UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

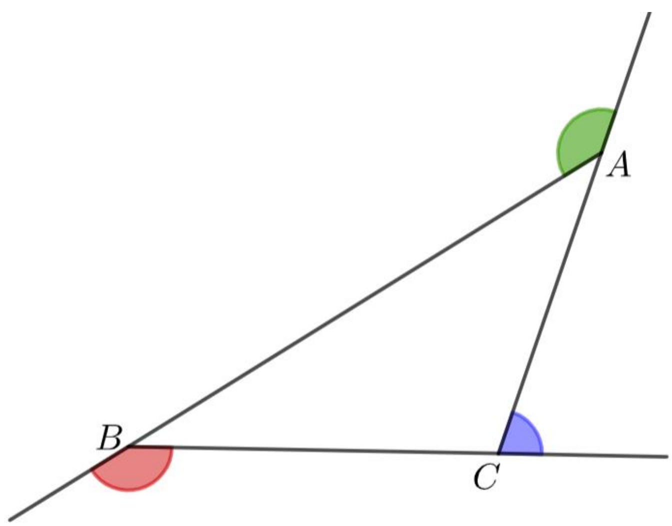
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

PLANTEL VALLLEJO

Cuaderno de trabajo

Matemáticas II

con un enfoque híbrido



ELABORADO POR:

Maritza Vázquez Hernández

Wilbert de Jesús López

Concepción Julieta Hernández Hidalgo

Daniel Muñoz Ramos

Alfonso Ortiz Gervasio

Proyecto INFOCAB PB101322

Guía para su uso

El presente material ha sido elaborado por profesores del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) plantel Vallejo, considerando un enfoque híbrido.

Un ambiente híbrido de aprendizaje es aquel que mezcla actividades en el aula (presencial) y algunas a distancia, procurando lograr lo que citan Mejía et al. (2017)[1], que el estudiante interactúe con el contenido presentado digitalmente, que le permita estudiar, investigar, formular hipótesis, analizar, reflexionar y plantear dudas antes de ir al aula, que ahora se convertirá en un espacio activo, cooperativo y colaborativo para los debates.

La propuesta de este cuaderno de trabajo es retomar lo que hicimos a distancia y unirlo con lo que hacíamos de manera presencial. Para ello hemos seleccionado materiales de apoyo (videos, sitios, applets) que permitan lograr los aprendizajes propuestos.

Como se observará solo se abordan los aprendizajes esenciales que el Consejo Académico del Bachillerato (CAB) de la UNAM propuso para la asignatura de Matemáticas II con base en el programa de estudios del CCH, esto con la finalidad de que como docente puedan adaptar las estrategias que proponemos a sus programas operativos, es decir, no se trata de un libro de texto, sino de un apoyo que puedan trabajar para complementar sus estrategias.

Cada unidad cuenta con diferentes ejemplos y actividades que van incrementando el nivel de complejidad, se proponen algunas preguntas detonadoras que permitirán la reflexión por parte de los estudiantes y otras actividades que buscan evaluarlos de manera formativa. Al finalizar cada unidad se presenta una serie de ejercicios a manera de evaluación sumativa y se agrega una propuesta de seguimiento individual, para identificar los avances logrados de cada estudiante.

[1] Mejía Gallegos, César, Michalón Dueñas, David, Michalón Acosta, Raúl, López Fernández, Raúl, Palmero Urquiza, Diana, & Sánchez Gálvez, Samuel. (2017). Espacios de aprendizaje híbridos. Hacia una educación del futuro en la Universidad de Guayaquil. *MediSur*, *15*(3), 350-355. Recuperado en 11 de junio de 2022, de http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1727-897X2017000300010&lng=es&tlng=es.

UNIDAD 1
Ecuaciones cuadráticas

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Propósito de la unidad:

Al finalizar, el alumno resolverá ecuaciones cuadráticas mediante diversos métodos de solución. Modelará problemas que conduzcan a este tipo de ecuaciones. Establecerá la relación que existe entre el grado de la ecuación y el número de soluciones.

Aprendizajes

- *Resuelve ecuaciones cuadráticas mediante los diferentes métodos de solución. Transformando la ecuación cuadrática a la forma adecuada para su resolución por un método específico.*
- *Generaliza el método de completar el trinomio cuadrado perfecto y obtiene la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.*
- *Identifica los parámetros "a, b, c" en una ecuación cuadrática y los sustituye correctamente en la fórmula general.*
- *Identifica la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática, a partir de sus coeficientes.*
- *Establece el modelo matemático del problema y aplica el método de resolución conveniente.*

Antes de comenzar con el contenido de la unidad, te invitamos a revisar el siguiente video.

SCAN ME

Ecuaciones

https://www.youtube.com/watch?v=6AOaT2DOoHg

Ejercicio 1.1 Responde a las siguientes preguntas y en el aula comenta con tus compañeros.

a) ¿Qué entiendes por ecuación cuadrática?

____

b) ¿Conoces la forma en cómo se resuelven?

____

c) ¿Existe más de una forma de escribir las ecuaciones cuadráticas?

____

1.1 Formas y métodos para resolver ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones cuadráticas en una incógnita se escriben en su forma general como $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, con $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ números reales, $\boldsymbol{a} \neq 0$. Por lo que, para que se llamen ecuaciones cuadráticas bastaría con tener el término cuadrático.

Ejercicio 1.2 Investiga y escribe la clasificación de las ecuaciones cuadráticas. Incluye la referencia bibliográfica de donde obtuviste la información en formato APA. En el aula con apoyo del docente y en plenaria elaboren un cuadro sinóptico.

Las ecuaciones cuadráticas se pueden escribir de distintas formas, entonces ¿los métodos para resolverlos también son variados?

Ejercicio 1.3 Determina el valor de las incógnitas en cada una de las siguientes ecuaciones. Anota tus procedimientos y compáralos con los de tus compañeros.

a) $3m^2 = 5$
b) $2x^2 + x = 0$
c) $q^2 + 5q + 6 = 0$

Ejercicio 1.4 Responde a las siguientes preguntas. Comenten en plenaria sus respuestas.

a) ¿La forma en que resolviste cada una de las ecuaciones anteriores fue la misma?

____

b) ¿Por qué?

____

1.1.1 Ecuaciones cuadráticas incompletas

Los métodos para resolver las ecuaciones cuadráticas incompletas pueden ser menos complicados. A continuación, los revisaremos.

Formas **incompletas puras**	$ax^2 = 0$ o $ax^2 + c = 0$

Basta con hacer un despeje de la incógnita y así se calcula el valor de la incógnita.

Despejes	$x = \pm\sqrt{\frac{0}{a}} = 0$ o $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Para la siguiente forma es necesario retomar **la regla del producto nulo**

Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$.

Forma **incompleta mixta**	$ax^2 + bx = 0$
La incógnita es común en ambos términos por lo que se puede hacer una factorización de ella y así obtener las soluciones.	$x(ax + b) = 0$
Por regla del producto nulo una de las soluciones es	$x_1 = 0$

Ejercicio 1.5 Realiza el despeje de la incógnita en el segundo factor de la ecuación anterior para conocer la otra solución

$$ax + b = 0$$

1.1.2 Ecuaciones cuadráticas completas

En el caso de ecuaciones completas, es decir, aquellas que tienen los tres términos, existen diferentes métodos para obtener las soluciones.

$$\boxed{\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}}$$

Término cuadrático Término lineal Término independiente

Métodos para resolver ecuaciones cuadráticas completas		
Factorización	Completar cuadrados	Fórmula general

El uso de cada uno de ellos puede o no ser más sencillo, dependiendo del valor de los coeficientes, sobre todo del término cuadrático, es decir “$\boldsymbol{a}$”.

Recordemos cómo se multiplican dos binomios con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.

$(\boldsymbol{n}-\mathbf{2})(\boldsymbol{n}+\mathbf{5})=$	
En este caso se aplica la propiedad distributiva. Desarrollando la multiplicación	$(n-2)(n+5)=$ $n(n)+n(5)-2(n)-2(5)=$ $n^2+5n-2n-10=$
Si observas, hay dos términos semejantes (aquellos que tienen a la incógnita con exponente 1), por lo que se pueden sumar o restar entre ellos, dando como resultado	$n^2+n(5-2)-10=$ $n^2+3n-10=$
Reescribiendo	$(n-2)(n+5)=n^2+3n-10$
Al multiplicar dos binomios lineales se obtiene una expresión cuadrática, esto es la base del método de factorización, ya que la igualdad se cumple también si se escribe así	$n^2+3n-10=(n-2)(n+5)$

Dicho de otra forma, **algunas ecuaciones cuadráticas se pueden expresar como la multiplicación de dos binomios**.

1.1.2.1 Método de factorización

Para explicar este método comenzaremos con el siguiente ejemplo

Ejemplo 2.

$n^2 + 3n - 10 = (n-2)(n+5)$	
El coeficiente del término lineal de la ecuación cuadrática es la suma de los términos independientes de cada binomio, en el ejemplo anterior.	$-2 + 5 = 3$ $n^2 + 3n - 10 = (n-2)(n+5)$
Por otro lado, el término independiente de la expresión cuadrática es el producto entre los términos independientes de cada binomio.	$(-2)(5) = -10$ $n^2 + 3n - 10 = (n-2)(n+5)$

Ejemplo 3.

Retomemos la ecuación completa que resolvieron al inicio y aplicaremos el método de factorización,

$$q^2 + 5q + 6 = 0$$

Debemos encontrar

1. Dos números que sumados den como resultado el coeficiente del término lineal. $(\mathbf{3}\ ) + (\ \mathbf{2}\ ) = \mathbf{5}$ $q^2 + \mathbf{5}q + 6 = 0$	2. Que los mismos dos números al multiplicarse entre sí, incluyendo sus signos, den como resultado el término independiente. $(3\ )(\ 2\ ) = \ 6$ $q^2 + 5q + \mathbf{6} = 0$

NOTA: Cuando el valor de un coeficiente del término cuadrático o lineal es 1, no se escribe en la ecuación.

Con lo anterior, es posible reescribir a la ecuación de la siguiente forma

$$q^2 + 5q + 6 = (q+3)(q+2) = 0$$

Una vez que se puede expresar la ecuación cuadrática como la multiplicación de dos binomios, entonces se pueden encontrar sus soluciones por la regla del factor nulo.

$$(q+3)(q+2)=0$$

Por lo que,

$$q+2=0 \qquad\qquad q+3=0$$

$$q_1=-2 \qquad\qquad q_2=-3$$

¿Cuál será la diferencia del método de factorización para $a \neq 1$?

Ejercicio 1.6 Revisa el siguiente recurso y escribe los pasos para resolver una ecuación cuadrática por factorización cuando $a \neq 1$. Con su profesor y en plenaria comenten lo escrito por cada uno.

SCAN ME

Método de factorización cuando $a \neq 1$.

https://www.youtube.com/watch?v=kDBmSAtwl2A

Ejercicio 1.7 Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas completas por el método de factorización:

a) $x^2+5x+4=0$
b) $r^2-13r+42=0$
c) $-t^2+3t+40=0$
d) $3y^2+11y-4=0$

En las diferentes ecuaciones que se han resuelto, las soluciones han sido números racionales, pero ¿qué sucede si al intentar resolver por el método de factorización no se encuentran valores que cumplan las condiciones? En esos casos las soluciones son números irracionales o complejos, y no es tan sencillo encontrarlos empleando este método, entonces es cuando se debe ocupar un método diferente. Antes de ocuparnos de estos métodos, primero observemos las siguientes consideraciones previas.

1.2 Binomio elevado al cuadrado

Ejemplo 4.

Cuando un binomio está elevado al cuadrado en realidad se puede reescribir como la multiplicación del mismo binomio dos veces.	$(z-6)^2 = (z-6)(z-6)$
Aplicando la propiedad distributiva y simplificando	$(z-6)(z-6) =$ $z(z) + z(-6) + (-6)(z) + (-6)(-6)$ $z^2 + (-6-6)(z) + (-6)^2 =$ $z^2 + \mathbf{2}(-6)z + (-6)^2 =$ $(z-6)^2 = z^2 + \mathbf{2}(-6)z + (-6)^2$
Al desarrollar un binomio elevado al cuadrado se obtiene	$(z-6)^2 = z^2 - 12z + 36$

Existen dos cosas que debes identificar que se cumplen al desarrollar cualquier binomio elevado al cuadrado. Esto es válido, siempre que el coeficiente principal del binomio sea 1.

El coeficiente del término lineal de la ecuación cuadrática **es el doble del término independiente del binomio elevado al cuadrado.**	$-6-6 = 2(-6) = -12$ $z^2 - 12z + 36 =$ $\downarrow$ $z^2 + 2(-6)z + (-6)^2$
El término independiente del trinomio cuadrado perfecto es el cuadrado del término independiente del binomio elevado al cuadrado.	$(-6)(-6) = (-6)^2 = 36$ $z^2 - 12z + 36 =$ $\searrow$ $z^2 + 2(-6)z + (-6)^2$

Al desarrollar un binomio elevado al cuadrado se obtiene un trinomio cuadrado perfecto, es decir, la multiplicación un mismo binomio dos veces es igual a la suma de tres términos: uno cuadrático, uno lineal y uno independiente.

Por lo que es válido también

$$\boldsymbol{z^2 - 12z + 36 = (z - 6)^2}$$

Ejercicio 1.8 Revisa la demostración geométrica de un binomio elevado al cuadrado de este material y anótala. Comenta en clase con tus compañeros la diferencia de esta demostración con el ejemplo 4.

SCAN ME

Demostración geométrica de binomio elevado al cuadrado

https://www.geogebra.org/m/q3jyzcys

Para hacer uso del método de completar el trinomio cuadrado perfecto también utilizaremos la **propiedad del elemento neutro de la suma,** que dice, “para cualquier número al que se le suma 0, el resultado equivale al mismo número”. Por ejemplo,

$$5 + 0 = 5$$

Pero **ese elemento neutro se puede reescribir como la suma de cualquier valor con su inverso aditivo**, por ejemplo

$$12 + (-12) = 0$$

Si reunimos estas dos propiedades, obtenemos

$$5 + (12 + (-12)) = 5 + 0 = 5$$

1.2.1 Método de completar el trinomio cuadrado perfecto

En la factorización por se busca reescribir la expresión cuadrática como el producto de dos binomios diferentes. En el caso de este método se busca obtener dos binomios iguales, que dan como resultado un binomio elevado al cuadrado.

Conociendo como desarrollar un binomio elevado al cuadrado y las propiedades del elemento neutro y el inverso aditivo podremos utilizar el método de completar el trinomio cuadrado perfecto para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

En este método se "obliga" a que una parte de la ecuación cuadrática esté reescrita como un binomio elevado al cuadrado. Veamos el siguiente ejemplo cuando $\boldsymbol{a = 1}$ (recuerda que a, es el coeficiente del término cuadrático y la incógnita puede ser representada con cualquier letra).

Ejemplo 5.

$$m^2 + 5m - 1 = 0$$

Lo primero que debes saber es que en este método se trabaja con los términos que incluyen a la incógnita, es decir, el término cuadrático y el término lineal. En este caso, el coeficiente del término cuadrático es $a = 1$ y el coeficiente del término lineal $b = 5$.

Para determinar el valor que "obliga" a que se forme un cuadrado perfecto con los términos que involucran a la incógnita se utiliza el desarrollo de un binomio elevado al cuadrado.

$\boldsymbol{m^2+5m-1=0}$	
Para completar el trinomio cuadrado perfecto, es necesario dividir entre dos el coeficiente del término lineal.	$5=\mathbf{2}(término\ independiente)$ $término\ independiente=\frac{5}{\mathbf{2}}$
Este valor se elevará al cuadrado y será el término independiente del trinomio.	$(término\ independiente)^2=\left(\frac{5}{\mathbf{2}}\right)^2$

Conociendo el valor faltante, se agregará a la ecuación cuadrática que estamos trabajando, pero utilizando la propiedad del elemento neutro para que se siga cumpliendo la igualdad.

$$\underbrace{\boldsymbol{m^2+5m}+\left(\frac{5}{\mathbf{2}}\right)^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}-\left(\frac{5}{\mathbf{2}}\right)^2\ \boldsymbol{-1=0}$$

Siempre el trinomio cuadrado perfecto se creará con el término que se agregó sumando, el otro valor se operará con su similar, como se muestra a continuación	$\boldsymbol{-\left(\frac{5}{2}\right)^2-1=-\frac{29}{4}}$
Así, la ecuación se puede reescribir de la forma	$\boldsymbol{m^2+5m}+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{29}{4}=0$
El trinomio cuadrado perfecto se reescribirá como un binomio elevado al cuadrado	$\boldsymbol{m^2+5m}+\left(\frac{5}{\mathbf{2}}\right)^2-\frac{29}{4}=0$ $\left(\boldsymbol{m}+\frac{\mathbf{5}}{2}\right)^2-\frac{29}{4}=0$

Como ya solo está escrita una vez la incógnita, se despeja de la ecuación para conocer las soluciones de la ecuación cuadrática.	$\left(\boldsymbol{m}+\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}=\frac{29}{4}$ $\sqrt{\left(\boldsymbol{m}+\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}}=\pm\sqrt{\frac{29}{4}}$ $\boldsymbol{m}=-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\pm\frac{\sqrt{\mathbf{29}}}{\mathbf{2}}$ $\boldsymbol{m_1}=\frac{\mathbf{-5-\sqrt{29}}}{\mathbf{2}}$ $\quad\boldsymbol{m_2}=\frac{\mathbf{-5+\sqrt{29}}}{\mathbf{2}}$

Como se observa en el ejemplo, este método permite conocer soluciones que pueden ser irracionales, que no son tan fácil de obtener por el método de factorización.

Ahora consideremos un **ejemplo** en el que el coeficiente del término cuadrático "$\boldsymbol{a}$" **sea diferente de uno.**

Ejemplo 6.

$3r^2+10r-5=0$	
En este caso, **antes** de completar el trinomio cuadrado perfecto se debe **factorizar el coeficiente del término cuadrático** "$a=3$", usando los términos cuadrático y lineal	$3\left(r^2+\frac{10}{3}r\right)-5=0$
Se considerará como coeficiente del término lineal $b=\frac{10}{3}$, que es **el valor que quedó dentro de la factorización.**	$\frac{10}{3}=2(término\ independiente)$ $término\ independiente=\frac{\frac{10}{3}}{2}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$
Este valor se elevará al cuadrado.	$(término\ independiente)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2$
Utilizando la propiedad del elemento neutro y del inverso aditivo, se completa	$3\left(\underbrace{r^2+\frac{10}{3}r+\left(\frac{5}{3}\right)^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}-\left(\frac{5}{3}\right)^2\right)-5=0$

el trinomio cuadrado perfecto en la ecuación dentro del paréntesis.	
Para operar el valor que no es parte del trinomio cuadrado perfecto, con el que está fuera de la factorización, **primero debemos sacarlo del paréntesis, multiplicando por el valor externo.**	$3\left(\underbrace{r^2+\frac{10}{3}r+\left(\frac{5}{3}\right)^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}\right)-3\left(\frac{5}{3}\right)^2-5=0$
Ahora sí, se opera entre lo que está fuera del paréntesis, y se reescribe el trinomio como un binomio elevado al cuadrado.	$3\left(r^2+\frac{10}{3}r+\left(\frac{5}{3}\right)^2\right)-\frac{40}{3}=0$ $3\left(r+\frac{5}{3}\right)^2-\frac{40}{3}=0$
Para conocer el valor de la incógnita se despeja de la ecuación anterior.	$3\left(r+\frac{5}{3}\right)^2=\frac{40}{3}$ $\left(r+\frac{5}{3}\right)^2=\frac{\frac{40}{3}}{3}$ $\sqrt{\left(r+\frac{5}{3}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{40}{9}}$ $r=-\frac{5}{3}\pm\frac{2\sqrt{10}}{3}$ $r_1=\frac{-5-2\sqrt{10}}{3}$ $\quad r_2=\frac{-5+2\sqrt{10}}{3}$

Ejercicio 1.9 Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas completas por el método de completar trinomio cuadrado perfecto:

a) $-x^2+5x+4=0$

b) $\frac{1}{3}n^2+4n-7=0$

c) $h^2+3h+40=0$

d) $2y^2+8y-4=0$

1.3 Fórmula general

La fórmula general, es útil para resolver ecuaciones cuadráticas, y es probablemente una de las mejores cinco fórmulas en matemáticas.

Ejercicio 1.10 Revisa el siguiente material y anota los pasos para obtener la fórmula general. Comenta con tus compañeros lo que redactó cada uno.

SCAN ME

Obtención de la fórmula general

https://e1.portalacademico.cch.unam.mx/alumno/matematicas2/unidad1/formulageneral/generalizacion

Si tienes una ecuación cuadrática en su forma general $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$, con $\boldsymbol{a \neq 0}$ la fórmula general te servirá para encontrar las raíces de esta, es decir, los valores de $\boldsymbol{x}$ que resuelven esta ecuación.

$$\boldsymbol{x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Lo primero que debes hacer es, identificar los valores de "a, b y c", que son los coeficientes. Recuerda verificar que la ecuación, tenga la forma $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$

Revisa el siguiente recurso y toma las notas necesarias para aplicar correctamente la fórmula general.

SCAN ME

Fórmula general o cuadrática, ¿cómo la uso?

https://youtu.be/nAZygjXSZEE

Ejemplo 7.

<table>
<tr><td colspan="6">$$\boldsymbol{x^2 + 4x - 21 = 0}$$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{a}$</td><td colspan="2">Es el coeficiente de $"\boldsymbol{x^2}"$</td><td colspan="2">En nuestro ejemplo $\boldsymbol{a = 1}$</td><td rowspan="3">$\boldsymbol{a}$ no puede tener el valor “0”. Esto es indispensable para que sea una ecuación cuadrática.</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{b}$</td><td colspan="2">Es el coeficiente de $"\boldsymbol{x}"$</td><td colspan="2">En nuestro ejemplo $\boldsymbol{b = 4}$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{c}$</td><td colspan="2">Es la constante, o término sin $"\boldsymbol{x}"$</td><td colspan="2">En nuestro ejemplo $\boldsymbol{c = -21}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Sustituir en $$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$</td><td colspan="3">$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-21)}}{2(1)}$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Se realizan las operaciones correspondientes</td><td colspan="3">$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2}$$ $$x = \frac{-4 \pm 10}{2}$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Obtener las raíces o soluciones:</td><td colspan="3">$$x_1 = \frac{-4 + 10}{2} = \frac{6}{2} = 3$$ $$x_2 = \frac{-4 - 10}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$</td></tr>
<tr><td colspan="6">Comprobar sustituyendo con el resultado de cada una de las raíces:</td></tr>
<tr><td colspan="3">$$x_1 = 3$$ $$x^2 + 4x - 21 = 0$$ $$(3)^2 + 4(3) - 21 = 0$$ $$9 + 12 - 21 = 0$$ $$21 - 21 = 0$$ $$0 = 0$$</td><td colspan="3">$$x_2 = -7$$ $$x^2 + 4x - 21 = 0$$ $$(-7)^2 + 4(-7) - 21 = 0$$ $$49 - 28 - 21 = 0$$ $$49 - 49 = 0$$ $$0 = 0$$</td></tr>
</table>

Ejercicio 1.11 Determina el valor de las incógnitas en las siguientes ecuaciones utilizando la fórmula general.

a) $-5x + x^2 + 6 = 0$

b) $7r^2 + 21\mathrm{r} = 28$

c) $-5p + 1 = -6p^2$

1.3.1 El discriminante en la fórmula general y la naturaleza de las raíces.

¿Qué es el discriminante?

El **discriminante** es la parte de la fórmula cuadrática que está dentro del radical.

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

El discriminante puede ser positivo, cero o negativo y esto determina cuántas soluciones (o raíces) existen para la ecuación cuadrática dada.

Un discriminante **positivo** $\boldsymbol{b^2 - 4ac > 0}$	**La ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales distintas.**
Un discriminante igual a **cero** $\boldsymbol{b^2 - 4ac = 0}$	**Indica que la ecuación cuadrática tiene una solución real doble.**
Un discriminante **negativo** $\boldsymbol{b^2 - 4ac < 0}$	**Indica que ninguna de las soluciones son números reales.**

Ejemplo 8.

$\boldsymbol{x^2 - x - 12 = 0}$	
Sustituimos en el determinante	$a = 1, \quad b = -1, \quad c = -12$ $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ $(-1)^2 - 4(1)(-12) = 1 + 48 = 49$
El tipo de soluciones será	$\boldsymbol{b^2 - 4ac > 0}$ **Dos soluciones reales y diferentes**

Ejemplo 9.

$\boldsymbol{3x^2 - 6x + 3 = 0}$	
Sustituimos en el determinante	$a = 3, \quad b = -6, \quad c = 3$ $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ $(-6)^2 - 4(3)(3) = 36 - 36 = 0$
El tipo de soluciones será	$\boldsymbol{b^2 - 4ac = 0}$ **Una solución real doble**

Ejemplo 10.

$\boldsymbol{3x^2 + 2x + 1 = 0}$	
Sustituimos en el determinante	$a = 3, \quad b = 2, \quad c = 1$ $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ $(2)^2 - 4(3)(1) = 4 - 12 = -8$
El tipo de soluciones será	$\boldsymbol{b^2 - 4ac < 0}$ **Ninguna de las soluciones es real**

Ejercicio 1.12 Indica el tipo de soluciones que tiene cada una de las siguientes ecuaciones analizando su discriminante.

a) $-x^2 + 4x + 3 = 0$
b) $2n^2 + 2 = 4n$
c) $m^2 - 8m = -34$

1.4 Modelos matemáticos de ecuaciones cuadráticas.

¿Sabes cómo plantear ecuaciones a partir del texto de un problema? Si bien no existe una “fórmula mágica” para hacerlo, sí hay estrategias que facilitan este proceso. Te invitamos a revisar el siguiente recurso para que conozcas más al respecto y comenten en plenaria lo que propone el video.

SCAN ME

Pasos para resolver un problema

https://www.glc.us.es/~jalonso/vestigium/el-metodo-de-polya-para-resolver-problemas/

Las ecuaciones cuadráticas nos permiten resolver diversas situaciones como las que vienen a continuación.

Ejemplo 11.

Se tiene **un terreno rectangular** cuyas medidas son: largo 15 metros y ancho 8 metros. **Calcula su perímetro y su área.**

Sugerencia: Sigue los pasos que se muestran en la solución.

1. Realiza un dibujo que representa el terreno.	 $8m$ $15m$
2. ¿Cuál es la fórmula para calcular el perímetro de un rectángulo?	$P = 2l + 2a$

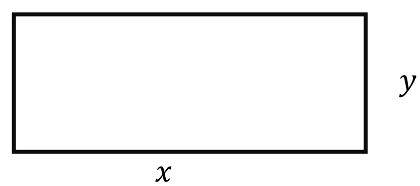
3. Calcula el perímetro del terreno rectangular	$P = 2(15) + 2(8)$ $P = 46m.$
4. ¿Cuál es la fórmula para calcular el área de un rectángulo?	$A = l \cdot a$
5. Calcula el área del terreno rectangular.	$A = (15)(8)$ $A = 120m^2$

Ahora vamos a cambiar el enunciado del problema anterior.

Ejemplo 12.

Se tiene **un terreno rectangular** cuya área mide $120m^2$ y el perímetro mide $46m$. **Encuentra las dimensiones del terreno**. (Nota: El largo es mayor que el ancho).

Siguiendo la analogía del ejercicio anterior, entonces:

1. Has un dibujo del terreno y establece sus variables	
2. Escribe la ecuación del perímetro del terreno y llámala ecuación 1.	$46 = 2x + 2y \quad \ldots(1)$
3. Escribe la ecuación del área del terreno y llámala ecuación 2.	$120 = xy \quad \ldots(2)$
4. Despeja alguna de las variables de la ecuación 1 y llámala ecuación 3.	$y = 23 - x \quad \ldots(3)$
5. Sustituye la en la ecuación 3 en la ecuación 2.	$120 = x(23 - x)$
6. Realiza las operaciones convenientes y acomoda los términos.	$120 = 23x - x^2$ $x^2 - 23x + 120 = 0$
7. Resuelve la ecuación anterior por el método que consideres más apropiado.	$(x - 15)(x - 8) = 0$ $x_1 = 15 \;\; y \;\; x_2 = 8$

8. De los resultados anteriores, recuerda que el largo es mayor que el ancho.	Como x representa el largo del rectángulo, por lo que el largo del terreno es $15m$, mientras que el ancho será $8m$.
9. Escribe cuáles son las dimensiones del terreno.	Largo: $15m$ Ancho: $8m$
10. Verifica tus soluciones	$46 = 2(15) + 2(8)$ $46 = 46$ $120 = (15)(8)$ $120 = 120$

Ejercicio 1.12 Resuelve el siguiente ejercicio considerando los ejemplos once y doce.

El área de un terreno rectangular mide $920m^2$. Si el largo mide el doble del ancho más $6m$, encuentra sus dimensiones. Comenten en equipos sus resultados.

Ejemplo 13.

Una llave de agua llena un tanque en 4 horas y otra llave aparte lo hace en 12 horas. Si las dos llaves lo llenan juntos, ¿en cuánto tiempo lo harán?

1. Establece la razón del llenado del tanque de la llave de 4 horas.	$\frac{1}{4}$
2. Establece la razón del llenado del tanque de la llave de 12 horas.	$\frac{1}{12}$
3. Establece la razón del llenado del tanque de las dos llaves, donde x sea el tiempo buscado.	$\frac{1}{x}$ Donde x es el tiempo

4. Escribe la suma de las razones de las dos llaves que debe ser igual a la razón total.	$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{x}$
5. Simplifica la ecuación	$12x\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{x}\right)$ $3x+x=12$
6. Calcula el valor de x	$4x=12$ $x=3$ El tiempo de llenado del tanque con las dos llaves es de 3 horas.
7. Verifica la solución	$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$ $\frac{3+1}{12}=\frac{1}{3};\quad \frac{4}{12}=\frac{1}{3};\quad \frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

Ahora vamos a cambiar el enunciado del problema anterior.

Ejemplo 14.

Dos llaves llenan un tanque en 3 horas. Encuentra el tiempo que tarda cada llave en llenar el tanque, sabiendo que una llave tarda 8 horas más que la otra.

1. Establece la razón de llenado de una llave considerando el **tiempo** como x.	Llave 1 $\frac{1}{x}$
2. Establece la razón de llenado de la otra llave considerando el tiempo como el de la llave 1 más 8.	Llave 2 $\frac{1}{x+8}$
3. Establece la razón de llenado del total de las dos llaves considerando el tiempo como 3 horas.	Llaves juntas $\frac{1}{3}$

4. Establece la suma de las razones de las dos llaves e iguálalas a la razón del tiempo de las dos llaves juntas.	$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+8}=\frac{1}{3}$
5. Acomoda la ecuación de manera que no haya denominadores y escríbela en su forma general	m. c. m. $(x,\ x+8, 3)$ $(x)(x+8)(3)\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x+8}=\frac{1}{3}\right]$ $3x+24+3x=x^2+8x$ $x^2+2x-24=0$
6. Resuelve la ecuación por algún método conveniente	$(x+6)(x-4)=0$
7. Escoge el tiempo de una llave que sea razonable	$x=-6$ y $x=4$ Se escoge el valor positivo Llave 1: tarda 4 horas
8. Encuentra el tiempo de la otra llave.	Llave 2: tarda 4+8=12 La llave 2 tarda 12 horas
9. Verifica tus resultados	La suma de las razones de ambas llaves debe ser igual a la razón del total de tiempo. $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$ $\frac{3+1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ Lo que indica que es correcto

Ejercicio 1.13 Resuelve el siguiente ejercicio considerando los ejemplos trece y catorce.

Dos máquinas cosechadoras de naranja, al trabajar juntas, reúnen una tonelada de naranja en un tiempo de 6 horas. Encuentra el tiempo que tarda cada máquina en cosechar una tonelada, si se sabe que una tarda 5 horas menos que la otra.

Ejemplo 15.

Se compra cierto número de pelotas de beisbol con $1 000.00. Si se hubieran comprado 10 pelotas más por el mismo dinero, cada pelota habría costado 5 pesos menos. ¿cuántas pelotas de beisbol se compraron?

1. Establece una variable para el ***número*** de pelotas.	x
2. Escribe una expresión algebraica con la variable anterior que exprese el ***precio*** de una pelota.	$\frac{1000}{x}$
3. Escribe una expresión algebraica que exprese el precio de una pelota por la cantidad total de pelotas que sea igual a 1000.	$x \cdot \frac{1000}{x} = 1000$
4. De la expresión anterior, reescribe la ecuación con el enunciado "… *si hubiera comprado 10 pelotas más por el mismo precio, cada pelota habría costado 5 pesos menos*".	$(x+10)\left(\frac{1000}{x} - 5\right) = 1000$
5. Utilizando la propiedad distributiva, acomoda la ecuación para después resolverla.	$x \cdot \frac{1000}{x} + x \cdot (-5) + 10 \cdot \frac{1000}{x} + 10 \cdot (-5) = 1000$
6. Escribe la ecuación simplificada	$x^2 + 10x - 2000 = 0$
7. Resuelve la ecuación con algún método adecuado e indica cuál es el valor más conveniente.	$(x-40)(x+50) = 0$ $\boldsymbol{x = 40}$ y $x = -50$

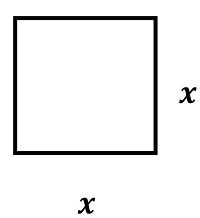
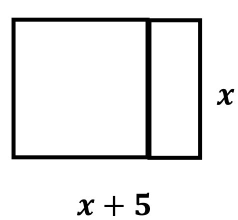
8. Escoge el valor que corresponda al número de pelotas.	Se compraron **40** pelotas
9. Verifica tu resultado.	Precio de cada pelota: $\frac{1000}{40} = 25$ pesos Primer caso: $(40)(25) = 1000$ Segundo caso: $(50)(20) = 1000$

Ejercicio 1.14 Resuelve el siguiente ejercicio.

Una persona calcula que el costo diario del transporte en su automóvil para ir al trabajo es de $180.00, el cual ha dividido en partes iguales entre sus pasajeros y él mismo. Algún tiempo después se unen al grupo dos pasajeros más, lo cual permite reducir $15.00 el costo del transporte por persona. Calcúlese el número de personas que forman el nuevo grupo.

Ejemplo 16.

Un cuadrado de linóleo requiere 5 metros más de longitud para cubrir un piso rectangular cuya área es de 84 metros cuadrados. Calcúlese las dimensiones de la pieza adicional del linóleo que debe comprarse.

1. Establece un dibujo que muestre el cuadrado del linóleo y coloca una variable que represente un lado.	
2. Al dibujo anterior auméntale 5 metros más de longitud.	

3. Expresa el área del rectángulo que sea igual a 84 metros cuadrados.	$(x+5)(x)=84$
4. Acomoda la expresión anterior para poder resolverla.	$x^2+5x-84=0$
5. Resuelve la ecuación y escoge la solución que sea congruente al contexto del problema.	$(x+12)(x-7)=0$ $x=-12$ y $x=7$ La solución positiva es la conveniente, por lo que el lado del cuadrado mide 7 metros.
6. Escribe las dimensiones que deben comprarse.	El largo mide 12 metros y el ancho mide 7 metros.
7. Verifica sus resultados.	El área del cuadrado es: $7\cdot 7=49m^2$ más $5\cdot 7=35m^2$, por lo que al sumar las dos áreas queda como: $49+35=84$ $84=84$

Ejercicio 1.15 Resuelve la siguiente situación.

Si 5/3 del ancho menos 1 es el largo de un rectángulo. Determina las dimensiones para una puerta monumental para cercar un corral que cumpla las condiciones anteriores y que utilice 12 metros cuadrados de material.

PROPUESTA DE EVALUACIÓN DE UNIDAD 1

I. Resuelve las siguientes ecuaciones por el método que consideres más adecuado:

a) $3x^2 = 6$
b) $-14 = -3y^2$
c) $4m^2 + 9m = 0$

II. Obtén las raíces de las ecuaciones por el método de factorización:

a) $n^2 - 3n + 2 = 0$
b) $-12p + 9 + 4p^2 = 0$

III. Determina las soluciones de la ecuación utilizando la fórmula general:

a) $h^2 - 15 = -2h$

IV. Obtén el valor de las raíces por el método de completar el trinomio cuadrado perfecto:

a) $x^2 + 4x = 21$
b) $-9m - 2 = -5m^2$

V. Utiliza el discriminante para determinar cuántas soluciones reales tiene cada ecuación.

a) $r^2 = -4r + 1$
b) $u^2 + 2 = 4u$

VI. Resuelve los siguientes problemas:

a) Si al doble del cuadrado de un número se le quitan 5, el resultado es 21. Hallar el número.

b) Un huerto tiene 168 árboles frutales. Si el número de filas es igual al número de árboles reducido en dos, ¿cuántos árboles hay en cada fila?

Valoración del profesor Unidad 1

Evaluación formativa			
Número de ejercicio	Insuficiente	Suficiente	Logrado
1. 1			
1.2			
1.4			
1.5			
1.6			
1.8			
1.10			
Comentarios del profesor:			

Evaluación sumativa	
Número de ejercicio	Puntaje del ejercicio
1.3	
1.7	
1.9	
1.11	
1.12	
1.13	
1.14	
1.15	
Total logrado	

Propuesta de evaluación de unidad 1	
Ejercicio	Puntaje del ejercicio
I	
II	
III	
IV	
V	
VI	
Calificación	

Fuentes de consulta

Alonso, J. A. (2012, 7 mayo). *El método de Polya para resolver problemas*. VESTIGIUM. Recuperado 18 de enero de 2022, de https://www.glc.us.es/%7Ejalonso/vestigium/el-metodo-de-polya-para-resolver-problemas/

Ávila Ramos, J., y Pérez Colín, N. A. (2016, 13 junio). *Generalización*. Portal Académico del CCH. Recuperado 8 de noviembre de 2021, de https://e1.portalacademico.cch.unam.mx/alumno/matematicas2/unidad1/formulageneral/generalizacion

Club Marduino. (2019, 1 septiembre). Factorización por tanteo con coeficiente principal distinto de uno [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=kDBmSAtwl2A

KhanAcademyEspañol. (2013, 11 junio). *Cómo usar la fórmula cuadrática* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=nAZygjXSZEE&feature=youtu.be

mapacheplus. (2011, 12 septiembre). *Historia de las ecuaciones* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=6AOaT2DOoHg

Sparks, W, F. (2011). Álgebra. Recuperado de 17 de septiembre del 202 de https://issuu.com/clubdematematicasyciencias/docs/algebra-rees_sparks/431

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Recuperado el día 24 de septiembre de 2021 de https://henryhs14.files.wordpress.com/2015/02/algebra-y-trigonometria-con-geometria-analitica-swokowski-12th.pdf

Vera Aguirre, J. H. (2018, 14 noviembre). *Trinomio Cuadrado Perfecto*. GeoGebra. Recuperado 25 de octubre de 2021, de https://www.geogebra.org/m/q3jyzcys

Westreicher, G. (10 de octubre, 2021). *Fórmula general*. https://economipedia.com/definiciones/formula-general.html#:~:text=Una%20f%C3%B3rmula%20general%2C%20en%20la,inc%C3%B3gnita%20en%20distintos%20casos%20particulares.

Solución de ejercicios Unidad 1

1.3 a) $m_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}, m_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}$, b) $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 0$, $c)$ $q_1 = -3, q_2 = -2$

1.7 a) $x_1 = -4, x_2 = -1$, b) $r_1 = 6, r_2 = 7$, c) $t_1 = -5, t_2 = 8$, d) $y_1 = -4, y_2 = \frac{1}{3}$

1.9 a) $x_1 = \frac{5-\sqrt{41}}{2}, x_2 = \frac{5+\sqrt{41}}{2}$, b) $n_1 = -6 - \sqrt{57}, n_2 = -6 + \sqrt{57}$, c) $h_1 = \frac{-3-\sqrt{151}\,i}{2}$, $h_2 = \frac{-3+\sqrt{151}\,i}{2}$, d) $y_1 = -2 - \sqrt{6}, y_2 = -2 + \sqrt{6}$

1.11 a)$x_1 = 3$, $x_2 = 2$, b) $r_1 = 1$, $r_2 = -4$, c)$p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{3}$

1.12 a) $b^2 - 4ac > 0$ $tiene\ dos\ soluciones\ reales\ y\ diferentes,$

b) $b^2 - 4ac = 0$ $tiene\ una\ solución\ real\ repetida,$

c) $b^2 - 4ac < 0$ $ninguna\ de\ las\ soluciones\ es\ real$.

1.13 Una máquina tarde 10 horas y la otra 15 hora.

1.14 Son 6 personas que pagan 30 pesos cada una.

1.15 Ancho: 2.4 m y largo: 5 m

UNIDAD 2
Funciones cuadráticas y aplicaciones

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Propósito de la unidad:

Al finalizar, el alumno analizará el comportamiento de las funciones cuadráticas en términos de sus parámetros mediante la contrastación de la representación gráfica y analítica. Resolverá problemas de optimización con método algebraicos, a fin de continuar con el estudio de las funciones a partir de situaciones que varían en forma cuadrática y contrastará este tipo de variación con la lineal.

Aprendizajes

- *Relaciona el número de intersecciones de la curva de una función cuadrática con el eje X, con la naturaleza de las raíces. En particular, identifica su ausencia con la existencia de raíces complejas.*
- *Expresa la función $y = ax^2 + bx + c$ en la forma estándar $y = a(x-h)^2 + k$ usando el método de completar un trinomio cuadrado perfecto. Además, interpreta el impacto de sus parámetros en el registro gráfico.*
- *Comprende los términos de concavidad, vértice, máximo, mínimo y simetría.*
- *Resuelve problemas sencillos de máximos y mínimos aprovechando las propiedades de la función cuadrática.*

Antes de comenzar con el contenido de la unidad, te invitamos a revisar el siguiente video. Coméntenlo en el aula.

SCAN ME

Diferencias entre funciones y ecuaciones cuadráticas

https://www.youtube.com/watch?v=2BrIt7xja90

2.1 Función cuadrática

Una función cuadrática en una variable tiene la forma $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, con lo que $\boldsymbol{x}$ es la variable independiente y la variable dependiente es $\boldsymbol{y}$. Otra forma de nombrar a la variable dependiente es como $\boldsymbol{f(x)}$.

Una función cuadrática $\boldsymbol{f(x)}$ expresada en la forma general

$$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Con $\boldsymbol{a, b}$ y $\boldsymbol{c}$ constantes y $\boldsymbol{a \neq 0}$, a los que se les llama parámetros de $\boldsymbol{f(x)}$.

Como se observa, la función cuadrática tiene una forma muy parecida a la de una ecuación cuadrática, que se estudió en la unidad anterior, su relación nos permitirá conocer valores específicos de la función, especialmente la intersección con el eje de las abscisas, a la que llamaremos **ceros de la función** o **raíces**.

2.1.1 Función Cuadrática con dos raíces reales.

Tomemos como punto de partida el video de inicio de esta unidad, con ello retomemos los diferentes métodos para resolver ecuaciones cuadráticas.

Ejercicio 2.1 Observa los videos disponibles en las siguientes ligas, su información te permitirá realizar el siguiente ejercicio.

SCAN ME

Raíces por factorización

https://youtu.be/48cyhun8zDY

SCAN ME

Otro tipo de raíces

https://youtu.be/liGfUf3h-NI

Ejercicio 2.2 Encontrar las raíces de la función $f(x) = x^2 + 3x - 10$

Como las raíces son los valores donde la función es 0, buscamos resolver la ecuación $f(x) = 0$

Factorizamos la expresión $f(x) = x^2 + 3x - 10$	$f(x) = (\qquad)(\qquad)$

Como el producto anterior es cero entonces:	$x + \_\_ = 0$ $x - \_\_ = 0$ $x = \_\_$ $x = \_\_$
Las raíces de la función $f(x) = x^2 + 3x - 10$ son:	$x_1 = \_\_\_\_$ $x_2 = \_\_\_\_$
Grafica la función anterior, identifica las raíces localizándolas en el eje X.	
¿cuál es la relación de las raíces calculadas y la gráfica que se obtuvo?	

Si una función cuadrática tiene dos raíces reales, se puede escribir de la siguiente forma $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ donde x_1 y x_2 son números reales. En este caso la gráfica cruza el eje X dos veces.

2.1.2 Función cuadrática con una raíz real.

Ejercicio 2.3 Encontrar las raíces de la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Factorizando la expresión $f(x) = x^2 - 2x + 1$ obtenemos:	$f(x) = (\qquad)(\qquad)$
Como $f(x) = 0$, entonces:	$x\_\_\_\_ = 0$ $x = \_\_\_\_$
La función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ tiene una raíz y es:	$x = \_\_\_\_$
Grafica la función anterior, identifica las raíces localizándolas en el eje X.	
¿cuál es la relación de las raíces calculadas y la gráfica que se obtuvo?	

Si una función cuadrática tiene una sola raíz real se puede escribir en la forma $\boldsymbol{f(x) = a(x - x_r)^2}$. $\boldsymbol{x_r}$ se conoce como raíz de multiplicidad dos o raíz doble, porque el mismo valor es solución dos veces, $$\boldsymbol{f(x) = (x - x_r)(x - x_r)},$$ **Su gráfica toca el eje X, pero no lo cruza.**

2.1.3 Función cuadrática sin raíces reales

Ejercicio 2.4 Encontrar las raíces de la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$.

Cuando vemos que no es posible factorizar, podemos recurrir a la fórmula general.

Utilizando la formula general para la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ obtenemos:	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $discriminante =$ ____
Las raíces de la función son:	$x_1 =$ _______ $x_2 =$ _______

Grafica la función anterior, y responde	
¿cuál es la relación de las raíces calculadas y la gráfica que se obtuvo?	

Si usando la fórmula cuadrática, obtenemos raíces complejas para una función cuadrática, significa que la función no tiene raíces reales. En este caso, la gráfica no cruza ni toca el eje X.

Para conocer el número de raíces que tiene una función cuadrática bastaría con analizar su discriminante, por lo que

Valor del discriminante	Número y tipo de raíces
$D > 0$	2 raíces reales diferentes, **2 intersecciones** diferentes **al eje X**
$D = 0$	1 raíz real de multiplicidad 2, **una intersección al eje X**
$D < 0$	2 raíces complejas, **ninguna intersección al eje X**

Ejercicio 2.5

I. Identifica el número de raíces reales que tiene cada una de las siguientes funciones con base en el valor de su discriminante.
II. Realiza su respectiva gráfica ubicando las raíces:

a) $f(x) = x^2 - 7x + 12$

b) $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$

2.2 Formas de expresar la ecuación de una función cuadrática.

La regla de correspondencia de una función se puede expresar a partir de una ecuación. Existen diferentes formas y cada una permite conocer características que se observan en sus gráficas, específicamente en las funciones cuadráticas que estudiamos en esta unidad consideraremos tres formas.

Nombre	Ecuación
General	$f(x) = ax^2 + bx + c$
Estándar	$f(x) = a(x - h)^2 + k$
Factorizada	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

La forma en que se trabajó en los ejercicios 2.2 y 2.3 nos permite identificar el valor de las raíces de las funciones cuadráticas, es decir, las intersecciones con el eje de las abscisas.

2.2.1 Relación entre parámetros de la forma general y su gráfica.

Cuando se trabaja con la forma general de la ecuación de una función cuadrática, contamos con 3 parámetros relacionados con los términos: **cuadrático “a”, lineal “b” e independiente “c”**.

Ejercicio 2.6 Revisa el siguiente recurso en GeoGebra, modifica los valores de los diferentes parámetros uno a uno, para ello escribe diferentes valores en las cajas de texto de cada uno y observa qué sucede con la gráfica.

SCAN ME

Parámetros en funciones cuadráticas

https://www.geogebra.org/m/ggbwjcsv

Responde a las siguientes preguntas y analízalas con tu profesor.

a) ¿Qué sucede con la gráfica si el valor de “a” es positivo o negativo?

b) Si se modifica el valor de “b” ¿cómo afecta a la gráfica?

c) El valor del parámetro “c”, ¿qué relación tiene con la gráfica?

d) ¿Se observa una clara relación de cómo modifican los parámetros “b” y “c” a la gráfica de la función? ¿por qué?

Recordemos que los parámetros a, b y c de la función cuadrática también nos permiten analizar su tipo de raíces a partir del discriminante.

2.2.2 Conversión de la forma general a la forma estándar.

Para poder transitar de la forma general a la forma estándar es necesario retomar el método de completar trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo 1.

Convertir la siguiente función cuadrática de su forma general a la **forma estándar.** En este ejemplo, se considera que $a = 1$.

Forma general $\boldsymbol{y = x^2 + 10x - 3}$	
Para completar el trinomio cuadrado perfecto, es necesario dividir entre dos el coeficiente del término lineal.	$10 = 2(\text{término independiente})$ $\text{término independiente} = \frac{10}{2} = 5$
Este valor se elevará al cuadrado y será el término independiente del trinomio.	$(\text{término independiente})^2 = (5)^2$
Utilizando la propiedad de elemento neutro completamos el trinomio cuadrado perfecto.	$y = \underbrace{\boldsymbol{x^2 + 10x + (5)^2}}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}} - (5)^2 - 3$
Siempre el trinomio cuadrado perfecto se creará con el término que se agregó sumando, el otro valor se operará con su similar.	$-(5)^2 - 3 = -28$
El trinomio cuadrado perfecto se reescribirá como un binomio elevado al cuadrado.	$y = \boldsymbol{x^2 + 10x + (5)^2} - 28$ $y = (x + 5)^2 - 28$
Forma estándar $\boldsymbol{y = (x + 5)^2 - 28}$	

Cuando se utilizaba este método en ecuaciones cuadráticas se obtenía el valor de las soluciones, en este caso como se comentó anteriormente, esas soluciones corresponden a los ceros (intersecciones con el eje de las abscisas) o raíces de la función.

Para conocer el valor de las raíces se hace $y = 0$ y despeja de la ecuación anterior.	$(x+5)^2 - 28 = 0$ $(x+5)^2 = 28$ $\sqrt{(x+5)^2} = \pm\sqrt{28}$ $x + 5 = \pm 2\sqrt{7}$ $x = -5 \pm 2\sqrt{7}$ $x_1 = -5 - 2\sqrt{7}$ $\quad x_2 = -5 + 2\sqrt{7}$
De manera aproximada, los valores de las raíces son	$x_1 = -10.2915$ $\quad x_2 = 0.2915$

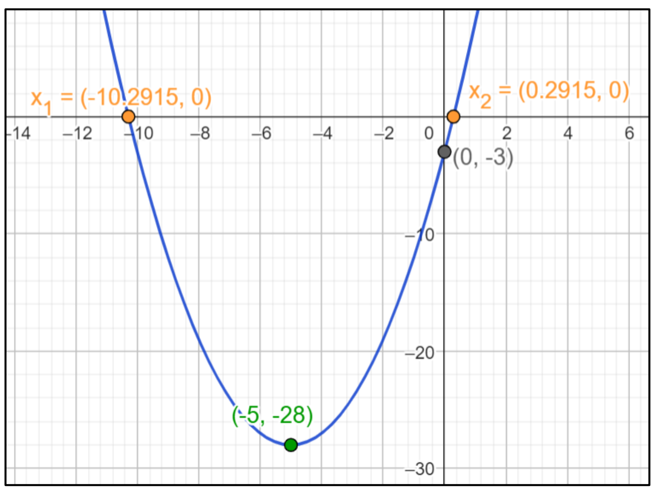


Figura 1. Gráfica de la función $\boldsymbol{y = (x+5)^2 - 28}$

Ahora consideremos un **ejemplo** en el que el coeficiente del término cuadrático "$\boldsymbol{a}$" **sea diferente de uno.**

Ejemplo 2.

Convertir la siguiente función cuadrática de su forma general a la **forma estándar.**

Forma general	$\boldsymbol{y = -2x^2 + 5x + 7}$
En este caso, **antes** de completar el trinomio cuadrado perfecto se debe **factorizar el coeficiente del término cuadrático** "$a = -2$", considerando solo los dos primeros términos.	$y = -2\left(x^2 - \frac{5}{2}x\right) + 7$
Para completar el trinomio cuadrado perfecto, es necesario dividir entre dos el coeficiente del término lineal	$-\frac{5}{2} = 2(\text{término independiente})$ $\text{término independiente} = \frac{-\frac{5}{2}}{2} = -\frac{5}{4}$
Este valor se elevará al cuadrado y será el término independiente del trinomio.	$(\text{término independiente})^2 = \left(-\frac{5}{4}\right)^2$
Utilizando la propiedad de elemento neutro completamos el trinomio cuadrado perfecto	$y = -2\left(\underbrace{x^2 - \frac{5}{2}x + \left(-\frac{5}{4}\right)^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}} - \left(-\frac{5}{4}\right)^2\right) + 7$
Para operar el valor que no es parte del trinomio cuadrado perfecto, con el que está fuera de la factorización, **primero debemos sacarlo del paréntesis**.	$y = -2\left(\underbrace{x^2 - \frac{5}{2}x + \left(-\frac{5}{4}\right)^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}\right) - (-2)\left(-\frac{5}{4}\right)^2 + 7$
Siempre el trinomio cuadrado perfecto se creará con el término que se agregó sumando, el otro valor se operará con su similar	$-(-2)\left(-\frac{5}{4}\right)^2 + 7 = \frac{81}{8}$
El trinomio cuadrado perfecto se reescribirá como un binomio elevado al cuadrado	$y == -2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \left(-\frac{5}{4}\right)^2\right) + \frac{81}{8}$ $y = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{81}{8}$
Forma estándar	$\boldsymbol{y = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{81}{8}}$

La intersección de la gráfica de la función anterior con el eje de las abscisas se puede determinar a partir de la forma estándar que se obtuvo.

Para conocer los valores de las raíces se despeja de la ecuación anterior.	$-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{81}{8}=0$ $-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=-\frac{81}{8}$ $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{-\frac{81}{8}}{-2}$ $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{81}{16}$ $\sqrt{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{81}{16}}$ $x=\frac{5}{4}\pm\frac{9}{4}$ $x_1=\frac{5-9}{4} \qquad x_2=\frac{5+9}{4}$
Los valores de las raíces son	$x_1=-1 \qquad x_2=\frac{7}{2}=3.5$

Observemos que estos valores corresponden con la intersección de la gráfica de la función con el eje de las abscisas.

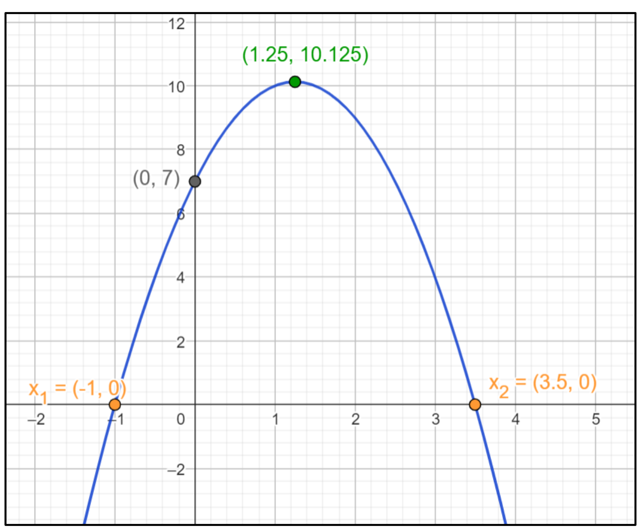


Figura 2. Gráfica de la función $\boldsymbol{y=-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{81}{8}}$

Ejercicio 2.7 Responde las siguientes preguntas y coméntenlas en grupo.

a) ¿Qué información, respecto a la gráfica se obtiene al tener la ecuación de una función cuadrática en la forma estándar a diferencia de la forma general?

___

b) ¿Cómo se involucra el valor del parámetro "a" en la forma estándar de una función cuadrática?

___

Ejercicio 2.8 Para las siguientes funciones

I. Conviértelas a su forma estándar,
II. Indica las coordenadas del vértice y sus raíces
III. Grafícalas indicando los valores encontrados

a) $f(x) = -x^2 + 3x - 5$
b) $f(x) = 4x^2 + 2x - 10$

Ejercicio 2.9 Para las siguientes funciones

I. Conviértelas a su forma general,
II. Indica las coordenadas del vértice y sus raíces
III. Grafícalas indicando los valores encontrados.

a) $f(x) = -(x + 1)^2 - 7$
b) $f(x) = (x - 2)^2 - 3$

2.3 Elementos gráficos de las funciones cuadráticas

La forma gráfica de cualquier función cuadrática en una variable es una parábola vertical, la cual cuenta con ciertos elementos que la caracterizan.

Toda parábola es una curva simétrica con respecto a una recta vertical llamada **eje de simetría**, esta cruza por el punto más alto o bajo de la gráfica.

El punto de intersección del eje de simetría con la parábola se llama **vértice**, es el punto máximo o mínimo de esta. Tiene coordenadas $\boldsymbol{V(h,k)}$ y divide a la parábola en dos ramas.

La **ordenada al origen** es donde la gráfica interseca al eje Y.

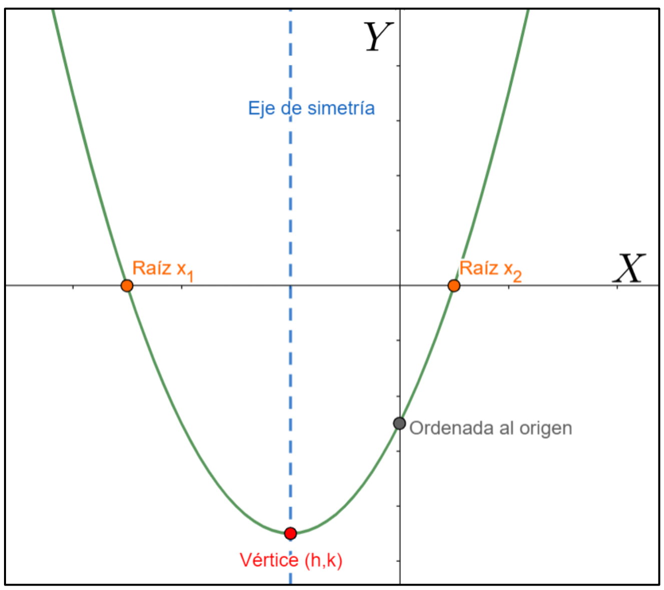


Figura 3. Elementos gráficos de una función cuadrática

Ejercicio 2.11 Abre el recurso de GeoGebra que se encuentra en el siguiente enlace, modifica los valores de los parámetros con la información que se pide en los siguientes cuadros. Con lo que observes que le ocurre a la gráfica contesta en cada espacio.

SCAN ME

Parámetros y forma canónica de funciones cuadráticas

https://www.geogebra.org/m/rnchjkpd

Parámetro	Manteniendo el valor de $h = 0$ y $k = 0$	
a	Si $a > 0$, la parábola abre hacia:	
	Si $0 < a < 1$, la parábola es:	
	Si $a > 1$, la parábola es:	
	Si $a < 0$, la parábola abre hacia:	
	Si $-1 < a < 0$, la parábola es:	
	Si $a < -1$, la parábola es:	

A esa apertura de la parábola se le denomina **Concavidad**, por lo tanto, tendremos ***parábolas cóncavas hacia arriba* o *cóncavas hacia abajo*.**

Parámetros	Manteniendo $a = 1$	
h, k	Si $h = 0$ y $k = 0$ el vértice se ubica:	
	Si $h = 0$ y $k < 0$ el vértice se ubica:	
	Si $h = 0$ y $k > 0$ el vértice se ubica:	
	Si $h < 0$ y $k = 0$ el vértice se ubica:	
	Si $h > 0$ y $k = 0$ el vértice se ubica:	
	Si $h > 0$ y $k > 0$ el vértice se ubica en el cuadrante:	

	Si $\boldsymbol{h} > \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{k} < \mathbf{0}$ el vértice se ubica en el cuadrante:	
	Si $\boldsymbol{h} < \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{k} < \mathbf{0}$ el vértice se ubica en el cuadrante:	
	Si $\boldsymbol{h} < \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{k} > \mathbf{0}$ el vértice se ubica en el cuadrante:	

Para definir si la parábola tiene un punto **Máximo** o **Mínimo**, tendremos que observar el tipo de concavidad de la curva:	
Si la parábola es cóncava hacia arriba, esta tiene un punto:	
Si la parábola es cóncava hacia abajo, esta tiene un punto:	
El valor del punto Máximo o Mínimo corresponde al valor de la coordenada ***"k" del vértice.***	

Parámetro	Manteniendo $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$	
	Si $\boldsymbol{h} = \mathbf{0}$ el eje de simetría se ubica:	
	Si $\boldsymbol{h} < \mathbf{0}$ el eje de simetría se ubica:	
h	Si $\boldsymbol{h} > \mathbf{0}$ el eje de simetría se ubica:	
El valor del eje de simetría corresponde al valor de la coordenada ***"h" del vértice.***		

Ejemplo 3.

$\boldsymbol{y = -3\,(x+1)^2 + 2}$	
$\boldsymbol{a = -3}$	Es cóncava hacia abajo y la parábola tiene un punto máximo
$\boldsymbol{h = -1}$ $\boldsymbol{k = 2}$	El vértice se ubica en $V\,(-1, 2)$
$\boldsymbol{x = -1}$	Eje de simetría
Raíces	$x_1 = -1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \approx -1.8165$ $\quad$ $x_2 = -1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \approx -0.1835$

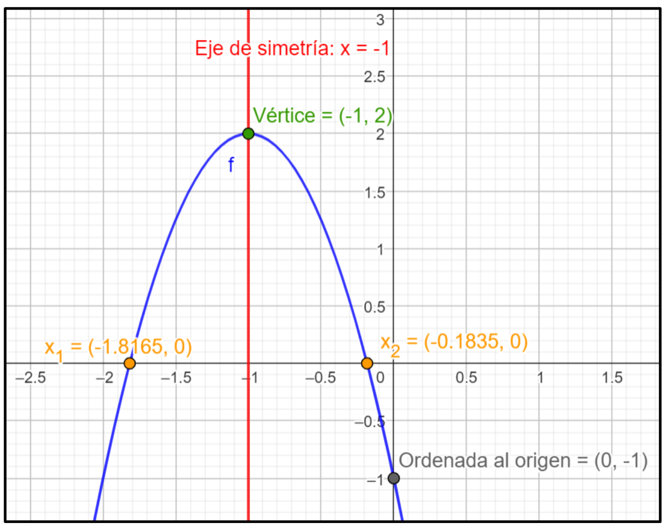


Figura 4. Gráfica de la función $\boldsymbol{y = -3\,(x+1)^2 + 2}$

Ejercicio 2.12 De las siguientes funciones, determina:

I. Vértice
II. Eje de simetría
III. Concavidad
IV. Si tiene un máximo o mínimo y
V. Con la información anterior esboza la gráfica correspondiente.

a) $y = (x-3)^2$

b) $y = -x^2 + 5$

2.4 Aplicaciones de funciones cuadráticas

Después de haber conocido los principales parámetros de la parábola (vértice, concavidad, intersección con el eje x, etc.), ahora vamos a resolver diversos problemas de optimización que se modelarán con una función cuadrática.

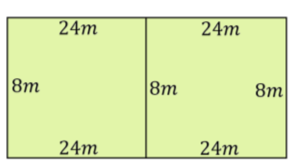
Dependiendo del contexto del problema, si nos piden una cantidad máxima, entonces la concavidad de la parábola será hacia abajo y el vértice será la solución, por el contrario, si nos piden una cantidad mínima, entonces la concavidad de la parábola será hacia arriba. Se trabajarán algunos problemas que solicitan un máximo o un mínimo.

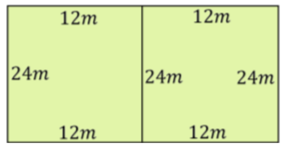
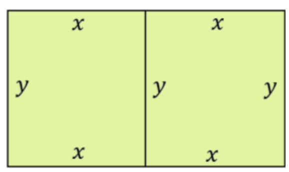
La idea es mostrar un procedimiento que permita visualizar la construcción de un modelo algebraico para una función cuadrática, para posteriormente transformarla a la forma estándar o canónica $y = a(x-h)^2 + k$.

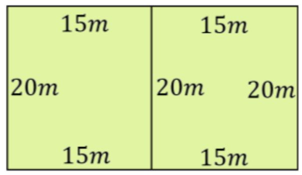
Te recomendamos iniciar el análisis de un problema apoyándote de dibujos, esquemas, tablas y demás representaciones, para que te sea más fácil construir el modelo algebraico.

Ejemplo 4.

Con 120 metros de malla ciclónica se desea construir una cerca con una división de forma paralela a la mitad.

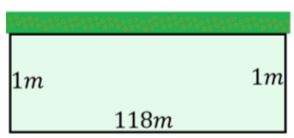
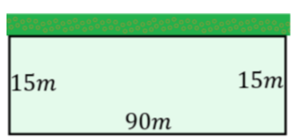
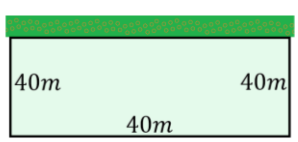
Propuesta 1		$P = 3(8) + 4(24)$ $P = 120m$ $A = (8)(48)$ $A = 384m^2$

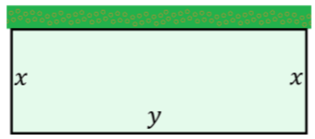
Propuesta 2		$P = 3(12) + 4(21)$ $P = 120m$ $A = (12)(42)$ $A = 504m^2$
Propuesta 3		$P = 3(24) + 4(12)$ $P = 120m$ $A = (24)(24)$ $A = 576m^2$
¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno en el que se obtenga el área máxima?		
Propuesta 4		$P = 3(y) + 4(x)$ $P = 120m$ $120 = 3y + 4x$ $y = \frac{120 - 4x}{3}$ $A = (2x)(y)$ $A(x) = (2x)\left(\frac{120 - 4x}{3}\right)$
Se expresa la función $A(x)$ en forma canónica.	$A(x) = \frac{2}{3}(120x - 4x^2)$ $A(x) = -\frac{8}{3}(x^2 - 30x)$ $A(x) = -\frac{8}{3}(x - 15)^2 + 600$	
El vértice es el máximo de la función.	$V(15{,}600)$	

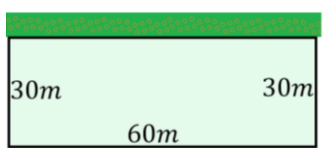
La interpretación del vértice nos dice que:	$x = 15$	$y = \dfrac{120 - 4x}{3}$ $y = 20$
Las dimensiones del terreno quedan como:		Comprobación $P = 3(20) + 4(15)$ $P = 120m$ $A = (20)(30)$ $A = 600m^2$

Ejemplo 5.

Se desea construir un corral para vacas de forma rectangular utilizando una barda como otra cara del corral con $120m$ de malla. Escribe algunas propuestas para obtener el área.

Propuesta 1		$P = 2(1) + 118$ $P = 120m$ $A = (1)(118)$ $A = 118m^2$
Propuesta 2		$P = 2(15) + 90$ $P = 120m$ $A = (15)(90)$ $A = 1350m^2$
Propuesta 3		$P = 2(40) + 40$ $P = 120m$ $A = (40)(40)$ $A = 1600m^2$

<table>
<tr><td colspan="3">¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno para que se obtenga el área máxima?</td></tr>
<tr><td>Propuesta 4</td><td>
</td><td>$P = 2(x) + y$
$120 = 2x + y$
$y = 120 - 2x$
$A = xy$
$A(x) = (x)(120 - 2x)$
$A(x) = 120x - 2x^2$</td></tr>
<tr><td>Se expresa la función $A(x)$ en forma canónica.</td><td colspan="2">$A(x) = -2(x^2 - 60x)$

$A(x) = -2(x^2 - 30)^2 + 1800$</td></tr>
<tr><td>El vértice es el máximo de la función</td><td colspan="2">$V(30{,}1800)$
Lo cual indica que las dimensiones del terreno deben ser:


De lado $30\,m$ y de largo $60m$ Obteniéndose un área máxima de $1800m^2$.</td></tr>
</table>

Ejercicios 2.13 En cada uno de los siguientes problemas de optimización aplica los diferentes aprendizajes que se han abordado.

a) Se desea construir una canaleta con una lámina rectangular cuyo ancho es de $148cm$ de ancho. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que tenga una capacidad máxima?

b) La altura de la pelota $s(t)$, en cualquier instante t puede determinarse mediante la función $s(t) = -16t^2 + 80t + 75$. Donde la altura está en pies y el tiempo en segundos. a) En qué instante la pelota llegará a su máxima altura. b) ¿cuál es la altura máxima?

c) Los ingresos y gastos de una empresa durante los primeros 8 años, vienen definidos en millones de dólares por las siguientes funciones cuadráticas.

Ingresos: $I(t) = -\frac{t^2}{4} + \frac{5t}{2} + 2$

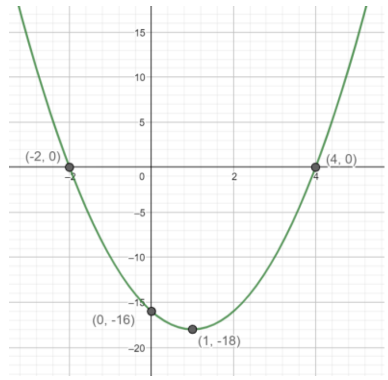
Gastos: $G(t) = \frac{t^2}{6} - \frac{5t}{2} + \frac{31}{3}$

a) Hallar los momentos en que los ingresos y los gastos se igualan.
b) ¿Cuándo son máximos los ingresos?
c) ¿Cuándo son mínimos los gastos?
d) Hacer la gráfica de cada uno.

PROPUESTA DE EVALUACIÓN DE UNIDAD 2

I. Con base en el valor de su discriminante, identifica el número de raíces reales que tiene la función $f(x) = -x^2 + 2x - 2,$ y realiza su respectiva gráfica.

II. Determina la ecuación en su forma canónica de la siguiente función cuadrática conociendo algunos elementos de su gráfica.



III. Transforma la función $f(x) = -2(x + \frac{1}{5})^2 - 11$ a su forma general e identifica el valor de la ordenada al origen.

IV. Una de pelota de golf sigue un movimiento uniformemente acelerado y su altura está dada por la fórmula

$$h(t) = \frac{2}{5}t - \frac{1}{250}t^2$$

Sabiendo que el tiempo está dado en segundos y la altura en metros:

a) Dibuja la gráfica
b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?
c) ¿En cuánto tiempo alcanza la altura máxima?

V. El producto de dos números reales positivos cuya suma es 32 está dada por

$$p(x) = 32x - x^2$$

a) Encuentra los dos números que maximizan el producto.
d) ¿cuánto vale el producto?

Valoración del profesor Unidad 2

Evaluación formativa			
Número de ejercicio	Insuficiente	Suficiente	Logrado
2. 1			
2.7			
2.11			
Comentarios del profesor:			

Evaluación sumativa	
Número de ejercicio	Puntaje del ejercicio
2.2	
2.3	
2.4	
2.5	
2.6	
2.8	
2.9	
2.10	
2.12	
2.13	
Total logrado	

Propuesta de evaluación de unidad 2	
Ejercicio	Puntaje del ejercicio
I	
II	
III	
IV	
V	
Calificación	

Fuentes de consulta

Aprendiendo matemática. (2021, 8 abril). *Cómo graficar una parábola sin raíces reales* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=CwMGRJnPbVc

Espinoza, H. (s/f). Vértice y eje de simetría. Recuperado 15 marzo de 2022 de https://www.geogebra.org/m/zkCBsw87

Jara, R. (2019, 26 mayo). *Vértice de una Cuadrática Eje de Simetría y Raíces*. [Vídeo]. YouTube. https://youtu.be/V47kXeIYM5o

Math, L. (2012, 27 marzo). Encontrar las Raíces Imaginarias en una Parábola [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=liGfUf3h-NI&feature=youtu.be

Math, L. (2011, 4 febrero). Funciones Cuadráticas: Encontrar raíces de parábolas [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=48cyhun8zDY&feature=youtu.be

masmatemática. (2020, 12 abril). *Función Cuadrática (1° ejemplo, raíces reales)* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=Tw-mA56SCr4

Montagna, P., y Mullor, M. (2010). Vértice. Eje de simetría. Intersecciones con los ejes coordenados. Recuperado 25 de marzo de 2022 de https://sites.google.com/site/matematica331/vertice-eje-de-simetria-intersecciones-con-los-ejes-coordenados

Ortiz, A. (2022, 20 marzo). *Forma general de una función cuadrática*. GeoGebra. Recuperado 25 de marzo de 2022, de https://www.geogebra.org/m/ggbwjcsv

Preuniversitario Nicolasa Quintreman. (2020, 28 agosto). *Diferencia entre Ecuación Cuadrática y Función Cuadrática* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=2BrIt7xja90

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Recuperado el día 24 de agosto de 2021 de https://henryhs14.files.wordpress.com/2015/02/algebra-y-trigonometria-con-geometria-analitica-swokowski-12th.pdf

Vázquez Hernández, M. (2022, 30 marzo). *Forma estándar función cuadrática*. GeoGebra. Recuperado 12 de abril de 2022, de https://www.geogebra.org/m/rnchjkpd

Solución a ejercicios Unidad 2

2.2 $f(x) = (x+5)(x-2)$, $x+5=0$, $x-2=0$, $x_1=-5$, $x_2=2$ son los valores de x donde corta la gráfica de la función al eje de las abscisas.

2.3 $f(x) = (x-1)(x-1)$, $x-1=0$, $x_{1,2}=1$ es el valor de x donde la gráfica de la función toca al eje X.

2.4 $D=-7$, $x_1 = \frac{3-\sqrt{7}\,i}{4}, x_2 = \frac{3+\sqrt{7}\,i}{4}$, por lo que no hay intersección del eje X.

2.5 a) Dos raíces reales, $\boldsymbol{x_1 = 4, x_2 = 3}$ y b) Una raíz rea, $\boldsymbol{x = \frac{3}{2}}$**.**

2.6 a) Abre hacia arriba o abre hacia abajo, b) mueve la gráfica, c) es el punto donde la gráfica toca el eje Y (ordenada al origen), d) de "b" no es claro qué modifica en la gráfica.

2.7 a) Permite conocer el valor máximo o mínimo de la función, las coordenadas del vértice, la ecuación del eje de simetría, la concavidad y determinar las raíces b) El tipo de concavidad de la gráfica, así como que tan abierta o cerrada es la parábola.

2.8 a) $f(x) = (x-\frac{3}{2})^2 - \frac{11}{4}$, $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{4}\right)$, $x_1 = \frac{3-\sqrt{11}\,i}{2}, x_2 = \frac{3+\sqrt{11}\,i}{2}$

b) $f(x) = (x+\frac{1}{4})^2 - \frac{41}{4}$, $V\left(-\frac{1}{4}, -\frac{41}{4}\right)$, $x_1 = \frac{-1-\sqrt{41}}{4}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{41}}{4}$

2.9 a) $f(x) = -x^2 - 2x - 8, V(-1,-7), x_1 = -1-\sqrt{7}\,i, x_2 = -1+\sqrt{7}\,i$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 1, V(2,-3), x_1 = 2-\sqrt{3}, x_2 = 2+\sqrt{3}$

2.12 a) $V(3,0), x = 3$, concavidad positiva, mínimo.

b) $V(0,5), x = 0$, concavidad negativa, máximo.

2.13 a) Largo: 74 cm, alto: 37cm y área máxima: 2738cm²

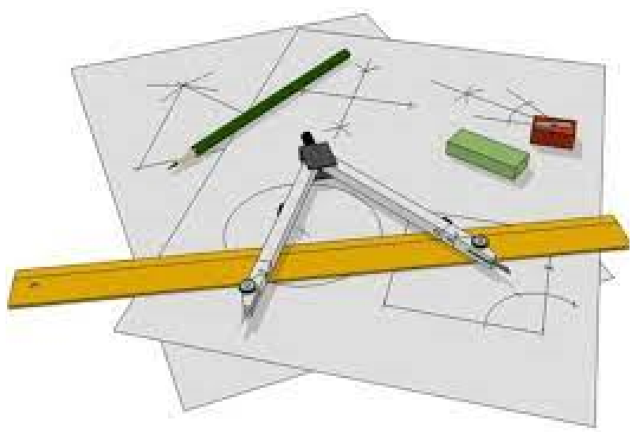
b) Tiempo de altura máxima: 2.5 segundos, altura máxima: 175 pies.

c) Los ingresos y gastos se igualan en 2 y 10 años.

Los ingresos máximos son: 5 años con 8.25 millones de dólares

Los gastos mínimos son: 7.5 años con 958333 dólares.

UNIDAD 3
Elementos básicos de geometría plana



Propósito de la unidad:

Al finalizar, el alumno comprenderá algunos conceptos y relaciones geométricas, obtenidos empíricamente a través de construcciones con regla y compás. Aplicará los conocimientos en la resolución de problemas geométricos.

Aprendizajes

- *Comprende mediante la construcción, los conceptos: segmento de recta, punto medio, líneas paralelas, líneas perpendiculares, mediatriz, ángulo, bisectriz.*
- *Concluye que en el caso que dos rectas paralelas sean cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes e inversamente.*
- *Explica en qué casos es posible construir un triángulo, a partir de tres segmentos dados.*
- *Muestra y justifica las propiedades entre los ángulos de un triángulo.*
- *Aplica las propiedades de los ángulos de un triángulo en la resolución de problemas.*
- *Justifica y aplica las propiedades del triángulo isósceles.*
- *Utiliza los conocimientos adquiridos, en la resolución de problemas.*

Antes de comenzar con el contenido de la unidad, te invitamos a revisar el siguiente video.

SCAN ME

Historia de la geometría

https://www.youtube.com/watch?v=8_ow8PKYcsY

Ejercicio 3.1 Responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Sabes cuál es la cuna de la geometría plana?

____

b) ¿Quién fue el principal exponente de la geometría plana?

____

c) ¿Cuál es el nombre del libro más antiguo de la geometría plana?

____

d) ¿De qué otra manera se nombra a la geometría plana?

e) ¿Cuáles son los instrumentos básicos que se utilizan para construir figuras geométricas en el plano?

f) ¿Por qué crees que es importante conocer la geometría plana?

3.1 Bosquejo histórico de la geometría plana.

En los pueblos de Oriente medio (Mesopotamia, Babilonia, Asiria, Antiguo Egipto, etc.), hay vestigios del conocimiento del triángulo, el Teorema de Pitágoras, el número pi, entre otras, lo cual da pie a entender por qué realizaron grandes edificaciones. Siglos después, los griegos concentraron a través de Euclides todos los conocimientos de geometría desperdigados a través del libro “Elementos”. Aunque ya tiene más de 2500 años de antigüedad, todavía se puede conocer como los griegos concebían a la geometría plana.

La obra cumbre de Euclides “Elementos”, muestra de manera axiomático-deductivo y en tan sólo cinco postulados, la construcción de toda la Geometría y Aritmética hasta ese momento conocida.

Ejercicio 3.2 Revisa el siguiente video y escribe los cinco postulados de la geometría euclidiana.

SCAN ME

Postulados de Euclides

https://www.youtube.com/watch?v=qnfjhDGRUo8

3.2 Descripción de algunas proposiciones de la geometría plana.

Proposición: Es el enunciado de un hecho, como una ley o principio, o el enunciado de una cuestión por resolver.

Las principales proposiciones que se emplean en matemáticas son los siguientes:

Axioma	Es una proposición que, siendo evidente, no requiere demostración. Por ejemplo, "*La parte es menor que el todo (finito).*" "*Si a cantidades iguales se agrega una misma cantidad los resultados serán iguales.*"
Postulado	Es una proposición cuya verdad, aunque no tenga la evidencia de un axioma, se admite sin demostración.
Teorema	Es una proposición cuya verdad necesita demostración. Por ejemplo, "*El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.*"
Problema	Es una cuestión que se propone para resolverse. En geometría los problemas más comunes son aquellos en los que se pide construcciones que llenen requisitos dados.
Corolario	Es una proposición que es consecuencia inmediata de otra, y cuya demostración requiere poco o ningún razonamiento nuevo. Por ejemplo, "*Todos los ángulos rectos son iguales.*"

3.2.1 Ejemplos de algunas proposiciones.

A continuación, enlistamos una serie de proposiciones que son las más utilizadas.

Axiomas:

1. Si a cantidades iguales se agregan o quitan cantidades iguales, los resultados son iguales.
2. Si a cantidades iguales se multiplican o dividen por cantidades iguales, los resultados son iguales. No aplica si el divisor es cero.
3. Si a cantidades iguales se elevan a una misma potencia, o si a ambas se les extrae una misma raíz, los resultados son iguales.
4. Si en los dos miembros de una desigualdad se ejecuta una misma operación con números positivos, el sentido de la desigualdad no se altera.

Por ejemplo, $a > b$, y x e y son cantidades positivas iguales, se tiene:

$a + x > b + y$	$a - x > b - y$	$ax > by$	$\frac{a}{x} > \frac{b}{y}$

5. Si se suman dos desigualdades de un mismo sentido, los resultados son iguales en el mismo sentido. Si, por ejemplo, $a > b$, $c > d$, se tiene también: $a + c > b + d$.
6. Si los dos miembros de una desigualdad se restan de los dos de una igualdad, los resultados son desigualdades en sentido opuesto al de la desigualdad dada.

   Si $a > b$ y $x = y$, entonces $x - a < y - b$.

7. Dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí.

8. Toda cantidad puede reemplazarse con su igual.

9. Si una cantidad es mayor que otra, y ésta mayor que una tercera, la primera es mayor que la tercera.

   Si $a > b$ y $b > c$, se tiene también: $a > c$.

10. El todo (finito) es mayor que cualquiera de sus partes, e igual a la suma de sus partes.

Postulados:

1. Por dos puntos cualesquiera puede hacerse pasar una recta, y sólo una.
2. Toda recta puede prolongarse en ambos sentidos.
3. El camino más corto entre dos puntos es la recta que los une.
4. Es siempre posible describir una circunferencia de centro y radio dados.
5. Toda figura puede hacerse cambiar de posición sin alterar su forma ni sus dimensiones.
6. Todos los ángulos de lados colineales son iguales.

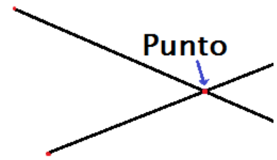
Corolarios:

1. Dos puntos determinan una recta.
2. Dos rectas no pueden cortarse en más de un punto.
3. Todos los ángulos rectos son iguales.
4. En un punto cualquiera de una recta puede dibujarse una perpendicular a esa recta, y sólo una.
5. Ángulos iguales tienen complementos iguales, suplementos iguales y conjugados iguales.
6. Un ángulo mayor que otro tiene menor complemento, suplemento y conjugado que ese otro.

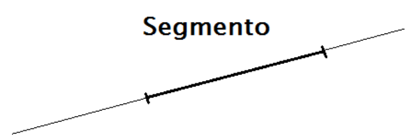
3.3 Conceptos básicos de la geometría plana.

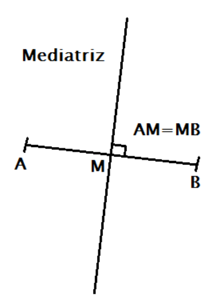
A continuación, se realizará la descripción de algunas figuras de la geometría plana.

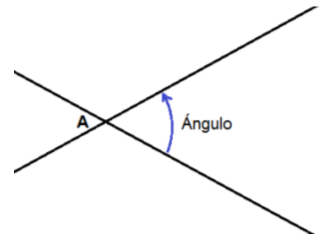
Nota: Se utilizarán letras mayúsculas cuando se refiera al extremo de un segmento, a la intersección de dos rectas, a puntos de la recta, a los vértices de un polígono. Se utilizará letra minúscula cuando se refiera en general a una recta, una curva o un segmento.

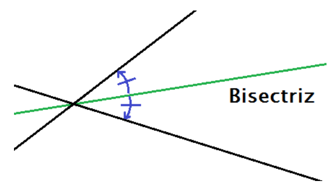
Punto	Puede concebirse como la intersección de dos líneas o rectas.	

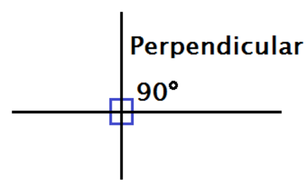
Recta	Es la intersección de dos planos no paralelos	

Segmento	Se dice que es un trozo o sección de una línea recta	

Mediatriz	Recta que pasa por el punto medio de un segmento y es perpendicular a él.	

Ángulo	Abertura de dos rectas que se cortan. El ángulo se puede representar con la letra **A,** si existe ambigüedad se utilizan letras del alfabeto griego o tres puntos.	

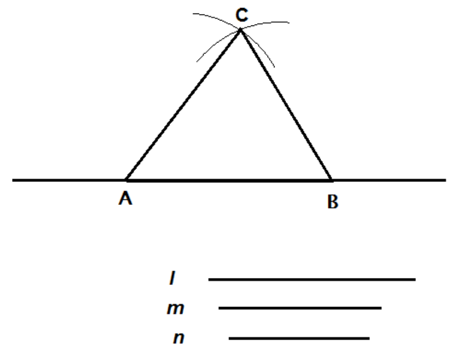
Bisectriz	Línea que divide a un ángulo en dos ángulos congruentes	

Perpendicular	Línea o recta que forma con otra recta un ángulo recto (90°).	

3.4 Construcción con regla y compás de algunas figuras en el plano.

A continuación, se realizará la construcción con los instrumentos mínimos necesarios para algunas figuras geométricas.

Construcción 1. Un triángulo cuyos lados son iguales respectivamente a tres segmentos dados.

Sean l,m y n los tres segmentos dados. Trazar una recta cualquiera y marcar en ella por medio del compás un segmento AB igual a l. Haciendo centro en A y B, respectivamente, y con radios iguales a m y n, trazar los arcos, que se cortarán en un punto C. Trazar AC y BC. El triángulo ABC es el buscado.	

Ejercicio 3.3 En el siguiente enlace se encuentran diferentes videos que explican algunas construcciones con regla y compás, a partir de ellos, deberás realizar lo que se solicita en los incisos.

SCAN ME

Construcciones con regla y compás

https://dibujonavarres.wordpress.com/2oeso-epva/tema-1-trazados-geometricos-basicos/paralelas-y-perpendiculares-con-regla-y-compas/

a) Una recta paralela que pase por un punto exterior a una recta dada.
b) Una recta perpendicular que pase por un punto exterior a una recta dada.
c) Una recta perpendicular que pase por un punto que está sobre una recta dada.
d) La mediatriz de un segmento dado.

Ejercicio 3.4 Investiga los pasos para realizar las siguientes construcciones con regla y compás y realízalas:

a) La bisectriz de un ángulo dado.
b) Un triángulo cuyos lados sean iguales.
c) Un triángulo con dos lados iguales.
d) Un ángulo congruente a un ángulo dado.

3.5 Congruencia de ángulos.

Partamos de conocer el concepto de congruencia y un postulado que nos permitirá realizar algunas demostraciones.

Congruencia de ángulos

Se dice que dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida angular. Por ejemplo, si el $\angle ABC$ es congruente al $\angle A'B'C'$ se escribirá $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.

Postulado

La relación de **congruencia cumple la propiedad de transitividad**; es decir, dados tres ángulos que cumplan $\angle \boldsymbol{ABC} \cong \angle \boldsymbol{A'B'C'}$ y $\angle \boldsymbol{A'B'C'} \cong \angle \boldsymbol{PQR}$, entonces $\angle \boldsymbol{ABC} \cong \angle \boldsymbol{PQR}$.

Teorema

Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

Demostración

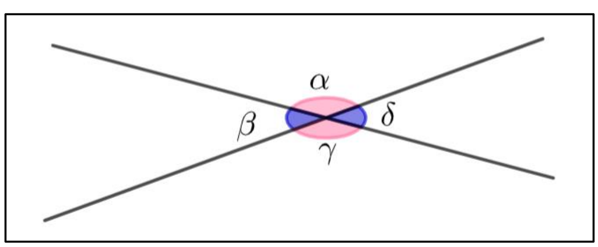


Figura 1. Ángulos opuestos por el vértice

Hipótesis: α y γ son opuestos por el vértice

Tesis: $\angle\alpha \cong \angle\gamma$

Razonamiento	
Afirmación	**Justificación**
$\alpha + \beta = 180°$	Por ser ángulos suplementarios
$\beta + \gamma = 180°$	Por ser ángulos suplementarios
$\alpha + \beta = \beta + \gamma$	Por transitividad
$\angle\alpha \cong \angle\gamma$	

3.6 Ángulos entre paralelas y una transversal

Quinto postulado de Euclides

Si una línea recta corta a otras dos rectas formando con ellas ángulos interiores del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan del lado por el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos.

Los ángulos que se generan entre dos rectas paralelas y una transversal se nombran con base en su ubicación respecto a las paralelas y a la transversal.

Aquellos que están fuera de las rectas paralelas se les llama **externos**, mientras que los que se ubican dentro se llaman **internos**. Por otro lado, los que están en diferentes lados de la transversal se llaman **alternos**, y aquellos que se encuentran del mismo lado se llamarán **conjugados** o **colaterales**.

Ejercicio 3.5 Realiza las actividades que se solicitan.

a) Revisa el siguiente recurso en GeoGebra, selecciona una por una cada casilla con los diferentes nombres de los ángulos e identifica la posición de cada uno. Esto te servirá para realizar la siguiente actividad.

SCAN ME

Ángulos entre paralelas

https://www.geogebra.org/m/vbaqv6e5

b) Con la siguiente figura y después de haber comprendido los nombres de los ángulos respecto a su posición para rectas paralelas cortadas por una transversal, relaciona las columnas considerando que $L_1 \parallel L_2$

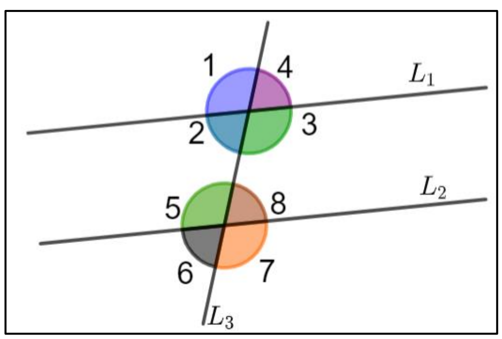


Figura 2. Nombres de ángulos entre paralelas y una transversal

1. Así se llama a los ángulos 1 y 7	( ) Conjugados internos
2. Nombre que reciben los ángulos 3 y 8	( ) Conjugados externos
3. Es el nombre de los ángulos 3 y 5	( ) Correspondientes
4. Así se conoce a los ángulos 5 y 1	( ) Alternos externos
5. Los ángulos 4 y 7 se conocen como	( ) Alternos internos

Teorema

Los ángulos correspondientes son congruentes.

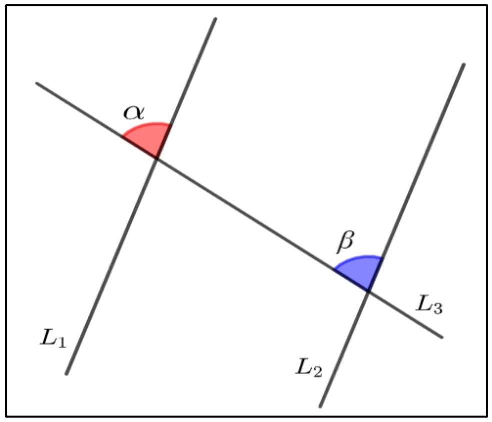


Figura 3. Ángulos correspondientes

Al observar la figura anterior con $L_1 \parallel L_2$, si trasladamos la recta L_2 hasta sobreponerla a la recta L_1 tenemos que el $\angle\beta$ queda encima del $\angle\alpha$, entonces se cumple que $\angle\alpha \cong \angle\beta$.

3.6.1 Ángulos congruentes entre rectas paralelas y una transversal

Teorema

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ***ángulos alternos internos*** *son* ***congruentes****.*

Demostración.

Consideremos la siguiente figura en la que $L_1 \parallel L_2$ y L_3 es transversal (corta) a las dos primeras.

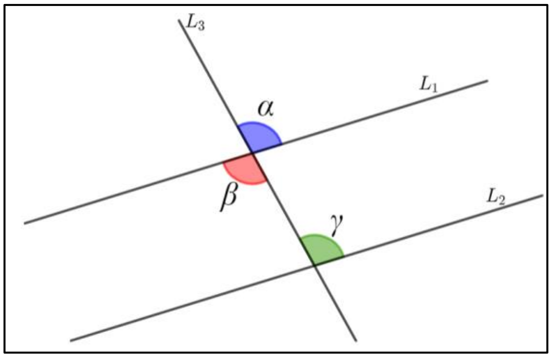


Figura 4. Ángulos entre paralelas y una transversal

Hipótesis: $\angle\beta$ y $\angle\gamma$ son alternos internos.

Tesis: $\angle\beta \cong \angle\gamma$

Razonamiento	
Afirmación	**Justificación**
$\alpha = \gamma$	Por ser correspondientes
$\alpha = \beta$	Por ser opuestos por el vértice
$\beta = \gamma$	Por transitividad
$\angle\beta \cong \angle\gamma$	

De manera similar se puede demostrar el siguiente teorema, que para efectos de su aplicación ya no será demostrado.

Teorema

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces ***los ángulos alternos externos*** *son* ***congruentes****.*

3.6.2 Ángulos suplementarios entre rectas paralelas y una transversal

Teorema

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ***ángulos conjugados internos*** *son* ***suplementarios****.*

Demostración.

Consideremos la siguiente figura en la que $L_1 \parallel L_2$ y L_3 es transversal a las dos primeras

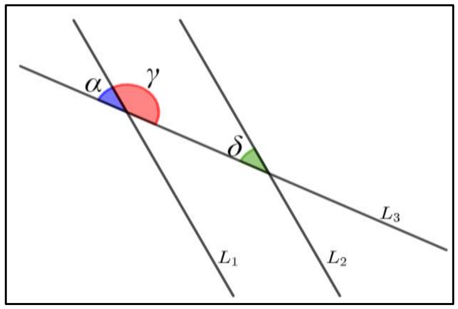


Figura 5. Ángulos entre paralelas y una transversal

Hipótesis: $\angle\delta$ y $\angle\gamma$ son conjugados internos.

Tesis: $\delta + \gamma = 180°$

Razonamiento	
Afirmación	**Justificación**
$\alpha = \delta$	Por ser correspondientes
$\alpha + \gamma = 180°$	Por ser suplementarios
$\delta + \gamma = 180°$	Por transitividad

De manera similar se puede demostrar el siguiente teorema, que para efectos de su aplicación ya no será demostrado.

Teorema

*Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces **los ángulos conjugados externos** son **suplementarios**.*

Ejemplo 1.

Calcula el valor de x sabiendo que $L_1 \parallel L_2$

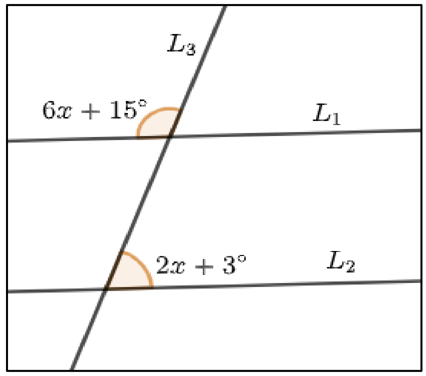


Figura 6. Cálculo de ángulos entre paralelas, ejemplo 1.

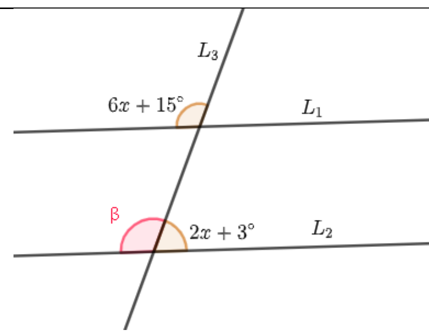
<table>
<tr><td>Como los ángulos indicados no pertenecen a ninguno de los que se nombraron anteriormente, dibujaremos ángulos adyacentes que, permitirá saber si son ángulos congruentes o suplementarios.</td><td>

Figura 7. Trazos auxiliares, ejemplo 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">$6x + 15°$ y $2x + 3°$ son suplementarios.
<table>
<tr><th colspan="2">Razonamiento</th></tr>
<tr><th>Afirmación</th><th>Justificación</th></tr>
<tr><td>$6x + 15° = \beta$</td><td>Por ser correspondientes</td></tr>
<tr><td>$\beta + 2x + 3° = 180°$</td><td>Por ser suplementarios</td></tr>
<tr><td>$6x + 15° + 2x + 3° = 180°$</td><td>Por transitividad</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Resolviendo la ecuación</td><td>$8x + 18° = 180°$
$8x = 180° - 18°$
$x = \frac{162°}{8}$
$\boldsymbol{x = 20.25°}$</td></tr>
</table>

En ocasiones no solo se dibujan ángulos secundarios para resolver problemas, también se pueden dibujar rectas o prolongarlas para obtener más información.

Ejercicio 3.6

I. Calcula el valor de las literales en las siguientes figuras, sabiendo que $L_1 \parallel L_2$.

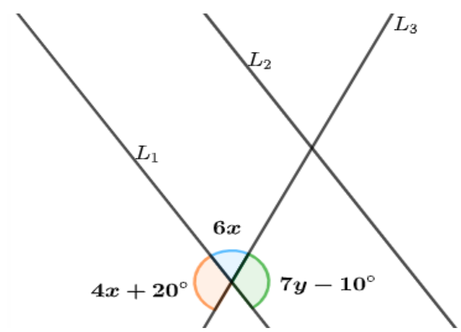


Figura 8. Imagen para calcular ejercicio a.

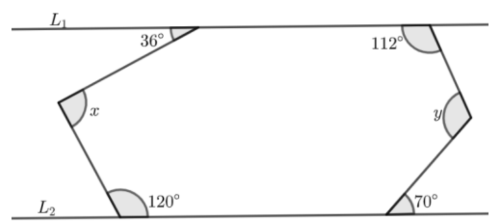


Figura 9. Imagen para calcular ejercicio b.

II. En la siguiente figura $\overleftrightarrow{PP'} \parallel \overleftrightarrow{QQ'}$ y $\overleftrightarrow{SS'}$ es una recta secante, hallar el valor de x.

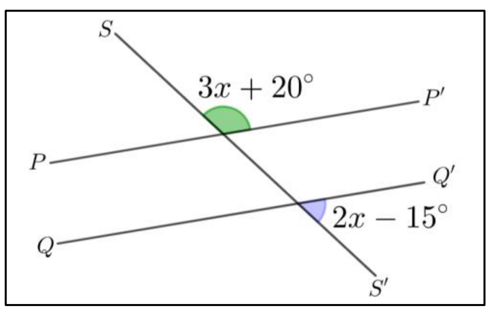


Figura 10. Imagen para calcular ejercicio II

3.7 Clasificación de triángulos por sus lados

Ejercicio 3.7 Elabora un mapa mental con la clasificación del siguiente material.

SCAN ME

Ángulos entre paralelas

https://www.youtube.com/watch?v=7-YGUl8tLeQ

Existen también otros tipos de triángulos que son poco conocidos, se trata de los triángulos degenerados.

Triángulo degenerado

Es aquel que tiene todos sus vértices colineales o coincidentes y área cero.

3.8 Desigualdad del triángulo

Una forma de construir los triángulos es a partir de las medidas de sus lados.

Ejercicio 3.8 Dibuja los triángulos con las medidas propuestas e indica qué tipo de triángulo se forma.

a) $p = 5\,cm,\ q = 7\,cm,\ r = 9\,cm$
b) $t = 2cm,\ u = 3\,cm,\ w = 6\,cm$
c) $a = 3\,cm,\ b = 4\,cm,\ c = 5\,cm$
d) $f = 6\,cm,\ g = 8\,cm,\ h = 14\,cm$

Teorema (Desigualdad del triángulo)

*La **suma de las longitudes de dos lados** cualesquiera de un triángulo **es mayor o igual** que la longitud **del tercer lado**.*

$$a + b \geq c$$

$$b + c \geq a$$

$$a + c \geq b$$

Ejercicio 3.9

I. Considerando que las tres medidas que se ofrecen en cada inciso corresponden a las longitudes de triángulos, escribe las tres desigualdades de cada uno.

a) $p = 5\,cm,\ q = 7\,cm,\ r = 9\,cm$

b) $t = 2\,m,\ u = 3\,m,\ w = 6\,m$

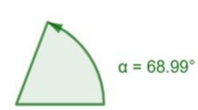
c) $a = 3\,in,\ b = 4\,in,\ c = 5\,in$

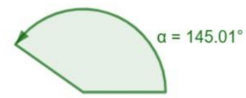
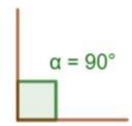
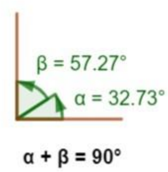
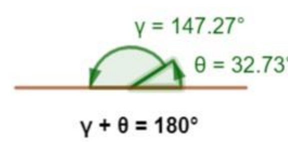
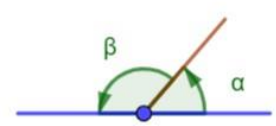
d) $f = 6\,u,\ g = 8\,u,\ h = 14\,u$

II. En un párrafo comenta la relación del teorema de desigualdad del triángulo respecto a las construcciones del ejercicio anterior.

3.9 Propiedades del triángulo

Para conocer más acerca de las propiedades entre los ángulos de un triángulo, empecemos conociendo algunas definiciones:

Ángulo Agudo	Es aquel que mide menos de 90° $\alpha < 90°$	

Ángulo Obtuso	Es aquel que mide más de 90 ° pero menos de 180° $90° < \alpha < 180°$	
Ángulo Recto	Es aquel que mide exactamente 90 ° $\alpha = 90°$	
Ángulos Complementarios	Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es igual a 90° $\propto + \beta = 90°$	
Ángulos Suplementarios	Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es igual a 180° $\gamma + \theta = 180°$	
Ángulos Adyacentes	Dos ángulos son adyacentes si tienen un mismo vértice y un lado en común.	

A partir de los conceptos anteriores, todos los triángulos cumplen con una serie de propiedades con respecto a sus ángulos, internos o externos**,** a continuación, mencionamos la primera:

Teorema
Para cualquier **triángulo**, ***la suma de sus ángulos interiores es igual a 180°.***

Demostración

Prolongamos el segmento BC hasta D, realizamos un trazo auxiliar donde $CF \parallel AB$ y finalmente trazamos otro segmento auxiliar tal que $BC \parallel EF$. $\angle A, \angle B$ y $\angle C$ son los ángulos internos del $\triangle ABC$.

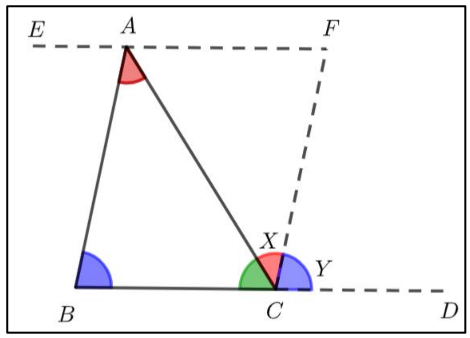


Figura 11. Suma de ángulos internos

Hipótesis: $\angle X \cong \angle A$ e $\angle Y \cong \angle B$

Tesis: $A + B + C = 180°$

Razonamiento	
Afirmación	**Justificación**
$C + X + Y = 180°$	Por formar un ángulo llano
$BC \parallel EF$	Por construcción
$AB \parallel CF$	Por construcción
$CD \parallel EF$	Por construcción
$X = A$	Por ser alternos internos
$Y = B$	Por ser correspondientes
$A + B + C = 180°$	Por transitividad

Ejemplo 2.

Calcular los valores de los ángulos interiores del siguiente triángulo

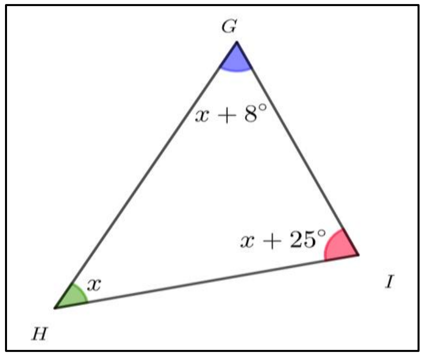


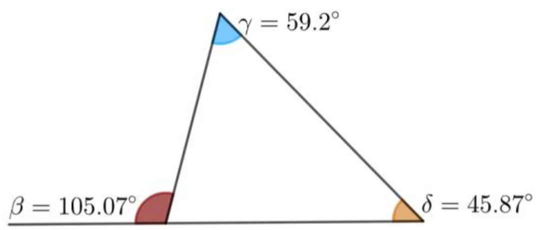
Figura 12. Ejemplo de suma de ángulos internos

Con el teorema anterior sabemos que independientemente del tipo de triángulo que se forme, la suma de sus ángulos internos es de 180°	$H + \ G + I = 180°$ *Sustituyendo:* $x + (x + 8) + (x + 25) = 180°$ *Resolviendo:* $3\ x + 33 = 180°$ $x = \frac{180-33}{3} = \frac{147}{3} = 49°$ $G = x + 8 = 57°$ $H = 49°$ $I = x + 25 = 49 + 25 = 74°$

Existe también una segunda propiedad pero que relaciona un ángulo externo con dos internos, se puede enunciar de la siguiente manera:

Teorema
*En todo triángulo, **la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos interiores no adyacentes a él**.*

Para efectos de su aplicación ya no será demostrado, solo ejemplificado.

	$\beta = \gamma + \delta$ $105.07° = 59.2° + 45.87°$

Ejemplo 3.

Calcular las medidas de los ángulos interiores del siguiente triángulo

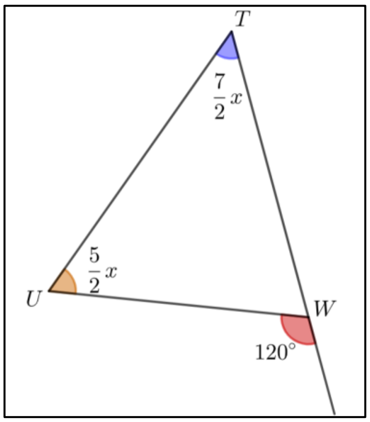


Figura 13. Ejemplo para aplicar el teorema del ángulo exterior.

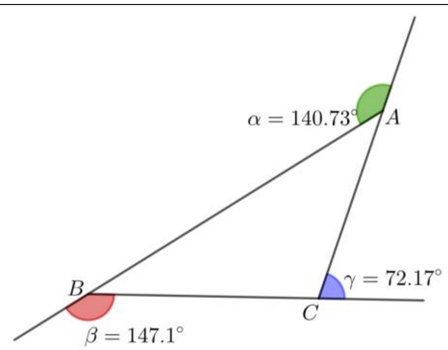
Con el teorema anterior sabemos que el ángulo exterior al vértice W, que en la figura aparece con una medida de 120°, debe ser igual a la suma de los ángulos no	$T + U = 120°$ *Sustituyendo:* $\frac{7}{2}x + \frac{5}{2}x = 120°$

adyacentes en el triángulo, es decir, T y U.	*Resolviendo:* $\frac{12}{2}\ x = 120°$ $6x = \ 120°$ $\quad x = \frac{120°}{6} = 20°$ $T = \frac{7}{2}x = 70°$ $U = \frac{5}{2}x = 50°$

Finalmente, existe una tercera propiedad que relaciona todos los ángulos externos, a continuación, la enunciamos y ejemplificamos visualmente.

Teorema   *La suma* ***los ángulos exteriores*** *de un triángulo* ***es de 360°.***

Al igual que las propiedades, solo será ejemplificada.

	$\alpha + \beta + \ \gamma = 360\ °$ $140.73° + 147.1° + 72.17° = 360°$

Ejercicios 3.10 Calcula el o los valores que se solicitan en los siguientes problemas

a) Dos de los ángulos internos del triángulo RST, tienen como medida $R = 76.3°$ y $S = 49.1°$. ¿Cuál es la medida del ángulo T?

b) En el triángulo de la figura siguiente determina las medidas de los ángulos internos.

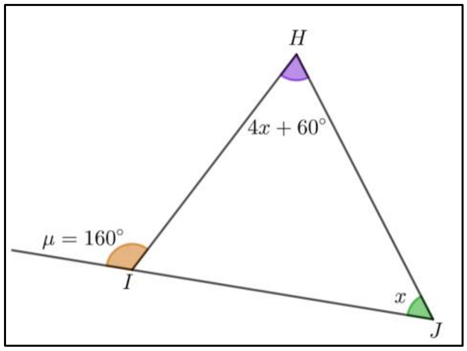


Figura 14. Ejercicio b de propiedades de triángulos

c) Determina la medida del ángulo γ, en el triángulo de la figura siguiente.

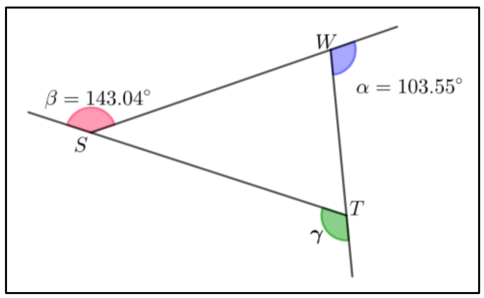


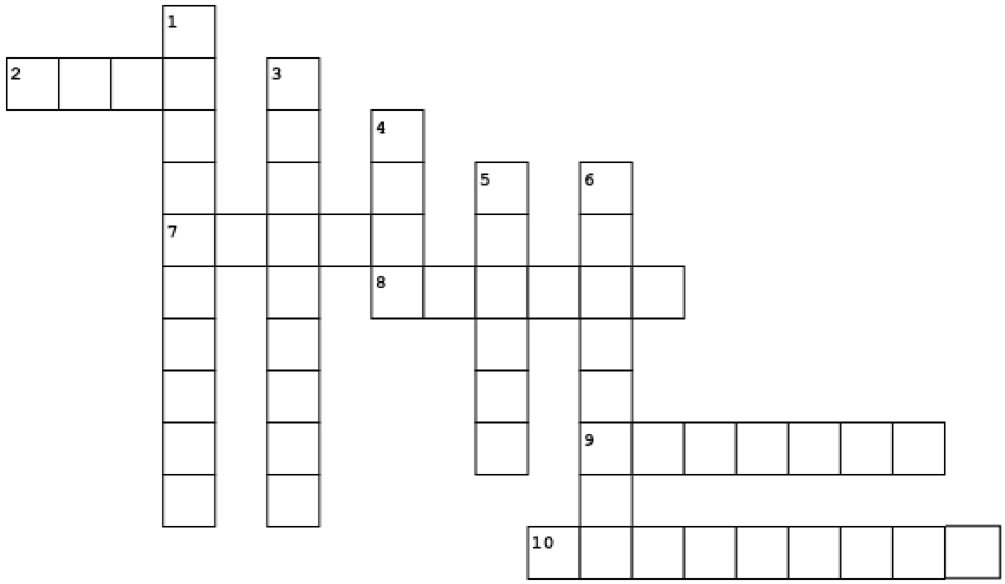
Figura 15. Ejercicio c de propiedades de triángulos

3.10 Propiedades del triángulo isósceles

Los triángulos isósceles, además de las propiedades anteriores cuentan con algunas que particularmente se aplican a ellos.

Ejercicio 3.11 Resuelve el siguiente crucigrama.

CRUCIGRAMA TRIÁNGULO ISÓSCELES



HORIZONTAL

2. En un triángulo isósceles, ¿qué nombre recibe el lado desigual a los otros dos?

7. ¿Cómo se llama el vértice opuesto a la base de un triángulo isósceles?

8. Segmento perpendicular que va de la base al ápice de un triángulo isósceles.

9. Los lados congruentes del triángulo isósceles se conocen como patas o piernas, ¿qué otro nombre reciben?

10 Triángulo con dos lados de igual longitud.

VERTICAL

1. Triángulo que tiene un ángulo de 90º.

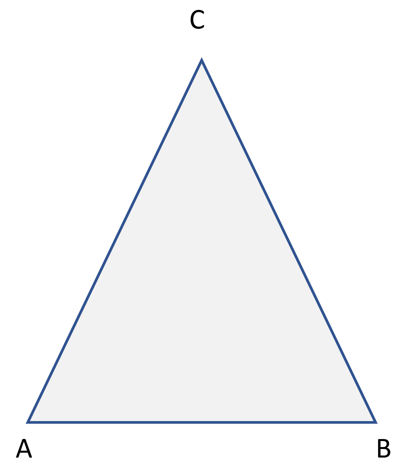
3. Medida del triángulo que se calcula mediante la suma de las medidas de sus lados.

4. Medida del triángulo que se calcula usando la fórmula de Heron.

5. Si un triángulo isósceles tiene dos ángulos congruentes menores de 45°, el otro debe ser:

6. Son elementos de un triángulo.

Ejercicio 3.12 Completa el siguiente recuadro y las afirmaciones que se muestran a continuación.

Un triángulo es isósceles si tiene dos lados iguales.	
Para demostrar varias propiedades del triángulo isósceles, trazaremos la bisectriz del ángulo C, opuesto a la base. A la intersección de la bisectriz en la base le llamaremos O.	

Subraya la respuesta correcta:

I. El ángulo ACO es igual al ángulo BCO, dado que la recta CO es.

a) bisectriz
b) mediatriz
c) paralela

II. El lado AC es _______________ al lado BC, dado que son los lados iguales del triángulo isósceles.

a) Diferente
b) Congruente
c) Secante

III. El segmento CO del triángulo ACO es_______________ al segmento CO para el triángulo BCO

a) Igual
b) Diferente
c) semejante

A partir de lo anterior podemos decir que:

- Los ángulos en los vértices A y B, son iguales.
- Los segmentos AO y BO son congruentes.
- Los ángulos AOC y BOC son congruentes y como son adyacentes son rectos.

Por lo tanto, llegamos a las siguientes conclusiones, **en todo triángulo isósceles:**

1.-Los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes.
2.-La bisectriz del ángulo opuesto a la base, corta a la base en su punto medio y también es perpendicular a ella, teniendo como consecuencia: **a) La bisectriz coincide con la altura correspondiente al lado AB.** **b) La bisectriz coincide con la mediatriz del lado AB.** **c) La bisectriz coincide con la mediana del lado AB.**

3.11 Puntos y rectas notables en los triángulos

Ejercicio 3.13

a) Revisa el siguiente recurso e identifica qué rectas y puntos notables se relacionan activando las casillas de verificación.

SCAN ME

Puntos y rectas notables

https://www.geogebra.org/m/utA2PDWD

b) Con la información anterior relaciona las siguientes columnas

1. Punto donde se intersecan las rectas que contienen a las alturas de un triángulo.	( ) Incentro
2. Es donde coinciden las tres medianas de un triángulo.	( ) Ortocentro
3. Este punto también puede generar una circunferencia circunscrita al triángulo.	( ) Recta de Euler
4. En cualquier triángulo, el único punto por el que no cruza la recta de Euler.	( ) Circuncentro
5. Requiere de la construcción de rectas previas para su ubicación.	( ) Baricentro

PROPUESTA DE EVALUACIÓN DE LA UNIDAD 3

Selecciona la respuesta correcta:

I. Nombre del libro de Euclides que comprende a la geometría plana

a) La Ilíada b) El banquete c) Elementos d) El caballo de troya

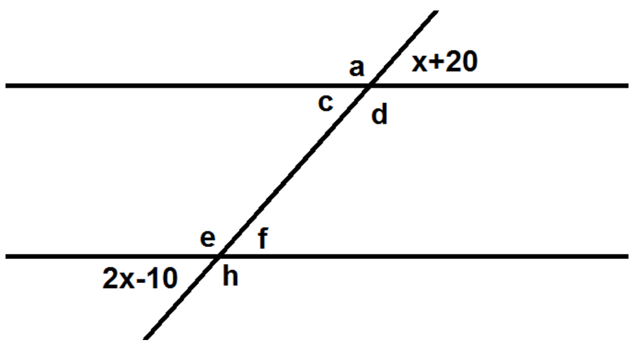
II. Nombre que se le da a la proposición que, siendo evidente, no requiere demostración.

a) Postulado b) Teorema c) Axioma d) Corolario

III. Nombre de la recta que pasa por el punto medio de un segmento y es perpendicular a él.

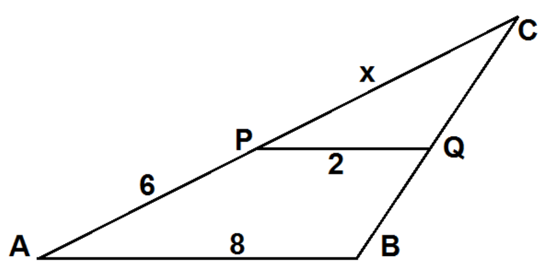
a) Bisectriz b) Mediatriz c) Paralela d) Tangente

IV. Se tienen dos rectas paralelas cortadas por una transversal, como en la siguiente figura, ¿cuál es la medida del ángulo h.



a) $h = 130°$ b) $h = 135°$ c) $h = 110°$ d) $h = 140°$

V. En el siguiente triángulo, utiliza los postulados de triángulos semejantes para calcular el valor de lado AC, sabiendo que $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$. El valor es:



a) $AB = 4$ b) $AB = 3$ c) $AB = 2$ d) $AB = 1$

VI. Nombre de la recta que pasa por el vértice de un triángulo y es perpendicular al lado opuesto o su prolongación.

a) Bisectriz b) Mediana c) Mediatriz d) Altura

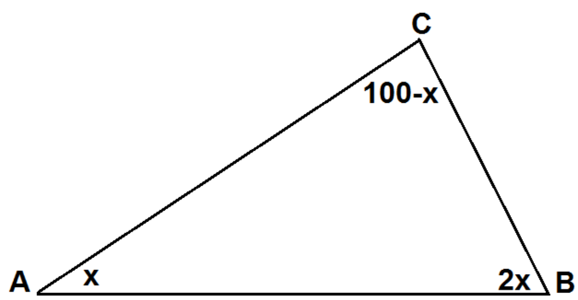
VII. Un triángulo acutángulo es aquel que tiene todos sus ángulos internos:

a) Obtusos b) Agudos c) Rectos d) Adyacentes

VIII. La suma de los ángulos interiores de un polígono de 12 lados (Dodecágono) es:

a) $1800°$ b) $1600°$ c) $1700°$ d) $1900°$

IX. Encuentra el valor del ángulo C del siguiente triángulo:



a) $C = 30°$ b) $C = 40°$ c) $C = 45°$ d) $C = 50°$

X. El punto notable del triángulo que se obtiene de la intersección de las medianas, se llama:

a) Circuncentro b) Incentro c) Ortocentro d) Baricentro

Valoración del profesor Unidad 3

Evaluación formativa			
Número de ejercicio	Insuficiente	Suficiente	Logrado
3. 1			
3.2			
3.3			
3.4			
3.7			
3.8			
Comentarios del profesor:			

Evaluación sumativa	
Número de ejercicio	Puntaje del ejercicio
3.5	
3.6	
3.9	
3.10	
3.11	
3.12	
3.13	
Total logrado	

Propuesta de evaluación de unidad 3	
Ejercicio	Puntaje del ejercicio
I	
II	
III	
IV	
V	
VI	
VII	
VIII	
IX	
X	
Calificación	

Fuentes de consulta

Alexander, D. y Koeberlein, G. (2013). *Geometría*. México: Cengage Learning.

Castaño, F. (2019, 18 diciembre). *Historia de la Geometría* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=8_ow8PKYcsY

Centro de Estudios Matemáticos Mauro Quintana. (2018, 14 noviembre). *Euclides; el más grande.* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=qnfjhDGRUo8

Clemens, S., O'Daffer, P., Cooney, T. y Sullivan, M. (2008). *Geometría y trigonometría*. México: Pearson Educación.

Ed Plástica, Visual y Audiovisual y Dibujo Técnico en el IES La Canal de Navarrés. (2020, 19 febrero). *Paralelas y perpendiculares con regla y compás*. Recuperado 18 de abril de 2022, de https://dibujonavarres.wordpress.com/2oeso-epva/tema-1-trazados-geometricos-basicos/paralelas-y-perpendiculares-con-regla-y-compas/

Leyva, V. (2019, Junio). *Propiedades del triángulo*. Portal Académico del CCH. Recuperado 11 de abril de 2022, de https://portalacademico.cch.unam.mx/matematicas2/geometria-del-triangulo/propiedades-triangulo

Moise, E. E. y Downs, F. L. (1972). *Serie matemática moderna. Geometría*. Cali, Colombia: Norma.

Pérez, D. H. (s. f.). *Rectas y Puntos notables del triángulo*. GeoGebra. Recuperado 17 de abril de 2022, de https://www.geogebra.org/m/utA2PDWD

Profe Vera Vera Secundario. (2014, 18 enero). *Clasificación de los triángulos según sus lados y sus ángulos* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=7-YGUl8tLeQ

Vázquez Hernández, M. (2022b, abril 30). *Nombres de ángulos entre paralelas y una transversal*. GeoGebra. Recuperado 12 de mayo de 2022, de https://www.geogebra.org/m/vbaqv6e5

Villarreal, C. E., González-Hernández J. (s.f.) Geometría (pp. 55-61). Recuperado el 11 de mayo de 2019 de http://eprints.uanl.mx/1822/1/Geometria.pdf

Solución a ejercicios Unidad 3

3.5 b) $2, 5, 4, 1, 3$

3.6 a) $x = 16°\ \ y = \frac{94}{7}°$; $x = 96°\ \ y = 138°$ b) $x = 35°$

3.9 a) $12 \geq 9,\ 16 \geq 5,\ 14 \geq 7$ b) $5 \geq 6,\ 9 \geq 2,\ 8 \geq 3$ c) $7 \geq 5,\ 9 \geq 3,\ 8 \geq 4$

d) $14 \geq 14,\ \ 22 \geq 6,\ 20 \geq 8$

3.10 a) $54.6°$ b) $J = 20\,°\ \ H = 140°$ c) $\gamma = °66.59$

3.11 Respuestas crucigrama

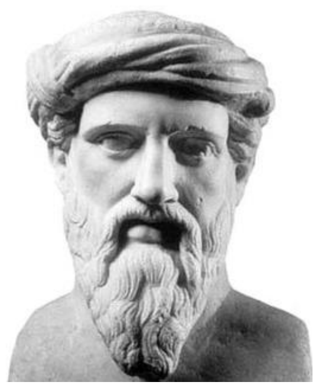
1. **Rectángulo**
2. **Base**
3. **Perímetro**
4. **Área**
5. **Obtuso**
6. **Vértices**
7. **Ápice**
8. **Altura**
9. **Catetos**
10. **Isósceles**

3.12 I. a, II. b, III. A

3.13 b) 4, 1, 5, 3, 2

UNIDAD 4

Congruencia, Semejanza y Teorema de Pitágoras



Propósito de la unidad:

Al finalizar, el alumno aplicará los conceptos de congruencia y semejanza y usará el Teorema de Pitágoras en la resolución de problemas que involucren triángulos. Argumentará deductivamente sobre la validez de algunas afirmaciones geométricas y procesos en la resolución de problemas.

Aprendizajes

- *Construye segmentos y ángulos congruentes*.
- *Reconoce cuándo dos triángulos son congruentes con base en la definición.*
- *Aplica los criterios de congruencia de triángulos para justificar congruencia entre lados, ángulos y triángulos.*
- *Resuelve problemas, por medio de los criterios de congruencia.*
- *Reconoce cuándo dos triángulos son semejantes con base en la definición.*
- *Aplica los criterios de semejanza en la resolución de problemas.*
- *Reconoce y justifica el Teorema de Pitágoras y su recíproco, desde el punto de vista geométrico y algebraico.*
- *Utiliza los conocimientos adquiridos en esta unidad, en la resolución de problemas.*

Antes de comenzar con el contenido de la unidad, te invitamos a revisar el siguiente video.

SCAN ME

Movimientos en el plano

https://www.youtube.com/watch?v=XfPEGMgBXiM

4.1 Congruencia

En la unidad anterior revisamos la definición

Congruencia de ángulos

Se dice que dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida angular. Si el ángulo ABC es congruente al ángulo $A'B'C'$ se escribirá $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.

4.1.1 Segmentos congruentes

Los segmentos de líneas congruentes son simplemente segmentos con la misma medida (longitud). Si el segmento AB es congruente al segmento CD, escribimos:

$$AB \cong CD$$

En figuras geométricas, dos segmentos se muestran que son congruentes marcándolos con el mismo número de marcas pequeñas perpendiculares, como se muestra a continuación.

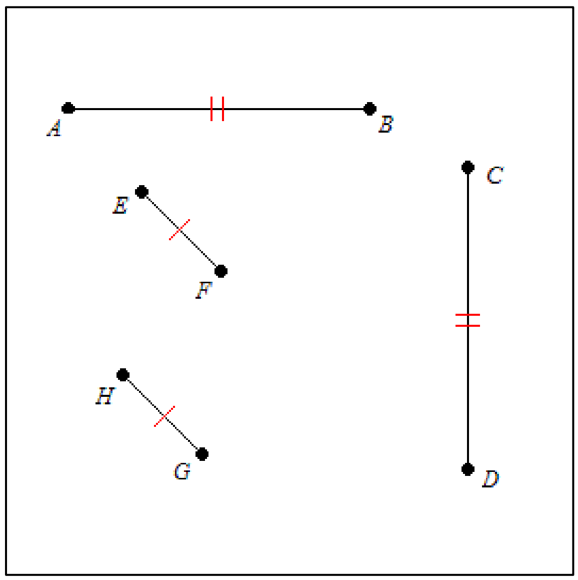


Figura 1. Segmentos congruentes.

En la figura anterior se observa que los segmentos EF y GH tienen una sola marca, lo que indica que entre ellos son congruentes, mientras que AB y CD cuentan con dos marcas, con esto podemos escribir entonces

$$EF \cong HG \qquad\qquad AB \cong CD$$

4.1.2 Ángulos congruentes

Los ángulos congruentes son ángulos con exactamente la misma medida.

En la figura mostrada el $\angle A$ es congruente con el $\angle B$, ambos de 45°.

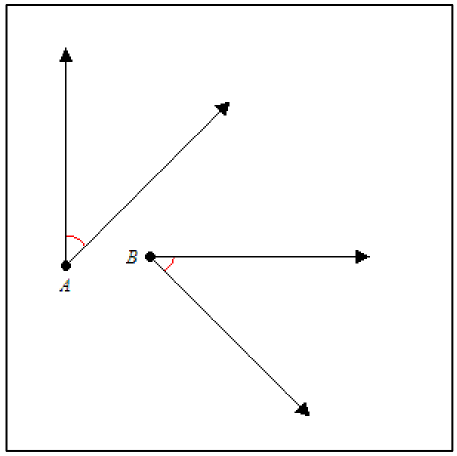


Figura 2. Ángulos congruentes

La congruencia de ángulos se muestra en las figuras marcando los ángulos con el mismo número de arcos pequeños cerca del vértice (aquí los marcamos con un arco rojo).

En geometría, si el $\angle A$ es congruente con el $\angle B$, escribimos:

$$\angle A \cong \angle B$$

Ejercicio 4.1 Revisa los siguientes videos, presta atención porque con base en ellos responderás la siguiente actividad.

SCAN ME

Segmentos congruentes

https://www.youtube.com/watch?v=a8A67LpsPZA

SCAN ME

Ángulos congruentes

https://www.youtube.com/watch?v=9melDeR3dww

Ejercicios 4.2 Con base en los videos, redacta las instrucciones paso a paso para construir un segmento y un ángulo congruente. Coméntenlas en plenaria.

Instrucciones para construir segmentos congruentes	Trazos

Instrucciones para construir ángulos congruentes	Trazos

4.2 Triángulos congruentes

Congruencia de triángulos

Dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes tienen las mismas longitudes y sus ángulos correspondientes tienen las mismas medidas.

Eso significa que una forma de decidir si un par de triángulos son congruentes es medir *todos* los lados y ángulos.

4.2.1 Correspondencia en triángulos

Para determinar la congruencia entre dos triángulos es necesario ubicar **los lados correspondientes**, esto quiere decir que identificaremos lados y/o ángulos con igual magnitud, los cuales se marcan con un símbolo que permite reconocerlos.

Veamos las dos formas de cómo indicar la correspondencia para los ángulos en una pareja de triángulos:

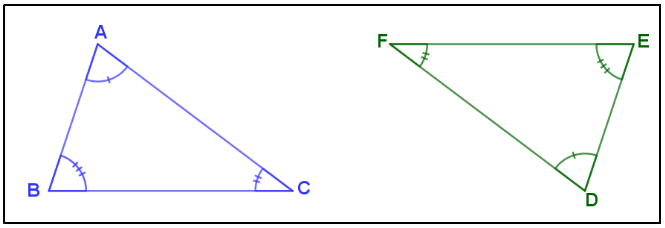


Figura 3. Primera forma de identificar ángulos correspondientes

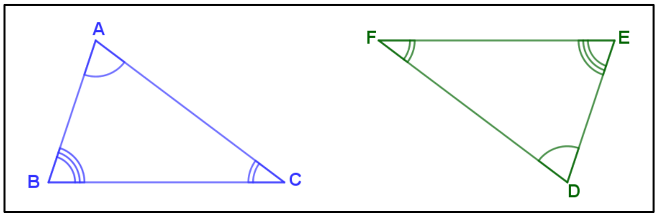


Figura 4. Segunda forma de identificar ángulos correspondientes

El número de líneas que corta a cada ángulo correspondiente en las parejas es equivalente a dibujar en el ángulo la misma cantidad de veces un arco, por lo que de las figuras anteriores obtenemos:

Correspondencia	**Congruencia**
$\angle A \rightarrow \angle D$	$\angle A \cong \angle D$
$\angle B \rightarrow \angle E$	$\angle B \cong \angle E$
$\angle C \rightarrow \angle F$	$\angle C \cong \angle F$

En el caso de los lados, la correspondencia en los triángulos la mostramos a continuación

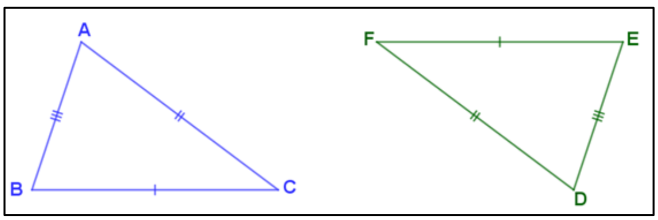


Figura 5. Forma de identificar ángulos correspondientes

Para los lados la correspondencia se escribe respecto a los vértices y la congruencia para los lados.

Correspondencia	**Congruencia**
$A \longrightarrow D$	$\overline{BC} \cong \overline{EF}$
$B \longrightarrow E$	$\overline{CA} \cong \overline{FD}$
$C \longrightarrow F$	$\overline{AB} \cong \overline{DE}$

Congruencia de triángulos

Una vez que se identifiquen los vértices correspondientes podremos escribir la afirmación $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, **el orden de los vértices en la congruencia anterior involucra la correspondencia entre ellos**, de tal manera que guardando la relación también se puede escribir $\Delta CBA \cong \Delta FED$.

Ejercicio 4.3 Para esta actividad necesitarás lápiz, goma, sacapuntas, tijeras y un juego de geometría con regla, compás, escuadras y transportador. Se te invita a que realices las construcciones que se te van a sugerir. La actividad se sugiere realizarse en parejas.

Se comenzarán por construir algunos triángulos. Se darán algunas medidas específicas y podrán darse cuenta si obtienen triángulos congruentes entre sí. ¿Listas o listos?

a) Para el primer triángulo que van a construir, cada uno, los lados deben medir 10 cm, 12 cm y 8 cm.
b) Ahora recorta el triángulo que cada uno realizó.
c) Comprobarán si los triángulos son congruentes entre sí, para ello, se puede sobreponer uno encima del otro.

¿El triángulo que realizaste coincide en su totalidad con el de tu compañero?

¿Por qué piensas que se dio la congruencia de los triángulos?

Ejercicio 4.4 Como siguiente actividad, también en parejas

a) Dibujarán, cada uno, un triángulo que posea dos lados de 5 cm y que el ángulo que se encuentra entre estos lados sea de 127º.
b) En esta ocasión, en lugar de sobreponer los triángulos, mídelos para comprobar sí son congruentes.

¿Los triángulos que trazaron son congruentes?

___

¿Fue necesario dar todas las medidas para determinar que los triángulos eran congruentes?

___

¿Piensas que es posible construir algún triángulo diferente a estos con los mismos datos proporcionados?

___

¿Cuáles crees que son los elementos para identificar que dos triángulos son congruentes?

___

4.3 Criterios de congruencia para triángulos

Es fácil ubicar la correspondencia entre dos triángulos que cuentan con todas las medidas de sus ángulos y lados, pero ¿es necesario tener todos los datos para saber si dos triángulos son congruentes?

En realidad, no, y como consecuencia contamos con lo que se conoce como **criterios de congruencia**, en todos ellos es necesario conocer solo 3 magnitudes, a continuación, abordaremos cada caso.

Criterio Lado – Lado – Lado (LLL)

Si los tres lados de un triángulo son congruentes con los tres lados de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Al dibujar la altura de cualquier triángulo isósceles respecto al lado desigual se forman dos triángulos como se observa en la siguiente figura, determina que los triángulos que se forman son congruentes.

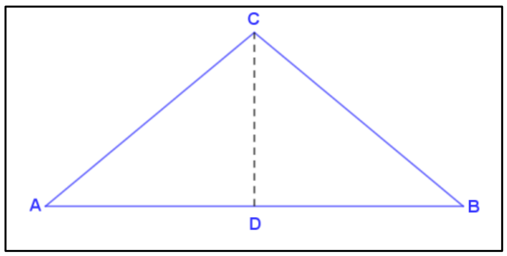


Figura 6. Altura en un triángulo isósceles

Razonamiento	
Afirmación	**Justificación**
$AC \cong BC$	Por ser triángulo isósceles
$AD \cong BD$	Por ser la altura de triángulo isósceles
$CD \cong CD$	Por reflexividad (es lado común en ambos triángulos).
$\triangle ADC \cong \triangle BDC$	

Lo anterior implica en la figura que los tres lados son congruentes (LLL).

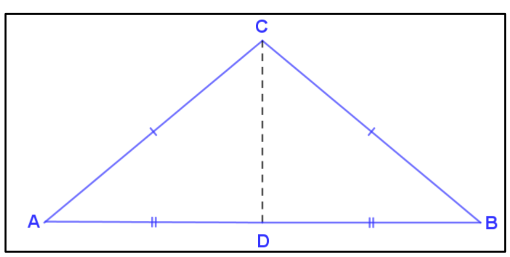


Figura 7. Correspondencia de tres lados congruentes

Criterio Lado – Ángulo – Lado (LAL)

Si dos lados y el ángulo comprendido entre ellos en un triángulo son congruentes con dos lados y el ángulo comprendido de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Ejercicio 4.5 En la siguiente figura, los segmentos AD y BC bisecan en el punto E, verifica que los triángulos formados son congruentes.

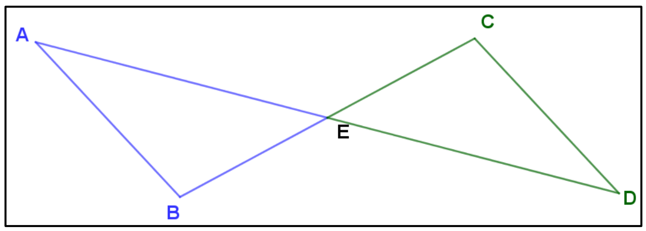


Figura 8. Segmentos que bisecan

Razonamiento	
Afirmación	**Justificación**
$AE \cong DE$	Por definición de bisecar. Si se ***biseca*** un segmento, los segmentos formados son congruentes entre sí.
$BE \cong CE$	E es punto medio de BC.
$\angle AEB \cong \angle DEC$	Por ser ángulos opuestos por el vértice
$\triangle ABE \cong \triangle DCE$	

Lo anterior implica que dos lados y el ángulo entre ellos son congruentes en los triángulos, así que por el criterio LAL, ambos triángulos son congruentes.

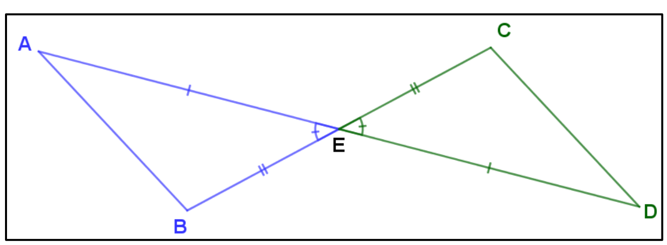


Figura 9. Correspondencia de dos lados y un ángulo entre ellos, congruentes

Criterio Ángulo – Lado – Ángulo (ALA)
Si dos ángulos y el lado común de estos en un triángulo son congruentes con dos ángulos y el lado común de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Ejercicio 4.6 Dado el paralelogramo ABCD se traza la diagonal sobre BC, identificar si los triángulos que se generan son congruentes.

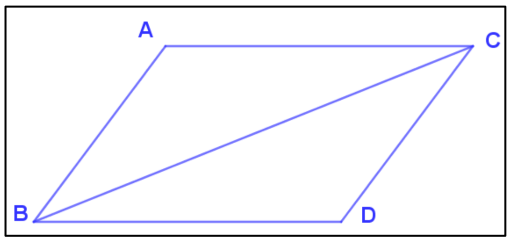


Figura 10. Paralelogramo y una de sus diagonales

Razonamiento	
Afirmación	**Justificación**
$\angle ABC \cong \angle DCB$	Por ser ángulos alternos internos
$\angle ACB \cong \angle DBC$	Por ser ángulos alternos internos
$BC \cong CB$	Por ser lado común
$\triangle ABC \cong \triangle DCB$	

Efectivamente, por el criterio ALA ambos triángulos son congruentes, ya que dos de sus ángulos y el lado comprendido entre ellos son respectivamente congruentes.

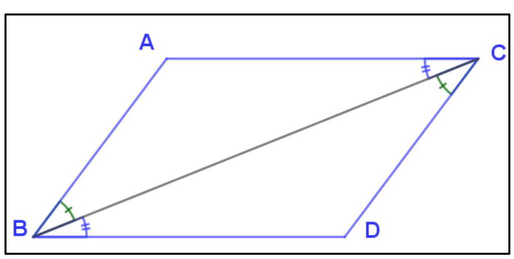


Figura 11. Aplicación del criterio ALA

Criterio Ángulo – Ángulo – Lado (AAL)

Si dos ángulos y un lado que no es parte de ambos en un triángulo son congruentes con dos ángulos y un lado que no es parte de estos de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Ejercicio 4.7 En la siguiente figura, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \perp \overline{AB}$. Además, E es el punto medio de CB. Determina si ambos triángulos formados son congruentes.

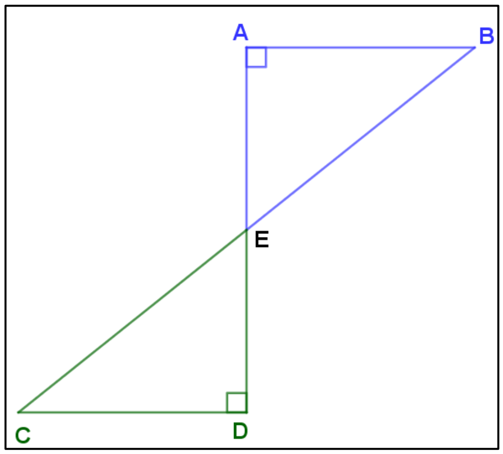


Figura 12. Paralelas y perpendicular

Razonamiento	
Afirmación	**Justificación**
$\angle EAB \cong \angle EDC$	Por ser ángulos rectos
$\angle ABE \cong \angle DCE$	Por ser ángulos alternos internos
$BE \cong CE$	Por E que es punto medio
$\triangle AEB \cong \triangle DEC$	

Esta correspondencia pareciera igual a la anterior, son dos ángulos y un lado correspondiente, sin embargo, en lo que difieren es que el lado que se compara no es común entre ambos ángulos, en la siguiente figura es evidente.

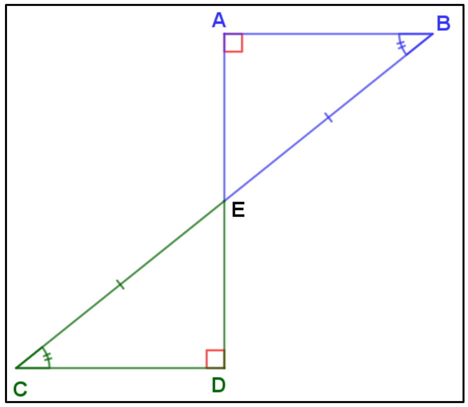


Figura 13. Correspondencia entre paralelas y perpendicular

Ejercicio 4.8

a) Sabiendo que $\triangle MKP$ y $\triangle XYZ$ tales que $\angle M \cong \angle Y$, $\angle MKP \cong \angle YXZ$ y $MK = XY$. Demostrar que $PQ \cong ZX$.

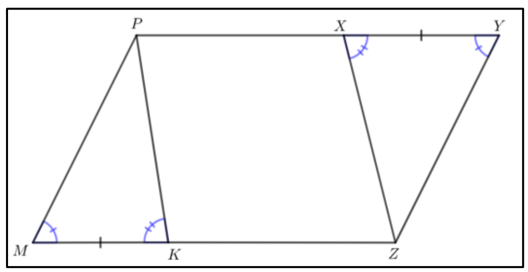


Figura 14. Ejercicio congruencia inciso a

b) En la figura, AE interseca a BD en C, tal que $AC = DC$ y $BC = EC$. Demostrar que $\angle A \cong \angle D$.

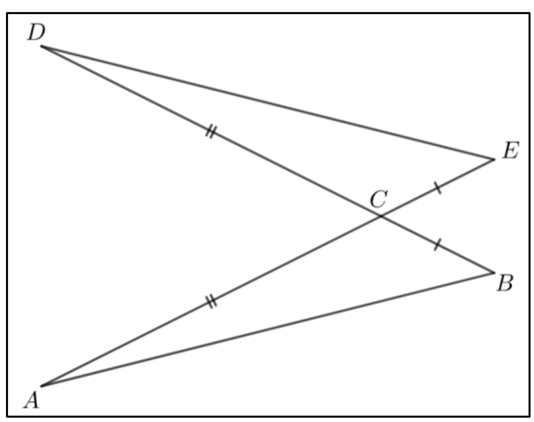


Figura 15. Ejercicio congruencia inciso b

4.4 Semejanza

La semejanza la observamos muy seguido en nuestra vida diaria, un ejemplo es cuando sacamos una selfi con nuestro celular, ésta genera una imagen semejante a la de nuestro rostro en el tamaño de nuestro dispositivo.

En matemáticas, se dice que dos figuras geométricas son semejantes si tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño.

Analicemos qué sucede con los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEC$. El ángulo $A \neq D$ y el ángulo $B \neq E$, porque como se ve en la figura 16, AB no es paralelo a DE, el único ángulo en común es C. Con esta información, no existe una relación entre los lados de los triángulos.

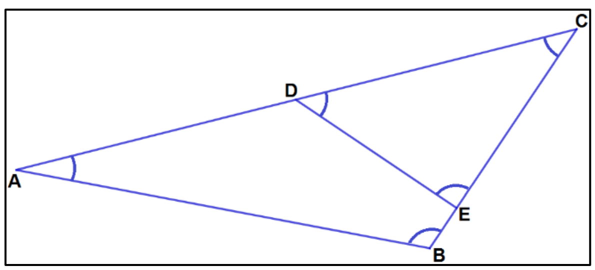


Figura 16. Análisis de semejanza entre triángulos

Semejanza

Cuando se hace referencia al concepto de semejanza, de acuerdo con Garza (2017) se denomina semejanza *a todas aquellas características y condiciones geométricas que permitan reproducir las figuras con todos sus detalles, variando solamente su tamaño y conservando su forma.*

El símbolo $\sim$ se usa comúnmente para referir la semejanza.

Específicamente **para que exista semejanza** deben cumplirse dos situaciones:

a) que sus lados correspondientes (homólogos) sean proporcionales y

b) que sus ángulos correspondientes sean congruentes ($\cong$).

La **semejanza entre triángulos** toma en cuenta que para que se cumpla en una pareja de triángulos deben tener congruentes uno a uno sus ángulos y sus lados homólogos proporcionales.

Recordando una definición de proporción, se dice que es la igualdad de dos cocientes o razones.

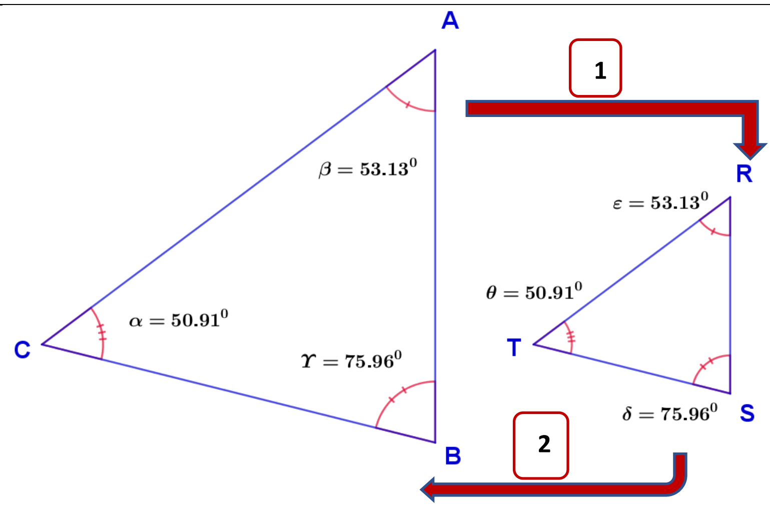
Ejemplo 1.

Observemos cómo identificar que existe semejanza entre los dos triángulos.

Para los lados proporcionales $AB \ y \ RS$; $BC \ y \ ST$; $CA \ y \ TR$

Con los datos $AB = 4.12, \ BC = 4, \ CA = 5, \ RS = 2.06 \ \ ST = 2 \ y \ TR = 2.5$

verificar si los triángulos $\triangle ABC \ y \ \triangle RST$ son semejantes.



1

$$\frac{AB}{RS} = \frac{BC}{ST} = \frac{CA}{TR} = \frac{4.12}{2.06} = \frac{4}{2} = \frac{5}{2.5} = 2$$

Del resultado obtenido concluimos que

$$\triangle ABC \sim \triangle RST$$

Siendo que las medidas de los lados del $\triangle ABC$ valen el doble que los del $\triangle RST$

2

$$\frac{RS}{AB} = \frac{ST}{BC} = \frac{TR}{CA} = \frac{2.06}{4.12} = \frac{2}{4} = \frac{2.5}{5} = \frac{1}{2}$$

Del resultado obtenido concluimos que

$$\triangle RST \sim \triangle ABC$$

Siendo que las medidas de los lados del $\triangle RST$ valen la mitad que los del $\triangle ABC$

Ejercicio 4.9 Revisa el siguiente material, mueve los puntos del triángulo ABC y copia 3 parejas de triángulos semejantes con la proporcionalidad que se indica, además calcula la proporcionalidad si se colocan al revés las razones.

Proporcionalidad en triángulos

https://www.geogebra.org/m/w75jzf6m

Uno de los pilares de la semejanza de triángulos es el Teorema de Thales.

Teorema de Thales para triángulos

Dado el triángulo $\triangle PQR$*, si se traza un segmento paralelo,* $\overline{ST}$ *a* $\overline{PQ}$*, se obtiene otro triángulo* $\triangle STR$*, cuyos lados son proporcionales a los del triángulo* $\triangle PQR.$

Para asegurarnos cuales deben ser las condiciones para establecer que entre dos triángulos hay semejanza, nos basaremos en tres criterios los cuales ayudarán a la solución de problemas cotidianos.

4.5 Criterios de semejanza

Criterio Ángulo – Ángulo – Ángulo (AAA)

Cuando en un triángulo sus ángulos son congruentes con los tres ángulos de otro triángulo, se establece que ambos triángulos son semejantes.

En algunos textos, este criterio también se le conoce como **Criterio AA**, puesto que, si dos ángulos internos de un triángulo son congruentes a dos ángulos internos de otro triángulo, el ángulo interno restante del primer triángulo será congruente con el restante del segundo triángulo. Esta es una consecuencia del teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo.

En la siguiente figura considerar que $\overline{PQ} \parallel \overline{ST}$, determinar si los triángulos PRQ y SRT son semejantes.

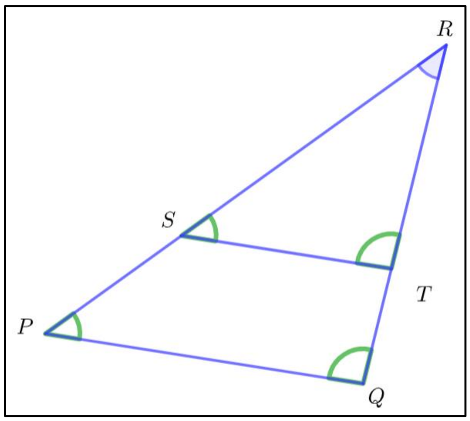


Figura 15. Triángulos comunes

Razonamiento	
Afirmación	**Justificación**
$\angle QPR \cong \angle TSR$	Por ser correspondientes
$\angle PQR \cong \angle STR$	Por ser correspondientes
$\angle PRQ \cong \angle SRT$	Por ser ángulo común
$\triangle PRQ \sim \triangle SRT$	

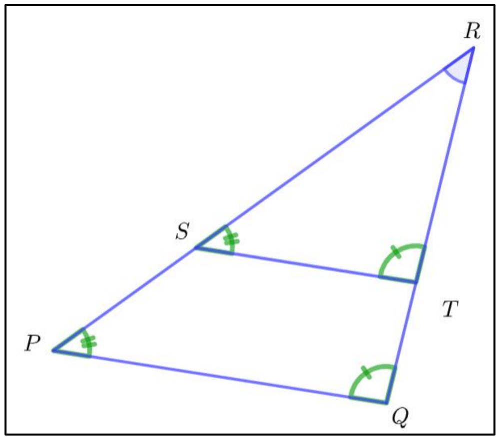


Figura 16. Triángulos con ángulo común

Al ser ambos triángulos semejantes como consecuencia se cumple que

$$\frac{RS}{RP} = \frac{RT}{RQ} = \frac{ST}{PQ}$$

Este problema también se puede resolver aplicando el Teorema de Thales.

Lado – Lado – Lado (LLL)

Respecto a los lados en un triángulo, si los tres lados homólogos son proporcionales a los tres lados de otro triángulo, podemos decir que ambos triángulos son semejantes.

Para los triángulos PRQ y PTS existe la correspondencia $PRQ \leftrightarrow PTS$, si

$$\frac{PR}{PT} = \frac{PQ}{PS} = \frac{RQ}{TS}$$

entonces $\triangle PRQ \sim \triangle PTS$.

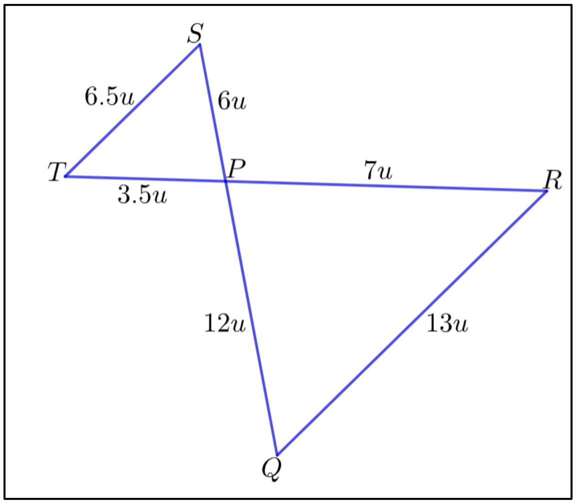


Figura 17. Criterio LLL

Al obtener la proporcionalidad de lados correspondientes

$$\frac{PR}{PT} = \frac{PQ}{PS} = \frac{RQ}{ST} = 2$$

entonces $\triangle PRQ \sim \triangle PTS$.

Lado – Ángulo - Lado (LAL)

Dos triángulos son semejantes, si dos de sus parejas de lados homólogos son proporcionales y los ángulos comprendidos son congruentes.

Para los triángulos rectángulos PRQ y SUT existe la correspondencia $PRQ \leftrightarrow SUT$,

$$\frac{RQ}{UT} = \frac{PQ}{ST}$$

y

$$\angle RQP \cong \angle UTS$$

entonces podemos decir que $\triangle PRQ \sim \triangle SUT$.

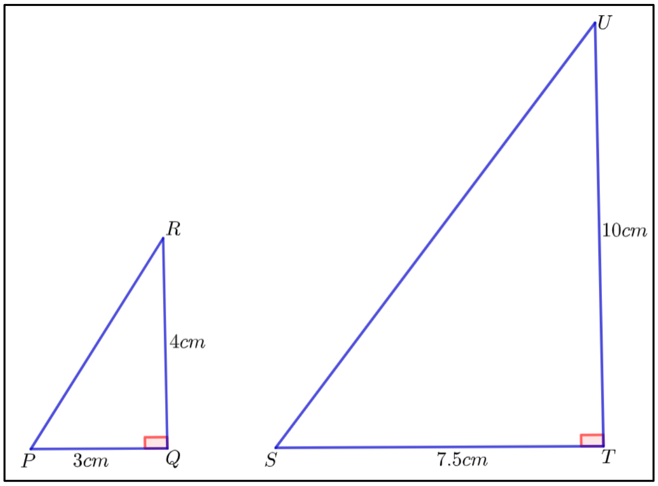


Figura 18. Criterio LAL

Al calcular las razones

$$\frac{RQ}{UT} = \frac{PQ}{ST} = \frac{5}{2}$$

Ejercicio 4.10 Revisa el siguiente material y contesta a las preguntas

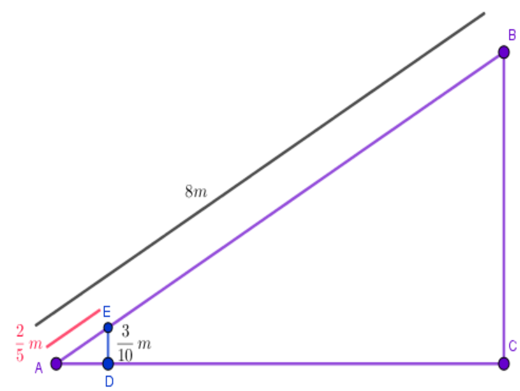
SCAN ME

Proporcionalidad y congruencia

https://es.khanacademy.org/math/geometria-pe-pre-u/x4fe83c80dc7ebb02:semejanza-de-triangulos/x4fe83c80dc7ebb02:criterios-o-postulados-de-semejanza-de-triangulos/v/similar-triangle-basics?modal=1

a) ¿La congruencia también se puede considerar como semejanza? ¿por qué?

Ejemplo 2.

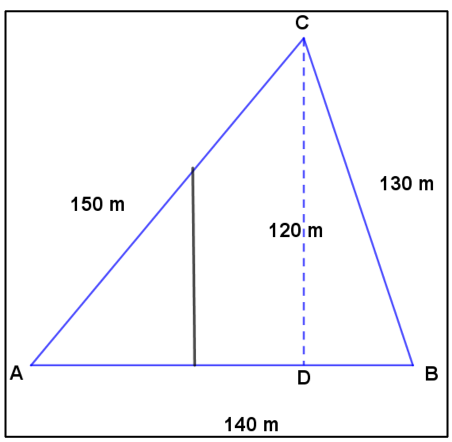
<table>
<tr><td colspan="2">La unidad de bomberos acude a un incendio producido en un hospital con una escalera de 8 m de longitud que consta de 20 peldaños distribuidos uniformemente. Al apoyar la escalera sobre la fachada del edificio se observa que el primer peldaño se encuentra a 30 cm del suelo. Debido a que las llamas ascienden rápidamente hacia arriba, es necesario averiguar si es posible con dicha escalera evacuar al tercer piso del hospital. Cada planta tiene 2.5 m de altura. ¿Podrán ser rescatados?</td></tr>
<tr><td>Dibujemos la situación para poder dar respuesta a la pregunta.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Al dividir la longitud de la escalera en 20 partes iguales, además, en el problema se menciona que el primer peldaño se encuentra a 30 cm del piso.</td><td>cada parte debe medir $\frac{8}{20}m = \frac{2}{5}m$, que equivale a $\frac{3}{10}m$.</td></tr>
<tr><td>En la figura del problema se observa que se generan triángulos semejantes por el criterio AAA, ya que $\overline{DE} \parallel \overline{CB}$, por lo tanto, estos lados de los triángulos formados son proporcionales cumpliéndose</td><td>$$\frac{CB}{8\,m} = \frac{\frac{3}{10}m}{\frac{2}{5}m}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Resolviendo la igualdad, tenemos $CB = 6\,m$ que es la altura que alcanza la escalera, pero en el problema se plantea que debe llegar a un tercer piso y cada uno de ellos tiene una altura de 2.5 m requiriéndose que la escalera llegue a una altura de 7.5 m por lo que no es suficiente y no podrían ser rescatadas las personas.

Ejercicios 4.11

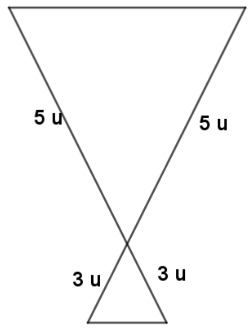
a) Una persona que mide $1.5\,m$ de altura se coloca a $4\,m$ de una lámpara. ¿Cuánto mide su sombra sobre una pared que está a $10\,m$ de la lámpara?

b) Un solar triangular ABC tiene lados de longitudes de $130\,metros$, $140\,metros$ y $150\,metros$, como se indica en la figura. La longitud perpendicular desde el vértice C al lado de AB es de $120\,metros$. Se va a construir una reja perpendicular al lado de $140\,metros$ de manera que el área del solar quede dividida en dos partes iguales. ¿A qué distancia de A sobre AB deberá construirse la reja?

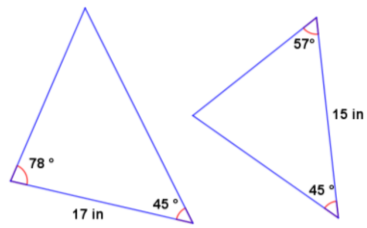


c) Para cada uno de los siguientes pares de triángulos, indicar si son semejantes o no y, si lo son, mencionar el criterio, teorema o definición que lo justifica.

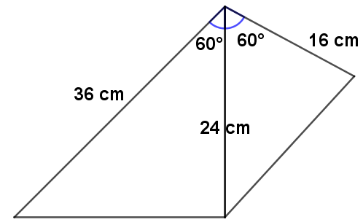
I.



II.



III.



4.6 Teorema de Pitágoras

El teorema más antiguo y conocido por el ser humano es: el **Teorema de Pitágoras**. Se cree que por lo menos tiene unos mil años antes del nacimiento de Pitágoras.

Una tablilla localizada en la antigua Mesopotamia (hoy **Irak**) llamada "*Plimpton 322*", es la tabla más antigua encontrada con una serie de ternas pitagóricas. Las ternas pitagóricas son un conjunto de tres números enteros que cumplen $a^2 + b^2 = c^2$.

Esta tabla es la evidencia de que, desde épocas muy remotas, en la antigüedad ya se sabía que había número enteros que cumplían con dicha condición (ecuación diofántica cuadrática) que ahora llamamos Teorema de Pitágoras.

La tablilla Plimpton 322 fue escrita alrededor de 1800 a. C. Muestra lo que sería en la actualidad como ternas pitagóricas. Fue hecha de barro, cuyas dimensiones son: 13 cm de largo, 9 cm de ancho y 2 de espesor. La escritura fue cuneiforme y se utilizaron como apuntes para los escolares de la época.	

Existen desde la antigüedad y hasta nuestros días una gran cantidad de demostraciones del Teorema de Pitágoras.

Teorema de Pitágoras

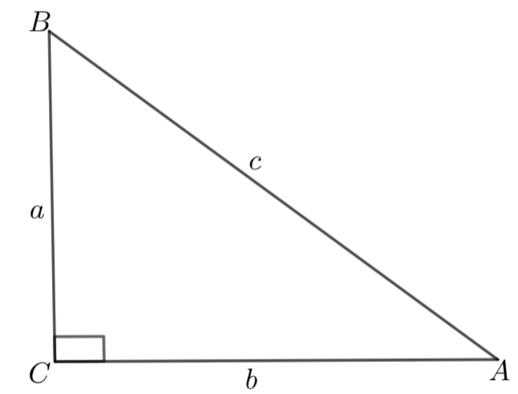
En todo triángulo rectángulo, la longitud al cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

A continuación, se va a explicar una de las tantas demostraciones que existen, la cual es atribuida a Lagrange (Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), físico, matemático y astrónomo italiano).

<table>
<tr>
<td>

$$c^2 = a^2 + b^2$$

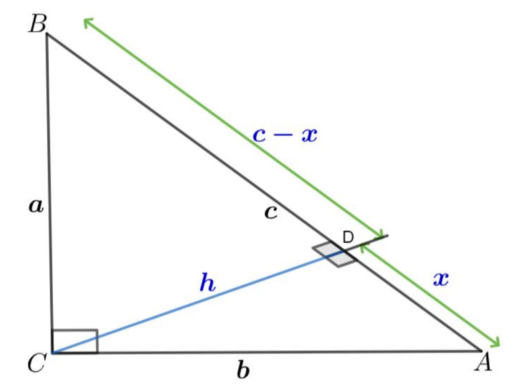
</td>
<td>



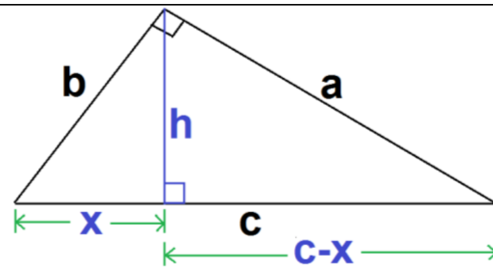
</td>
</tr>
<tr>
<td>

Al trazar la altura teniendo como base la hipotenusa del triángulo rectángulo, se obtienen los triángulos ACD y DCB, que también serán rectángulos, que compartirán el cateto que es la altura del triángulo más grande ABC.

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Con este trazo se forman dos triángulos rectángulos semejantes entre sí y el original.
$\triangle ACD \sim \triangle DCB$</td><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><td>$\frac{x}{b} = \frac{b}{c}$</td><td>$\Longrightarrow$</td><td>$b^2 = cx$</td><td>$\Longrightarrow$</td><td rowspan="2">$c^2 - cx = a^2$
$c^2 - b^2 = a^2$
$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{c-x}{a} = \frac{a}{c}$</td><td>$\Longrightarrow$</td><td>$c(c-x) = a^2$</td><td>$\Longrightarrow$</td></tr>
</table>

Ejemplo 3.

En este teorema podemos ver que si tenemos un triángulo rectángulo de catetos 12 y 35, respectivamente, ¿cuál debe ser el valor de la hipotenusa para que sea un triángulo rectángulo?	$12^2 + 35^2 = c^2$ $144 + 1225 = c^2$ $1369 = c^2$ $37 = c$ Para que sea un triángulo rectángulo, la hipotenusa debe medir 37.

Recíproco del teorema de Pitágoras

Si en un triángulo se cumple que el cuadrado del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces dicho triángulo es un triángulo rectángulo.

Una de las ternas pitagóricas más antiguas de la humanidad es $(3,4,5)$ del cual se dieron cuenta los antiguos matemáticos babilonios y que siempre aparecían en triángulos con un ángulo recto. Con la operación:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$9 + 16 = 25$$

$$25 = 25$$

Descubrieron otras ternas cómo: $(5,12,13)$, $(7,24,25)$, $(8,15,17)$, $(9,40,41)$, … etc. y cuando se construye un triángulo con estas medidas, ese triángulo es un **triángulo rectángulo**.

Ejemplo 4.

Se tiene un triángulo con las medidas $(20,21,29)$, verificar si corresponde a las de un triángulo rectángulo.	Solución: $20^2 + 21^2 = 29^2$ $400 + 441 = 841$ $841 = 841$ Si es un triángulo rectángulo.

El potencial del teorema de Pitágoras es la relación directa que tiene con el álgebra, es un teorema que permite relacionar el campo de la geometría, el álgebra, la aritmética y más adelante, la trigonometría.

A continuación, se explicarán algunos ejemplos que se resuelven con el teorema de Pitágoras.

Ejemplo 5.

Encuentra la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son 5 m y 12 m.		
Teorema	Datos	Operación
$c^2 = a^2 + b^2$	$a = 5$ $b = 12$	$c^2 = 5^2 + 12^2$ $c^2 = 25 + 144 = 169$ $c = \sqrt{169}$ $c = 13$ m

Ejemplo 6.

Encuentra la longitud del cateto de un triángulo rectángulo, cuyos otros dos lados son 7 m y 25 m.		
Teorema	Datos	Operación
$c^2 = a^2 + b^2$	$a = 7$ $c = 25$	$25^2 = 7^2 + b^2$ $b^2 = 625 - 49 = 576$ $b = \sqrt{576}$ $c = 24$ m

Ejemplo 7.

Encuentra la longitud de los lados de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide “x” y los catetos miden 2 y 9 unidades menos que la hipotenusa respectivamente.

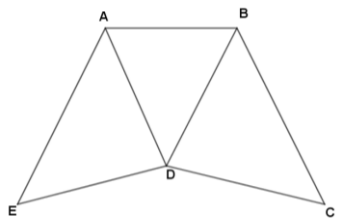
Teorema	Datos	Operación
$c^2 = a^2 + b^2$	$x = ?$ $a = x - 2$ $b = x - 9$	$x^2 = (x-2)^2 + (x-9)^2$ $x^2 = x^2 - 4x + 4 + x^2 - 18x + 81$ $0 = -4x + 4 + x^2 - 18x + 81$ $0 = x^2 - 22x + 85$ $(x-17)(x-5) = 0$ $(x-17) = 0; \quad (x-5) = 0$ $x_1 = 17 \;\; x_2 = 5$ Se escoge el mayor porque es la hipotenusa. Los otros dos catetos miden: $a = 17 - 2 = 15$ $b = 17 - 9 = 8$ Comprobando $17^2 = 15^2 + 8^2$ $289 = 225 + 64$ $289 = 289$

Ejercicios 4.12 Resuelve los siguientes problemas.

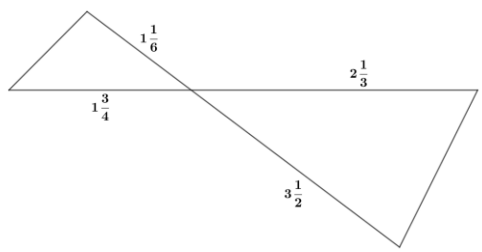
a) Un terreno rectangular mide de un lado 13m y de diagonal 85m. Encuentra su perímetro y área.
b) Encuentra la medida del lado de un triángulo equilátero, sabiendo que su área es $25\sqrt{3}m^2$
c) La diagonal de un cuadrado mide 6 metros. Encuentra su perímetro y área.
d) Calcula el área de un hexágono, sabiendo que su perímetro es de $30m$.

PROPUESTA DE EVALUACIÓN DE UNIDAD 4

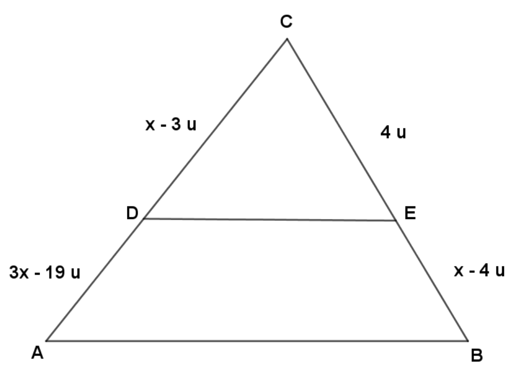
I. Sabiendo que el triángulo ABD es equilátero, además $AE = BC$ y $\angle EAD \cong \angle CBD$. Demostrar que existe un par de triángulos congruentes en la figura.



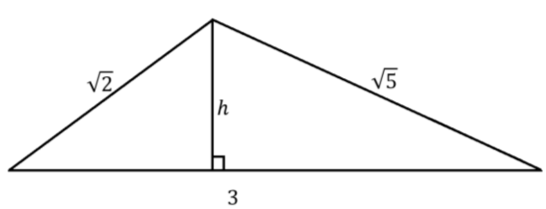
II. Verifica si los siguientes triángulos son semejantes.



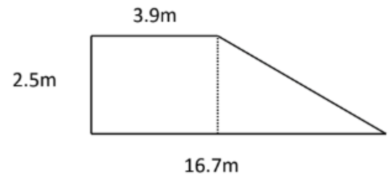
III. Determinar todos los valores de las incógnitas para los cuales $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$.



IV. Calcular la altura del siguiente triángulo sabiendo que sus lados miden $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ y su base 3.



V. Calcula el perímetro y el área del trapecio que se muestra en la figura.



Valoración del profesor Unidad 4

Evaluación formativa			
Número de ejercicio	Insuficiente	Suficiente	Logrado
4.2			
4.3			
4.4			
4.9			
4.10			
4.11			
Comentarios del profesor:			

Evaluación sumativa	
Número de ejercicio	Puntaje del ejercicio
4.8	
4.12	
Total logrado	

Propuesta de evaluación de unidad 4	
Ejercicio	Puntaje del ejercicio
I	
II	
III	
IV	
V	
Calificación	

Fuentes de información

Aquino, M., Bodega, L., Fernández, J., González, E., Martínez, H., Rosales, M., Vázquez, G., y Velázquez, L. 13. Semejanza de triángulos. http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/telesec/curso3/htmlb/sec_38.html

Carpinteyro, E. (2018). Geometría y Trigonometría. Conceptos y aplicaciones. México: PATRIA educación.

Fuentes, G. (Junio, 2019). Semejanza de triángulos. Recuperado 20 de abril de 2022 de, https://portalacademico.cch.unam.mx/matematicas2/semejanza-del-triangulo

Jiménez D. (2005). Geometría, el encanto de la forma. Caracas, Venezuela: CEC, SA.

KhanAcademyEspañol. (2018). *Conocimiento básico de triángulos semejantes.* [Vídeo]. YouTube. https://youtu.be/x-6UG51F5as

Khan Academy. (s. f.). *Introducción a la semejanza de triángulos*. Recuperado 19 de mayo de 2022, de https://es.khanacademy.org/math/geometria-pe-pre-u/x4fe83c80dc7ebb02:semejanza-de-triangulos/x4fe83c80dc7ebb02:criterios-o-postulados-de-semejanza-de-triangulos/v/similar-triangle-basics?modal=1

Laracos Math. (2011, 14 mayo). *Como construir un ángulo congruente a otro ángulo dado* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=9melDeR3dww

MathJuli mi Profe Juli. (2020, 7 abril). *Construcciones geométricas 4: segmentos congruentes* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=a8A67LpsPZA

Parra, F., Ávila, R., Ávila, J. (2013). *El significado del objeto matemático proporcionalidad. Su origen y desarrollo.* En Flores, Rebeca (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1241-1249). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/4222/1/ParraElsignificadoALME2013.pdf

Profe Laura Buitrago - Matemáticas. (2020, 1 julio). *Movimientos en el plano - Traslación, reflexión y rotación* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=XfPEGMgBXiM

Vázquez Hernández, M. (2022c, junio 2). *Proporcionalidad en triángulos*. GeoGebra. Recuperado 10 de junio de 2022, de https://www.geogebra.org/m/w75jzf6m

Solución a ejercicios Unidad 4

4.8 a) $3.75m$, b) $15\sqrt{14}m \approx 56.1248\ m$, c) I. Sí LAL, II. No, III. Sí, LAL

4.12 a) Perímetro: 194 metros y área: 1092m², b) Lado: 10 metros, c)Perímetro: $12\sqrt{2}m$ y el área: 18 m^2