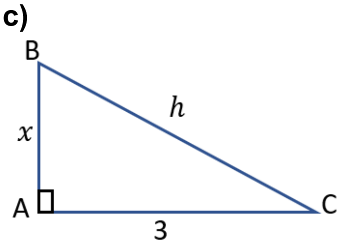
SESIÓN 21 (1 HORA)

Aprendizaje: Explorar problemas sencillos que se modelen con Funciones con Radicales.

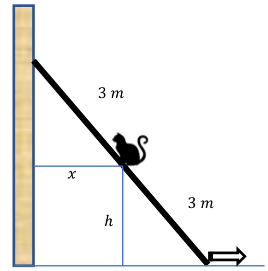
Tema: Funciones de la forma: $f(x) = \sqrt{ax+b}$ y $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Elementos de las funciones: Dominio, Rango y Ceros de la función.

Trabajo en clase

EJERCICIO 21.1. Para cada uno de los triángulos rectángulos ABC que se muestran a continuación. Determina h en función de x.

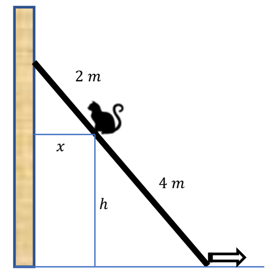
Triángulo	Procedimiento
a) 	
b) 	
c) 	

EJERCICIO 21.2. Un gato acaba de saltar sobre la mitad de una escalera de 6 metros de longitud, que se encuentra apoyada sobre una pared. A causa del peso agregado y la pequeña perturbación que provoca el gato al subirse, la escalera empieza a deslizarse por el piso. Determina una expresión para hallar la altura a la que se encuentra el gato en términos de la distancia que hay de la pared al gato, mientras se desliza la escalera.



Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.



EJERCICIO 21.3. Retoma el **EJERCICIO 21.2**, considerando ahora que el gato se ubica como se muestra en la figura de la derecha. Determina una expresión para hallar la altura a la que se encuentra el gato en términos de la distancia que hay de la pared al gato, mientras se desliza la escalera.

SESIÓN 22 (2 HORAS)

Aprendizaje: Identifica los elementos de la función: dominio, rango, ceros y traza su gráfica.

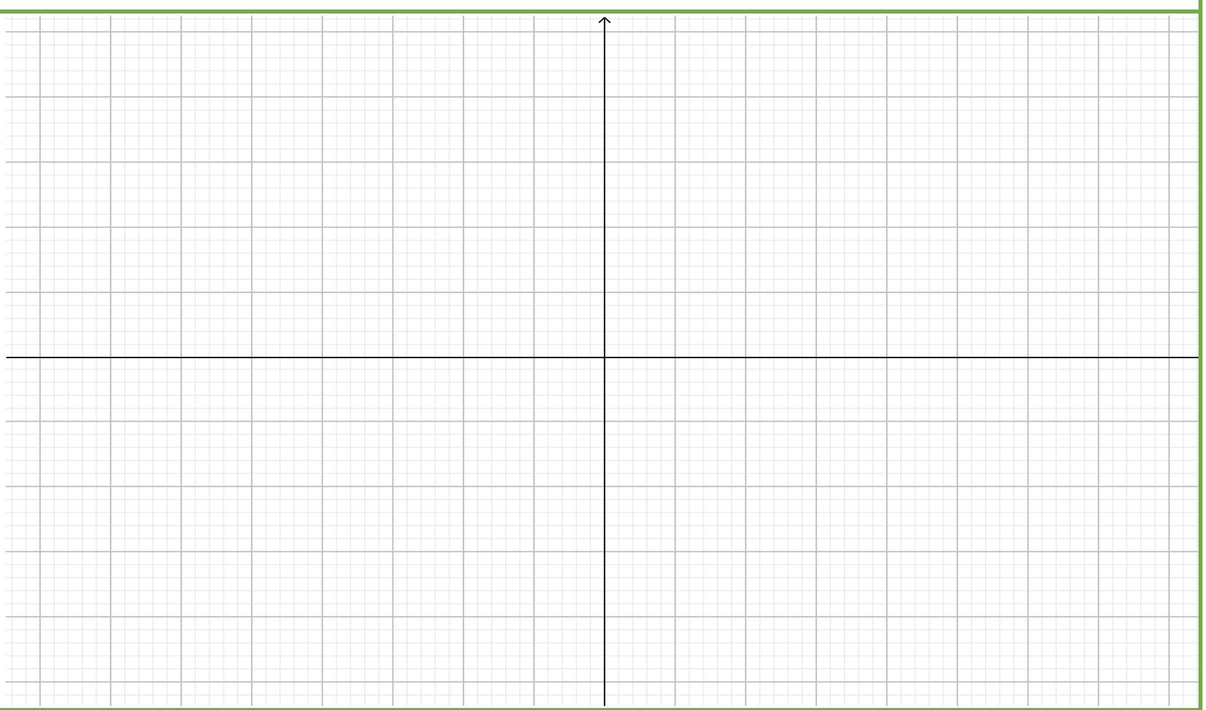
Tema: Gráfica de funciones con radicales.

Trabajo en clase

EJERCICIO 22.1. Grafica e indica el dominio, rango, ordenada al origen y ceros (en caso de que existan) de las funciones obtenidas en el **EJERCICIO 21.1, 21.2** y **21.3**. Considera que son funciones de variable real.

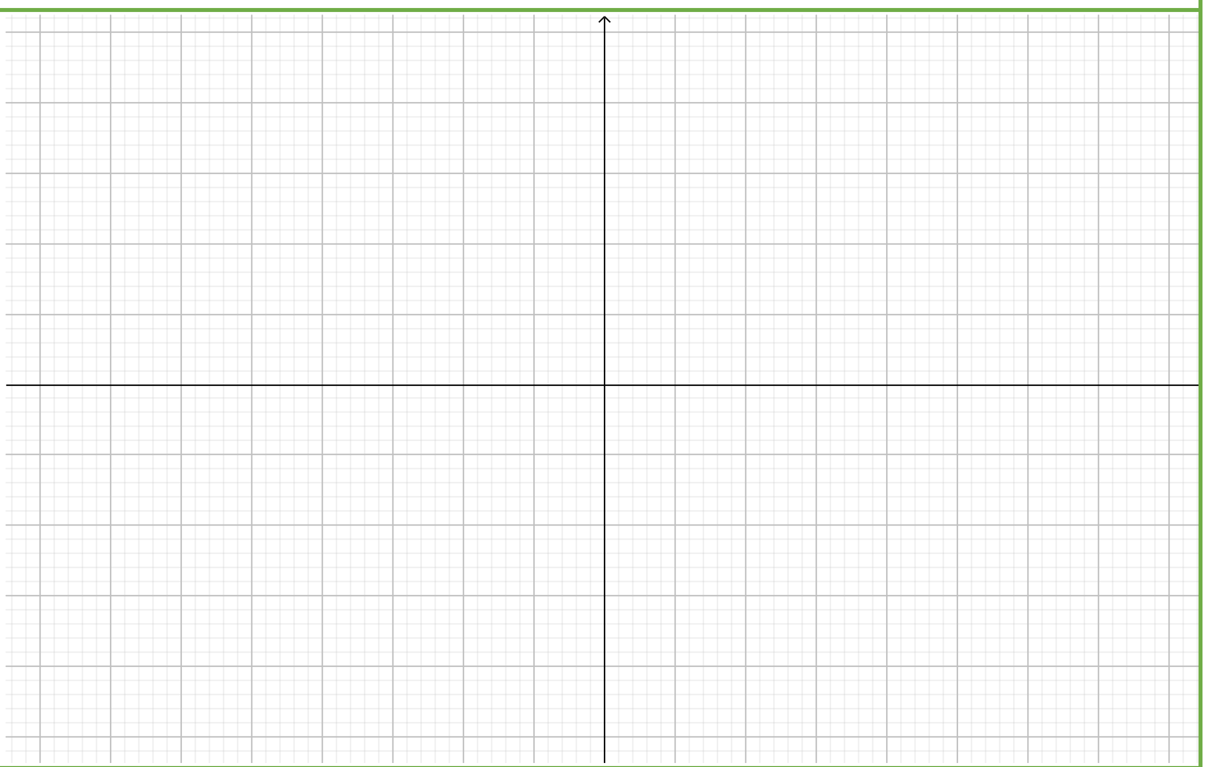
A) EJERCICIO 21.1. (a)

Dominio	
Rango	
Ordenada al origen	
Ceros	



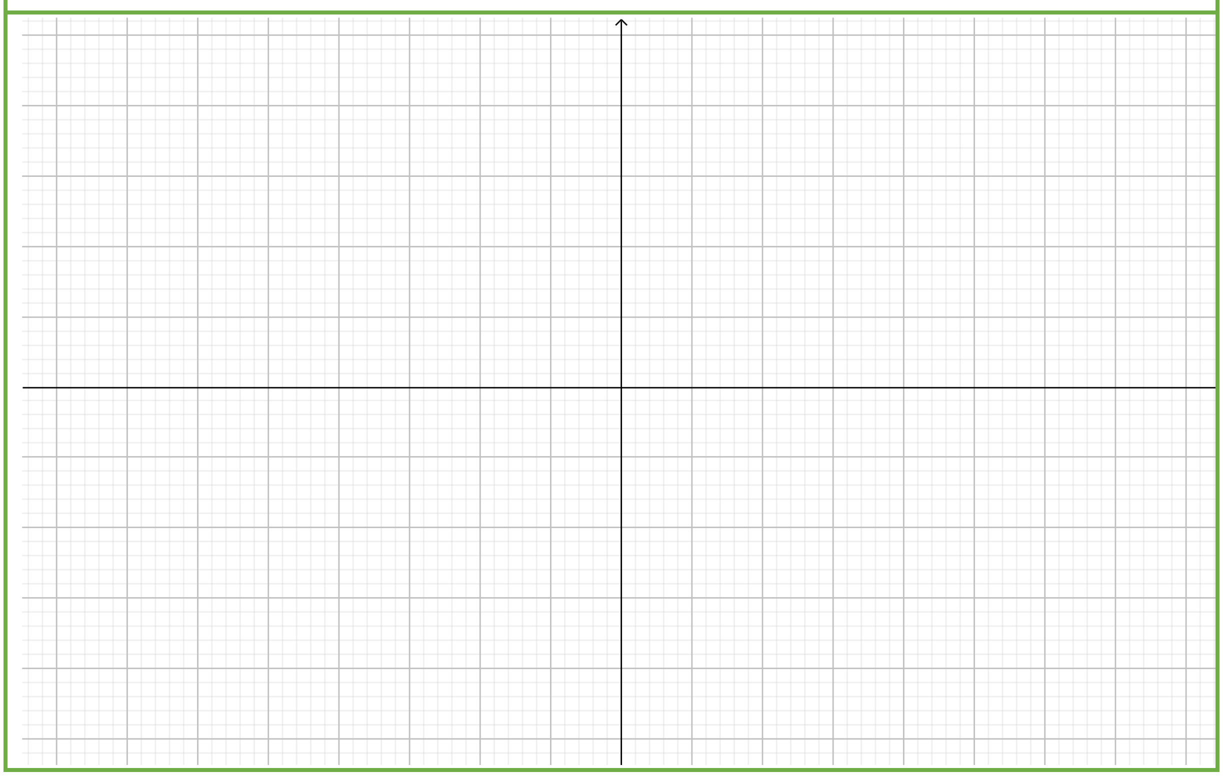
B) EJERCICIO 21.1. (b)

Dominio	
Rango	
Ordenada al origen	
Ceros	



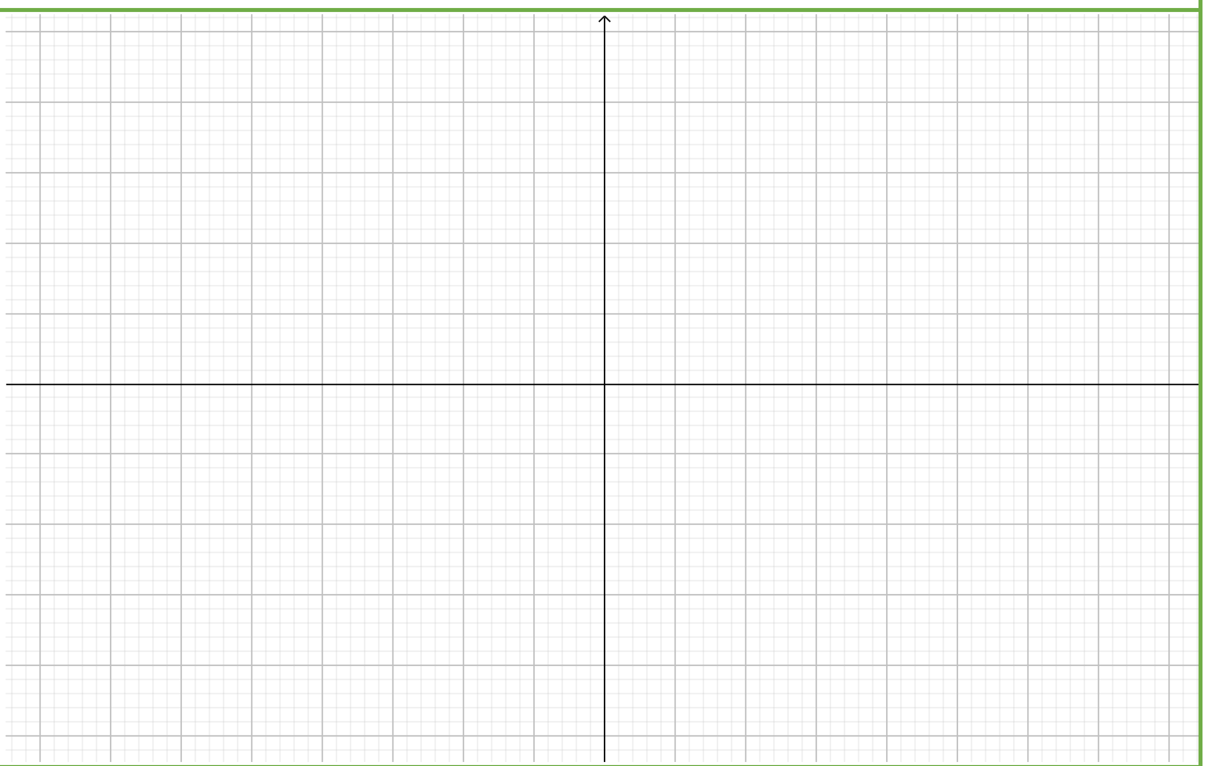
C) EJERCICIO 21.1. (b)

Dominio	
Rango	
Ordenada al origen	
Ceros	



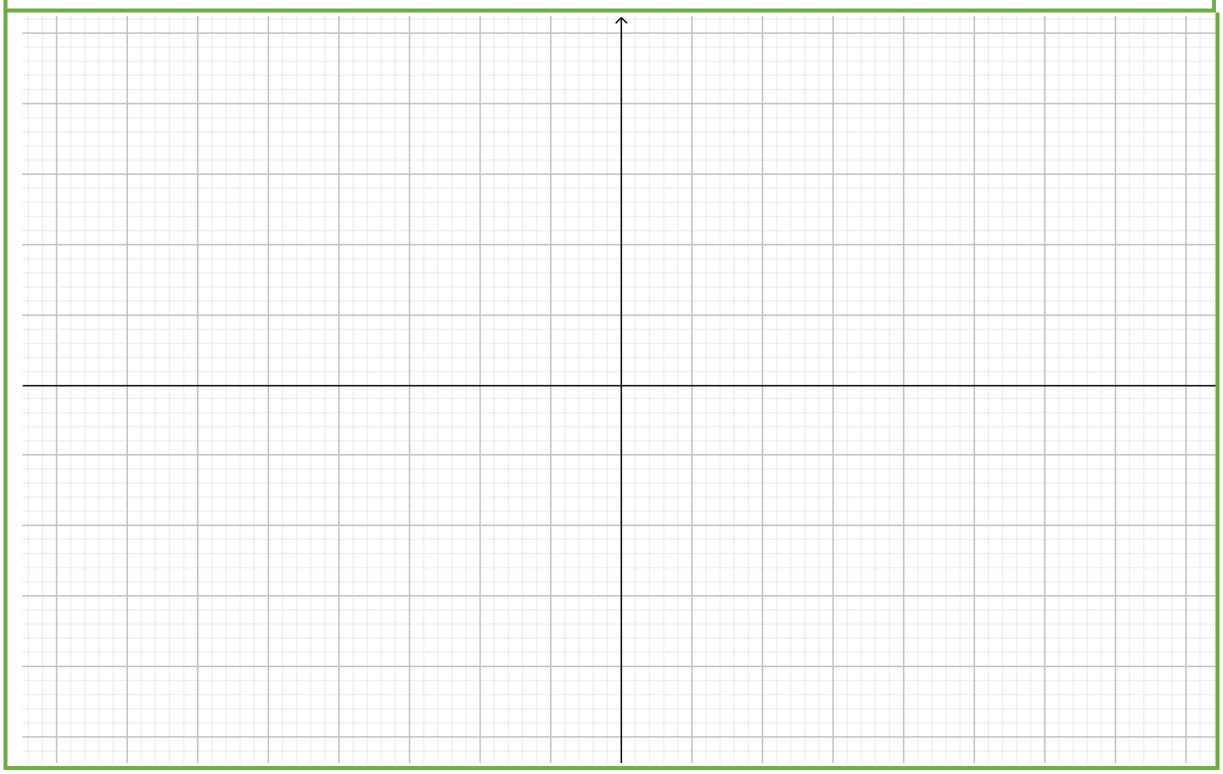
D) EJERCICIO 21.2.

Dominio	
Rango	
Ordenada al origen	
Ceros	



E) EJERCICIO 21.3.

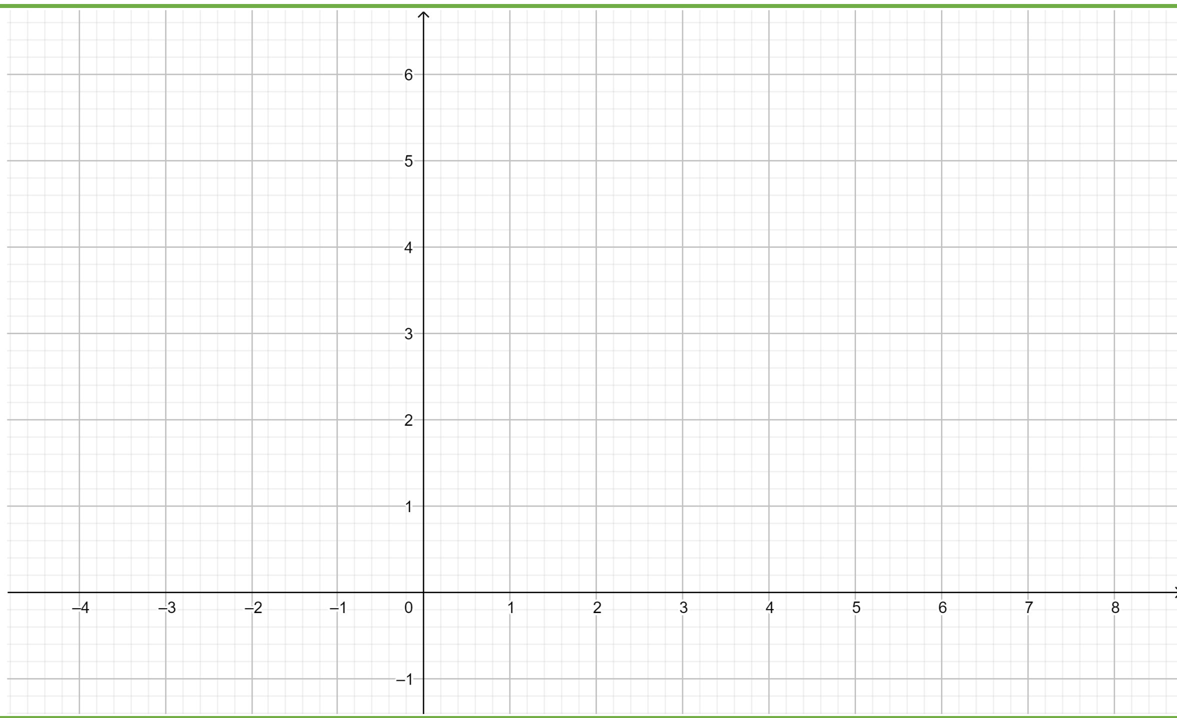
Dominio	
Rango	
Ordenada al origen	
Ceros	



EJERCICIO 22.2. Indica el dominio, rango, ordenada al origen y ceros (en caso de que existan) de las funciones con radicales siguientes.

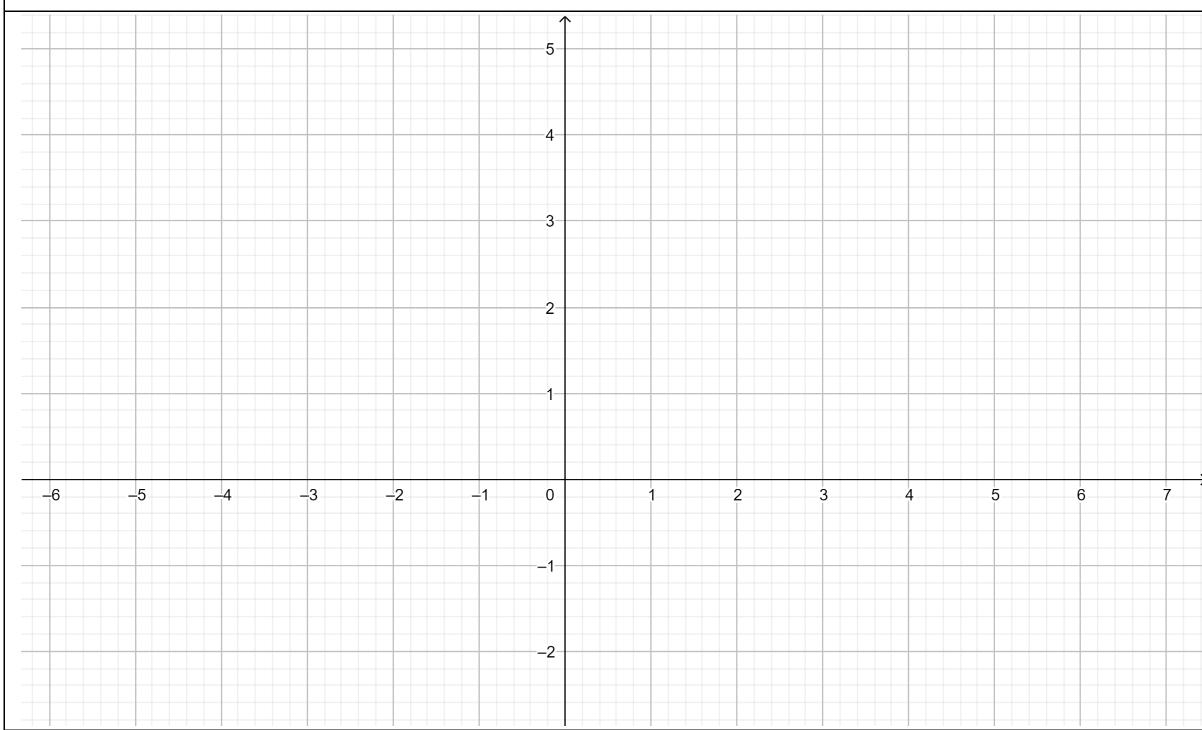
a) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 9x - 5}$

Dominio	
Rango	
Ordenada al origen	
Ceros	



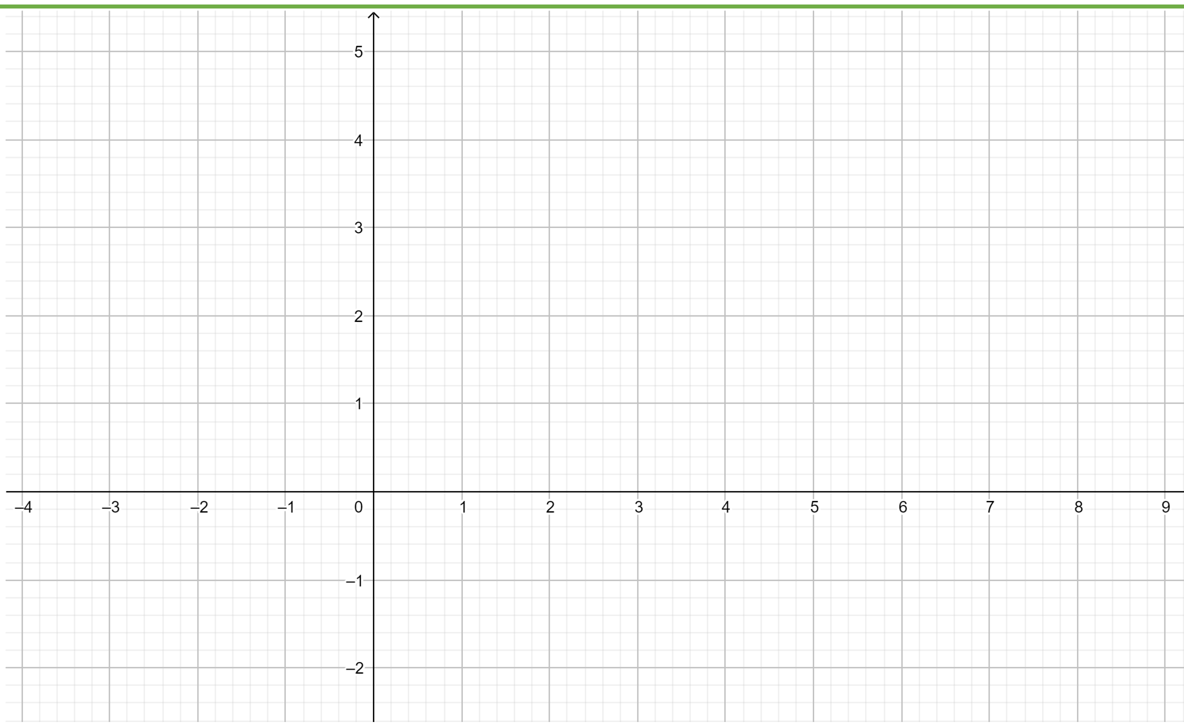
b) $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$

Dominio	
Rango	
Ordenada al origen	
Ceros	



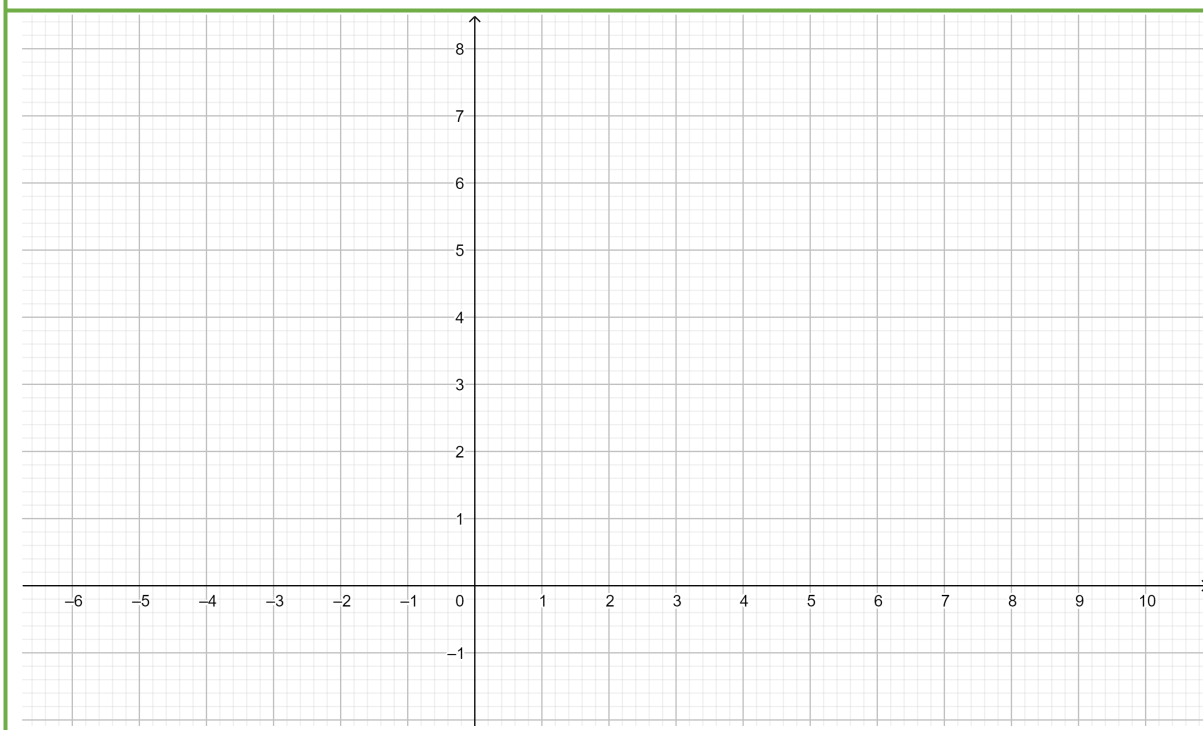
c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

Dominio	
Rango	
Ordenada al origen	
Ceros	



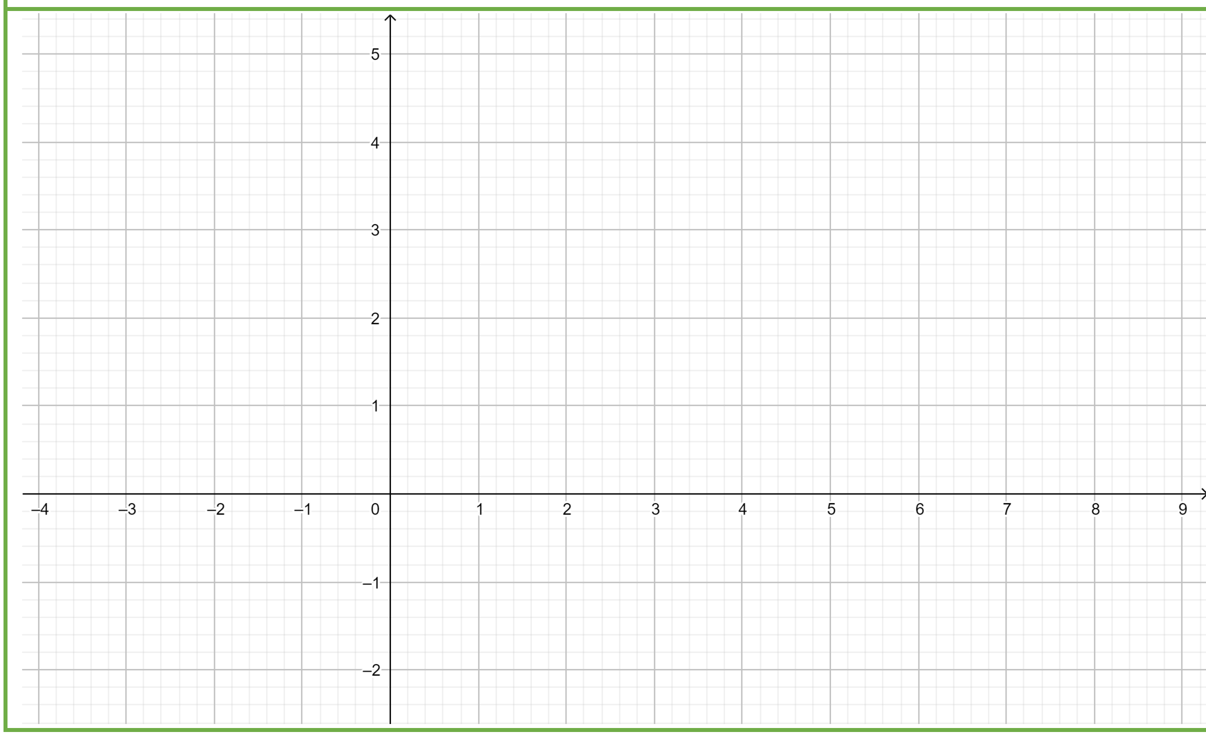
d) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 16x + 17}$

Dominio	
Rango	
Ordenada al origen	
Ceros	



e) $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x - 1}$

Dominio	
Rango	
Ordenada al origen	
Ceros	



Trabajo extraclase

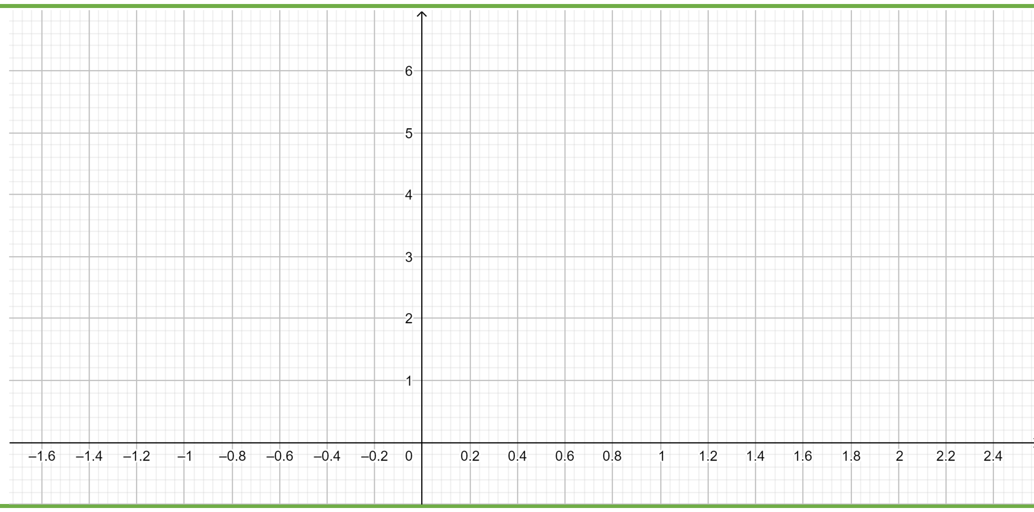
Resuelve los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 22.3. La expresión $f(x)=\sqrt{-x^2+2x-2}$ representa una función con radical? Argumenta tu respuesta

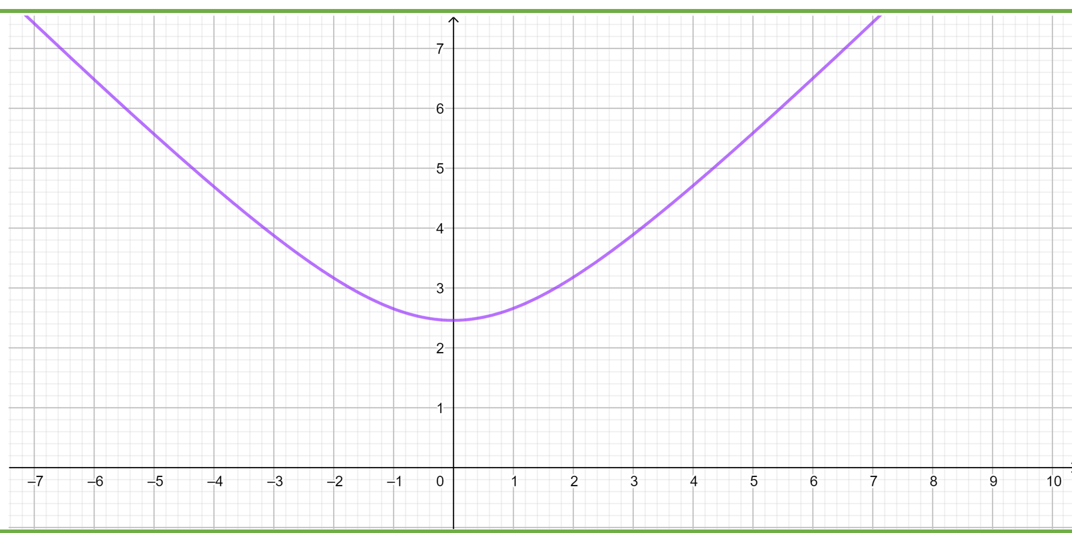
EJERCICIO 22.4. Determina los elementos de las siguientes funciones y bosqueja la gráfica.

a) $f(x)=\sqrt{x^2-10\,x+21}$

b) $f(x) = \sqrt{36 - 25x^2}$



c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6}$



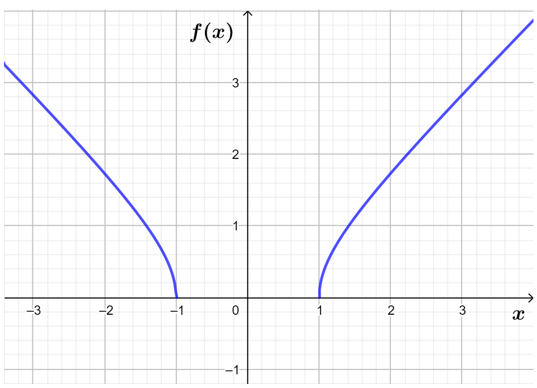
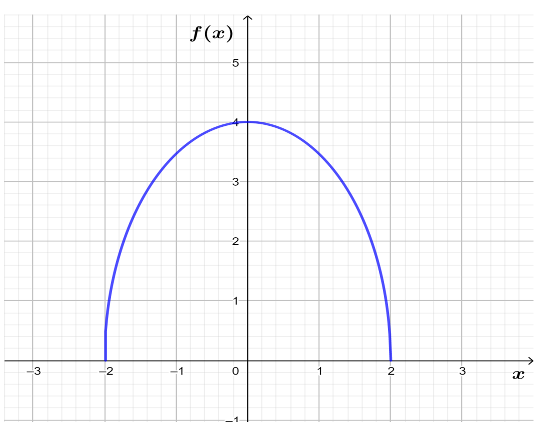
SESIÓN 23 (2 HORAS)

Aprendizaje: Identifica los elementos de la función: dominio, rango, ceros y traza su gráfica.

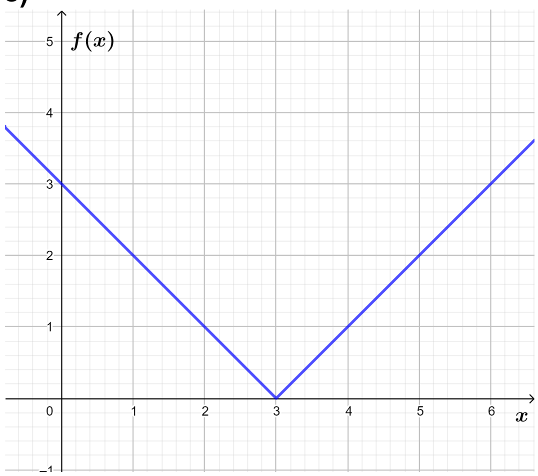
Tema: Gráfica de funciones con radicales.

Trabajo en clase

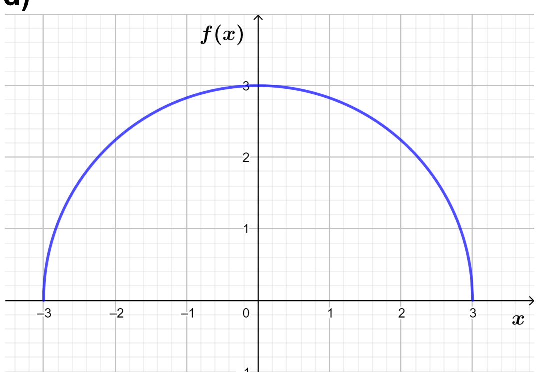
EJERCICIO 23.1. Determina una función con radical que tenga como gráfica la que se muestra en cada inciso.

Gráfica	Función
a) 	
b) 	

c)



d)



EJERCICIO 23.2. Construye una función tal que su radical sea de índice dos, su radicando sea un polinomio de segundo grado en la variable x y cumpla con las condiciones:

a) Tenga ceros en $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$, su dominio sea el intervalo $[-2, 2]$ y $f(0) = 2$.

b) Su dominio sea el intervalo $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$ y $f(0) = 2$.

c) Su dominio sea $\mathbb{R}$ y $f(0) = 5$.

d) Su dominio sea el intervalo $(-\infty, 2]$ y su gráfica cruce al aje y en $\left(0, -\sqrt{3}\right)$.

EJERCICIO 23.3. Determina la función que permite hallar la distancia entre los puntos de la recta de ecuación $y = 2x + 1$ y el punto $P(4, 1)$, ¿Cuál es la distancia más corta?

Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 23.4. En la sopa de letras, encuentra las palabras referentes a las funciones racionales y funciones con radicales.

D	I	S	C	O	N	T	I	N	U	I	D	A	D	Z
M	X	E	O	R	D	E	N	A	D	A	S	R	H	V
N	X	C	C	U	K	V	Y	V	S	B	E	A	A	S
B	R	A	D	I	C	A	L	R	J	E	M	I	S	E
F	G	C	X	R	Q	N	E	A	U	N	I	Z	E	M
I	S	U	D	C	Q	L	B	C	F	A	E	C	M	I
G	A	A	O	E	Q	S	V	I	U	S	L	U	I	H
Y	P	D	M	R	J	J	R	O	N	I	I	A	P	I
Y	O	R	I	O	C	H	W	N	C	N	P	D	A	P
T	B	Á	N	S	O	C	R	A	I	T	S	R	R	E
R	R	T	I	K	Z	U	Q	L	O	O	E	A	A	R
M	Q	I	O	D	K	X	D	T	N	T	T	D	B	B
H	K	C	E	R	A	N	G	O	C	A	R	A	O	O
Y	V	O	T	H	W	H	C	I	G	S	T	K	L	L
W	G	R	A	F	I	C	A	K	I	E	E	Z	A	A

ASINTOTAS	CEROS	RACIONAL	RADICAL
CUADRÁTICO	DISCONTINUIDAD	RAIZCUADRADA	RANGO
DOMINIO	FUNCION	SEMIELIPSE	SEMIHIPERBOLA
GRAFICA	ORDENADA	SEMIPARABOLA	

SESIÓN 24 (1 HORA)

Aprendizaje: Resuelve problemas de aplicación.

Tema: Problemas de aplicación.

Trabajo en clase

EJERCICIO 24.1. Construye una función que permite calcular el radio de la base de una lata cilíndrica en términos de su volumen, sabiendo que su altura es de 10 cm.

EJERCICIO 24.2. Una escalera de 10 metros de longitud está apoyada sobre una pared. La distancia de la pared al pie de la escalera es de x metros. Determina la función que describe la altura a la que se puede apoyar la escalera en la pared en función de la distancia de la base de la escalera a la base de la pared.

EJERCICIO 24.3. Realiza una reflexión sobre lo más importante que aprendiste en esta unidad.

Trabajo extraclase

EJERCICIO 24.4. El profesor de matemáticas estaba un poco desconcertado por las calificaciones obtenidas por sus alumnos en el primer examen de Matemáticas IV, atribuyéndolo a que quizás los problemas propuestos habían sido un tanto difíciles. Por lo que decidió "ajustar" esas calificaciones eligiendo uno de los tres modelos siguientes:

a) $f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x)$ b) $g(x) = \frac{15x}{x+5}$ c) $h(x) = \sqrt{10x}$

Si x representa la calificación original,

a) ¿Cuál es el dominio y la imagen de cada función?

b) ¿Cuál sería el mejor modelo para ajustar las calificaciones? Argumenta tu respuesta

c) ¿Es mejor en todas las situaciones o existen excepciones? Argumenta tu respuesta.

AUTOEVALUACIÓN

Accede a través del código QR de la izquierda para abrir un cuestionario de autoevaluación. En el espacio siguiente escribe el procedimiento realizado para resolver cada reactivo, o bien, anota el argumento para tu respuesta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barnett, R., (2000). *Álgebra* (4ª Ed.). México: McGraw Hill.

CCH (2006). *Orientación y Sentido de las Áreas del Plan de Estudios Actualizado*. UNAM.

ENCCH (2016). *Programas de Estudio. Área Matemáticas. Matemáticas I-IV*. UNAM.

Polya, G. (1985). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Sullivan, M. (2014). *Álgebra y Trigonometría* (9ª ed.). Pearson Educación de México.

Swokowski, E. & Cole, J. (2018). *Precálculo*. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* (13ª Ed.). CENGAGE Learning.

Zill, D. & Dewar, J. (2012). *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*. McGraw Hill.

CIBERGRÁFÍA

B@UNAM (s.f.). Dominio y rango de funciones racionales. Recuperado de http://uapas2.bunam.unam.mx/matematicas/dominio_rango_funciones_racionales/

Fonseca, O. (2014). Lecciones de funciones y sus gráficas. UNAM. Recuperado de http://www.objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/index_funciones.html

Gómez, A. [ProfeAlex] (2019). *Dominio y rango de una función con Raíz* [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=4DIk2WiVv44

Khan, S. (2014). Gráficas de funciones racionales. Disponible en https://es.khanacademy.org/math/algebra2/x2ec2f6f830c9fb89:rational#x2ec2f6f830c9fb89:rational-graphs

Miller (2016). *Dominio, rango y grafica de una función radical* [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=XMgxhIyby4M

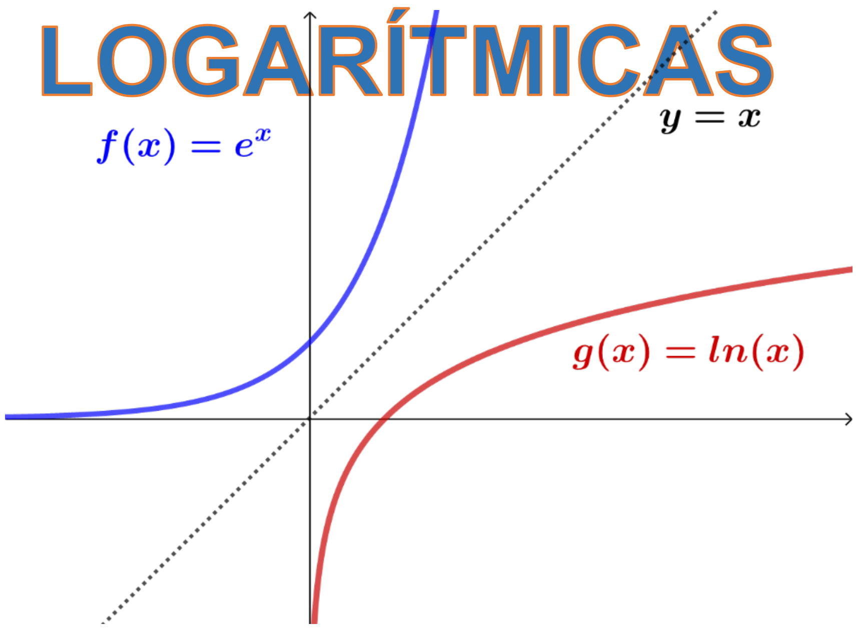
Palacio, M. [Millermatematicas] (2016). *Dominio, rango y gráfica de una función radical* [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=XMgxhIyby4M

ProfeAlex (2019). *Dominio y rango de una función con Raiz* [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=4DIk2WiVv44

Prof Lina M3 (2017). *Dominio, rango y gráfica de una función radical* [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=iKayriuuEEc

UNIDAD III

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS



PROPÓSITO

Al finalizar, el alumno: Utilizará las funciones exponencial y logarítmica para representar formas de variación de fenómenos de la naturaleza, que éstas permitan modelar. Retomará los conceptos de dominio y rango, así como el análisis de las relaciones entre los parámetros de estas funciones y su gráfica.

SESIÓN 25 (2 HORAS)

Aprendizaje: Explora situaciones o fenómenos que corresponden a crecimiento o decaimiento exponencial, las relaciones o condiciones existentes y analiza las formas de variación.

Tema: Situaciones que involucran crecimiento o decaimiento exponencial.

Trabajo en clases

EJERCICIO 25.1. La bacteria *Lactobacillus Acidophilus* se considera un probiótico o bacteria beneficiosa para el hombre. Este tipo de bacterias habitan principalmente en los intestinos protegiendo a sus poseedores del efecto nocivo de otros microorganismos. Se sabe que en condiciones óptimas esta bacteria se divide en dos cada hora. Si en un cultivo se tiene una bacteria,

a) ¿Cuántas bacterias habrá después de 1, 2, 3, 4, 5 y 6 horas?

b) Empleando los datos del inciso anterior, realiza la gráfica.

c) ¿Cuál sería la expresión funcional para modelar el problema?

d) ¿Cuántas bacterias habrá después de 24 horas?

EJERCICIO 25.2. En condiciones óptimas, la bacteria *E. Colli* se duplica aproximadamente cada 15 minutos. Si en un cultivo se tienen 10 bacterias,

a) ¿Cuántas habrá después de 1, 2, 3, 4, 5 y 6 horas?

b) Empleando los datos del inciso anterior, realiza la gráfica.

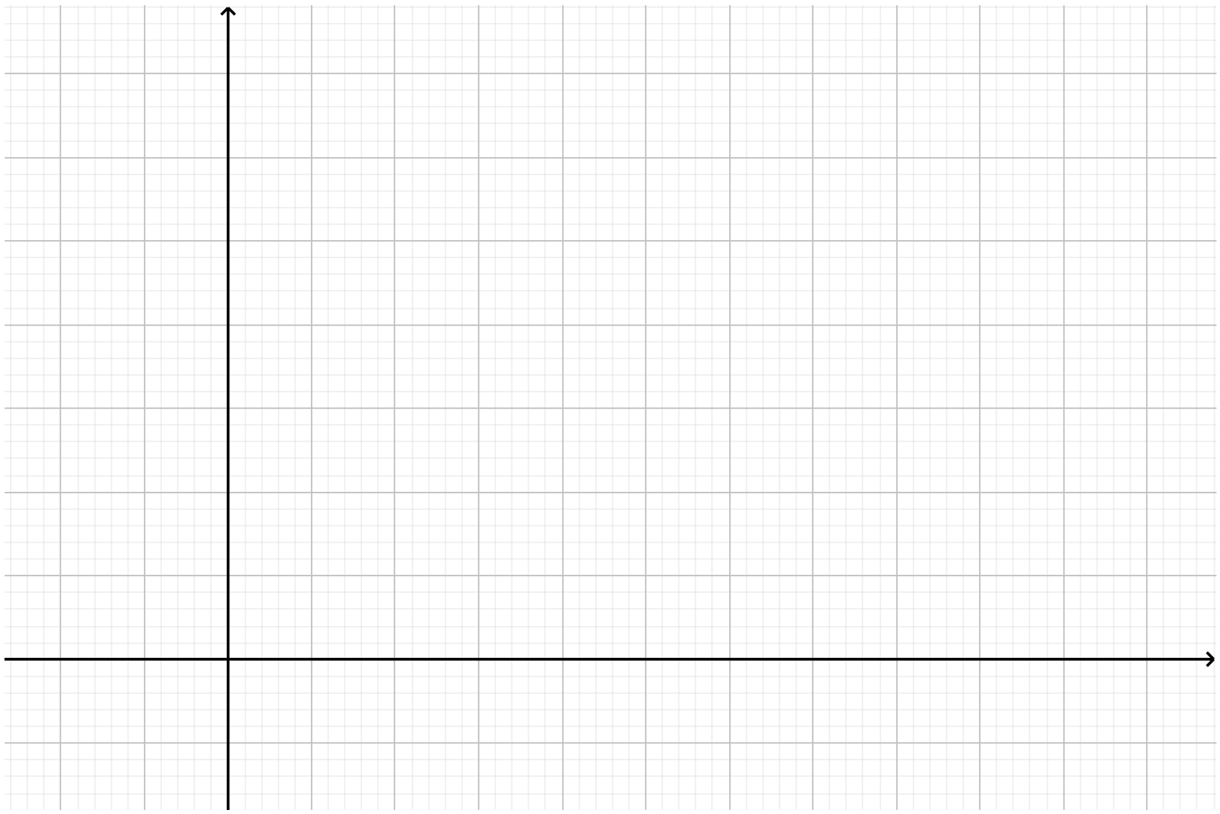
c) ¿Cuál sería la expresión funcional para modelar el problema?

d) ¿Cuántas bacterias habrá después de 24 horas?

EJERCICIO 25.3. Luis quiere iniciarse en el mundo de las inversiones, por lo que ha decidido colocar todos sus ahorros en una cuenta que le ofrece una tasa de interés del 10% anual. Si Juan invierte los $20 000.00 que tiene actualmente,

a) ¿Cuánto tendrá al final de 1, 2, 3, 4, 5 y 6 años?

b) Empleando los datos del inciso anterior, realiza la gráfica.



c) ¿Cuál sería la expresión funcional para modelar el problema?

d) Juan piensa abrir un pequeño negocio dentro de 15 años con el dinero que obtenga de la inversión, ¿Cuánto tendrá disponible?

Trabajo extraclase

Resolver los siguientes problemas.

EJERCICIO 25.4. Según *Kavak*, una de las plataformas *online* más importantes en la venta y compra de autos seminuevos en México, cualquier auto se deprecia en promedio 10% cada año. Luis acaba de comprarse un Mazda 3 seminuevo a un precio de $450 000.00.

a) Si Luis pretende vender su coche dentro de 1, 2, 3, 4 o 5 años, ¿Cuánto podría obtener?

b) Traza la gráfica usando los datos obtenidos en el inciso anterior.

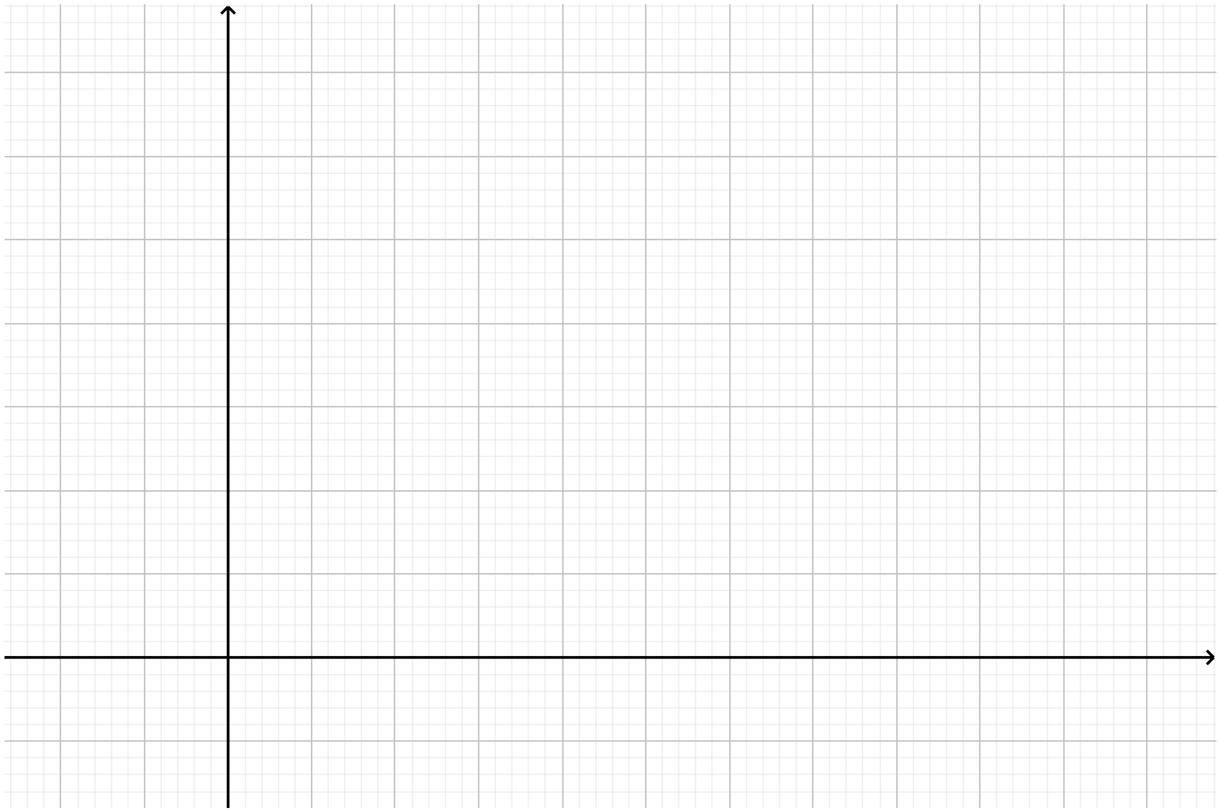
c) Determina el modelo que permita determinar el costo del coche a través de los años transcurridos, debido a la depreciación.

d) ¿Qué pasa con el precio del coche conforme pasan los años?

EJERCICIO 25.5. De acuerdo con la información publicada por el INEGI en el 2020, la tasa promedio anual de crecimiento poblacional en México del 2010 al 2022 fue de 1.2%. Si en el 2010 había un total de 113.75 millones de habitantes,

a) ¿Cuántos habitantes había en el país en el 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2018, 2019, 2022?

b) Traza la gráfica usando los datos obtenidos en el inciso anterior.



c) Determina un modelo que permita determinar el número de habitantes en el territorio nacional del 2010 al 2022.

d) Si la población siguiera la misma tendencia, ¿Cuántos habitantes habrá a lo largo del territorio nacional en el 2030?

e) Compara los datos obtenidos con los presentados por *Statista Research Department* el 15 de diciembre de 2022. Estos se encuentran disponibles en el QR de la derecha.

SESIÓN 26 (2 HORAS)

Aprendizaje: Identifica patrones de cambio involucrados en el crecimiento o decrecimiento de una función exponencial y bosqueja su grafica.

Tema: Estudio analítico y gráfico del comportamiento de funciones exponenciales del tipo

$$f(x) = ab^x \quad con\ \ b > 1 \quad ó \quad 0 < b < 1 \ \ y \ \ a \neq 0$$

Trabajo en clase

EJERCICIO 26.1. Escribe la definición de función exponencial.

EJERCICIO 26.2. Anota algunos ejemplos de funciones exponenciales.

EJERCICIO 26.3. ¿$f(x) = -2^x$ es una función exponencial? Argumenta tu respuesta.

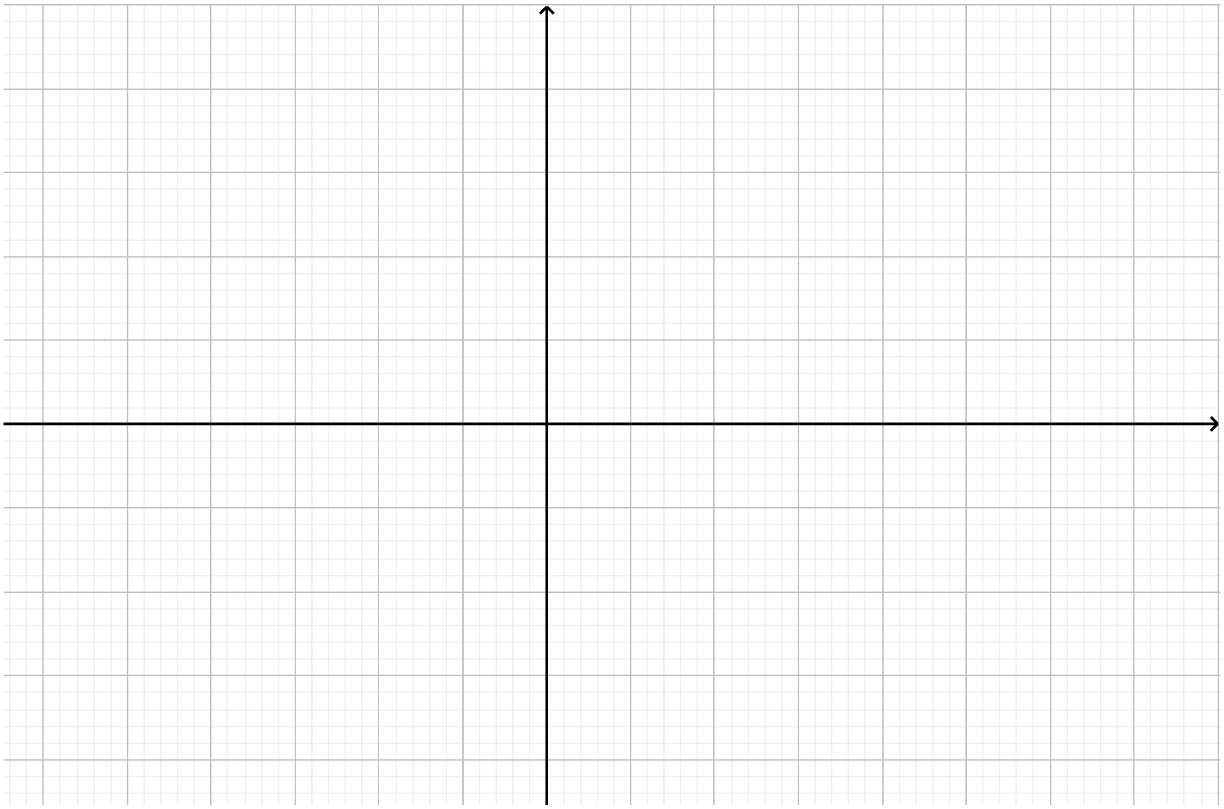
EJERCICIO 26.4. ¿$f(x) = (-2)^x$ es una función exponencial? Argumenta tu respuesta.

EJERCICIO 26.5. Dadas las funciones $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = 2^x$.

a) Completa la siguiente tabla

				Razón de cambio promedio		
x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$	$\frac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1}$
-5						
-4						
-3						
-2						
-1						
0						
1						
2						
3						
4						
5						

b) Grafica las tres funciones en el mismo plano cartesiano.



c) ¿Cómo es el crecimiento en las tres funciones?

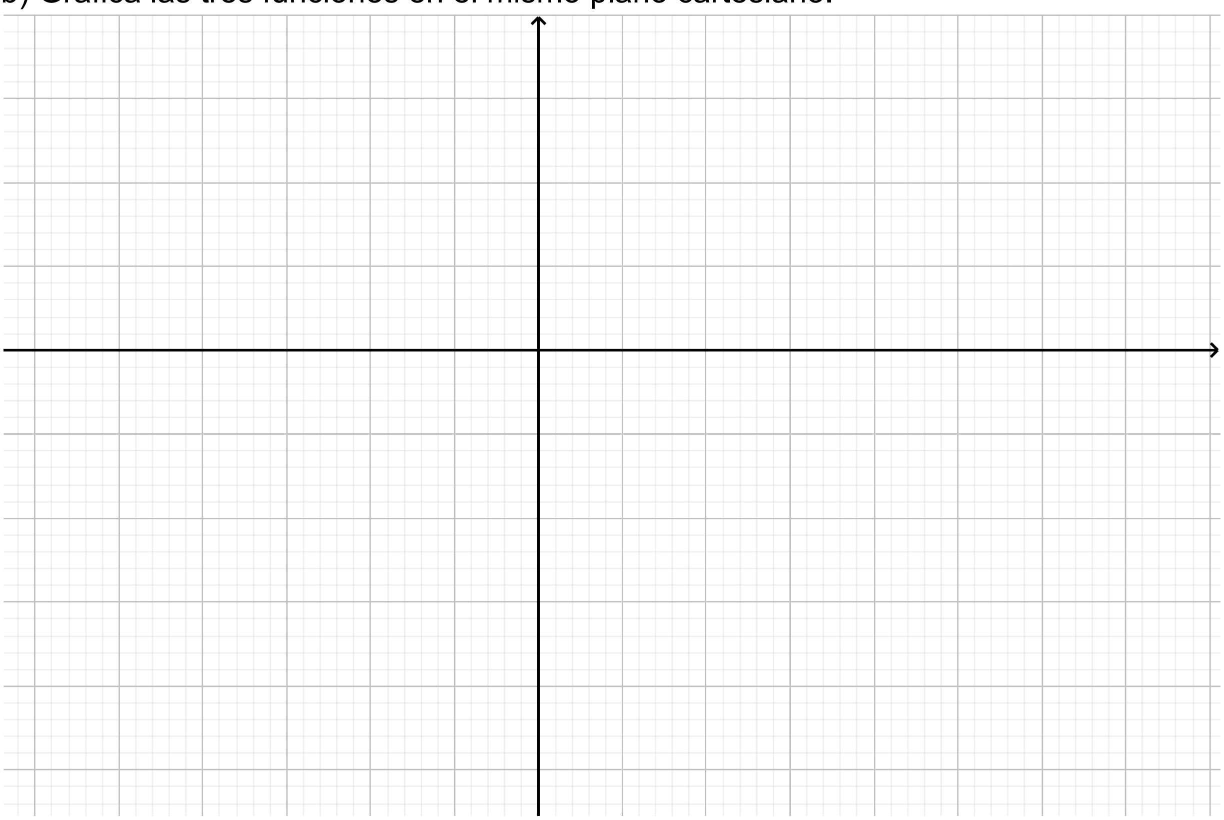
d) ¿Qué puedes decir sobre la razón de cambio promedio de cada función en intervalos de igual longitud? Compara tus conclusiones con las de tus compañeros.

EJERCICIO 26.6. Dadas las funciones $f(x) = -3x$, $g(x) = -x^3$ y $h(x) = -3^x$.

a) Completa la siguiente tabla.

				Razón de cambio promedio		
x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$	$\frac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1}$
-3						
-2						
-1						
0						
1						
2						
3						

b) Grafica las tres funciones en el mismo plano cartesiano.



c) ¿Cómo es el crecimiento en las tres funciones?

d) ¿Qué puedes decir sobre la razón de cambio promedio de cada función en intervalos de igual longitud? Compara tus conclusiones con las de tus compañeros.

Trabajo Extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

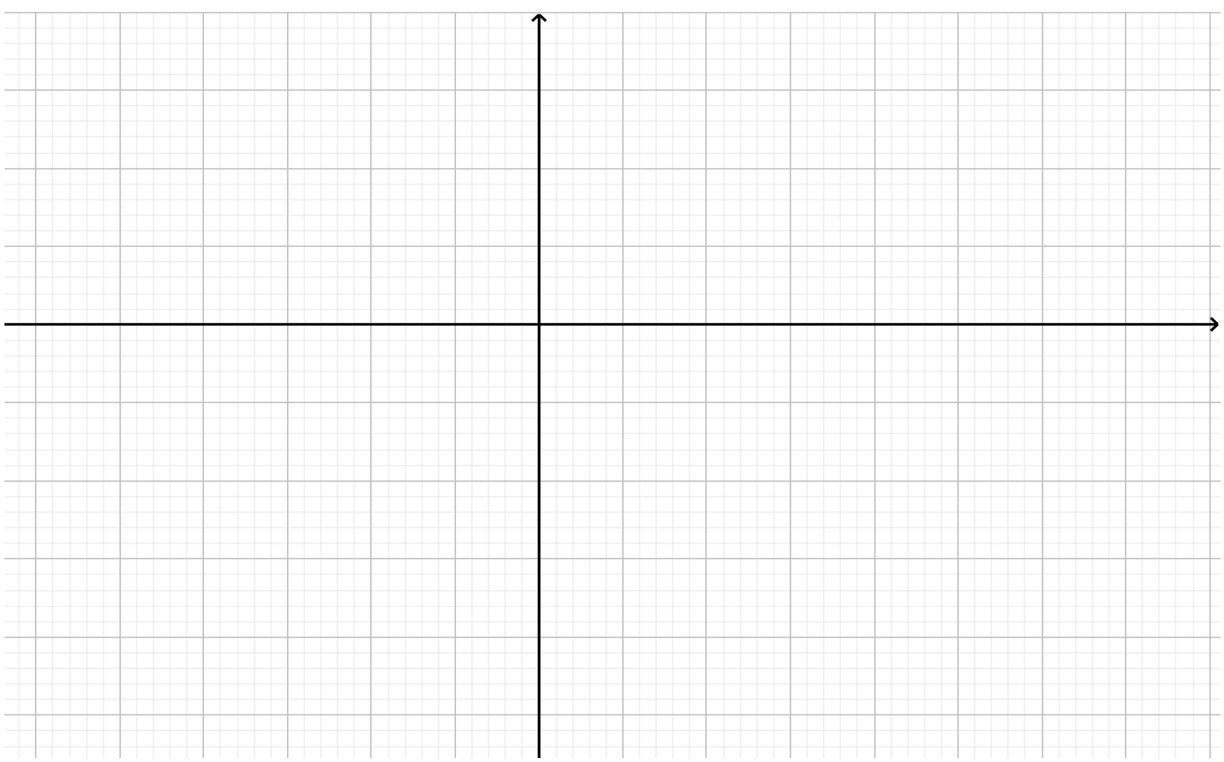
EJERCICIO 26.7. Considerando la función exponencial $f(x) = ab^x$, si $a = 1$ y $b = 4$,

a) ¿Cómo queda escrita la función exponencial?

b) Realiza una tabla de valores para la función obtenida.

x								
$f(x)$								

c) Bosqueja la gráfica, empleando los valores obtenidos en el inciso anterior y con el uso de GeoGebra verifícala.



d) Realiza un análisis de $f(x)$. Compara tus conclusiones con las de tus compañeros.

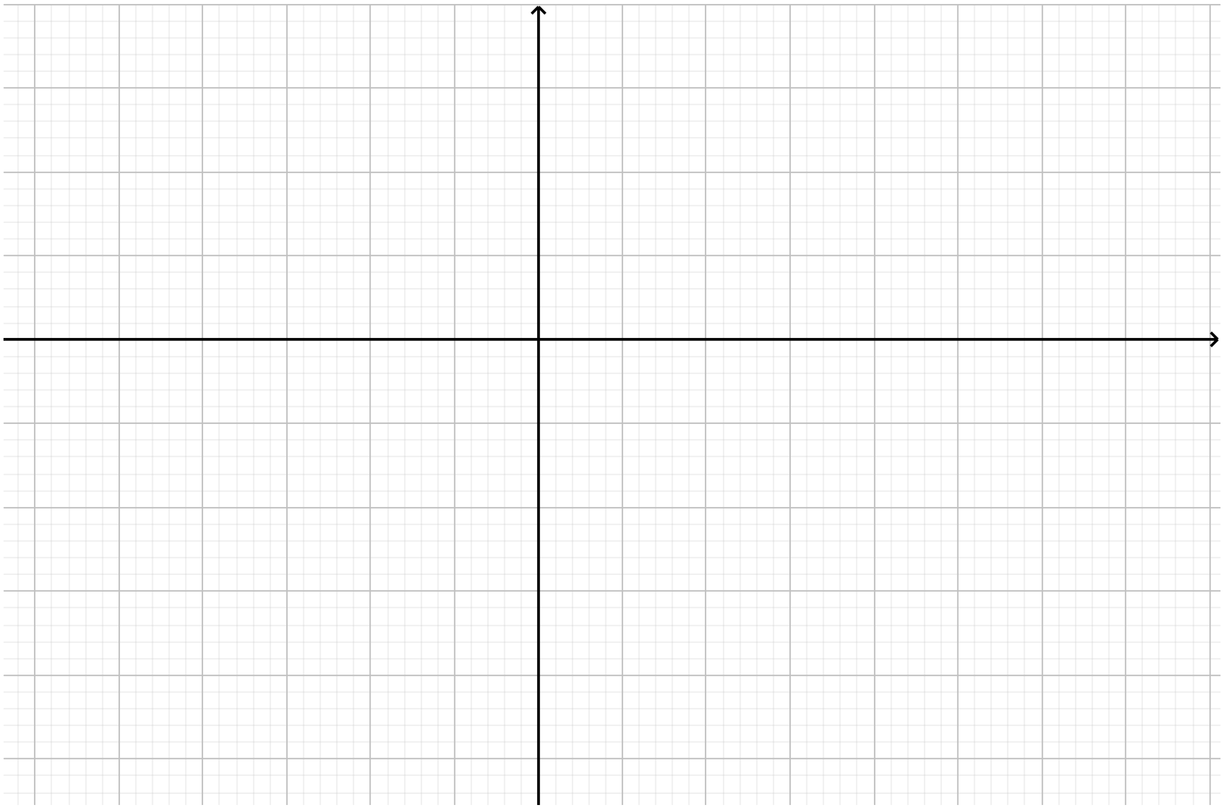
EJERCICIO 26.8. Considerando la función exponencial $f(x) = ab^x$, si $a = -1$ y $b = 4$,

a) ¿Cómo queda escrita la función exponencial?

b) Realiza una tabla de valores para la función obtenida.

x								
$f(x)$								

c) Bosqueja la gráfica, empleando los valores obtenidos en el inciso anterior y con el uso de GeoGebra verifícala.



d) Realiza un análisis de $f(x)$. Compara tus conclusiones con las de tus compañeros.

SESIÓN 27 (1 HORA)

Aprendizaje: Identifica patrones de cambio involucrados en el crecimiento o decrecimiento de una función exponencial y bosqueja su grafica.

Tema: Estudio analítico y gráfico del comportamiento de funciones exponenciales del tipo

$$f(x) = ab^x \qquad con\ \ b > 1 \quad ó \quad 0 < b < 1\ \ y\ \ a \neq 0$$

Trabajo en clase

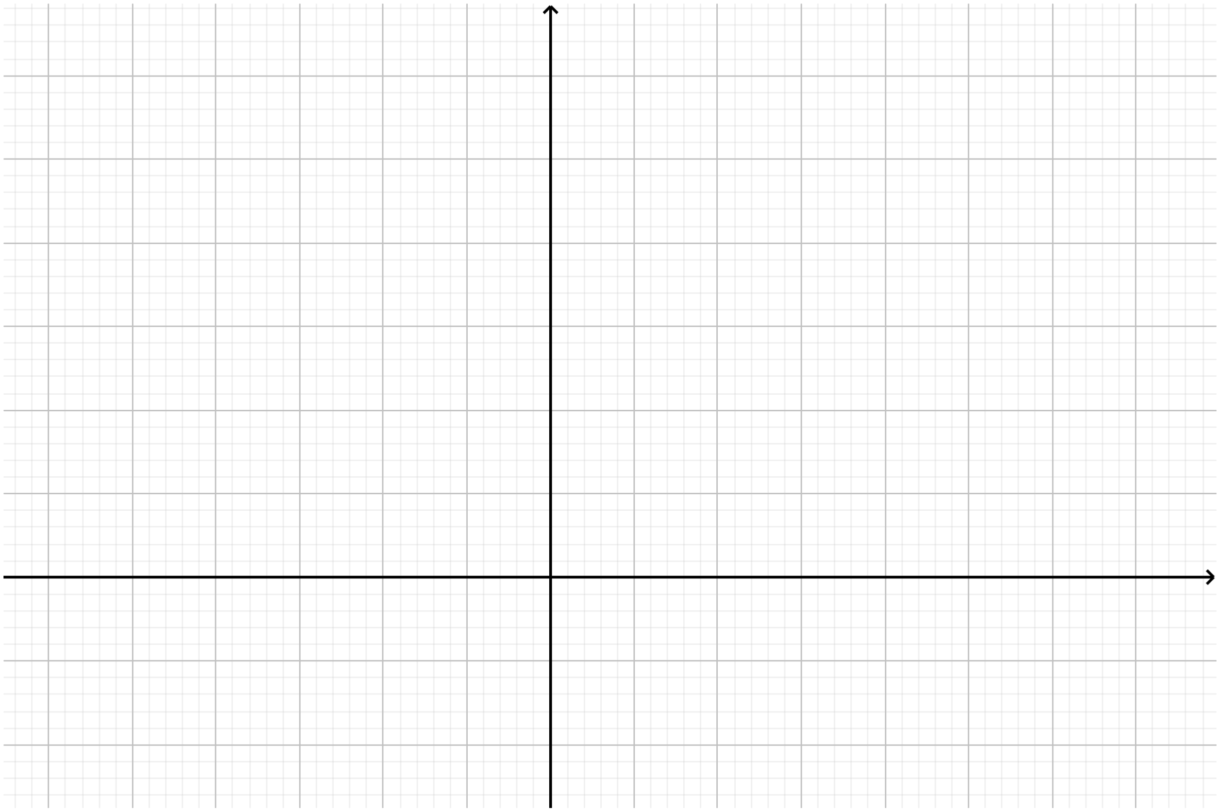
EJERCICIO 27.1. Una función exponencial se puede expresar como $f(x) = ab^x$, si $a = 1$ y $b = \frac{2}{3}$,

a) ¿Cómo queda escrita la función exponencial?

b) Realiza una tabla de valores para la función obtenida.

x								
$f(x)$								

c) Bosqueja la gráfica, empleando los valores obtenidos en el inciso anterior y con el uso de GeoGebra verifícala.



d) Realiza un análisis de $f(x)$ considerando el dominio, rango, ordenada al origen, asíntotas, si es creciente o decreciente. Compara tus conclusiones con las de tus compañeros.

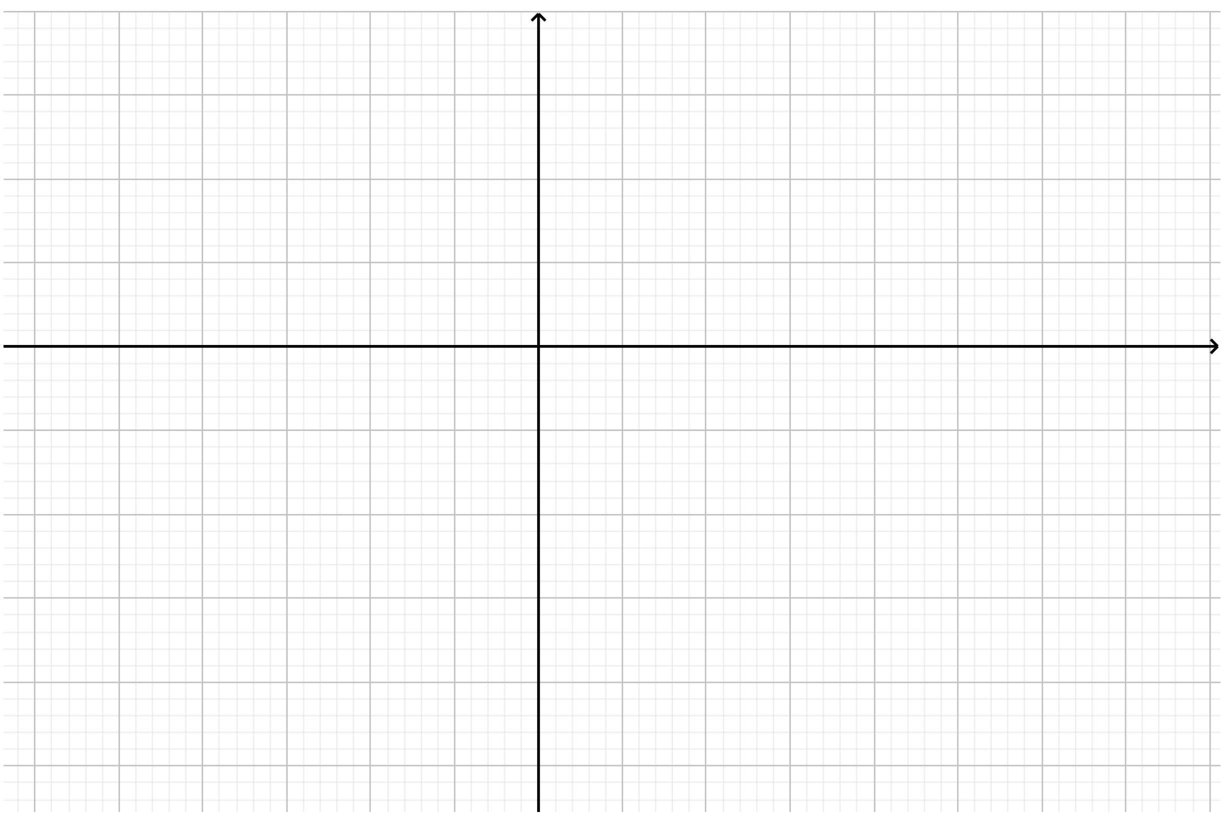
EJERCICIO 27.2. Considerando la función exponencial $f(x) = ab^x$, si $a = -1$ y $b = \frac{2}{3}$,

a) ¿Cómo queda escrita la función exponencial?

b) Realiza una tabla de valores para la función obtenida.

x								
$f(x)$								

c) Bosqueja la gráfica, empleando los valores obtenidos en el inciso anterior y con el uso de GeoGebra verifícala.



d) Realiza un análisis de $f(x)$ considerando el dominio, rango, ordenada al origen, asíntotas, si es creciente o decreciente. Compara tus conclusiones con las de tus compañeros.

Trabajo Extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

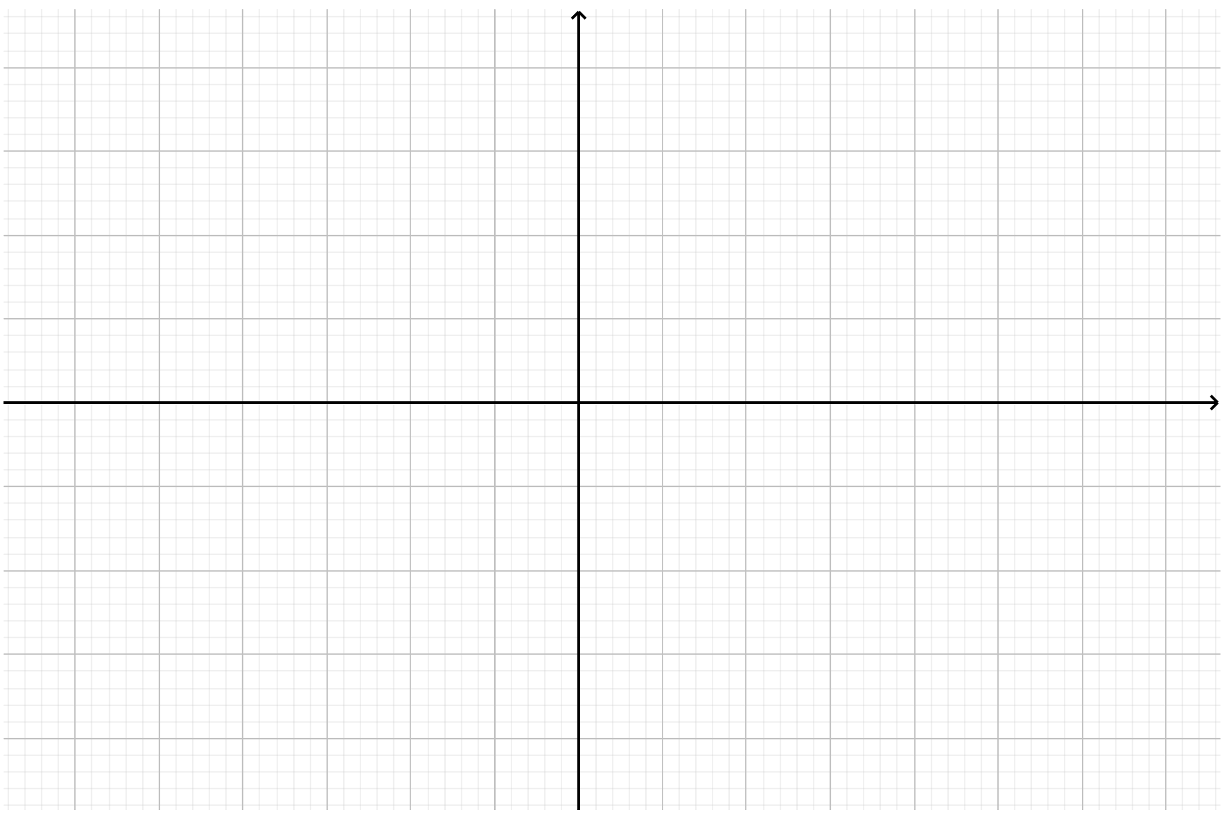
EJERCICIO 27.3. La gráfica de una función exponencial del tipo $f(x) = ab^x$ pasa por los puntos $(0, 5)$ y $(1, 1.7)$.

a) ¿Cuál es el valor de a? ______________

b) ¿Cuál es el valor de b? ______________

c) Escribe la función ______________

d) Bosqueja la gráfica



EJERCICIO 27.4. ¿La $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ es igual a la función $f(x) = 2^{-x}$? Argumenta tu respuesta.

EJERCICIO 27.5. Presenta dos ejemplos de funciones que son iguales pero que se representan algebraicamente de formas distintas.

SESIÓN 28 (2 HORAS)

Aprendizaje: Identifica el dominio y rango de una función exponencial y traza su grafica.

Tema: Relación entre los parámetros de $f(x) = ab^x$ con su grafica.

Trabajo en clase

EJERCICIO 28.1. Abre el siguiente QR y haz variar los valores de a y b en las casillas para observar qué sucede con la gráfica de la función exponencial $f(x) = ab^x$ y contesta las siguientes preguntas. Determina el dominio, el rango, si es creciente o decreciente, si es positiva o negativa, la ecuación de la asíntota horizontal e intersección con el eje Y. Realiza el bosquejo de alguna de las gráficas.

a) Si mantienes constante $a > 0$, por ejemplo $a = 2$ y haces variar $b > 1$, ¿Qué sucede con la gráfica?

Dominio:

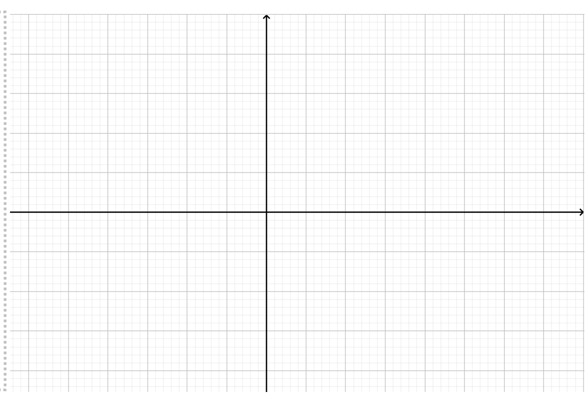
Rango:

Creciente o decreciente:

Positiva o negativa:

Ecuación de la asíntota horizontal:

Intersección con el eje Y:



b) Si mantienes constante $a > 0$, por ejemplo $a = 3$ y haces variar $0 < b < 1$, ¿Qué sucede con la gráfica?

Dominio:

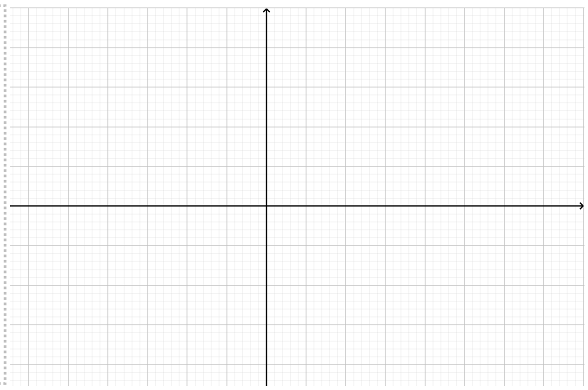
Rango:

Creciente o decreciente:

Positiva o negativa:

Ecuación de la asíntota horizontal:

Intersección con el eje Y:



c) Si mantienes constante $a < 0$, por ejemplo $a = 2$ y haces variar $b > 1$, ¿Qué sucede con la gráfica?

Dominio:

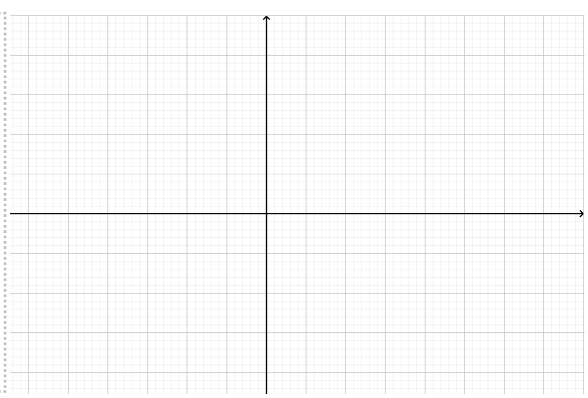
Rango:

Creciente o decreciente:

Positiva o negativa:

Ecuación de la asíntota horizontal:

Intersección con el eje Y:



d) Si mantienes constante $a < 0$, por ejemplo $a = 3$ y haces variar $0 < b < 1$, ¿Qué sucede con la gráfica?

Dominio:

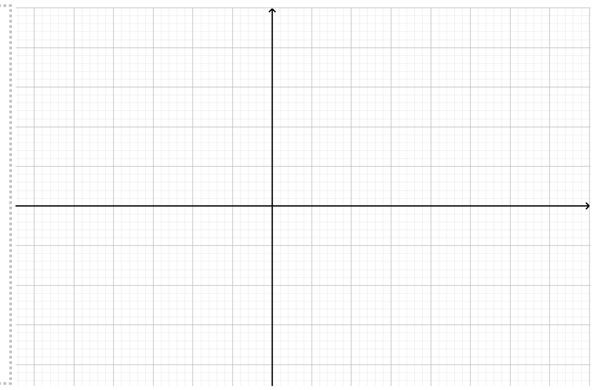
Rango:

Creciente o decreciente:

Positiva o negativa:

Ecuación de la asíntota horizontal:

Intersección con el eje Y:



Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios. Puedes ejecutar el mismo applet de GeoGebra que usaste anteriormente para verificar tus respuestas.

EJERCICIO 28.2. Determina los elementos de la función $f(x) = -2\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ y realiza el bosquejo de la gráfica. Con el uso de un software dinámico, verifica la gráfica.

Dominio:

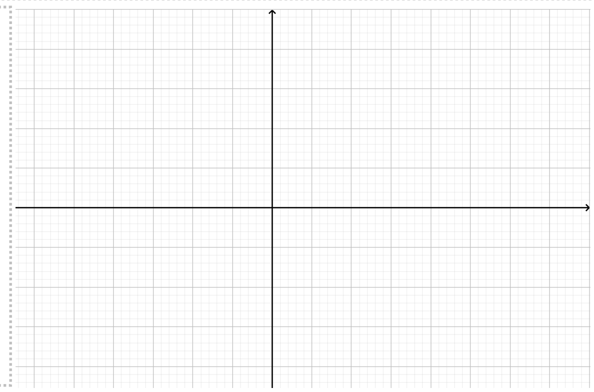
Rango:

Creciente o decreciente:

Positiva o negativa:

Ecuación de la asíntota horizontal:

Intersección con el eje Y:



EJERCICIO 28.3. Determina los elementos de la función $f(x) = \frac{1}{2}(7)^{x}$ y realiza el bosquejo de la gráfica. Con el uso de un software dinámico, verifica la gráfica.

Dominio:

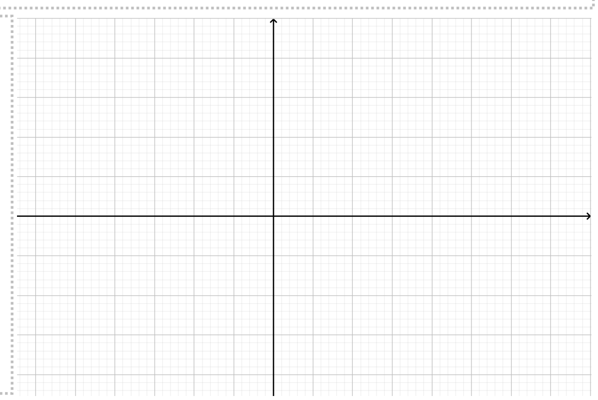
Rango:

Creciente o decreciente:

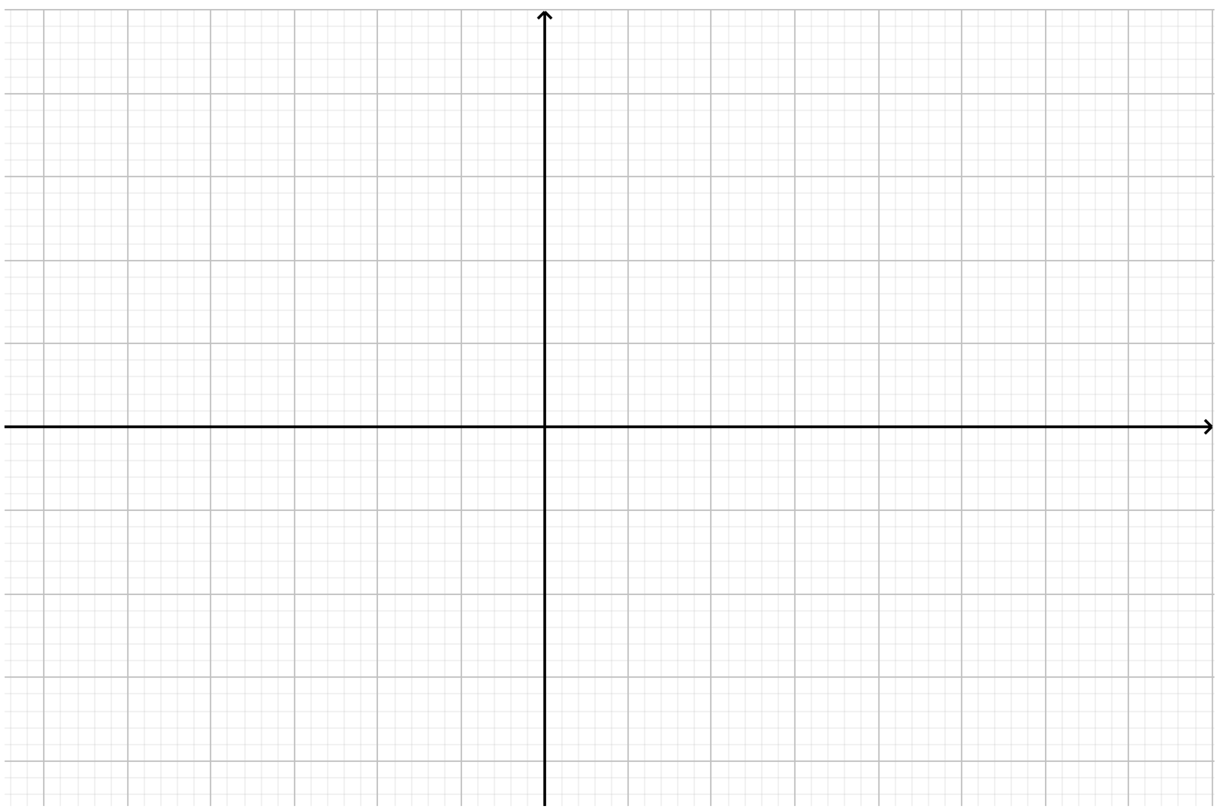
Positiva o negativa:

Ecuación de la asíntota horizontal:

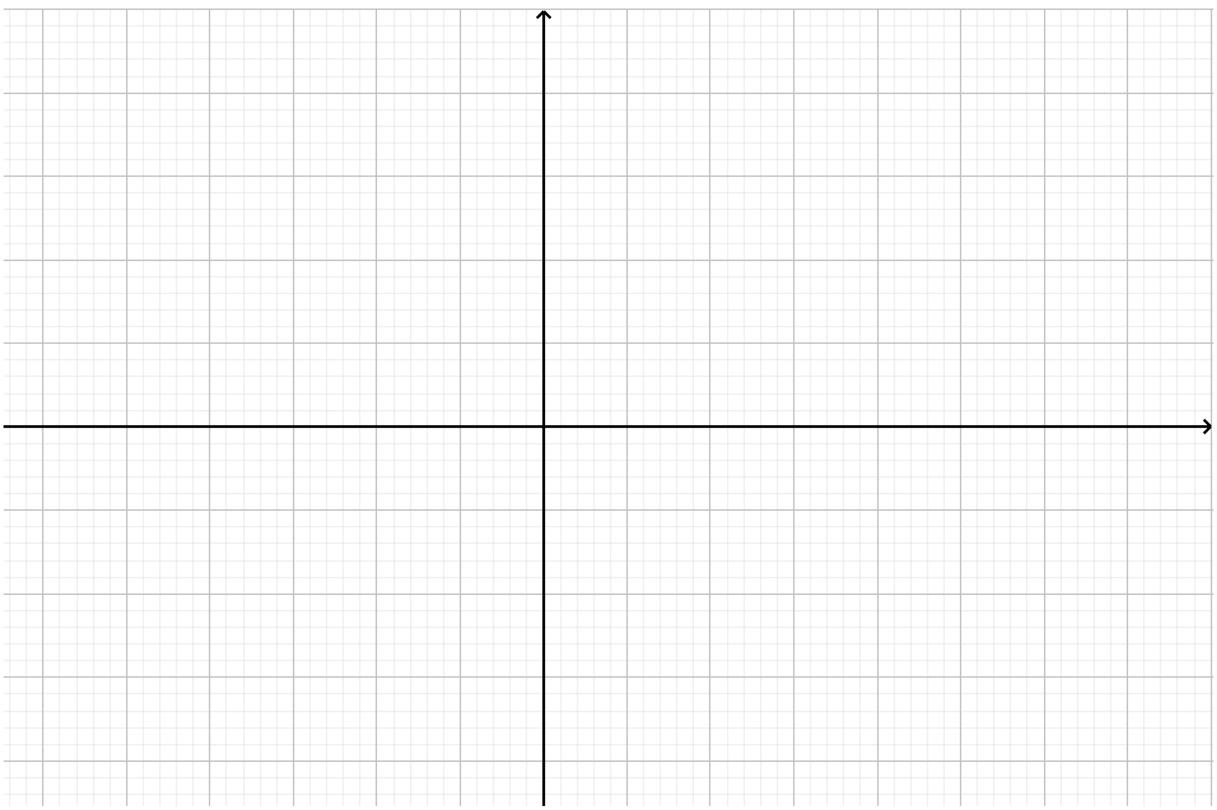
Intersección con el eje Y:



EJERCICIO 28.4. Determina una función de la forma $f(x) = a(b)^x$ cuya gráfica interseca al eje Y en $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$ y pasa por el punto $(-2, -3)$. Con el uso de GeoGebra, verifica la gráfica.



EJERCICIO 28.5. Determina tres funciones de la forma $f(x) = a(b)^x$ cuyas gráficas pasen por el punto $(1, 1)$ y que sean decrecientes en todo su dominio. Represéntalas en el siguiente plano y con el uso de GeoGebra comprueba tu respuesta.



SESIÓN 29 (2 HORAS)

Aprendizaje: Analiza la relación entre las gráficas de funciones exponenciales con diferentes bases incluyendo el número e.

Tema: Importancia de la función $f(x) = ae^x$ y sus aplicaciones.

Trabajo en clase

EJERCICIO 29.1. *Bitcoin* (BTC) es conocida como la primera criptomoneda digital desarrollada y lanzada en 2008. En el 2021 logró su máximo histórico, un poco más de 66 000 dólares. Debido a esto, mucha gente decidió invertir en estas monedas virtuales.

Alejandra es una estudiante destacada en el CCH, por lo que sus padres le han regalado un *Bitcoin*. Después de revisar varias opciones ha decidido invertirlo en el Banco Azteca, puesto que le ofrecen el 100% de interés anual.

a) ¿Cuántos *Bitcoins* obtendrá al final del primer año?

b) Si el banco le ofrece capitalizar[1] cada trimestre, ¿cuántos *Bitcoins* obtendría al final del año?

[1] *Capitalizar* significa agregar a un capital los rendimientos o intereses que este ha producido.

c) Si el banco le ofrece capitalizar cada mes, ¿cuántos *Bitcoins* obtendría al final del año?

d) Si el banco le ofrece capitalizar cada mes, cada día, cada hora, cada minuto o cada segundo,…. Para no hacerlo para cada caso posible, considera que el banco lo capitaliza n veces al año, ¿cuál sería la expresión que permite calcular el número de *Bitcoins* que obtendría Alejandra al final del año? ¿Qué pasa si n es "muy grande"?

e) ¿Cuál sería el máximo de *Bitcoins* que podría obtener al año?

EJERCICIO 29.2. El número e se debe en honor al matemático suizo Leonard Euler (1707-1783). Es un número irracional, por lo que tiene infinitos decimales no periódicos y es una de las constantes más importantes en matemáticas. Empleando tu calculadora, determina los ocho primeros decimales del número e.

EJERCICIO 29.3. La función $f(x) = e^x$ se le conoce como función exponencial natural. Determina sus elementos y realiza el bosquejo de su gráfica.

Dominio:

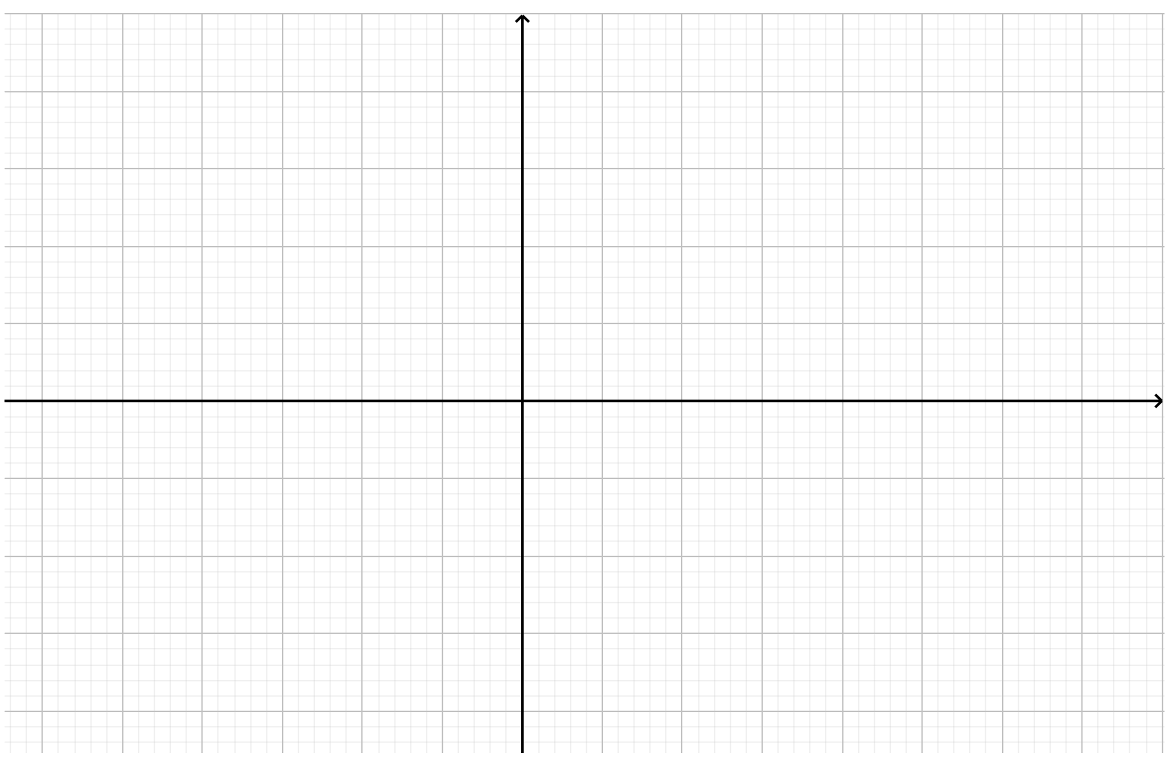
Rango:

Creciente o decreciente:

Positiva o negativa:

Ecuación de la asíntota horizontal:

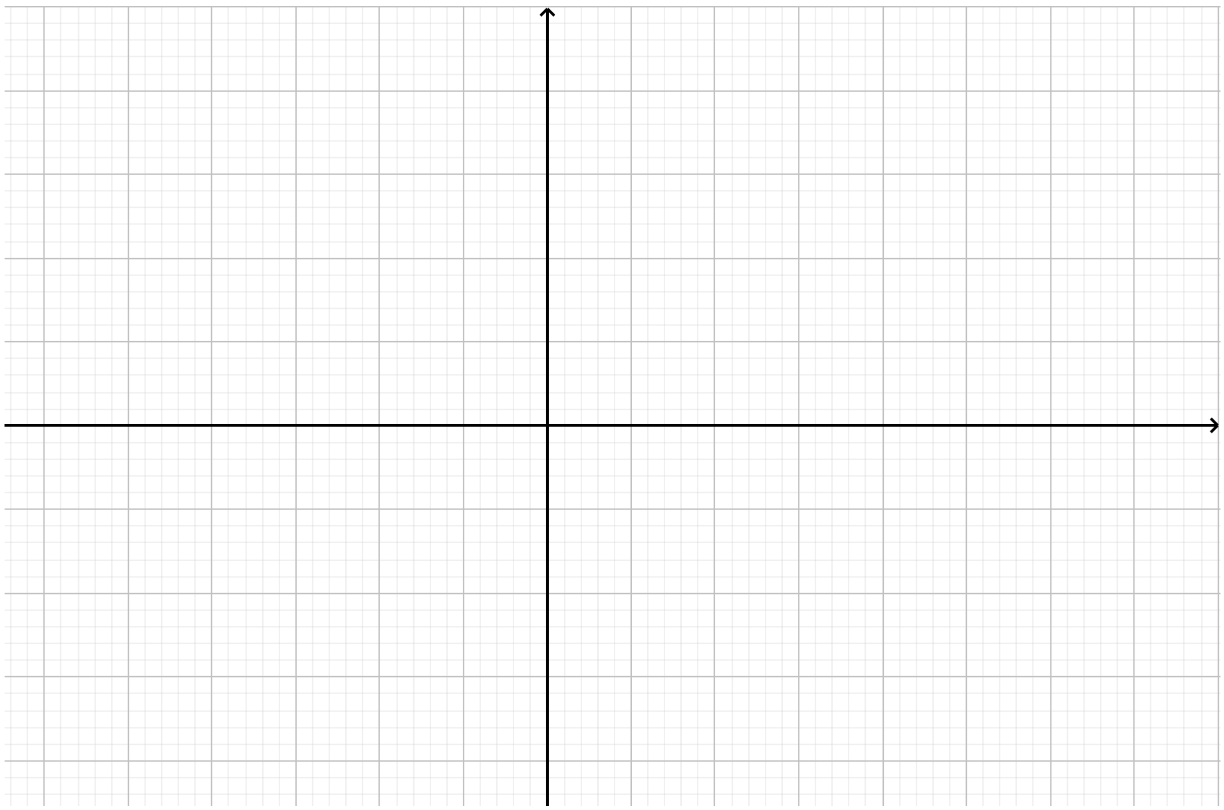
Intersección con el eje Y:



Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 29.4. Compara la gráfica de la función $f(x) = e^x$ y las gráficas de las funciones $g(x) = 2^x$ y $h(x) = 3^x$. Realiza el bosquejo de las tres gráficas en un mismo plano y escribe tus conclusiones.



EJERCICIO 29.5. Investiga al menos tres aplicaciones que tiene la función exponencial natural en otras áreas como la física, economía, biología, arqueología, ecología, medicina, etc.

SESIÓN 30 (1 HORA)

Aprendizaje: Resuelven problemas en diferentes contextos, que se modelen con funciones exponenciales.

Tema: Problemas de aplicación.

Trabajo en clase

EJERCICIO 30.1. De acuerdo con el Índice de Sociedad Hipotecaria Federal (SHF), en México una vivienda aumenta su valor a través del tiempo alrededor de un 7% anual. Si se compra una casa por $5 000 000.00 y suponiendo que se sigue la misma tendencia durante los próximos 10 años, ¿cuánto costará al terminar este tiempo?

EJERCICIO 30.2. La organización *Luchemos por la Vida* investigó que el alcohol al volante es una de las dos causas más importantes de accidentes de tránsito. Investigaciones médicas han recolectado datos que permiten modelizar el porcentaje de riesgo R de tener un accidente cuando se está conduciendo un automóvil en función de la cantidad de alcohol x en la sangre. Esta relación se puede representar a través de la función exponencial

$$R(x) = 6(1.013)^x$$

Donde x es la concentración de alcohol en la sangre (mg%) y R el porcentaje de riesgo.

a) Calcula el porcentaje de riesgo de tener un accidente cuando $x = 4\ mg\%$.

d) Calcula el porcentaje de riesgo de tener un accidente cuando $x = 17\ mg\%$

Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

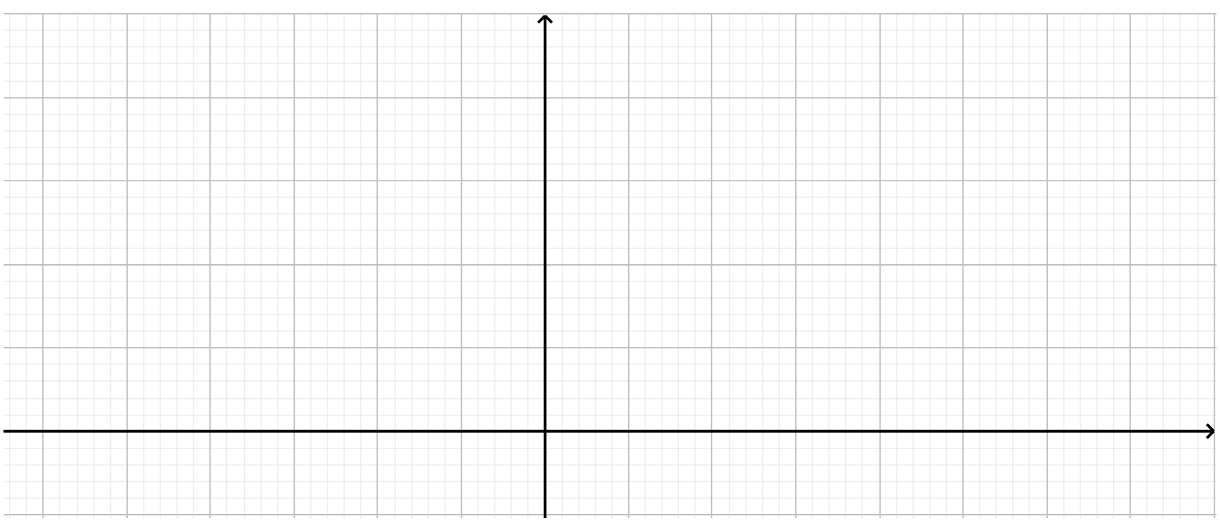
EJERCICIO 30.3. Las economías de los países provocan una depreciación (disminución del valor de un bien) un ejemplo de ello son los vehículos que actualmente tienen una tasa promedio de depreciación del 10% por año. Desde el punto de vista teórico, si el valor de algún artículo originalmente es C y se deprecia r % por año, entonces el valor después de t años está dado por la función:

$$\mathrm{f(t)} = \mathrm{C}\left(1 - \frac{\mathrm{r}}{100}\right)^{\mathrm{t}}$$

Si el valor de un vehículo nuevo es de $870 00.00:

a) Considerando la función dada, realiza una tabla de valores para $1 \leq \mathrm{t} \leq 6$ *años.*

b) Representa gráficamente los valores obtenidos en el inciso anterior.



c) Calcula la depreciación del vehículo después de 4 años.

d) ¿Qué pasa con el valor del automóvil conforme vayan pasando los años? ¿Hay alguna relación con la asíntota horizontal?

EJERCICIO 30.4. La mayoría de los fármacos, especialmente los hidrosolubles y sus metabolitos, son eliminados en mayor medida por los riñones con la orina. La dosis inicial administrada a una persona es de 10 mg y la cantidad en el cuerpo después de t horas, está dada por $A\,(t) = 10\left(\frac{4}{5}\right)^{t}$.

a) Calcula la cantidad de medicamento restante en el organismo 5 horas después de aplicarle la dosis inicial.

b) ¿Qué porcentaje del medicamento, que está aún en el organismo, se elimina cada hora?

EJERCICIO 30.5. Si D_0 es la diferencia de temperatura inicial entre un objeto y si la temperatura ambiente es T_a, entonces la temperatura T del objeto, al tiempo t, está dada por

$$T(t) = T_a + D_0 e^{-kt}$$

donde k es una constante positiva que depende del tipo de objeto. Si una taza de café tiene una temperatura de 200° F y se coloca en una habitación que tiene una temperatura de 70° F. Si el valor de $k = 0.05$.

a) ¿Cuál es la función que permite determinar la temperatura del café después de t minutos?

b) ¿Cuál será la temperatura del café después de 20 minutos?

c) ¿Qué pasará con la temperatura del café conforme vayan pasando los minutos?

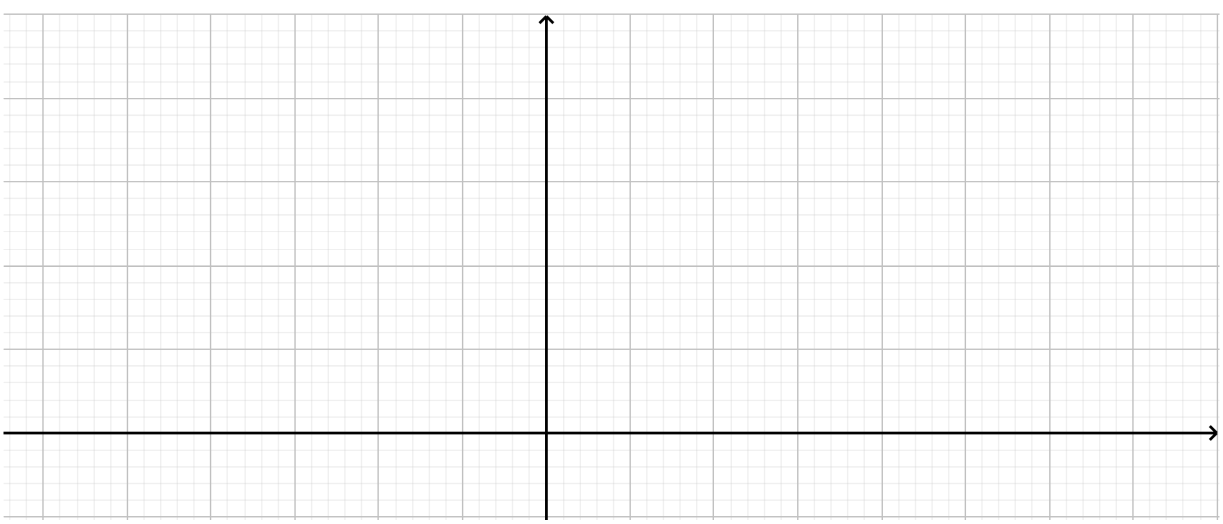
EJERCICIO 30.6. El Yodo radiactivo I-131 es usado para el diagnóstico y como tratamiento en patología tiroidea por más de 50 años a la fecha. Este producto radiactivo decae o disminuye cada 8 días, a la mitad; a esto se le llama vida media y es una propiedad de los materiales radiactivos. Los pacientes que requieren de este tratamiento para regular el funcionamiento de la glándula tiroidea deben permanecer más de 8 días hospitalizados. Es importante que conozcas el algoritmo relacionado con la actividad de la muestra en función del tiempo.

$$R(t) = R_0 e^{-0.0866t}$$

R *Actividad de la muestra*
R_0 *Dosis para el paciente*
t *tiempo de decaimiento*

a) Realiza una tabla de valores con una dosis inicial de 100mCi, para algunos valores de $0 \leq t \leq 30$ días. Considera que $t = 0$ es el día en el que el paciente ingiere el yodo.

b) Realiza la gráfica con los valores obtenidos en el inciso anterior.



c) Calcula la actividad del I-131 a los 8 días, cuando se cumple su vida media.

d) ¿Qué actividad radiactiva del I-131 se encuentra en el paciente a los 15 días?

e) Realiza un análisis en relación con actividad radiactiva en el paciente y a los cuantos días consideras ya se puede retirar el paciente a su casa.

SESIÓN 31 (2 HORAS)

Aprendizaje: Comprende el concepto de logaritmo de un número base b y las relaciones

$$b^y = x \leftrightarrow y = log_b x$$

Tema: Logaritmo base b de un número y su relación con la potencia base b.

Trabajo en clase

EJERCICIO 31.1. Como la función logarítmica es la inversa de la función exponencial, entonces se cumple que $b^y = x \leftrightarrow y = log_b x$. Sabiendo esto, completa la siguiente tabla:

Notación exponencial	Notación logarítmica
$2^3 = 8$	$\log_2 8 = 3$
$5^2 = 25$	
	$\log_4 \left(\frac{1}{16}\right) = -2$
	$y = \log_7 x$
$4^{y-2} = x$	
	$y = \log(x-9)$ [***]
$b^y = x$	

[***] Cuando la base del logaritmo es 10 no se escribe $\log_{10}$ sino que se emplea la expresión log.

EJERCICIO 31.2. Anteriormente se había visto que la función exponencial con base e se puede representar como $y = e^x$. Si la expresamos en notación logarítmica nos quedaría como $x = \log_e y$. No obstante, esta notación no se usa, sino que se escribe $x = \ln y$. Empleando esta notación, completa la siguiente tabla:

Notación exponencial	Notación logarítmica
$e^m = n$	
$e^{x+3} = y + 5$	
	$\ln(x) = z$
	$\ln(a + b) = c$

EJERCICIO 31.3. Determina el valor de la literal en las siguientes expresiones, sin usar calculadora. Puedes transformarla empleando la notación exponencial.

a) $y = \log_3 243$

b) $\log_b 81 = -2$

c) $\log_{\frac{1}{2}} x = -7$

c) $\ln(1) = y$

EJERCICIO 31.4. Revisa las propiedades de los logaritmos en el QR de la derecha y escríbelas a continuación.

EJERCICIO 31.5. Resuelve las siguientes ecuaciones empleando las propiedades de logaritmos. Compáralos con los de tus compañeros.

a) $3^{x+1} = 9^x$

b) $2^{2x-3} = 8^{x-2}$

c) $6\log_9 x - \log_3 x = 4$

d) $\log_2(x+4) - \log_2(x-3) = 3$

e) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 31.6. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales. Comprueba tus respuestas.

a) $3^{\frac{x+1}{2}} = 9^{\sqrt{x}}$

b) $2^{x^2-3x} = 16$

c) $e^{2x} + 5e^{x} - 6 = 0$

EJERCICIO 31.7. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas. Comprueba tus respuestas.

a) $\log_2 x - \frac{1}{3}\log_2 x = 4$

b) $\log(x^2 - 9) - \log(x - 3) = \log(3) + \log(2x)$

c) $2\log x + \log 4 = -2 + 4\log x$

SESIÓN 32 (2 HORAS)

Aprendizaje: Grafica funciones logarítmicas e identifica su dominio y rango.

Tema: Definición, gráfica, dominio y rango.

Trabajo en clase

EJERCICIO 32.1. Escribe la definición de función logarítmica.

EJERCICIO 32.2. Anota algunos ejemplos de funciones logarítmicas.

EJERCICIO 32.3. ¿La expresión $f(x) = \log_{-2}(x)$ representa una función logarítmica? Argumenta tu respuesta.

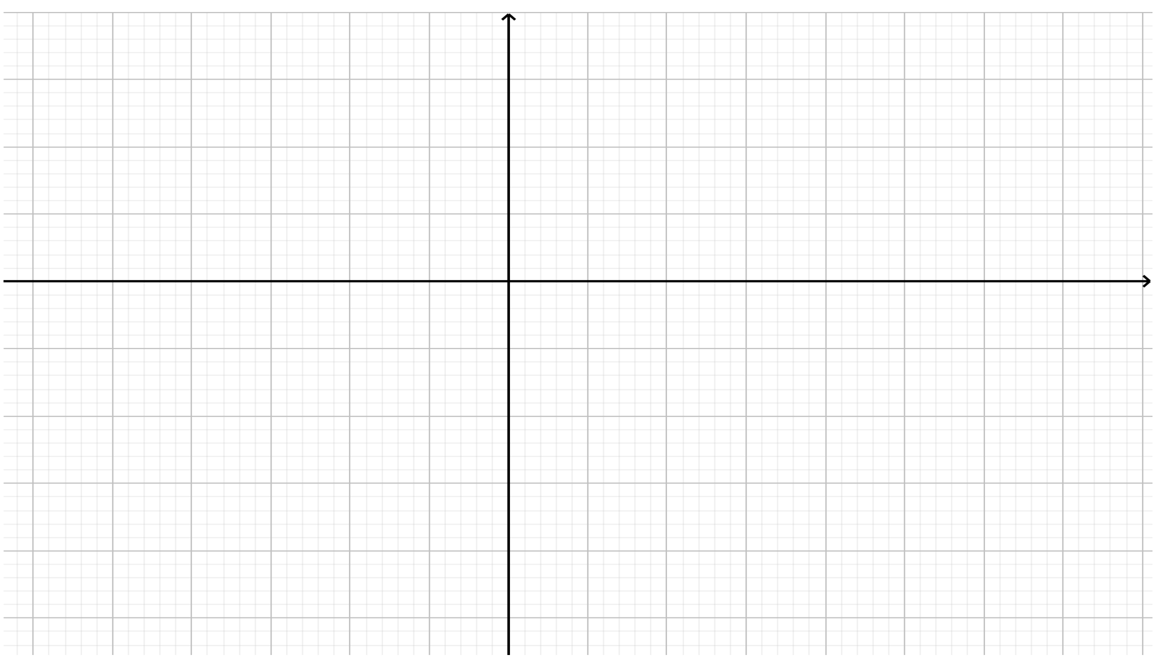
EJERCICIO 32.4. Dadas las funciones $f(x) = \log_2(x)$ y $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$.

a) Usando tu calculadora, llena la siguiente tabla.

x	0.1	0.3	0.5	1	2	3	4	8	12	16
$f(x)$										
$g(x)$										

b) ¿Hay alguna restricción de valores que puede tomar x? Argumenta tu respuesta.

c) Bosqueja las gráficas, empleando los valores obtenidos en el inciso a) y con el uso de GeoGebra verifícalas.



d) ¿Qué diferencias hay en entre ambas funciones? Indica el dominio y rango.

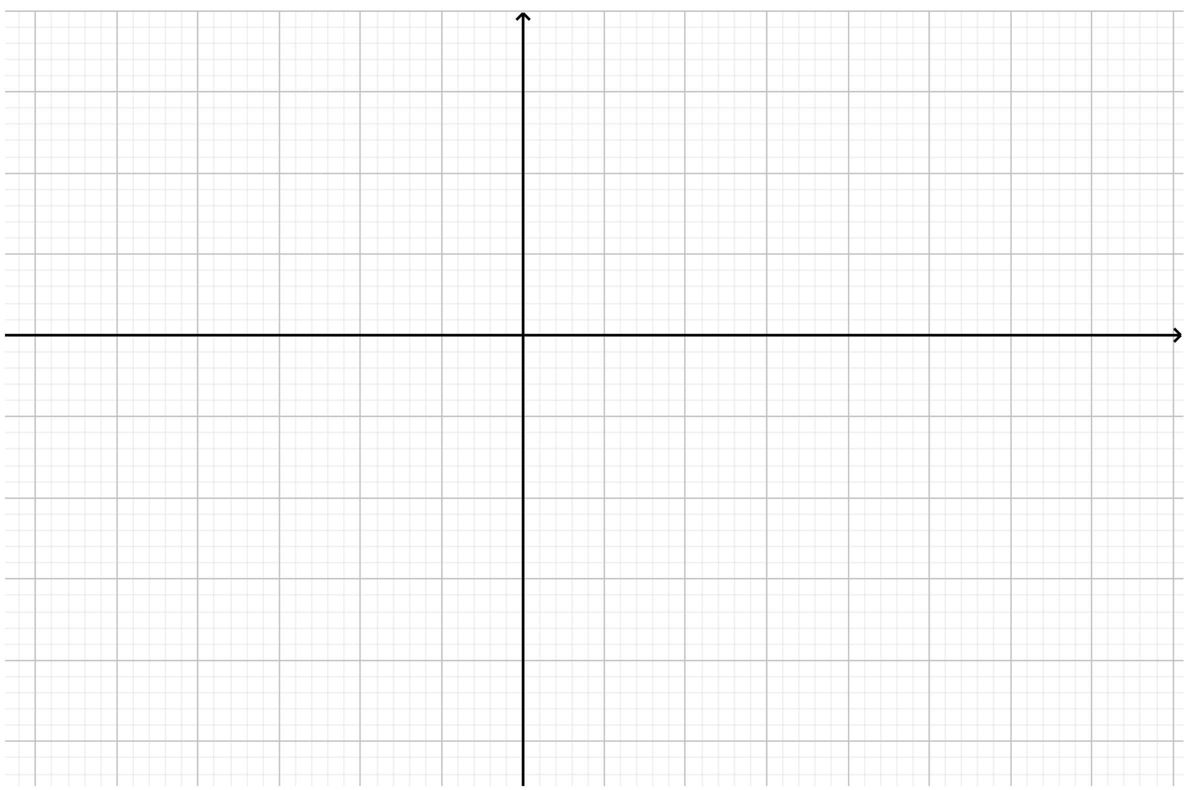
Trabajo extraclase

EJERCICIO 31.5. Dadas las funciones $f(x) = \log{(x + 3)}$, $g(x) = \log x$ y $h(x) = \log(x - 4)$.

a) Llena la siguiente tabla con los valores que consideres convenientes para x.

x										
$f(x)$										
$g(x)$										
$h(x)$										

b) Bosqueja las gráficas, empleando los valores obtenidos en el inciso anterior y con el uso de GeoGebra verifícala.



c) Compara las gráficas de las tres funciones e indica el dominio y rango de cada una. Escribe tus conclusiones.

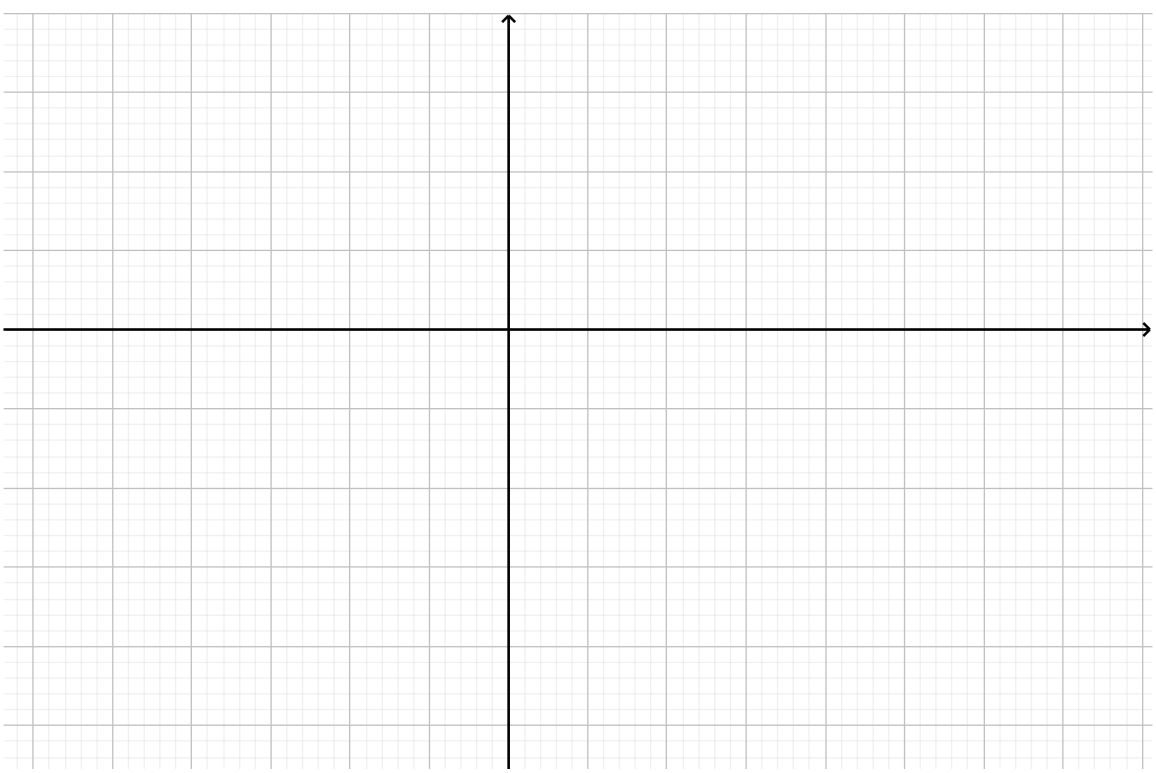
EJERCICIO 31.6. Dadas las funciones $f(x) = \ln(x)$ y $g(x) = \ln(-x)$.

a) Llena las siguientes tablas con los valores que consideres convenientes para x.

x										
$f(x)$										

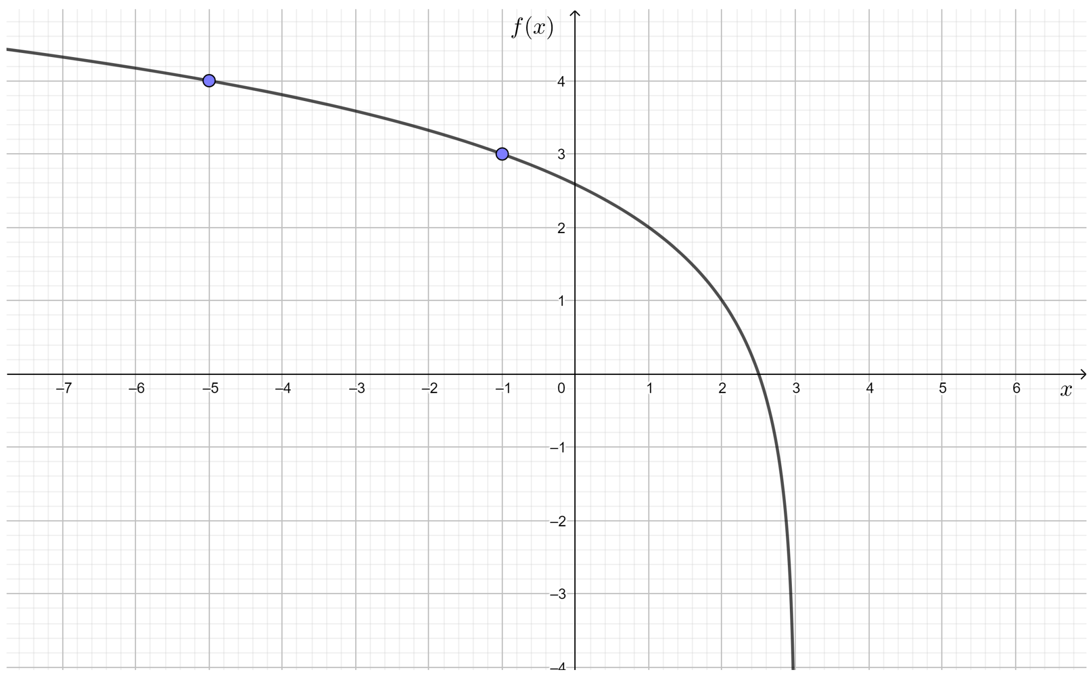
x										
$g(x)$										

b) Bosqueja las gráficas, empleando los valores obtenidos en el inciso a) y con el uso de GeoGebra verifícalas.



c) Compara ambas funciones, indica el dominio y rango. Escribe tus conclusiones.

EJERCICIO 31.7. Determina los valores de a y b para que función $f(x) = \log_2(ax + b)$ tenga como gráfica.



SESIÓN 33 (1 HORA)

Aprendizaje: Grafica funciones logarítmicas e identifica su dominio y rango.

Tema: Definición, gráfica, dominio y rango.

Trabajo en clase

EJERCICIO 33.1. Escanea el código QR de la derecha, se abrirá un applet de GeoGebra, en el cual podrás hacer variar la base b de la función logarítmica $f(x) = \log_b x$. Observa qué sucede con la gráfica y responde las siguientes preguntas.

a) ¿Para qué valores de b la expresión $f(x) = \log_b x$ deja de ser una función logarítmica? Compara tu respuesta con la de tus compañeros.

b) ¿Qué tienen en común las gráficas de la función $f(x) = \log_b x$, cuando $b > 0$ y $b \neq 1$? Compara tu respuesta con la de tus compañeros.

c) ¿Qué tienen en común las gráficas de la función $f(x) = \log_b x$, cuando $0 < b < 1$? Compara tu respuesta con la de tus compañeros.

Trabajo en extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 33.2. Investiga qué relación existe entre la función exponencial y la función logarítmica.

EJERCICIO 33.3. Determina una función logarítmica de la forma $f(x) = \log_b x$ que:

a) Sea decreciente en todo $\mathbb{R}$ y que pase por el punto $(8, -3)$.

b) Sea creciente en todo $\mathbb{R}$ y que pase por el punto $(12, 2)$.

SESIÓN 34 (2 HORAS)

Aprendizaje: Verifica mediante graficas o tablas que la función logarítmica es la función inversa de la exponencial.

Tema: La función logarítmica como inversa de la función exponencial.

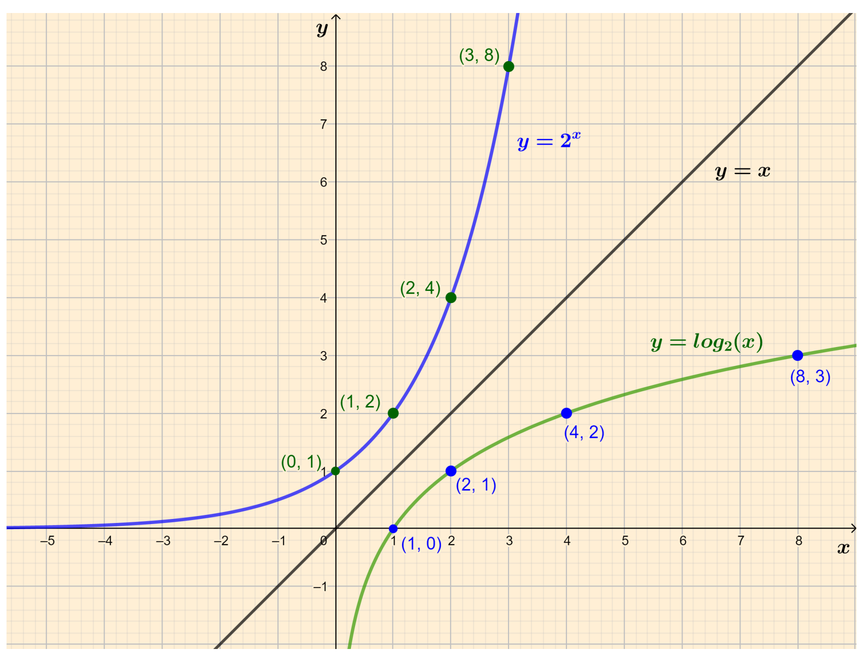
Trabajo en clase

EJERCICIO 34.1. En la siguiente tabla se observan las tablas y gráficas de las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \log_2 x$. ¿Cuál es la relación entre estas dos funciones?

Relación entre la función logarítmica $g(x) = \log_2 x$ y la función exponencial $f(x) = 2^x$

$y = 2^x$

x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



$y = \log_2 x$

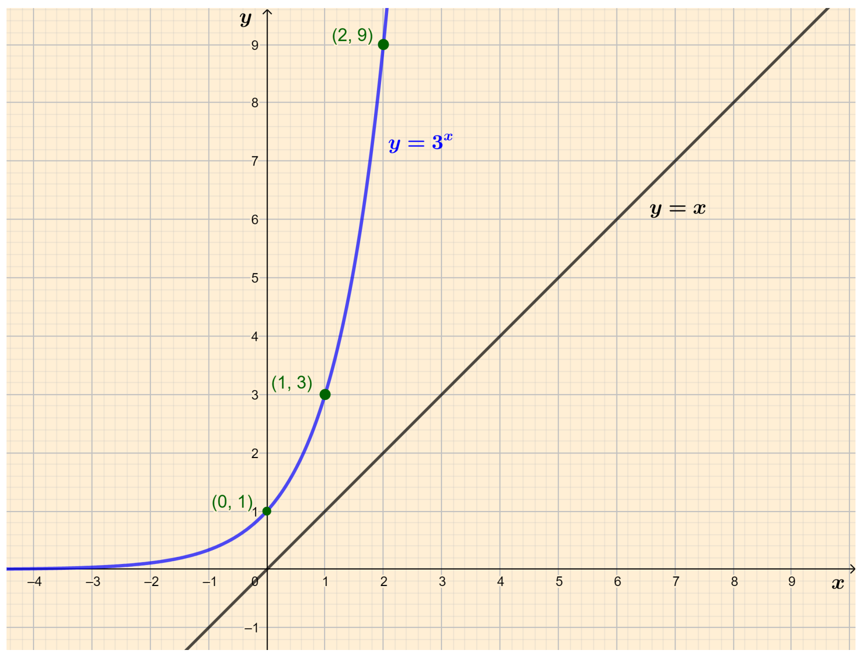
x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

EJERCICIO 34.2. Siguiendo el ejemplo del **EJERCICIO 34.1**, completa la información faltante en la siguiente tabla.

Relación entre la función logarítmica $g(x) = \log_3 x$ y la función exponencial $f(x) = 3^x$

$y = 3^x$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



$y = \log_3 x$

x	y
	-3
	-2
	-1
	0
	1
	2
	3

EJERCICIO 34.3. ¿Qué puedes decir de la relación que existe entre la función exponencial y la función logarítmica de la misma base? Escribe tus conclusiones.

Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

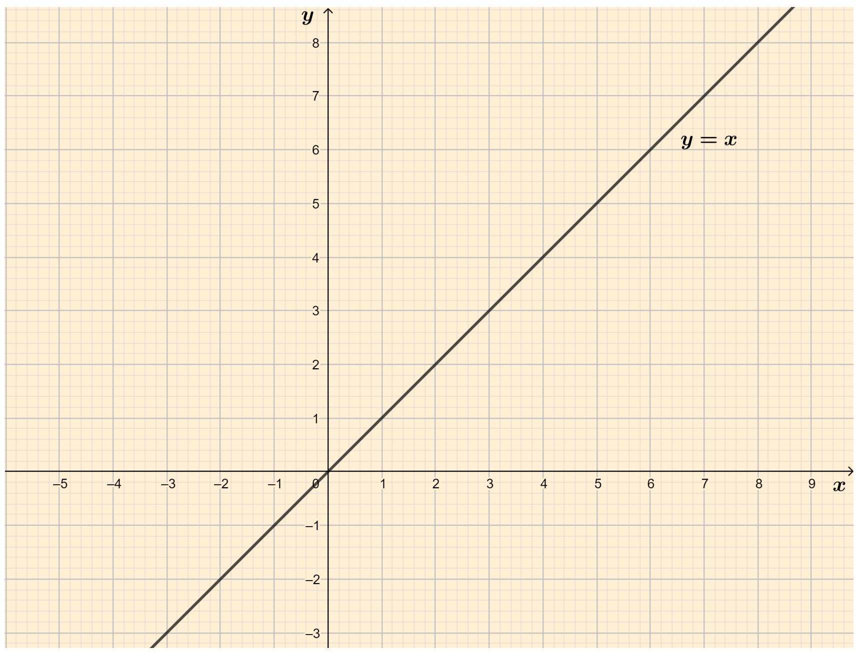
EJERCICIO 34.4. Completa la siguiente tabla.

Relación entre la función logarítmica $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ y la función exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Gráficas



$y = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	y
	-3
	-2
	-1
	0
	1
	2
	3

EJERCICIO 34.5. Indica el dominio y rango de la $f(x) = \log\,(x + 3)$ y determina su función inversa. Corrobora tu respuesta usando GeoGebra.

EJERCICIO 34.6. Determina la inversa de la función $f(x) = -\frac{1}{2}e^x$ e indica su dominio y rango. Corrobora tu respuesta usando GeoGebra.

SESIÓN 35 (2 HORAS)

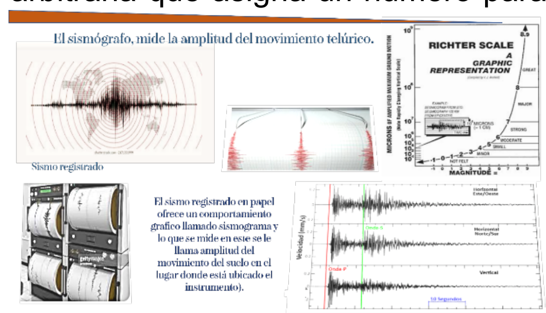
Aprendizaje: Resuelve problemas en diferentes contextos que se modelen con funciones logarítmicas y exponenciales.

Tema: Situaciones que involucren variación de tipo logarítmico.

Ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

Trabajo en clase

EJERCICIO 35.1. La escala sismológica de Richter, también conocida como escala de magnitud local (M_L), es una escala logarítmica arbitraria que asigna un número para cuantificar la energía que libera un terremoto, denominada así en honor del sismólogo estadounidense Charles Richter (1900-1985). El modelamiento logarítmico común de la amplitud máxima de la onda por medio de la función



$$M = \log(10^3\,A)$$

Donde M es la magnitud y A la amplitud del sismo. Esta última se mide en (mm) en el sismógrafo.

a) ¿Qué magnitud tiene un sismo de amplitud 25 mm?

b) Si en las noticias se menciona que un sismo tuvo una magnitud de 5.2 en escala de Richter, ¿De cuánto fue su amplitud?

EJERCICIO 35.2. La relación entre el número de decibeles β y la intensidad del sonido I en vatios por metro cuadrado $\left(\frac{W}{m^2}\right)$, está dada por la función:

$$\beta(I) = 10 \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$

a) En una conversación normal la intensidad del sonido es de $1 \times 10^{-6}\,\frac{W}{m^2}$, ¿Cuál sería el número de decibeles?

b) La sirena de una ambulancia a 30 metros produce 100 dB, ¿Cuál sería la intensidad del sonido?

EJERCICIO 35.3. Si tomáramos una lista de números provenientes de algún fenómeno ya sea natural o social, ¿es más probable que un número empiece por 1 o por 9? Parecería lógico que un número inicie con cualquier dígito del 1 al 9; sin embargo, esta intuición es falsa. La *Ley de Newcomb-Benford* o *Ley del primer dígito* asegura que, en el mundo real, el 1 aparece como primer dígito con mucha más frecuencia que el resto. Esta ley se puede enunciar de la siguiente manera: *La probabilidad de que un número comience por el dígito x está dada por*

$$P(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right), \text{ para } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Si pusiéramos en una lista las medidas de las longitudes de todos los ríos que existen en el mundo y seleccionáramos uno de ellos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una medida que empiece con el dígito 1?

b) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una medida que empiece con el dígito 7?

EJERCICIO 35.4. La sangre es una disolución reguladora. Cuando el dióxido de carbono es absorbido en los flujos de sangre, esta produce ácido carbónico y reduce los niveles de pH. El cuerpo compensa produciendo bicarbonato, que es una base débil, para neutralizar el ácido. La ecuación Henderson-Hasselbalch puede ser usada para calcular el pH de una disolución reguladora. Hasselbalch estaba estudiando el dióxido de carbono que se disuelve en la sangre y el modelo del pH de la sangre en esta situación está dada por

$$\mathrm{pH} = 6.1 + \log\left(\frac{800}{x}\right),$$

en donde x es la presión parcial del dióxido de carbono en las arterias, medida en torr.

a) Encuentra la presión parcial del dióxido de carbono en las arterias si el pH es de 7.38.

b) ¿Cuál es el pH en la sangre si la presión parcial del dióxido de carbono en las arterias de 38.29 torr?

Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 33.5. Investiga tres situaciones o fenómenos que se puedan modelar usando funciones logarítmicas. Ejemplifica tus respuestas.

SESIÓN 36 (1 HORA)

Aprendizaje: Resuelve problemas de aplicación empleando los conocimientos adquiridos anteriormente.

Tema: Resolución de problemas.

Trabajo en clase

EJERCICIO 36.1. Suponga que se descubre un cadáver en un departamento. El forense llega a las 15:00 hrs. y observa que la temperatura del cuerpo es de 30.5°C y la del departamento es 21.1°C. El forense espera una hora y vuelve a tomar la temperatura del cadáver, siendo de 30°C. Con esta información y sabiendo que la temperatura corporal en el momento del fallecimiento fue de 36.5 °C, determine la hora aproximada del fallecimiento aplicando el modelo $T(t) = 70 + Ae^{-kt}$.

EJERCICIO 36.2. Las sustancias radiactivas como el Cesio-137 decaen exponencialmente siguiendo el modelo $C(t) = C_0 e^{-kt}$, donde C(t) es la cantidad de sustancia después de t años**,** C_0 la cantidad de sustancia inicial y k una constante positiva. Si la vida media del Cesio-137 es de 30 años. Comenzando con una muestra de 100 mg.

a) Encuentra la masa que queda luego de t años.

b) ¿Qué cantidad de sustancia queda luego de 100 años?

c) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que quede 1 mg?

EJERCICIO 36.3. Escribe una reflexión sobre lo que más importante que aprendiste en esta unidad.

Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes problemas.

EJERCICIO 36.4. En el 2010 la población mundial fue de 6970 millones y en el 2020 de 7820 millones. Asumimos que el crecimiento de la población puede estudiarse con un modelo exponencial, $P(t) = P_0 e^{kt}$,

a) ¿cuál fue la tasa de reproducción relativa (k)?

b) Si la población mundial siguiera la misma tendencia, ¿Cuántas personas habrá en el 2030?

c) Aplicando el mismo modelo, ¿En qué año la población mundial será de 8910 millones? Corrobora tu respuesta buscando información en internet.

EJERCICIO 36.5. La técnica más común para determinar la edad de un fósil es medir la cantidad de Carbono 14 que contiene. Un ser vivo tiene una cantidad constante de Carbono 14, pero cuando muere, con el transcurso del tiempo, disminuye por el efecto de la radioactividad. La cantidad de Carbono 14 se calcula con la función $C(t) = C_0 e^{-kt}$, donde C_0 es la cantidad en un ser vivo y $C(t)$ la hallada en una muestra fósil al cabo de t años de su muerte y k es una constante. El periodo de semidesintegración (vida media) del Carbono 14 es de 5730 años.

a) Determina el valor de la constante k.

b) Si un hueso hallado en un yacimiento arqueológico contiene el 20% del Carbono 14 que contenía en vida del animal, ¿Cuál es su antigüedad?

AUTOEVALUACIÓN

Accede a través del código QR de la izquierda para abrir un cuestionario de autoevaluación. En el espacio siguiente escribe el procedimiento realizado para resolver cada reactivo, o bien, anota el argumento para tu respuesta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barnett, R., (2000). *Álgebra* (4ª Ed.). México: McGraw Hill.

CCH (2006). *Orientación y Sentido de las Áreas del Plan de Estudios Actualizado*. UNAM.

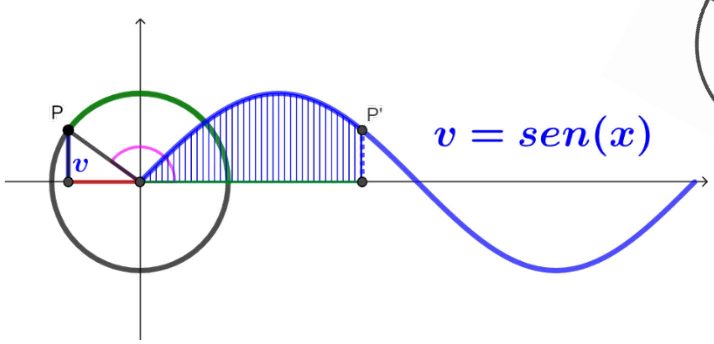
ENCCH (2016). *Programas de Estudio. Área Matemáticas. Matemáticas I-IV*. UNAM.

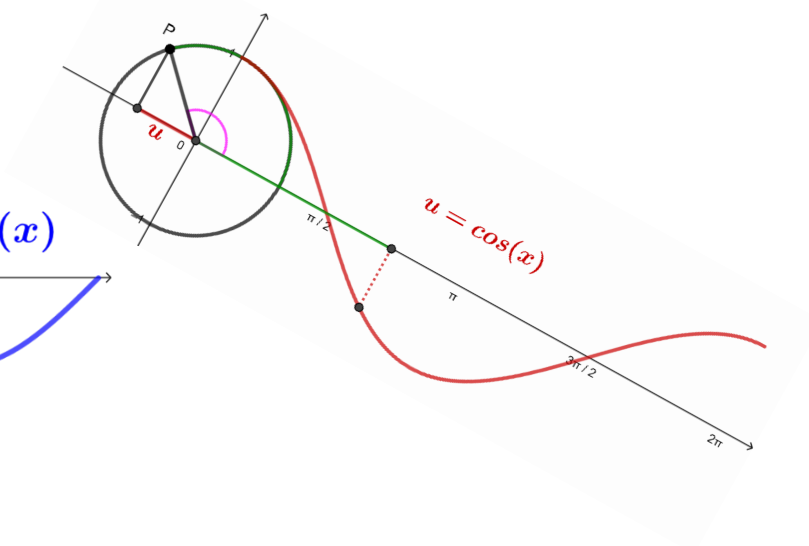
Swokowski, E. & Cole, J. (2018). *Precálculo*. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* (13ª Ed.). CENGAGE Learning.

Zill, D. & Dewar, J. (2012). *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*. McGraw Hill.

UNIDAD IV

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS





PROPÓSITO

Al finalizar, el alumno: Comprenderá la extensión del concepto de razón trigonométrica a función trigonométrica. Estudiará las funciones seno y coseno en su forma característica de variación y el análisis de sus parámetros. Modelará situaciones de comportamiento periódico para resolver problemas.

SESIÓN 37 (2 HORAS)

Aprendizaje: Explora situaciones o fenómenos de variación periódica.

Tema: Situaciones o fenómenos de variación periódica.

Trabajo en clase

EJERCICIO 37.1. Revisa el video disponible en el QR de la derecha y contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Qué es un movimiento periódico?

b) Describe tres ejemplos de fenómenos donde se presenta el movimiento periódico.

EJERCICIO 37.2. Dados los siguientes fenómenos indica cuáles tienen variación periódica. Argumenta tu respuesta.

a) El cambio del clima en una semana.

b) El desplazamiento de la punta de la aguja de un reloj analógico.

c) La respiración de una persona.

d) Las fases lunares.

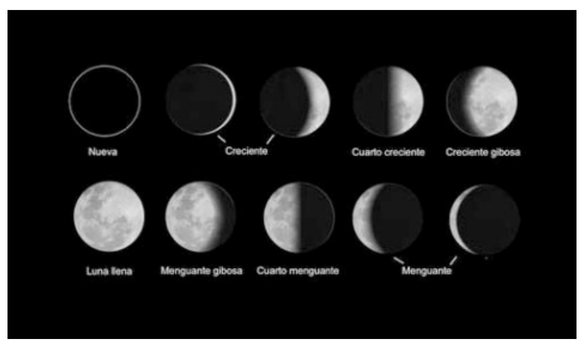
e) Las veces que te puedes ganar la lotería.

f) La actividad cardiaca.

g) La actividad eléctrica del cerebro.

h) El desplazamiento de los puntos terminales de las aspas de un ventilador.

EJERCICIO 37.3. Las fases lunares (también fases de la Luna) son los cambios aparentes de la porción visible iluminada, debido a su cambio de posición respecto a la Tierra y al Sol. El ciclo completo, denominado lunación, es de aproximadamente 28 días. Suponiendo que la iluminación de la luna es gradual.



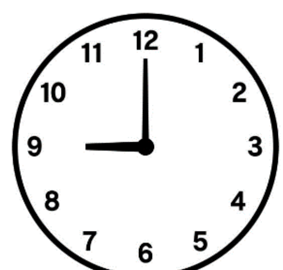
a) Si en el día cero hay luna nueva, completa la siguiente tabla indicando el porcentaje de iluminación de la superficie lunar que se ve desde la Tierra durante 84 días.

Día (x)	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
Porcentaje (y)													

b) Representa la gráfica de la función que relaciona el día con el porcentaje de iluminación de la Luna que vemos desde la Tierra.

b) ¿Se trata de un fenómeno periódico? Argumenta tu respuesta.

EJERCICIO 37.4. Las manecillas del reloj de la derecha indican que son las 9:00. Después de 2 horas (tiempo transcurrido) el reloj marcará a las 11:00 (hora). Con base en esta información responde lo siguiente.



a) Completa la tabla

Tiempo (x)	0	1	2	3	6	9	12	15	18	21	24
Hora (y)	9		11								

b) Representa gráficamente la información obtenida en el inciso anterior.

b) ¿Se trata de un fenómeno periódico? Argumenta tu respuesta.

Trabajo extraclase

EJERCICIO 37.5. Investiga tres ejemplos de fenómenos que son periódicos en la vida cotidiana.

EJERCICIO 37.6. Cuando se estudia el movimiento periódico se habla de amplitud, periodo, frecuencia y diferencia de fase. Explica cada uno de estos conceptos empleando ejemplos.

SESIÓN 38 (2 HORAS)

Aprendizaje: Explora situaciones o fenómenos de variación periódica.

Tema: Situaciones o fenómenos de variación periódica.

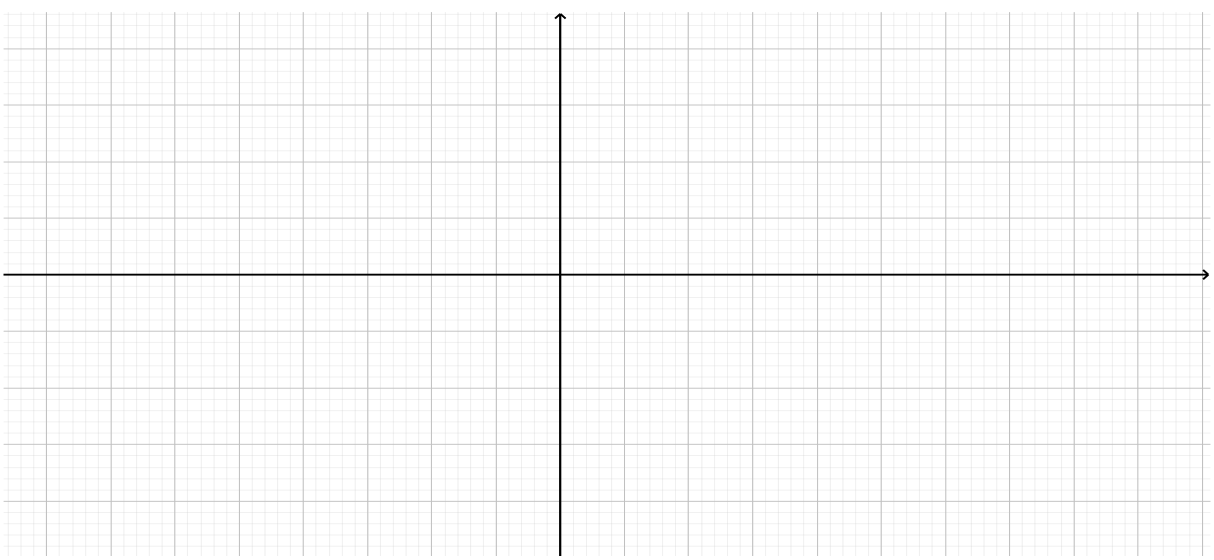
Trabajo en clase

EJERCICIO 38.1. En el sistema masa-resorte disponible a través del QR de la izquierda, el resorte ha sido estirado 5 cm respecto a su posición de equilibrio $x = 0$ y luego se ha dejado en libertad, como consecuencia, la masa oscila en torno a su posición de equilibrio. Sea $d(t)$ el desplazamiento de la masa respecto a la posición de equilibrio después de un tiempo t. Si en $t = 0$, se encuentra estirado 5 cm (considera en este caso el desplazamiento como negativo).

a) Mueve el deslizador *Tiempo* y toma los datos que consideres más representativos para llenar la siguiente tabla.

t (s)	0																	
d(cm)	-5																	

b) Realiza la gráfica empleando los datos obtenidos en el inciso anterior.



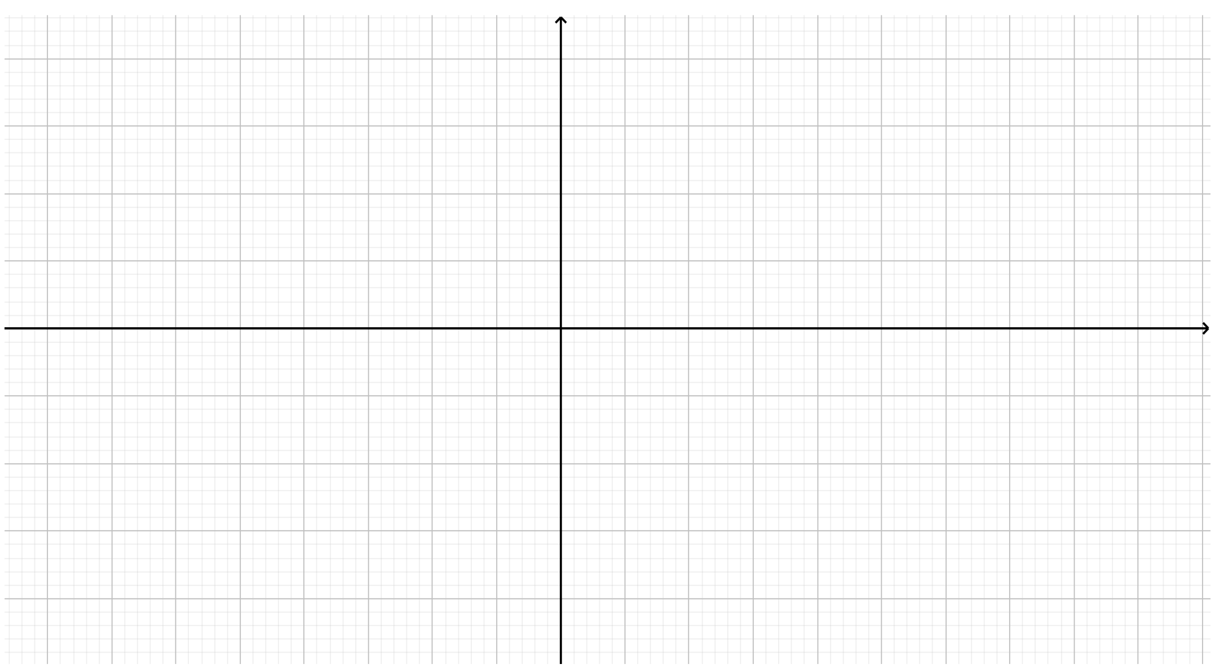
c) ¿Se trata de un movimiento periódico? Si tu respuesta es afirmativa, indica el periodo.

EJERCICIO 38.2. Un péndulo simple consiste en un objeto suspendido de un hilo (de peso despreciable). A través del QR de la derecha podrás visualizar la simulación del movimiento de un péndulo que se ha desviado hacia la derecha $60°$ de su posición de equilibrio y luego se suelta, provocando que oscile alrededor de su posición de equilibrio. Revisa la animación del péndulo simple y toma los datos que consideres más representativos moviendo el deslizador de tiempo.

a) Llena la siguiente tabla.

Tiempo (s)																
Ángulo (°)																

b) Realiza la gráfica empleando los datos obtenidos en el inciso anterior.



c) ¿Se trata de un movimiento periódico? Si tu respuesta es afirmativa, indica el periodo.

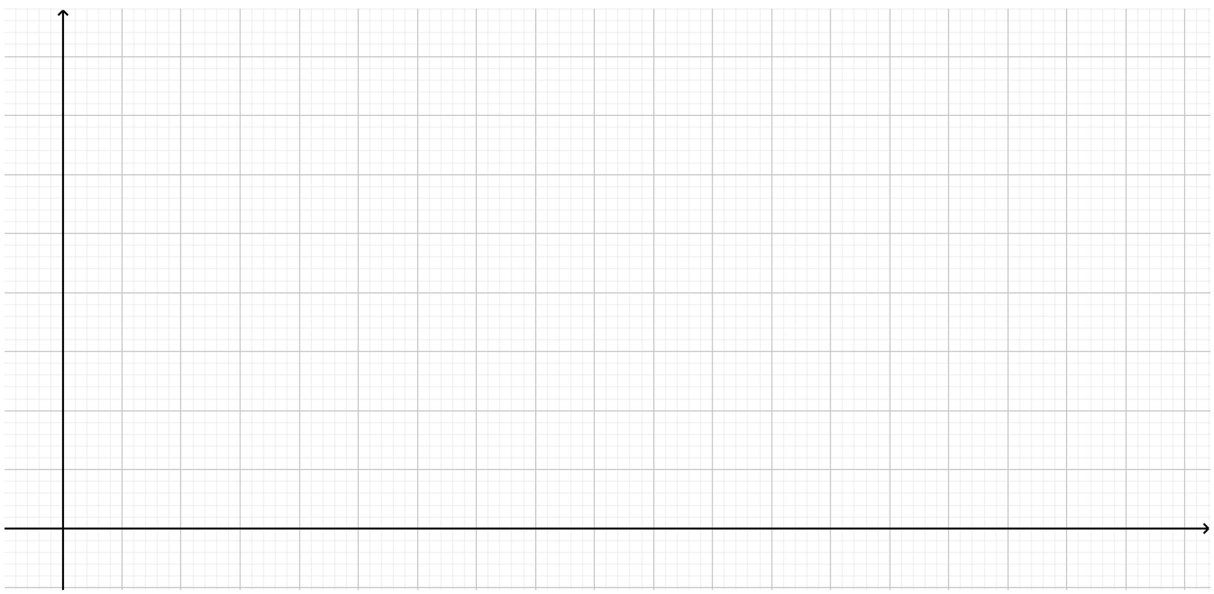
Trabajo extraclase

EJERCICIO 38.3. Revisa la simulación de un objeto que se desplaza con movimiento circular uniforme disponible a través del QR de la izquierda y contesta las siguientes preguntas.

a) Llena la siguiente tabla.

Tiempo (s)																
Ángulo (°)																

b) Realiza la gráfica empleando los datos obtenidos en el inciso anterior.



c) ¿Cuánto tiempo tarda el objeto en dar una vuelta completa?

d) ¿Se trata de un movimiento periódico? Si tu respuesta es afirmativa, indica el periodo.

SESIÓN 39 (1 HORA)

Aprendizaje: Convierte medidas angulares de grados a radianes y viceversa.

Tema: Medidas angulares en grados y radianes.

Trabajo en clase

EJERCICIO 39.1. Responde las siguientes preguntas.

a) ¿Qué es un grado sexagesimal?

a) ¿Qué es un radián?

c) ¿Cuántos radianes y grados sexagesimales tiene una circunferencia?

d) ¿Cuántos grados sexagesimales equivale a un radián?

e) ¿Cuántos radianes equivale a un grado sexagesimal?

Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes problemas.

EJERCICIO 39.2. Busca información sobre la circunferencia unitaria y complementa el siguiente texto empleando las siguientes palabras.

centro	radio	180°	grado	ángulo	funciones
circunferencia	central	radián	uno	unitaria	angulares

La ______________________ unitaria también conocida como goniométrica o trigonométrica es una circunferencia ubicada en el plano cartesiano con __________ en el origen (0,0). Se le denomina ____________ porque su radio es igual a ___________ siendo su ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Se utiliza con mucha frecuencia para estudiar las razones trigonométricas y modelar el comportamiento de las diferentes ______________ trigonométricas.

En una circunferencia unitaria se trabajan con grados sexagesimales y radianes como unidades para medir los ángulos. Un ___________ sexagesimal es el ángulo _______________ subtendido por un arco cuya longitud es igual a la tricentésima sexagésima (1/360) parte de una circunferencia, mientras que el ________________ es el _____________ central de la circunferencia que abarca un arco de igual longitud que el ___________ de la misma. Tanto los grados sexagesimales como los radianes son unidades _______________ y para la conversión entre ambas se emplea una regla de tres, puesto que π radianes es equivalente a _____________.

EJERCICIO 39.3. ¿Cuánto mide la longitud de una circunferencia unitaria?

SESIÓN 40 (2 HORAS)

Aprendizaje: Convierte medidas angulares de grados a radianes y viceversa.

Tema: Medidas angulares en grados y radianes.

Trabajo en clase

EJERCICIO 40.1. Transforma a radianes las siguientes medidas dades en grados sexagesimales.

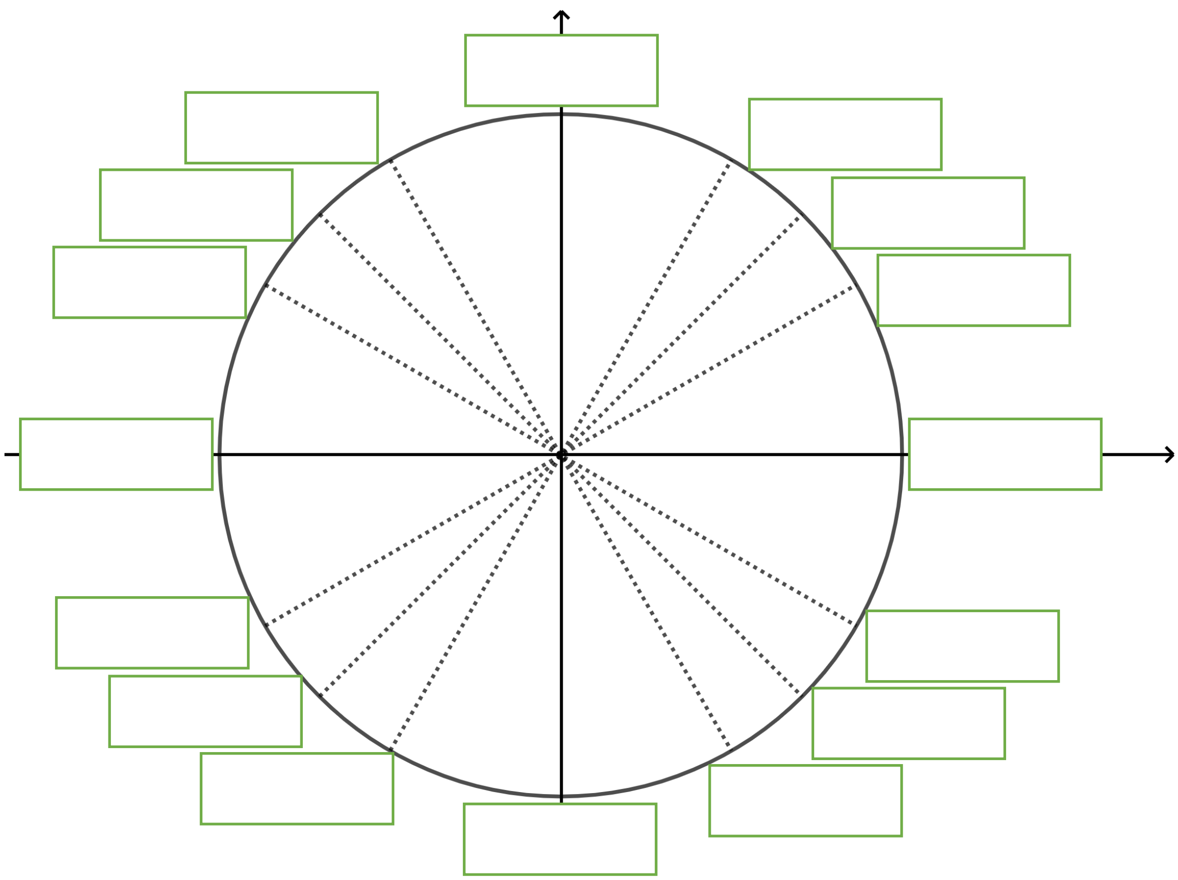
a) 5º	
b) 23º	
c) 99º	
d) 162º	
e) 17° 52′ 15″	

EJERCICIO 40.2. Transforma a grados sexagesimales las siguientes medidas dadas en radianes.

a) 0.3 rad	
b) 1.5 rad	
c) 4.38 rad	
d) 0.07 rad	
e) $\frac{2}{7}\pi$ rad	

EJERCICIO 40.3. Escribe la relación o fórmula que permite convertir los radianes a grados sexagesimales y viceversa.

EJERCICIO 40.4. Dada la circunferencia unitaria, coloca en los espacios la medida del ángulo central correspondiente entre el eje x positivo y el lado terminal señalado. Escribe las medidas en radianes y grados sexagesimales.



Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 40.5. ¿Qué establece el teorema de Pitágoras? Proporciona algunos ejemplos de su aplicación.

EJERCICIO 40.6. En la unidad I de Matemáticas 3 estudiaste el tema de razones trigonométricas. Si no lo recuerdas, no te preocupes. Revisa el enlace disponible en el QR de la derecha y escribe la información relativa al tema en el siguiente espacio.

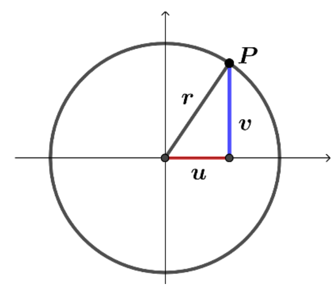
SESIÓN 41 (2 HORAS)

Aprendizaje: Comprende la forma en que se extienden o generalizan las razones trigonométricas para ángulos arbitrarios.

Tema: Razones trigonométricas seno, coseno y tangente para cualquier ángulo.

Trabajo en clase

EJERCICIO 41.1. Considerando la circunferencia de la derecha y las medidas del triángulo rectángulo, responde lo siguiente:



a) ¿Cuánto mide la hipotenusa del triángulo rectángulo?

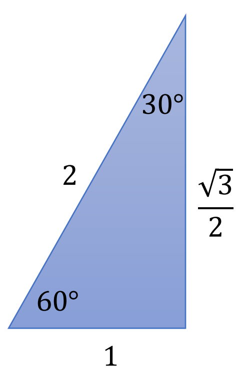
b) ¿Cuánto mide el cateto opuesto al ángulo α?

c) ¿Cuánto mide el cateto adyacente al ángulo α?

d) Llena la siguiente tabla.

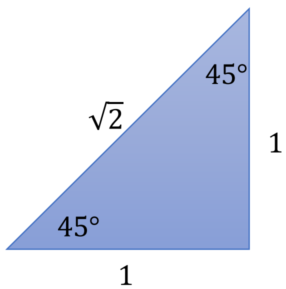
RAZONES	**RAZONES INVERSAS**
$sen\ \alpha =$	$\csc\alpha =$
$\cos\alpha =$	$\sec\alpha =$
$\tan\alpha =$	$\cot\alpha =$

EJERCICIO 41.2. Calcula las siguientes razones del caso especial correspondiente al triángulo rectángulo con ángulo de 30º y 60º.



$sen\ 30° =$	$csc\ 30° =$
$\cos 30° =$	$\sec 30° =$
$tan\ 30° =$	$cot\ 30° =$
$sen\ 60° =$	$csc\ 60° =$
$cos\ 60° =$	$sec\ 60° =$
$tan\ 60° =$	$cot\ 60° =$

EJERCICIO 41.3. Calcula las siguientes razones del caso especial correspondiente al triángulo rectángulo con dos ángulos de 45º.

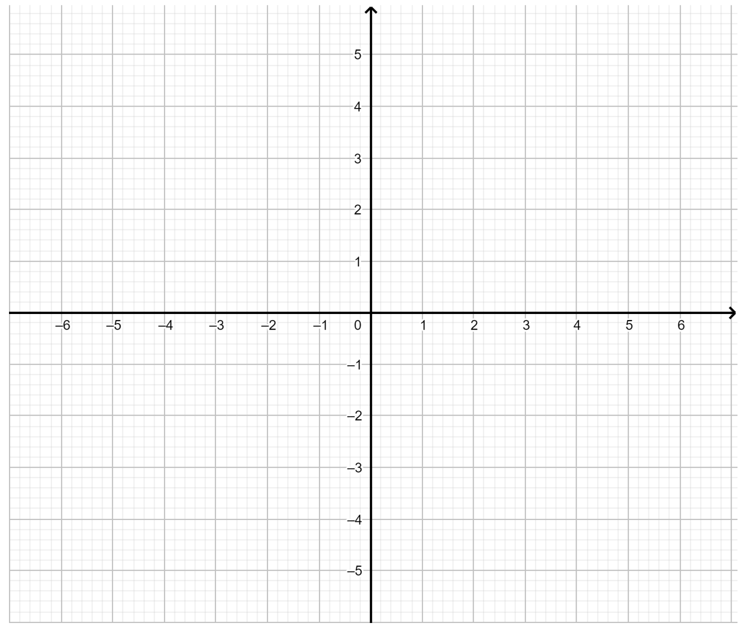


$sen\ 45° =$	$csc\ 45° =$
$cos\ 45° =$	$sec\ 45° =$
$tan\ 45° =$	$cot\ 45° =$

EJERCICIO 41.4. ¿Un ángulo puede ser negativo? Explica tu respuesta.

EJERCICIO 41.5. En el plano cartesiano dibuja el triángulo rectángulo que se forma con el origen, el punto dado y su proyección sobre el eje de las abscisas. Determina las razones trigonométricas para el ángulo formado por el eje x positivo y el lado terminal.

a) $\boldsymbol{A(6,3)}$

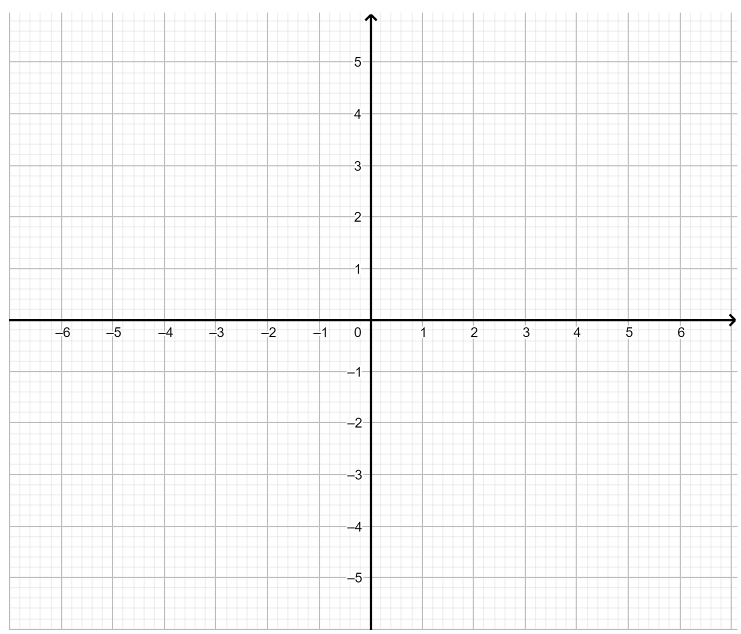


$sen\ \theta =$

$cos\ \theta =$

$tan\ \theta =$

b) $\boldsymbol{B(-5,3)}$

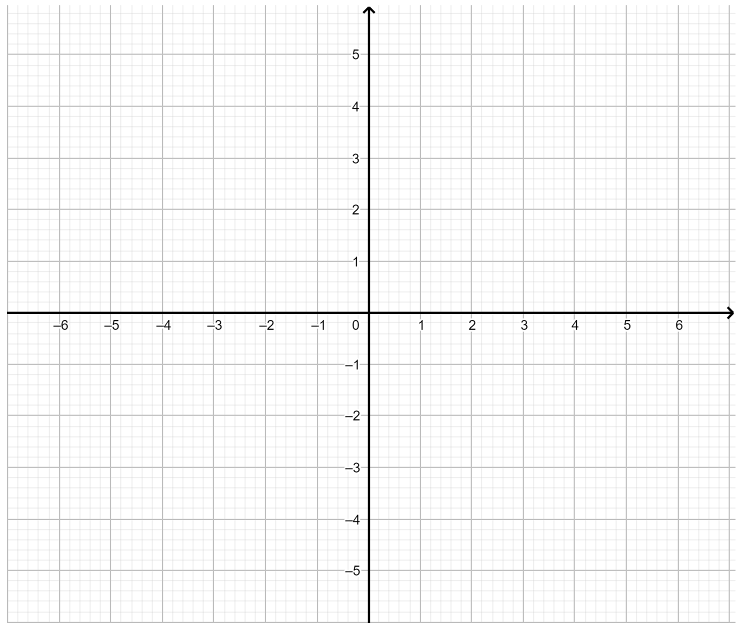


$sen\ \theta =$

$cos\ \theta =$

$tan\ \theta =$

c) $\boldsymbol{C(-4,-3)}$

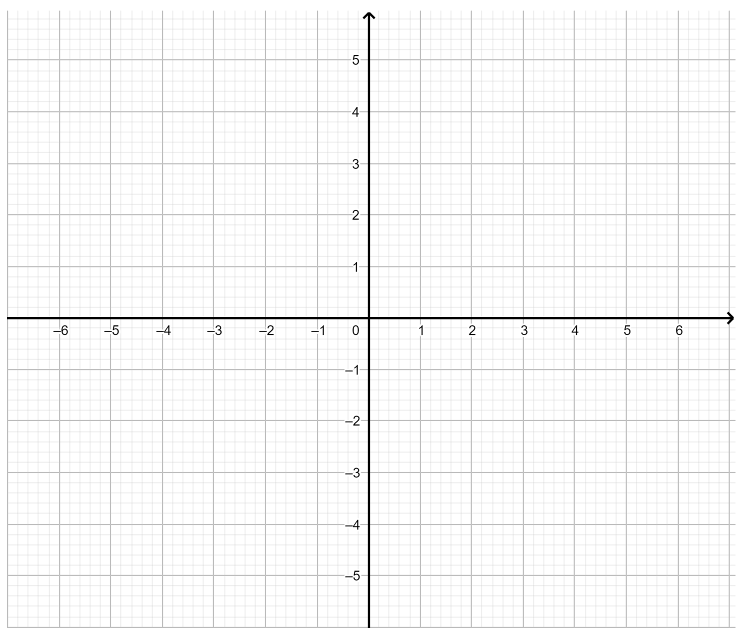


$sen\ \theta =$

$cos\ \theta =$

$tan\ \theta =$

d) $\boldsymbol{D(\ 4,-2)}$



$sen\ \theta =$

$cos\ \theta =$

$tan\ \theta =$

EJERCICIO 41.6. Indica el signo de las razones trigonométricas dependiendo del cuadrante donde se encuentre el punto terminal.

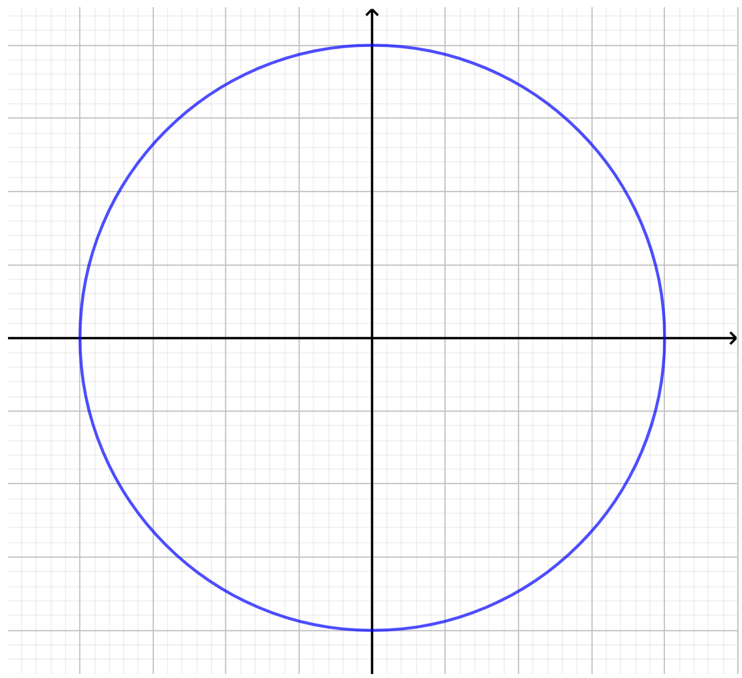
	I	**II**	**III**	**IV**
sen				
cos				
tan				

Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 41.7. Ubica en el plano cartesiano los ángulos dados, así como las coordenadas del punto terminal y determina las razones trigonométricas señaladas.

a) $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4}}$

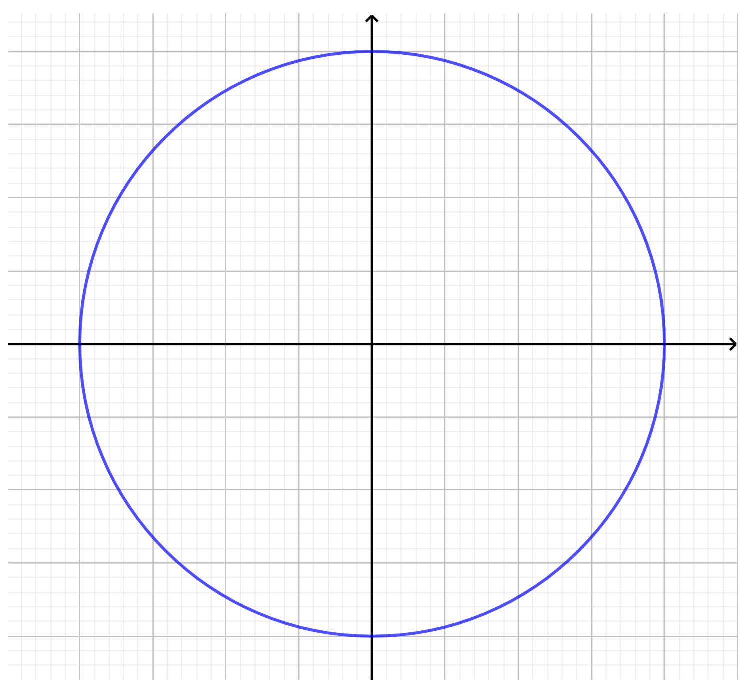


$sen\ \theta =$

$cos\ \theta =$

$tan\ \theta =$

b) $\boldsymbol{\theta = \frac{2}{3}\pi}$

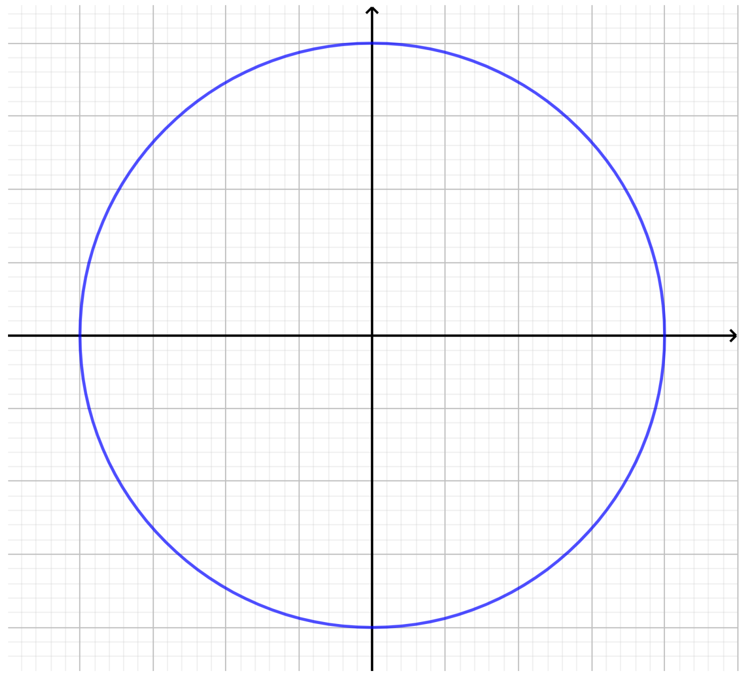


$sen\ \theta =$

$cos\ \theta =$

$tan\ \theta =$

c) $\boldsymbol{\theta = \frac{7}{6}\pi}$

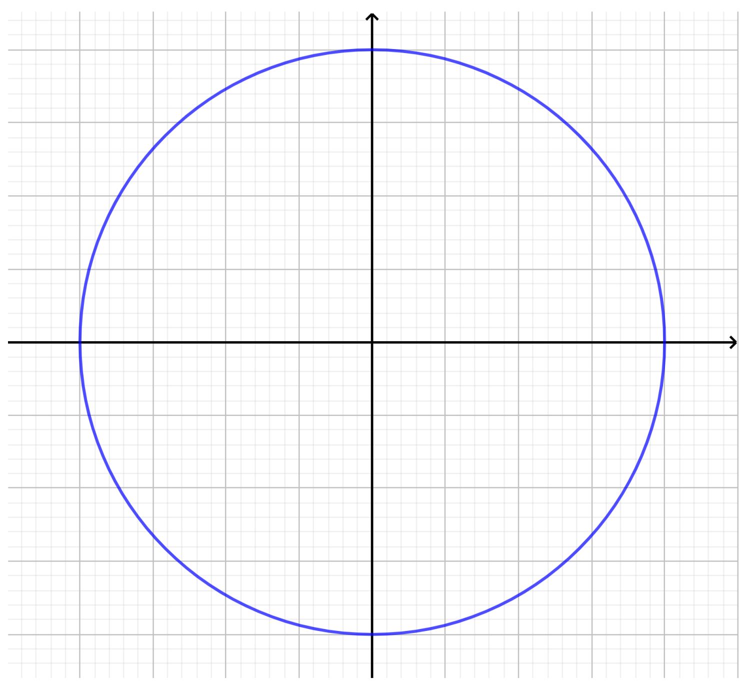


$sen\ \theta =$

$cos\ \theta =$

$tan\ \theta =$

d) $\boldsymbol{\theta = \frac{11}{6}\pi}$



$sen\ \theta =$

$cos\ \theta =$

$tan\ \theta =$

SESIÓN 42 (1 HORA)

Aprendizaje: Comprende la forma en que se extienden o generalizan las razones trigonométricas para ángulos arbitrarios.

Tema: Razones trigonométricas seno, coseno y tangente para cualquier ángulo.

Trabajo en clase

EJERCICIO 42.1. Accede al QR de la derecha para visualizar la circunferencia unitaria, varía la media del ángulo y completa lo que falta en la siguiente tabla. Utiliza cuatro decimales.

α (°)	α (Rad)	$sen\ \alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	Coordenadas de P
0°					
	$\frac{\pi}{6}$				
45°					
	$\frac{\pi}{3}$				
90°					
	$\frac{2\pi}{3}$				
135°					
	$\frac{5\pi}{8}$				
180°					
	$\frac{5\pi}{4}$				
270°					
	$\frac{7\pi}{4}$				

Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 42.2. En general, como pudiste observar en el ejercicio anterior, al ir cambiando el ángulo α en la circunferencia unitaria se van modificando los valores de los catetos (los catetos pueden ser positivos, negativos o cero, ya que en este caso son segmentos dirigidos). Si denotamos el cateto adyacente al ángulo α como u y el cateto opuesto como v, y cambiamos α por x (por ser variable).

a) ¿Cuánto vale el cateto adyacente al ángulo x?

b) ¿En qué intervalo varían los valores que puede tomar el cateto adyacente al ángulo x?

c) ¿Cuánto vale el cateto opuesto al ángulo x?

d) ¿En qué intervalo varían los valores que puede tomar el cateto opuesto al ángulo x?

SESIÓN 43 (2 HORAS)

Aprendizaje: Extiende el concepto de razón trigonométrica a función, mediante la elaboración de una tabla o gráfica de: $f(x) = sen\ x$, $f(x) = cos\ x$

Tema: Funciones trigonométricas: $f(x) = sen\ x$, $f(x) = cos\ x$. Gráfica, dominio, rango, ceros, amplitud, periodo.

Trabajo en clase

EJERCICIO 43.1. Proporciona una definición de las funciones seno y coseno.

EJERCICIO 43.2. Utiliza tu calculadora para obtener los valores de la función $f(x) = sen\ x$ y realiza lo que se te pide.

a) Completa la tabla escribiendo las medidas en radianes y los respectivos valores de f.

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$f(x)$													

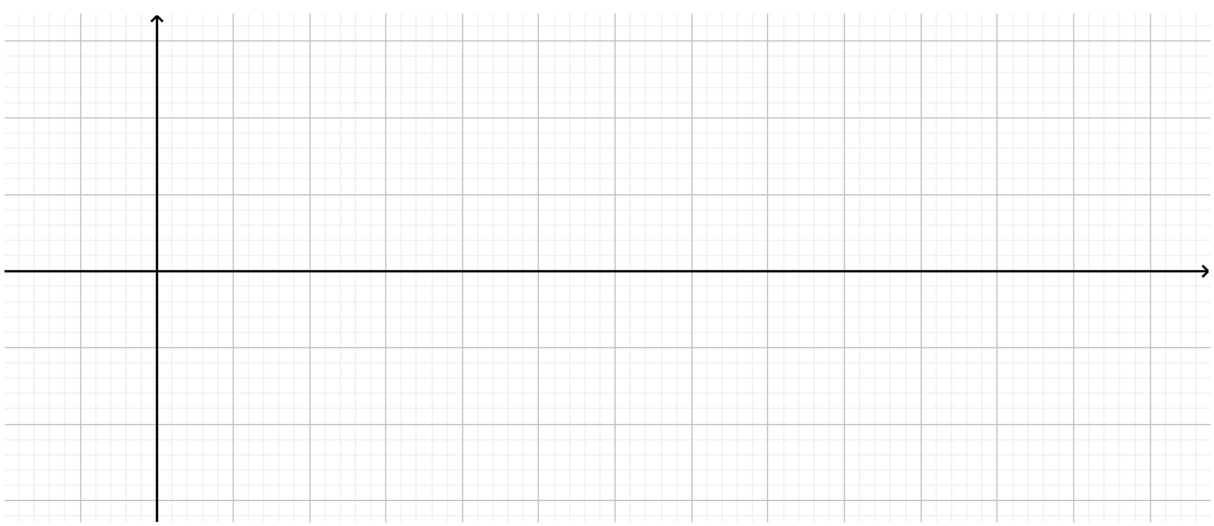
b) Traza la gráfica usando radianes.

EJERCICIO 43.3. Utiliza tu calculadora para obtener los valores de la función $g(x) = cos\ x$ y realiza lo que se te pide.

a) Completa la tabla escribiendo las medidas en radianes y los respectivos valores de g.

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$g(x)$													

b) Traza la gráfica usando radianes.



EJERCICIO 43.4. Analiza el comportamiento gráfico de las funciones $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = cos(x)$ en el intervalo $[0,2\pi]$.

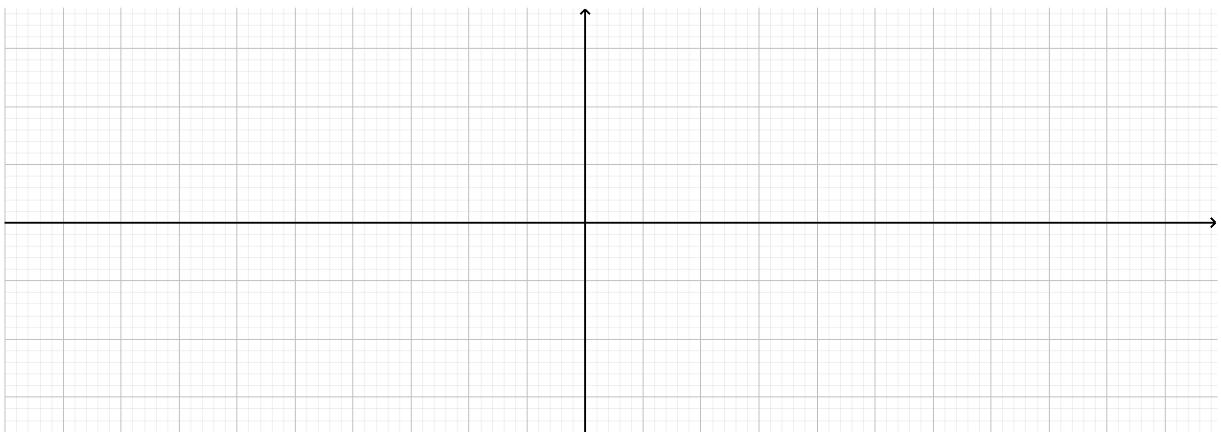
x	$f(x) = sen\ (x)$	$g(x) = cos\ (x)$
$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$		
$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	Decrece desde 1 hasta 0	
$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$		
$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$		Crece desde 0 hasta 1

Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes problemas.

EJERCICIO 43.5. En los ejercicios vistos en sesiones anteriores los valores de x varían en el intervalo de $[0,2\pi]$, sin embargo, recordemos que los ángulos también pueden ser negativos (si se miden en sentido contrario a las manecillas del reloj), incluso pueden ser más 2π (dar más de una vuelta). Así que x puede variar de $-\infty$ a $+\infty$. Realizando estos cambios realiza lo siguiente.

a) Bosqueja la gráfica de la función $f(x) = sen\ x$ e indica cada uno de sus elementos.



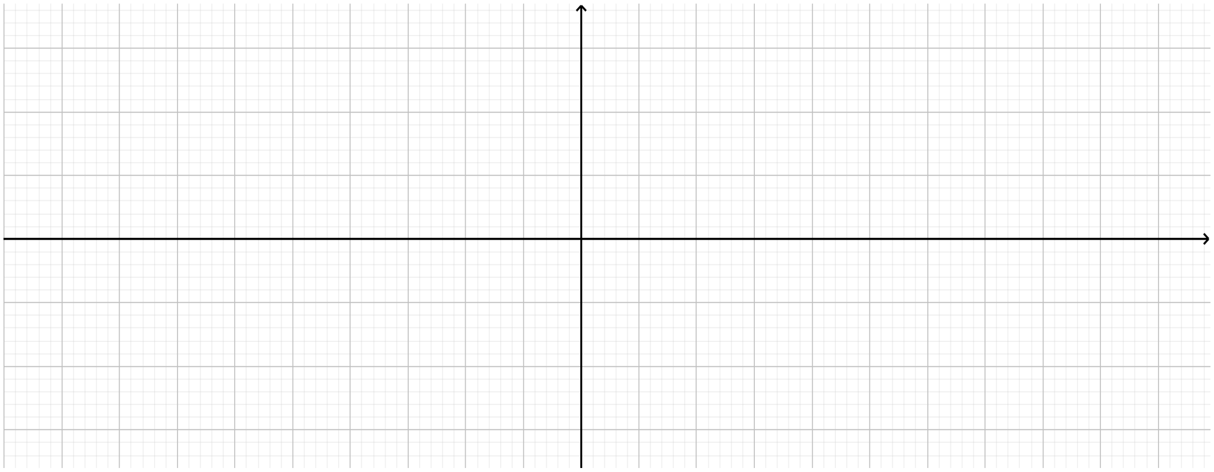
Dominio:

Rango:

Ceros:

Amplitud:

b) Bosqueja la gráfica de la función $g(x) = cos\ x$ e indica cada uno de sus elementos.



Dominio:

Rango:

Ceros:

Amplitud:

Periodo:

SESIÓN 44 (1 HORA)

Aprendizaje: Analiza e identifica los parámetros que aparecen en las funciones $f(x) = D + A\,sen(Bx + C)$ y $f(x) = D + Acos(Bx + C)$,

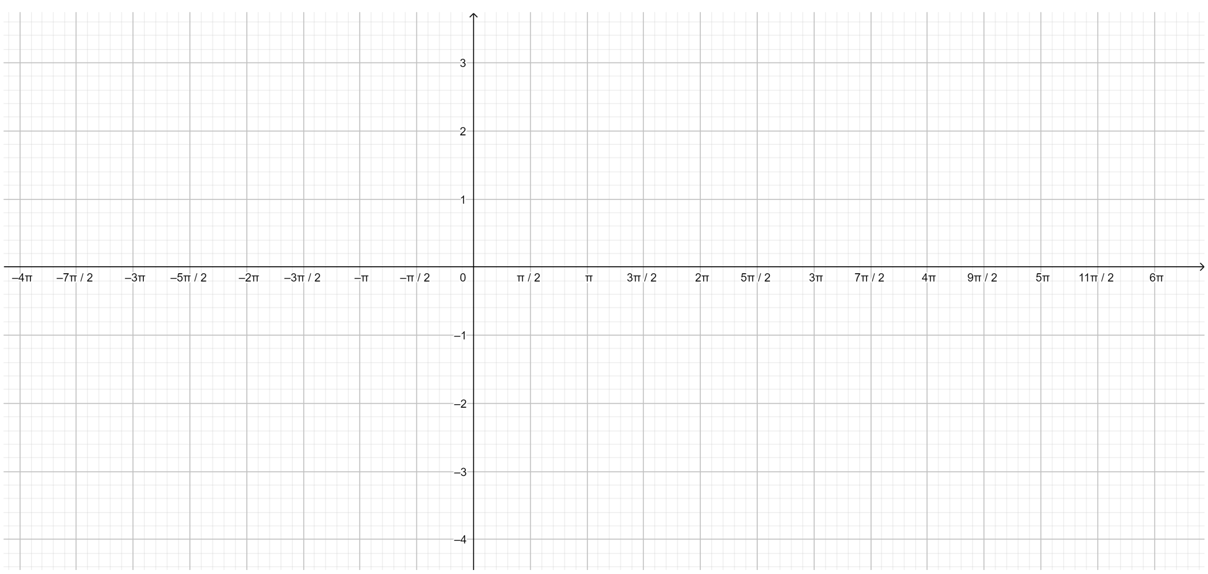
D desplazamiento vertical, A amplitud, B frecuencia y desfasamiento.

Tema: Gráfica las funciones $f(x) = D + A\,sen(Bx + C)$,$f(x) = D + A\,cos(Bx + C)$. Análisis de comportamiento de la gráfica respecto al parámetro A, B, C y D.

Trabajo en clase

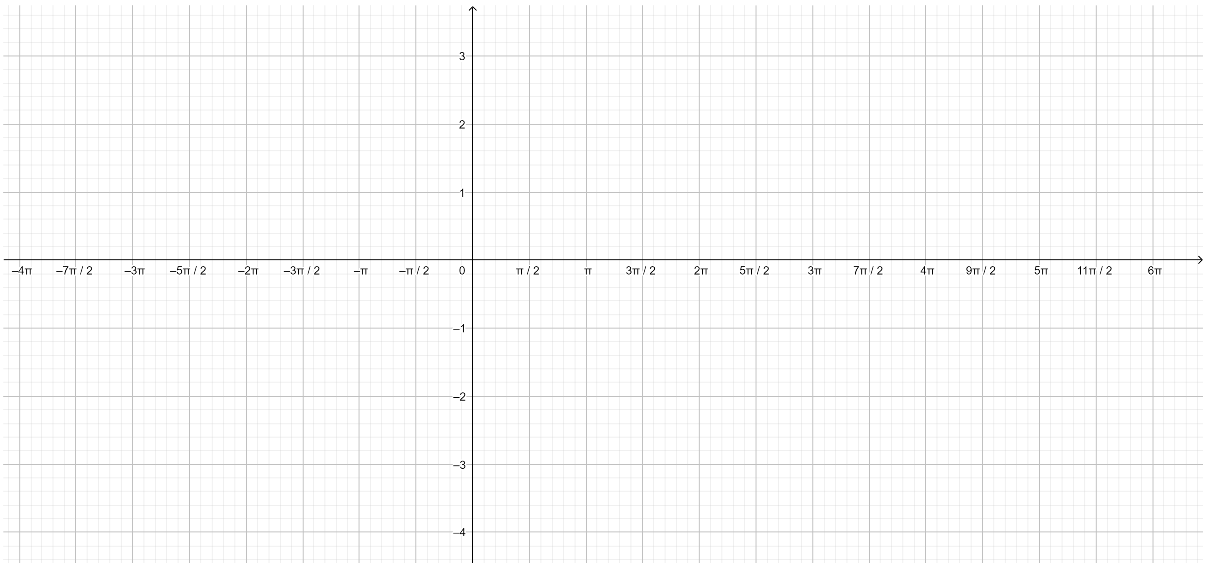
EJERCICIO 44.1. Bosqueja las gráficas de las siguientes funciones usando distintos colores y compáralas con la gráfica de la función $f(x) = sen\,x$. Determina la amplitud de cada una.

a) $f_1(x) = \frac{1}{2} sen\,x$, b) $f_2(x) = 2\,sen\,x$, c) $f_3(x) = -3\,sen\,x$, d) $f_4(x) = -\frac{1}{4}\,sen\,x$



EJERCICIO 44.2. Bosqueja las gráficas de las siguientes funciones usando distintos colores y compáralas con la gráfica de la función $g(x) = cos\ x$. Determina la amplitud de cada una.

a) $g_1(x) = \frac{1}{2} cos\ x$, b) $g_2(x) = 2\ cos\ x$, c) $g_3(x) = -3\ cos\ x$, d) $g_4(x) = -\frac{1}{4}\ cos\ x$



EJERCICIO 44.3. Dadas las funciones $f(x) = A\ sen\ x$ y $g(x) = A\ cos\ x$, con $A \neq 0$, ¿Cuál es la amplitud de ambas funciones?

Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 44.4. Con base en los ejercicios anteriores, contesta las siguientes preguntas.

a) Explica qué diferencia hay entre la gráfica de la función $f_1(x) = A\ sen\ x$ y la gráfica de la función $f(x) = sen\ x$, si:

$A > 1$

$0 < A < 1$

$A < 1$

b) Explica qué diferencia hay entre la gráfica de la función $g_1(x) = A\ cos\ x$ y la gráfica de la función $g(x) = cos\ x$, si:

$A > 1$

$0 < A < 1$

$A < 1$

SESIÓN 45 (2 HORAS)

Aprendizaje: Analiza e identifica los parámetros que aparecen en las funciones $f(x) = D + A\,sen(Bx + C)$ y $f(x) = D + Acos(Bx + C)$,

D desplazamiento vertical, A amplitud, B frecuencia y desfasamiento.

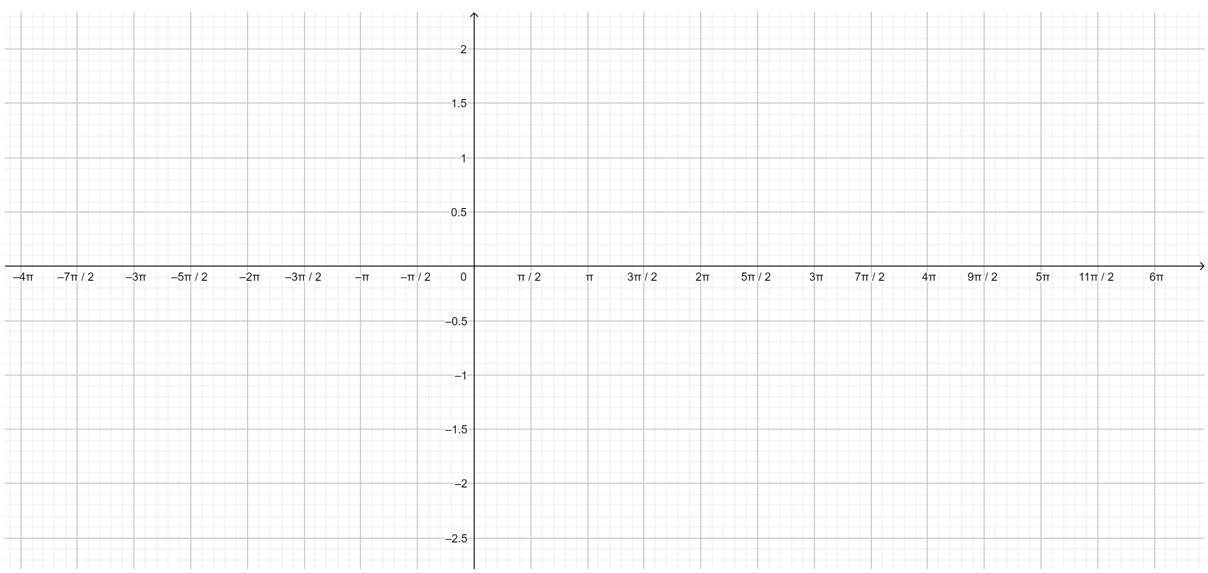
Tema: Gráfica las funciones $f(x) = D + A\,sen(Bx + C)$,$f(x) = D + A\,cos(Bx + C)$. Análisis de comportamiento de la gráfica respecto al parámetro A, B, C y D.

Trabajo en clase

EJERCICIO 45.1. Bosqueja las gráficas de las siguientes funciones usando distintos colores y compáralas con la gráfica de la función $f(x) = sen\,x$. Determina el periodo y la frecuencia de cada una.

a) $f_1(x) = sen\,2x$, b) $f_2(x) = sen(-2x)$, c) $f_3(x) = sen\left(\frac{1}{2}x\right)$

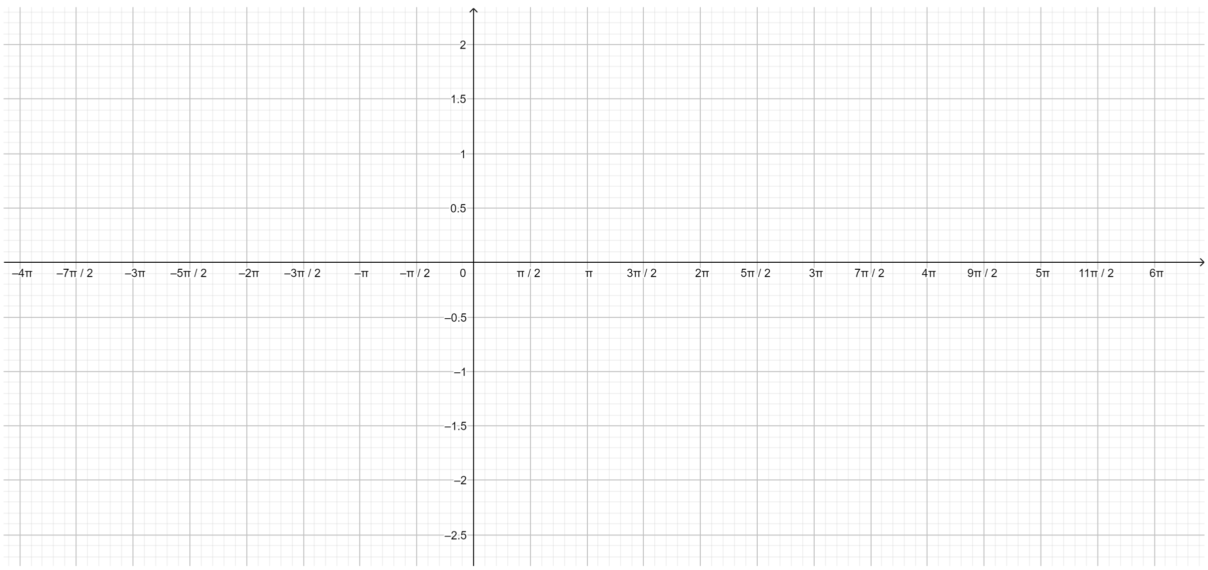
d) $f_4(x) = sen\left(-\frac{1}{2}x\right)$



EJERCICIO 45.2. Bosqueja las gráficas de las siguientes funciones usando distintos colores y compáralas con la gráfica de la función $g(x) = cos\ x$. Determina el periodo y la frecuencia de cada una.

a) $g_1(x) = cos\ 2x$, b) $g_2(x) = cos(-2x)$, c) $g_3(x) = cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

d) $g_4(x) = cos\ \left(-\frac{1}{2}x\right)$



EJERICICIO 45.3. Dadas las funciones $f(x) = A\ cos\ (Bx)$ y $g(x) = A\ cos\ (Bx)$, contesta lo siguiente. Nota: En Física, cuando la variable x representa el tiempo, B es la velocidad angular.

a) ¿Cuál es el periodo de cada función?

b) ¿Cuál es la frecuencia de cada función?

EJERCICIO 45.4. Con base en los ejercicios anteriores, contesta las siguientes preguntas.

a) Explica qué diferencia hay entre la gráfica de la función $f_1(x) = sen\ x$ y la gráfica de la función $f(x) = sen\ Bx$, si:

$B > 1$

$B < 1$

$0 < |B| < 1$

b) Explica qué diferencia hay entre la gráfica de la función $g_1(x) = cos\ Bx$ y la gráfica de la función $g(x) = cos\ x$, si:

$B > 1$

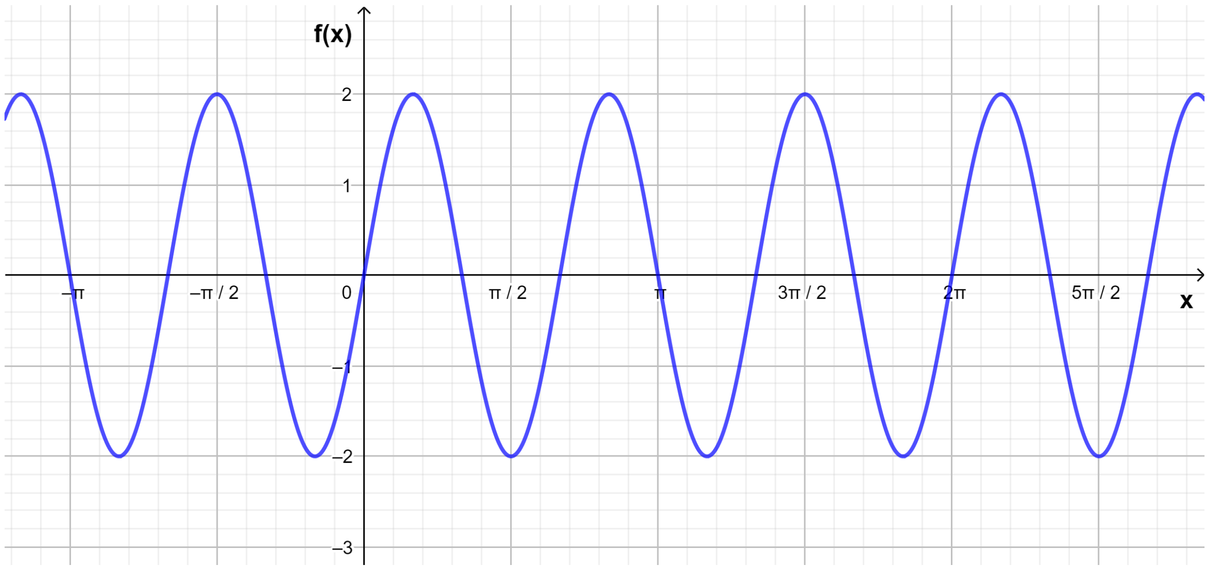
$B < 1$

$0 < |B| < 1$

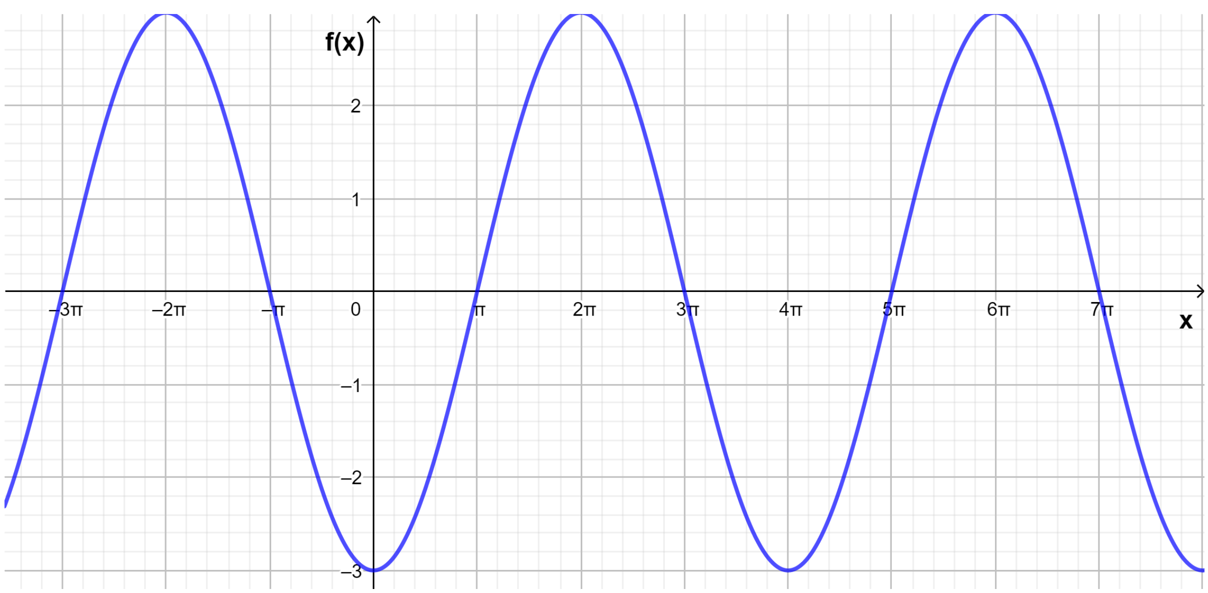
Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 45.5. Determina el valor de A y B para que ala gráfica de la función $f(x) = A\ sen(Bx)$ sea la que se muestra a continuación.



EJERCICIO 45.6. Determina el valor de A y B para la gráfica de la función $f(x) = A\ cos\ (Bx)$ sea la que se muestra a continuación.



SESIÓN 46 (2 HORAS)

Aprendizaje: Analiza e identifica los parámetros que aparecen en las funciones $f(x) = D + A\,sen(Bx + C)$ y $f(x) = D + Acos(Bx + C)$,

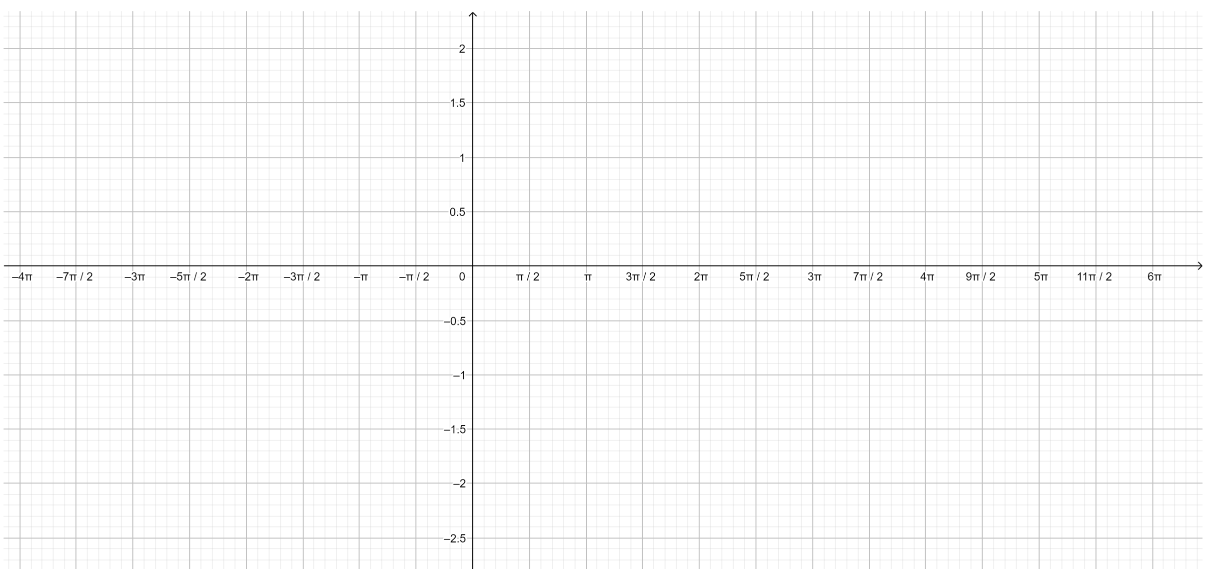
D desplazamiento vertical, A amplitud, B frecuencia y desfasamiento.

Tema: Gráfica las funciones $f(x) = D + A\,sen(Bx + C)$,$f(x) = D + A\,cos(Bx + C)$. Análisis de comportamiento de la gráfica respecto al parámetro A, B, C y D.

Trabajo en clase

EJERCICIO 46.1. Bosqueja las gráficas de las siguientes funciones usando distintos colores y compáralas con la gráfica de la función $f(x) = sen\,x$. Determina el desfasamiento.

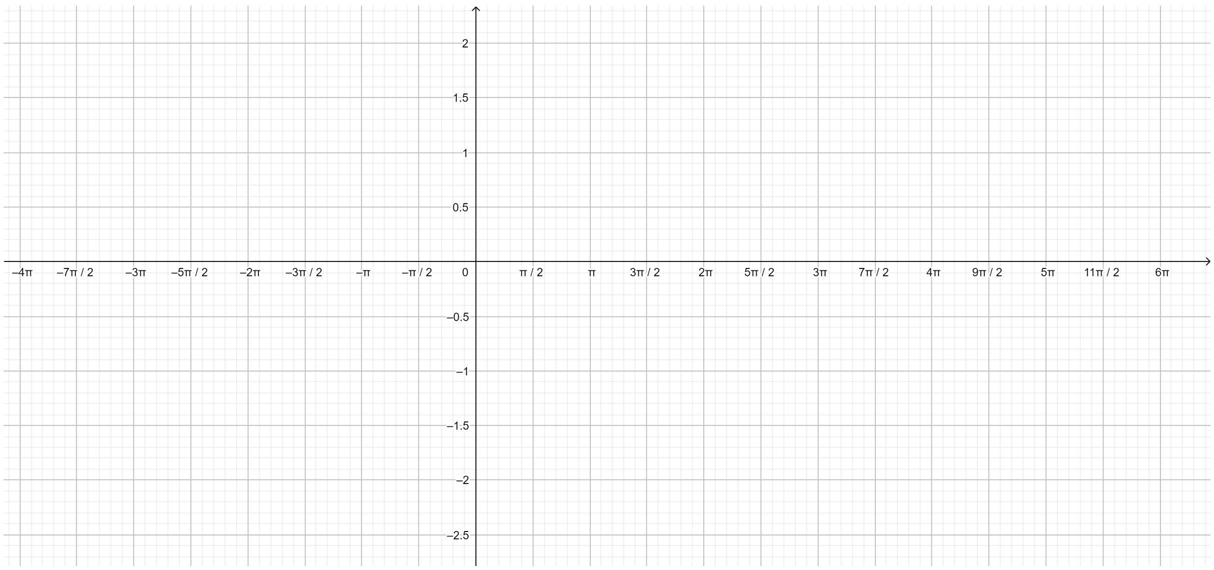
a) $f_1(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ b) $f_2(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$



EJERCICIO 46.2. Bosqueja las gráficas de las siguientes funciones usando distintos colores y compáralas con la gráfica de la función $g(x) = cos\ x$. Determina el periodo y la frecuencia de cada una.

a) $g_1(x)\ =\ cos\ \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

b) $g_2(x) =\ cos\ \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$



EJERCICIO 46.3. Con base en los ejercicios anteriores, contesta las siguientes preguntas.

a) Explica qué diferencia hay entre la gráfica de la función $f_1(x) = sen\,(x - C)$ y la gráfica de la función $f(x) = sen\,x$, si:

$C > 0$

$C < 0$

b) Explica qué diferencia hay entre la gráfica de la función $g_1(x) = cos\,(x - C)$ y la gráfica de la función $g(x) = cos\,x$, si:

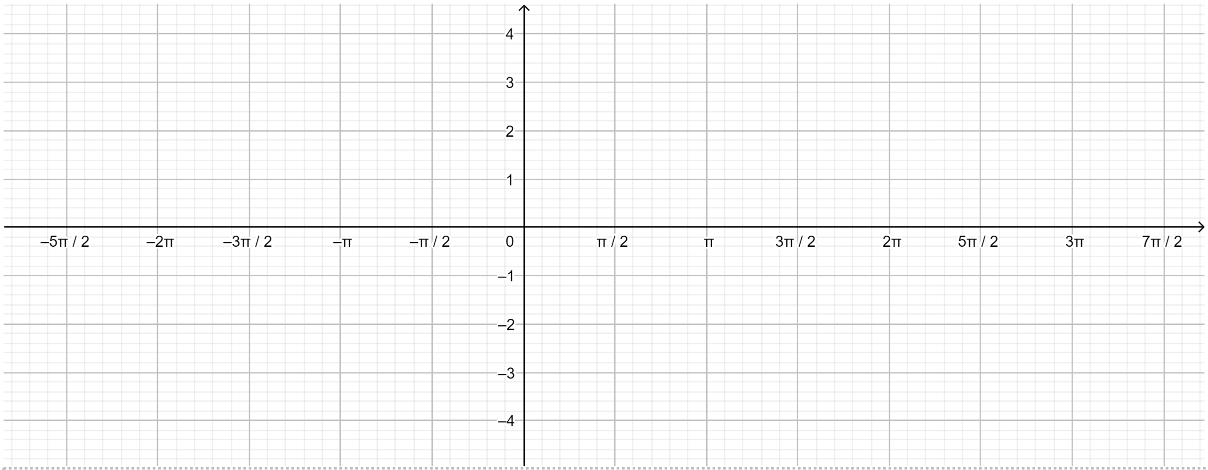
$C > 0$

$C < 0$

EJERCICIO 46.4. ¿Existe algún valor C para que la función $f(x) = sen\,x$ sea igual a $g(x) = \cos\,(x - C)$?

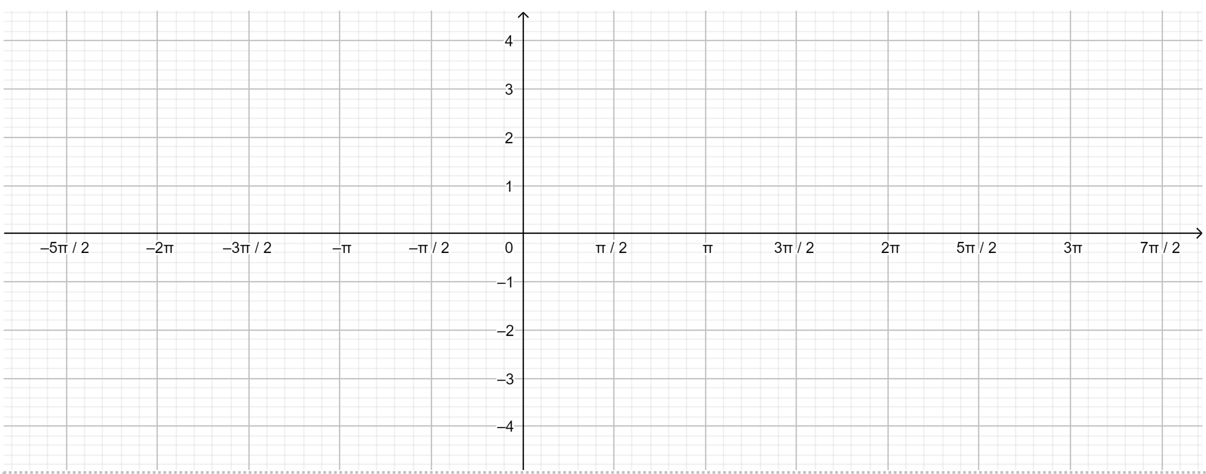
EJERCICIO 46.5. Bosqueja las gráficas de las siguientes funciones usando distintos colores y compáralas con la gráfica de la función $f(x) = sen\,x$.

a) $f_1(x) = 2 + \ sen\,x$ y b) $f_2(x) = \ -2 + sen\,x$



EJERCICIO 46.6. Bosqueja las gráficas de las siguientes funciones usando distintos colores y compáralas con la gráfica de la función $g(x) = cos\ x$. Determina el periodo y la frecuencia de cada una.

a) $g_1(x) = 2 + \ cos\ x$ b) $g_2(x) = \ -2 + cos\ x$



EJERCICIO 46.7. Con base en los ejercicios anteriores, contesta las siguientes preguntas.

a) Explica qué diferencia hay entre la gráfica de la función $f_1(x) = D + sen\,x$ y la gráfica de la función $f(x) = sen\,x$, si:

$D > 0$

$D < 0$

b) Explica qué diferencia hay entre la gráfica de la función $g_1(x) = D + cos\,x$ y la gráfica de la función $g(x) = cos\,x$, si:

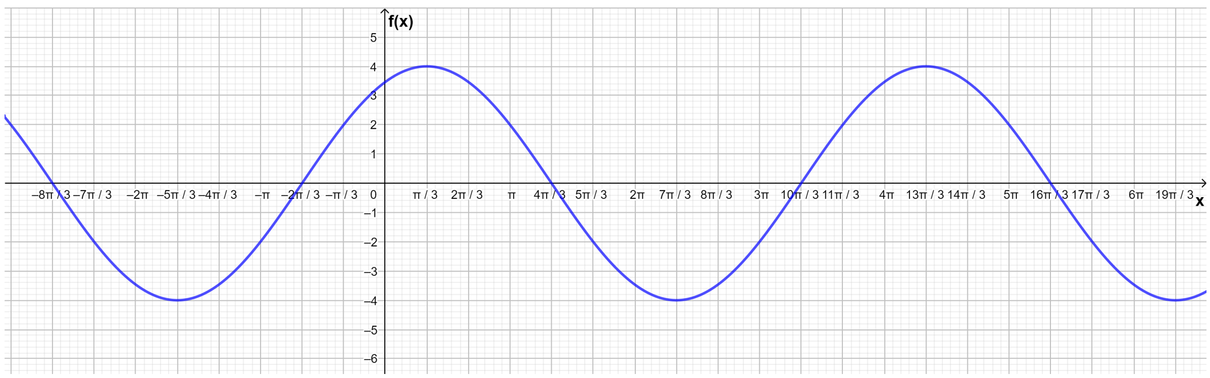
$D > 0$

$D < 0$

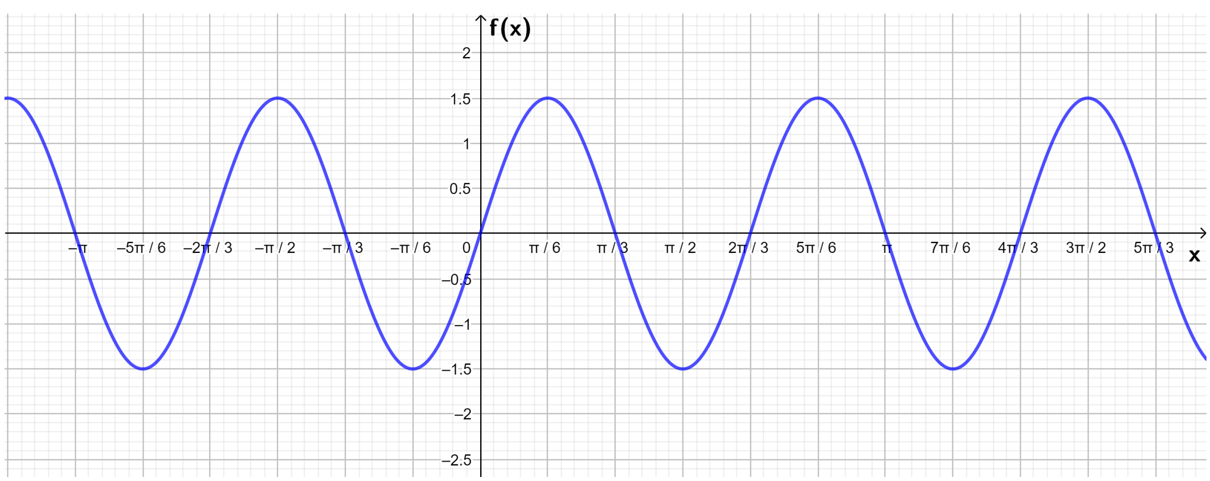
Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 46.8. Determina el valor de A, B y C para que la gráfica de la función $f(x) = A\,sen(Bx - C)$ sea la que se muestra a continuación y determina sus elementos.



EJERCICIO 46.9. Determina el valor de A, B y C para la gráfica de la función $f(x) = A\,cos\,(Bx - C)$ sea la que se muestra a continuación y determina sus elementos.



EJERCICIO 46.10. Determina el dominio, rango, amplitud, periodo, frecuencia, desfasamiento y desplazamiento vertical de las siguientes funciones.

a) $f_1(x) = 8 + \frac{4}{5} sen\left(2x - \frac{3}{4}\pi\right)$

b) $f_2(x) = 8 - 10sen\left(-4x - \frac{\pi}{3}\right)$

c) $f_3(x) = -10 + 5cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$

d) $f_4(x) = 20 - 15sen\left(-6x + \frac{2\pi}{3}\right)$

SESIÓN 47 (2 HORAS)

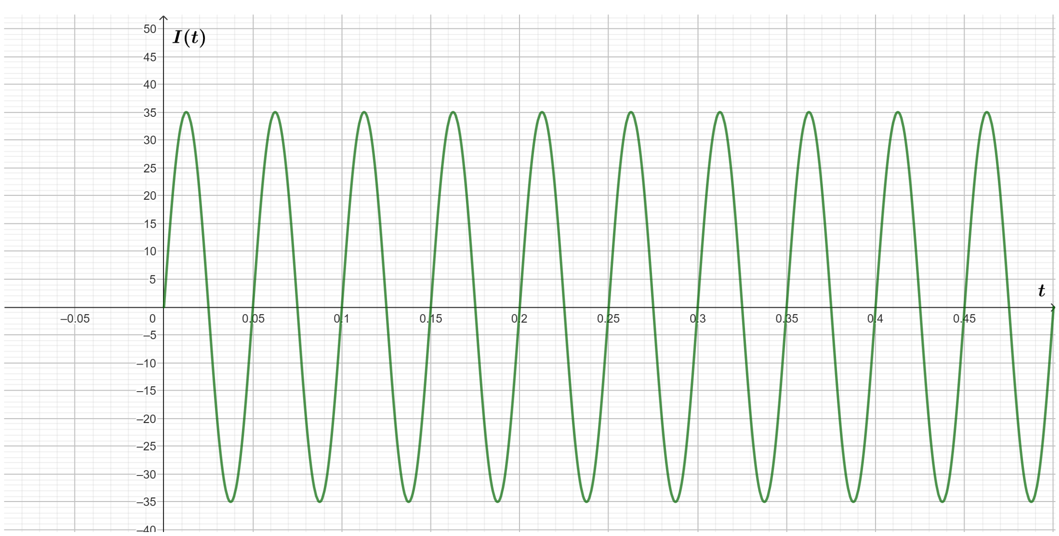
Aprendizaje: Utiliza funciones trigonométricas para representar fenómenos de variación periódica.

Tema: Problemas de aplicación.

Trabajo en clase

EJERCICIO 47.1. La presión sanguínea aumenta en cada latido del corazón y entre cada uno de los latidos donde el corazón descansa la presión sanguínea disminuye. Si la presión sanguínea de una persona se modela por medio de la función $p(t) = 115 + 25sen(160\pi t)$, donde $p(t)$ es la presión (medida en milímetros de Mercurio) en el tiempo t (medido en minutos). ¿Cuáles son los valores máximos y mínimos de la presión sanguínea?

EJERCICIO 47.2. En la gráfica siguiente se muestra el comportamiento de la corriente eléctrica I, medida en amperes, producida por un generador de corriente alterna.



Determina la función de la forma $I(t) = A\ sen\ (Bt)$ que describa la corriente eléctrica, donde t es el tiempo en segundos.

EJERCICIO 47.3. La Rueda India (rueda de la fortuna) de *Six Flags* México, tiene aproximadamente 30 metros de diámetro y se encuentra a un metro del suelo mediante unos soportes. La rueda, tiene 20 canastillas que describen un movimiento circular uniforme.

a) Determina una función que describa el movimiento de la altura con respecto al suelo de la canastilla que está más abajo cuando la rueda comienza a girar dando una vuelta cada dos minutos.

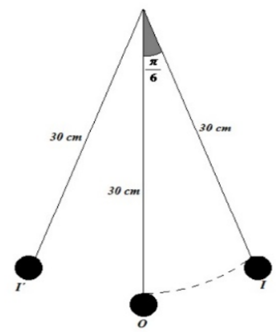
b) ¿Cuál es la altura mínima y máxima que puede alcanzar la canastilla?

c) ¿A qué altura se encuentra la canastilla después de un minuto y medio de que la rueda empezó a girar?

Trabajo extraclase

Resuelve los siguientes problemas.

EJERCICIO 47.4. Un péndulo simple de treinta centímetros de longitud empieza a oscilar después de que se lleva hacia la derecha de la posición de equilibrio **O** a la posición de inicio **I**, formándose un ángulo de $\frac{\pi}{6}$. Si se registraron treinta oscilaciones en cinco segundos.



a) Determina una función que permita determinar la posición del péndulo después de un tiempo t medido en segundos, desde que inicia el movimiento. Puedes proponer una función de la forma $p(t) = A\cos(Bt)$.

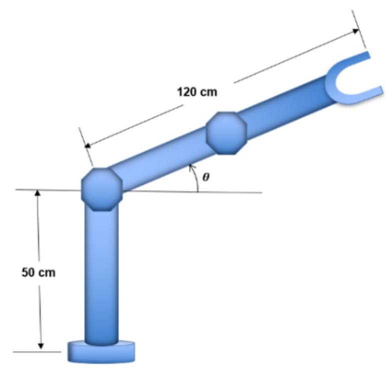
b) ¿Cuál es la elongación del péndulo a los $\frac{7}{48}$ segundos?

SESIÓN 48 (1 HORA)

Aprendizaje: Utiliza funciones trigonométricas para representar fenómenos de variación periódica.

Trabajo en clase

EJERCICIO 46.1. La articulación de un hombro robótico está motorizada de modo que el ángulo θ aumenta a una rapidez constante de $\frac{12}{\pi}$ radianes por segundo desde un $\theta = 0$. Supongamos que la articulación del codo se mantiene siempre recta y que el brazo tiene una longitud constante de 150 cm, como se muestra en la figura. Determina la altura que alcanza el brazo después de un tiempo t medio en segundos.



EJERCICIO 46.2. Una masa está suspendida de un resorte, el resorte se comprime 5 centímetros y luego se libera. Si la masa regresa al punto inicial después de 3 segundos. Determina la función que describe el movimiento de la masa, suponiendo movimiento armónico simple.

EJERCICIO 46.2. Escribe una reflexión de lo que aprendiste en esta unidad.

AUTOEVALUACIÓN

Accede a través del código QR de la izquierda para abrir un cuestionario de autoevaluación. En el espacio siguiente escribe el procedimiento realizado para resolver cada reactivo, o bien, anota el argumento para tu respuesta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barnett, R., (2000). *Álgebra* (4ª Ed.). México: McGraw Hill.

Buendía, G., Ordoñez, A. (2009). El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. *Relime*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 12 (1), 7-28.

CCH (2006). *Orientación y Sentido de las Áreas del Plan de Estudios Actualizado*. UNAM.

ENCCH (2016). *Programas de Estudio. Área Matemáticas. Matemáticas I-IV*. UNAM.

Gómez, C. (2016). *Matemáticas IV, un primer encuentro con las funciones y sus aplicaciones*. Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Oriente.

Molina, A., Gómez, G. & Ramírez, C. (2015). Fenómenos periódicos relacionados con el tiempo. *Portal académico*. UNAM.

Peñas, J. (2023). *El radian*. Educaplus.org

Polya, G. (1985). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Stewart, J., Redlin, L., Watson, S. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*. (6ª ed.). CENGAGE Learning.

Sullivan, M. (2014). *Álgebra y Trigonometría* (9ª ed.). Pearson Educación de México.

Swokowski, E. & Cole, J. (2018). *Precálculo*. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* (13ª Ed.). CENGAGE Learning.

Zill, D. & Dewar, J. (2012). *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*. McGraw Hill.