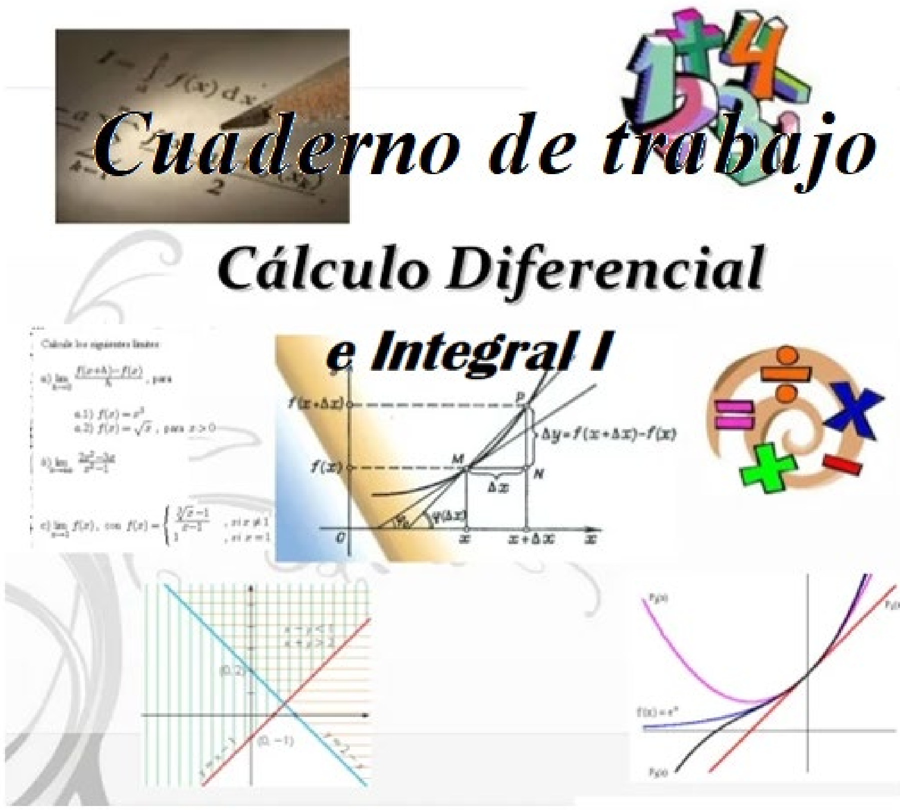
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

PLANTEL ORIENTE



Integrantes

Francisco Javier Rodríguez Pérez (Coordinador)
Leticia Aguilar Pascual (Coordinadora)
José Germán Ávila Vicenteño
Javier Bustos Rosas
Araceli Cabrera Ortiz
Esperanza Martínez López
Miguel Ángel Rivera Espinosa
Ivonne Zenteno Canela

Grupo 401C   2021-2022

Índice

Pág.

PRESENTACIÓN

Este trabajo se desarrolla acorde a los contenidos y aprendizajes del programa de estudios de Cálculo Diferencial e Integral I que se imparte en el Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM.

Se anexa el temario del curso y al inicio de cada unidad se presenta el propósito general del curso, los aprendizajes correspondientes y las estrategias sugeridas.

En el cuaderno de trabajo se integran ejercicios en un orden acorde a los aprendizajes de cada unidad y que el alumno debe resolver con apoyo del Profesor. Para ello el alumno debe tener un cuaderno exclusivo para escribir los desarrollos correspondientes a cada uno de los ejercicios.

Considerando que los ejercicios se ajustan, como ya se mencionó, al programa de estudios, sobra incluir los resultados de cada uno de ellos.

La estructura del cuaderno de trabajo no considera un desarrollo por clase, esto depende del ritmo del curso desarrollado por cada Profesor. Para apoyarlo, se recomienda utilizar trabajos editados con antelación por nuestro grupo de trabajo, en particular el texto *Cálculo Diferencial e Integral I*.

Los ejercicios de cada unidad se diseñaron con base en la concepción decidida en las discusiones académicas en el grupo de trabajo.

INTRODUCCIÓN

Para describir brevemente el trabajo realizado, conviene mencionar lo siguiente, en las reuniones de trabajo realizadas por el grupo de trabajo, después de discutir en varias ocasiones sobre la necesidad de introducir diferentes temáticas complementarias en cada unidad se presentan las conclusiones obtenidas.

En la Unidad 1 es importante manejar los números naturales, problemas y ejercicios con el manejo de los números discretos, introducir los conceptos de sucesiones y series con el fin de contar con una herramienta para tratar los procesos finitos e infinitos, es importante que el alumno comprenda la simbología y manejo algebraico de ambos conceptos. Todo esto aplicado a problemas que requieran dichos tratamientos.

Respecto a la Unidad 2, Se considera tratar el concepto de una razón, lo que corresponde a una variación y un tratamiento más formal de las funciones reales con variable real, revisar el concepto de variable independiente y variable dependiente y con ello revisar la variabilidad de la variable independiente y en consecuencia la variabilidad de la función, se propone trabajar con funciones en diversos problemas, por ejemplo de velocidad (variación de la posición respecto al tiempo), problemas de producción de un producto en donde el de costo, es una función del número de artículos producidos, además ejemplificar el concepto de la razón promedio en cada uno de los problemas correspondientes de la variación de la función respecto a la variable independiente. Todo ello deberá ser acompañada de las expresiones tabular, algebraica y grafica. mismas que se presentaran en el desarrollo de los diversos problemas. Posteriormente, introducir el concepto de razón de cambio instantáneo y trabajar con algunos ejemplos, se consideran algunos de cinemática (física), ya que podemos hablar de la velocidad promedio entre dos puntos y la velocidad en un punto.

Para el manejo del concepto de límite nuevamente se hace importante las representaciones numéricas, algebraicas y gráficas, mismas que se utilizaran en el desarrollo de problemas propuestos; introducimos la razón de cambio instantánea, y el resultado lo relacionamos con el concepto de derivada, utilizaremos algunas expresiones para hacer diversos cálculos y al utilizar la expresión gráfica establecemos la interpretación geométrica de la derivada, esto es la pendiente de la recta tangente

Para la Unidad 3, consideramos conveniente trabajar la definición de derivada establecida en la unidad anterior, trabajamos con ambas representaciones para la obtención de la derivada, el método de Fermat y el de Leibnitz-Newton, se realiza el proceso indistintamente, mostrando que en cualquier caso se obtendrán los mismos resultados.

Se establecen las fórmulas para la derivada de una constante, de una función del tipo $f(x) = cx^n$, para una suma de funciones, para un producto de funciones, para un cociente de funciones y se extiende para funciones del tipo $f(x) = cx^n$ con n real; todas ellas utilizando funciones polinomiales.

En la Unidad 4, utilizando la interpretación geométrica de la derivada, se establecen expresiones algebraicas para las regiones donde la función crece, decrece y donde es constante.

Se definen los puntos críticos y se dan las condiciones para determinar si esos puntos pertenecen a un punto máximo local, a un mínimo local o global o si simplemente es un punto de inflexión.

Ahora, la segunda derivada de una función nos permitirá encontrar las regiones de concavidad de la correspondiente curva y en consecuencia determinar completamente la gráfica de la función.

Finalmente se presentarán problemas de optimización.

Respecto a los ejercicios propuestos en este documento, consideramos que no es posible estructurarlos en forma tajante de acuerdo con un determinado aprendizaje, ya que cada uno de ellos se relaciona con más de un aprendizaje. En este sentido, creemos que parte del desarrollo de un curso como lo es cálculo, es permitir que éste sea maleable y que se adapte a las necesidades de cada docente, por ello consideramos importante que este cuaderno se publique próximamente.

SOBRE EL USO DE ESTE CUADERNO DE TRABAJO (GUÍA)

Para el uso de este cuaderno el alumno deberá tener siempre el apoyo de un Profesor o un asesor de la asignatura. Es importante que el alumno, como se dijo anteriormente, cuente con un cuaderno en el cual pueda escribir todos los desarrollos necesarios en cada ejercicio.

La mayoría de los ejercicios requieren apoyo gráfico, por lo que se sugiere que el alumno se auxilie de un software, por ejemplo, *Geogebra,* que además de amigable es un software libre y adaptable a los dispositivos con los que cuente el alumno. Es importante notar que en este software el alumno puede verificar los resultados obtenidos en las cuatro unidades.

SOBRE LA EVALUACIÓN

Si el trabajo se utiliza en un curso y se requiere evaluar, se sugiere que se realice de la siguiente manera:

La *evaluación diagnóstica* podrá observarse cuando el alumno manifieste en forma de dudas, propuestas o precisiones, la incertidumbre que le cause el desarrollo de los ejercicios de introducción en cada unidad.

Por otro lado, las actividades realizadas en el cuaderno de trabajo por el alumno deberán considerarse como una *evaluación formativa*. Para el caso de una *evaluación sumativa*, se integra el examen sugerido en cada unidad

La **valoración** que el Profesor haga sobre los resultados obtenidos al usar este Cuaderno de trabajo permitirá adecuar la estructura de éste, y así optimizarlo.

En la realización del trabajo se presentaron algunas inquietudes en lo que se refiere al contenido del programa y su estructura, creemos que es una valoración que provoca inquietud, se propuso trabajar en esto, para presentar una propuesta de la misma.

También podrá auxiliarse con las formas de evaluación sugeridas anteriormente, y se podrá realizar una revisión continua de las actividades que decida implementar para, si lo considera conveniente, adecuarlas al desarrollo de la clase con la finalidad de que el proceso enseñanza-aprendizaje se vea fortalecido.

GRUPO DE TRABAJO
401C

TEMARIO DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

UNIDAD I. Procesos infinitos

- Situaciones numéricas, geométricas o algebraicas, que dan lugar a procesos infinitos.
- Comportamiento de un proceso infinito: representación numérica, algebraica o gráfica.
- Representación simbólica de procesos infinitos por medio de una función

Noción de límite

Acercamiento al concepto de límite de una función

- Notación de límite $\lim_{x \to a} f(x) = b$

Unidad 2. El concepto de derivada: variación y razón de cambio

En diferentes contextos, variación y razón de cambio promedio e instantánea en:

- Funciones polinomiales de grado no mayor a tres

Concepto de derivada
- Notación
- Representación algebraica.

Unidad 3. Derivada de funciones algebraicas

Derivada de funciones del tipo $f(x) = cx^n$

Reglas de derivación para:

- Función constante
- Función lineal
- Constante por una función
- Suma de funciones
- Producto de funciones
- Cociente de funciones
- Funciones del tipo $f^n(x)$ con $f(x)$ polinomial y n un número racional

Unidad 4. Comportamiento gráfico y problemas de optimización

- Situaciones que propician el análisis de las relaciones entre la gráfica de una función y sus derivadas
- Comportamiento gráfico de una función
- Crecimiento y decrecimiento de funciones - Puntos críticos. Concavidad.
- Máximos y mínimos, criterio de la 1ª y 2ª derivadas
- Puntos de inflexión.

Aprendizajes de Cálculo Diferencial e Integral I

UNIDAD 1. Procesos infinitos y la noción de límite

Propósito. Al finalizar la unidad el alumno descubrirá intuitivamente el concepto de límite a través de diversos problemas que involucren procesos infinitos mediante los diferentes registros: numérico, gráfico o simbólico.

Aprendizajes

- Reconoce características de los procesos infinitos utilizando alguno de estos procedimientos: numérico, algebraico o gráfico.
- Identifica el patrón de comportamiento en un proceso infinito.
- Reconoce un proceso infinito de uno que no lo es.
- Resuelve problemas en diversos contextos que involucren en su solución, procesos infinitos.
- Utiliza las representaciones gráficas, tabular o algebraica de un proceso infinito para analizar su comportamiento en cuanto cómo cambia la variable, qué comportamiento sigue, cuáles son los valores siguientes, y a la larga como son estos.
- Distingue aquellos procesos infinitos que tienen un resultado límite de los que no lo tienen
- Expresa simbólicamente el límite de un proceso infinito si éste existe.
- Interpreta el límite de un proceso infinito.
- Identifica cuál es el resultado límite de un proceso infinito.
- Establece el valor límite de un proceso infinito dado en forma algebraica, con base en otras representaciones de dicho proceso.

UNIDAD 2. El concepto de derivada: variación y razón de cambio.

Propósito. Al finalizar la unidad, el alumno interpretará el concepto de derivada a partir del análisis de la variación y de la razón de cambio, al resolver problemas en diferentes contextos cuyos modelos sean funciones polinomiales.

Aprendizajes

- Reconoce en diversos contextos la variación y la razón de cambio en funciones lineales. Explica el significado de la razón de cambio y verifica qué es una constante, a través de procesar la información de las situaciones planteadas.
- Reconoce en diversos contextos la variación y la razón de cambio de las funciones cuadráticas en un intervalo dado, a través de procesar la información de las situaciones planteadas.
- Reconoce en diversos contextos la variación y la razón de cambio de las funciones cúbicas en un intervalo dado, a través de procesar la información de las situaciones planteadas.
- Reconoce y deduce a la razón de cambio instantánea como el límite de las razones de cambio promedio.
- Utiliza a los procesos infinitos como una forma de obtener la razón de cambio instantánea de una función polinomial y la interpreta como un límite.
- Identifica a la derivada de una función polinomial en un punto como el límite de las razones de cambio promedio.
- Interpreta en el contexto de una situación o problema modelado por una función polinomial, la información que proporciona su derivada.
- Calcula la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función polinomial, como el límite de las rectas secantes.
- Calcula la derivada de funciones polinomiales con grado menor o igual a tres, en un punto, usando el límite del cociente de Fermat:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

UNIDAD 3. Derivada de funciones algebraicas

Propósito. Al finalizar la unidad el alumno usará el concepto de derivada a través de su representación algebraica, para identificar patrones de comportamiento y obtendrá las reglas de derivación; utilizará estas reglas para obtener la derivada de una función de manera eficaz y la reconocerá como otra función. Además, aplicará las reglas de derivación en diferentes contextos.

Aprendizajes

- Obtiene la derivada de una función polinomial de 1°, 2° y 3° grados, usando la definición en su representación:
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
- Identifica geométricamente la relación de la representación de la derivada:
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
con la representación anterior.
- Obtiene derivadas utilizando los dos límites anteriores.
- Explica la relación entre la derivada de una función lineal y la pendiente de la recta; identifica dicha relación en el caso de la función constante.
- Identifica el patrón de comportamiento de derivadas de funciones del tipo $f(x) = cx^n$ obtenidas utilizando la definición y determina su regla de derivación.
- Identifica patrones de comportamiento de las derivadas en operaciones con funciones: suma, producto, cociente y de la forma $f^n(x)$, para obtener las reglas de derivación correspondientes.
- Obtiene la derivada de funciones algebraicas usando las reglas de derivación y la regla de la cadena.
- Identifica a la derivada como una función que proporciona la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la gráfica de la función original.
- Identifica a la derivada de una función como una función que proporciona la razón de cambio instantáneo.
- Utiliza la función derivada para resolver problemas en diferente contexto.

UNIDAD 4 Comportamiento gráfico y problemas de optimización

Propósito. Al finalizar la unidad el alumno contrastará la gráfica de una función y sus dos primeras derivadas para obtener información sobre el comportamiento de la función; utilizará dicha información para resolver problemas de optimización.

Aprendizajes

- Interpreta en forma gráfica y algebraica los intervalos en donde una función es creciente, decreciente o constante.
- Deduce a través de un análisis gráfico, las relaciones existentes entre la gráfica de una función y sus dos primeras derivadas: signo de la primera derivada asociada con crecimiento o decrecimiento de la función, derivada nula con puntos críticos, signo de la segunda derivada, con concavidad y segunda derivada nula con un posible cambio de concavidad punto de inflexión
- Esboza la gráfica de la derivada de una función dada la gráfica de esta.
- Calcula los puntos críticos de una función y los clasifica en máximos, mínimos o puntos de inflexión.
- Analiza el tipo de concavidad de la función a partir del signo de la segunda derivada.
- Esboza la gráfica de una función utilizando la información que proporcionan su primera y segunda derivada.
- Infiere que los criterios de la primera y segunda derivada sintetizan el análisis realizado entre las gráficas de $f(x), f'(x), f''(x)$
- Resuelve problemas que involucran máximos o mínimos de una función de acuerdo con su dominio restringido

UNIDAD 1

PROCESOS INFINITOS

Y LA

NOCIÓN DE LÍMITE

UNIDAD 1. Procesos infinitos y la noción de límite

Propósito. Al finalizar la unidad el alumno descubrirá intuitivamente el concepto de límite a través de diversos problemas que involucren procesos infinitos mediante los diferentes registros: numérico, gráfico o simbólico.

Aprendizajes

- Reconoce características de los procesos infinitos utilizando alguno de estos procedimientos: numérico, algebraico o gráfico.
- Identifica el patrón de comportamiento en un proceso infinito.
- Reconoce un proceso infinito de uno que no lo es.
- Resuelve problemas en diversos contextos que involucren en su solución, procesos infinitos.
- Utiliza las representaciones gráficas, tabular o algebraica de un proceso infinito para analizar su comportamiento en cuanto cómo cambia la variable, qué comportamiento sigue, cuáles son los valores siguientes, y a la larga como son estos.
- Distingue aquellos procesos infinitos que tienen un resultado límite de los que no lo tienen
- Expresa simbólicamente el límite de un proceso infinito si éste existe.
- Interpreta el límite de un proceso infinito.
- Identifica cuál es el resultado límite de un proceso infinito.
- Establece el valor límite de un proceso infinito dado en forma algebraica, con base en otras representaciones de dicho proceso.

DEFINICIONES

Proceso: Es una acción que produce un resultado

Proceso finito. Es un proceso que siempre tiene una acción donde termina

Proceso infinito: Es un proceso que siempre puede producir un resultado más o podemos decir que es una acción que se repite indefinidamente

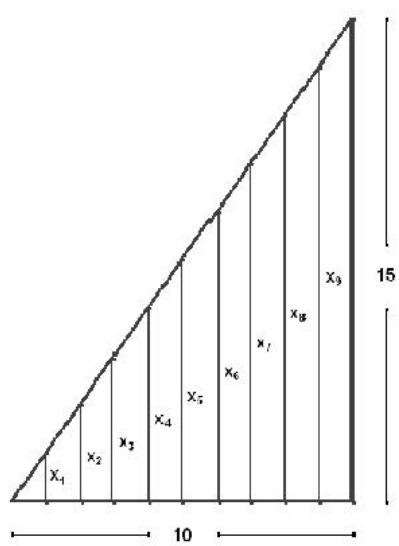
Proceso infinito discreto: Es un proceso que se puede modelar mediante una sucesión, concepto que retomaremos más adelante.

Proceso infinito continuo: Es un proceso que se puede modelar mediante una función definida en un intervalo.

Con las definiciones anteriores vamos a ejemplificar con los siguientes problemas algunos procesos finitos e infinitos. Los problemas se manejan con números discretos (Naturales).

INTRODUCCIÓN CON PROBLEMAS

Problema 1. La estructura de un puente tiene la forma de un triángulo rectángulo con lados de 10 metros de base y 15 metros de altura. Si la estructura contiene nueve soportes a espacios iguales. a) Determinar la longitud de cada uno de los diez componentes verticales y b) escribir la longitud total de los soportes L.



Sugerencia**:** Utilizar el concepto de semejanza de triángulos.

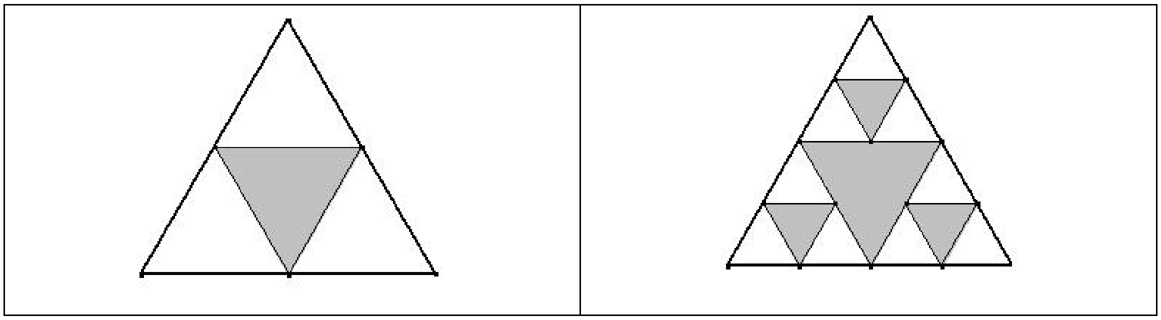
Resultado a) $x_1 =$ ____, $x_2 =$ ____, $x_3 =$ ____, $x_4 =$ ____, $x_5 =$ ____
$x_6 =$ ____, $x_7 =$ ____, $x_8 =$ ____, $x_9 =$ ____, $x_{10} =$ ____

b) $L =$ _______ Escribe el procedimiento para encontrar el valor de L

____

Indica que tipo de proceso es: _________________Explica _______________

Problema 2. En un triángulo equilátero de área *A* se unen los puntos medios de sus lados para formar cuatro triángulos equiláteros, de los cuales el del centro se pinta de negro. Luego con cada uno de los triángulos restantes se realiza lo mismo. Dicho proceso se repite dos veces. Encontrar el área sombreada al final de cada acción, este triángulo es conocido como el triángulo de Sierpinski,



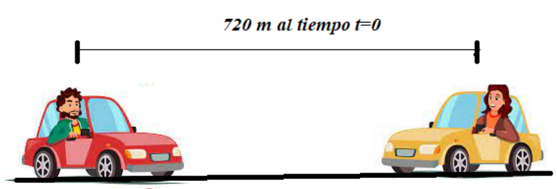
¿Cuál es el área del triángulo sombreado con la primera acción? _____________

¿Cuál es el área del triángulo sombreado de la segunda acción? _____________

Indica que tipo de proceso es: _________________Explica _______________

Lee cuidadosamente el siguiente problema y utiliza un método tabular para su solución.

Problema 3. Dos móviles que se encuentran a una distancia de 720 m uno del otro, se mueven al encuentro mutuo: El primer móvil A recorre 10 m/seg. El otro móvil B recorre 3 m en el primer segundo, en cada segundo siguiente recorre 5 m más que en el anterior. ¿Después de cuantos segundos los móviles se encuentran?



Distancia que recorre cada móvil en cada segundo

t	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
d_A											
d_B											

t	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**
d_A											
d_B											

Suma de las distancias recorrida por cada móvil cada segundo

t	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$(d_A + d_B)$								

t	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
$(d_A + d_B)$								

El tiempo transcurrido para que se encuentren es: ______________________

Indica que tipo de proceso es: _________________Explica _______________

Problema 4. Un caracol decide abandonar el lugar en donde vive porque en ese lugar ya no tiene las condiciones adecuadas para su supervivencia. El sitio al que decide trasladarse se encuentra a 10m de su lugar de origen, el caracol decide avanzar de la siguiente manera, primero recorre la mitad de la distancia total, descansa y recorre la mitad de la distancia que le faltaba y así sucesivamente. ¿Se puede recorrer la distancia total de 10 m? Si es así ¿cuantas acciones debe ejecutar el caracol para lograr llegar a los 10 m?

Realizar una tabla de los recorridos del caracol en cada acción y la suma de ellos

Etapa	d_A	**Suma de distancia recorrida**	**Etapa**	d_A	**Suma de distancia recorrida**
1			**8**		
2			**9**		
3			**10**		
4			**11**		
5			**12**		
6					
7					

¿Cuántas etapas requiere para cubrir la distancia de los 10 m? _______________________

Indica que tipo de proceso es: _________________**Explica** _______________

Problema 5. Ahora consideremos que el caracol decide abandonar el lugar en donde vive y que el sitio al que deciden trasladarse se encuentra a 10m de su lugar de origen, ahora el caracol decide avanzar de la siguiente manera, primero recorre la tercera parte de la distancia total, descansa y recorre la tercera parte de la distancia que le faltaba y así sucesivamente. ¿Se puede recorrer la distancia total de 10 m de estas dos formas? Si es así ¿cuantas acciones debe ejecutar el caracol para lograr llegar a los 10 m? . ¿Se puede recorrer la distancia total de 10 m? Si es así ¿cuantas acciones debe ejecutar el caracol para lograr llegar a los 10 m?

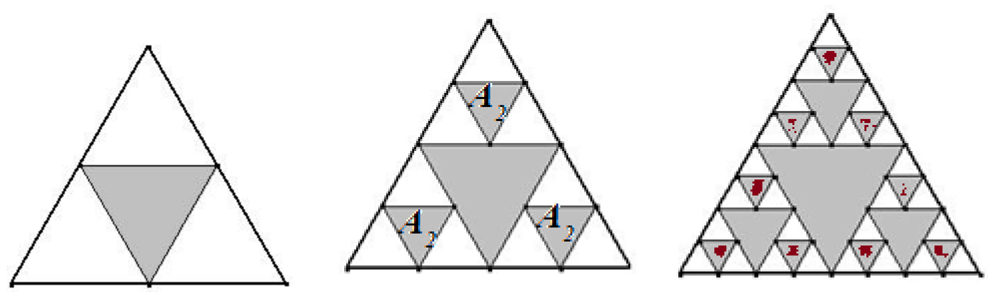
Realizar una tabla de los recorridos del caracol en cada acción y la suma de ellos

Etapa	d_B	Suma de distancia recorrida	Etapa	d_B	Suma de distancia recorrida
1			8		
2			9		
3			10		
4			11		
5			12		
6					
7					

¿Cuántas etapas requiere para cubrir la distancia de los 10 m? ______________________

Indica que tipo de proceso es: __________________**Explica** ________________

Problema 6. En un triángulo equilátero de área *A* se unen los puntos medios de sus lados para formar cuatro triángulos equiláteros, de los cuales el del centro se pinta de negro. Luego con cada uno de los triángulos restantes se realiza lo mismo. Dicho proceso se repite muchas veces. Encontrar el área sombreada siguiendo una acción tras otra, este triángulo es conocido como el triángulo de Sierpinski,



(a) (b) (c)

Escribir el valor del área sombreada en el inciso (a) $A_1 =$ _______

Escribir el valor del área sombreada de cada triángulo nuevo en (b) $A_2 =$ _______

Escribir el valor del área sombreada y marcada con un * en el inciso c $A_3 =$ ______

Si se continua con el proceso anterior, dibuje la siguiente figura que corresponda al trazar triángulos de la misma manera sugerida en los espacios en blanco y determinar el Area de los nuevos triángulos, la denominamos $A_4 =$ ______

Calcular la suma del total de las áreas sombreadas hasta el momento

$A_s =$ ___________________

Es posible continuar con el proceso, escribir la expresión algebraica del área total sombreada cuando se realizan dos acciones más. $A_{S'} =$ ______________

Ya se habrá cubierto todo el triángulo en blanco, si no es así, escribir la suma de todas las áreas sombreadas hasta una acción n-ésima

Suma de las áreas sombreadas ________________________________

Se logrará sombrear todo el triángulo original, si es así ¿cuantas acciones se requieren?

____

Indica que tipo de proceso es: ________________**Explica** ______________

HERRAMIENTA MATEMÁTICA

Para trabajar los problemas anteriores, requerimos de la siguiente herramienta matemática para resolver cada uno de ellos.

SUCESIONES Y SERIES

Sucesión numérica se entiende por un conjunto ordenado (siguen una regla establecida) de números.

Cuando en una sucesión se cumple que; la diferencia de un término menos el término anterior es una constante, se dice que la sucesión es una **Progresión Aritmética**.

Ejercicio 1. a) 3, 6, 9, 12 , …………… ¿Qué término sigue? __________

b) $\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\ldots\ldots$………… ¿Qué término sigue? __________

c) 2, 9, 16, 23 , …………… ¿Qué término sigue? __________

Cuando en una sucesión se cumple que el cociente de un término entre el término anterior es una constante, se dice que la sucesión es una **Progresión Geométrica.**

Ejercicio 2. a) 2, 4, 8, 16 , …………… ¿Qué término sigue? __________

b) $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\ldots\ldots$………… ¿Qué término sigue? __________

c) 3, 9, 27, 81, …………… ¿Qué término sigue? __________

En resumen, podemos escribir el siguiente enunciado.

Un conjunto ordenado en el cual podemos determinar quién es el *primer* término, quién el segundo o quién el n-ésimo término, decimos que este conjunto forma una ***sucesión.***

Una sucesión, se puede escribir con un término general que, al utilizar los valores discretos, reproducen cada uno de los términos.

SUCESIÓN ARITMÉTICA

Para encontrar el término general de una sucesión aritmética, se procede de la siguiente manera

Ejercicio 4. Obtener la fórmula para el término general de la sucesión

$$200,\ 195,\ 190,\ 185,\ 180,\ 175,\ ...$$

Escribimos el primer término y sumamos el producto de la diferencia por *(n-1)* donde *n* es un número natural (valor discreto)

Procedemos $a_n = 13 + 4(n-1)$ Comprobar que la expresión genera la sucesión dada, escribe los 10 primeros términos dando valor a n, de acuerdo con los números naturales

____

Ejercicio 5. Obtener los primeros cinco términos de la sucesión de números, cuyo término general es $a_n = 7 + \dfrac{n}{2}$ y comprobar que la diferencia entre un término y su anterior es una constante

____Diferencia ____________________

Ejercicio 6. Obtener el término general de cada una de las siguientes sucesiones de números

a) $293, 287, 281, 275, 269, \ldots,$ término general _____________________________

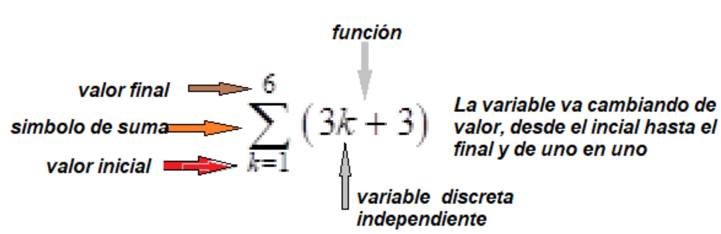
b) 293,287,281,275,269…… término general______________________________

c) $\dfrac{43}{4}, \dfrac{23}{2}, \dfrac{49}{4}, 13, \dfrac{55}{4}, .$ término general __________________________

Un aspecto importante es obtener la suma de los términos de una sucesión aritmética, para ello vamos a utilizar el símbolo de suma, el cual se denota generalmente por medio del símbolo griego sigma (Σ) y se expresa de la siguiente manera $\sum_{k=m}^{n} f(k)$; donde k es la variable independiente m es el valor inicial y n es el valor final, n y m son números enteros, $f(k)$ es una función cuyo dominio son los números naturales.

Nota: La variable independiente se puede representar con otros símbolos (letras) la gran mayoría de textos utilizan los símbolos i, j, k, m, n .

La simbología de la suma es la siguiente



Veamos cómo usar el símbolo de suma en la siguiente expresión

Ejemplo. Suponer que la función $f(k)=3k+3$, escribir los sumandos y el resultado de $\sum_{k=1}^{6}(3k+3)$.

Traducido a nuestro lenguaje natural, "Encontrar los sumandos y el total de la suma de la función $f(k)=3k+3$".

Resultado

$$\sum_{k=1}^{5}(3k+3)=(3(1)+3)+(3(2)+3)+(3(3)+3)+(3(4)+3)+(3(5)+3)=6+9+12+15+18=60$$

Ejercicio 7. En las siguientes expresiones escribir la función $f(k)$ y el resultado de las siguientes sumas

$a)\ \sum_{k=1}^{5}(3k+3)$ $\quad f(k)=$ _________ $\quad Suma=$ __________

$b)\ \sum_{i=1}^{6}(2i+13)$ $\quad f(i)=$ _________ $\quad Suma=$ __________

$c)\ \sum_{j=1}^{6}(10)$ $\quad f(j)=$ _________ $\quad Suma=$ __________

$d)\ \sum_{m=1}^{8}(2m^2-5m+13)$ $\quad f(m)=$ _________ $\quad Suma=$ __________

Ahora nos preguntamos ¿cómo encontrar el resultado de una suma?, cuando el último término indefinido (no explicito) es un número n.

Es importante mencionar que las sumas también se manejan con el término de **SERIES.**

A saber

Ejemplo. Encontrar el resultado de la suma $\sum_{j=1}^{n}(3j+5)$

Paso 1, desarrollamos la suma hasta el último término

$\sum_{j=1}^{n}(3j+5)=8\ +\ 11\ +\ 14\ +\ 17\ +\ 20\ +\ldots\ldots\ldots\ldots+(3n+5)$ es correcto? ______

Verifica en tu cuaderno.

Verifica que, al escribir la suma en sentido inverso, esto es, del último término al primero, de la siguiente manera

$$\sum_{j=1}^{n}(3j+5)=8 \quad + \quad 11 \quad + 14 + 17 + 20 + \ldots\ldots + (3(n-2)+5)+(3(n-1)+5)+(3n+5)$$

$$\sum_{j=1}^{n}(3j+5)=(3n+5)+(3(n-1)+5)+(3(n-2)+5)+\ldots\ldots\ldots + \quad 14 \quad + \quad 11 \quad +8$$

Ahora suma el término de arriba con el término de abajo, verifica el siguiente resultado

$$2\left[\sum_{j=1}^{n}(3j+5)\right]=(3n+13)\ +(3n+13)+\ (3n+13)+(3n+13)+(3n+13)\ +(3n+13)+\ldots\ldots\ldots+(3n+13)$$

El sumando $(3n+13)$ aparece n veces, tendremos entonces

$$2\left[\sum_{j=1}^{n}(3j+5)\right]=n(3n+13)$$

Por lo tanto, la suma buscada es

$$\sum_{j=1}^{n}(3j+5)=\frac{n(3n+13)}{2}$$

Comprobar la expresión encontrada de la siguiente manera:

Si $n=3$, estamos buscando la suma de los tres primeros términos

$\sum_{j=1}^{3}(3j+5)=8+11+14=33$ y usando la expresión encontrad, se tiene

$$\frac{n(3n+13)}{2}=\frac{3[(3(3)+13)]}{2}=\frac{3[9+13)]}{2}=33$$

Utilizar diferentes valores de n y comprobar, escribir resultados en el cuaderno de trabajo.

Ejercicio 8. Encontrar el valor de cada una de las siguientes sumas, utilizar a j como variable independiente

a) Obtener una fórmula para la suma de los primeros n números naturales

____

b) Obtener una fórmula para la suma de los primeros n números pares naturales

____

c) Obtener una fórmula para la suma de los primeros n números impares naturales

____

d) Obtener una fórmula para la siguiente suma hasta el n-ésimo término $5+9+13+17+21+$.................

____

APLICACIÓN

Por otra parte, una situación que se presenta frecuentemente en algunos problemas que requieren que determinemos la expresión general de una sucesión aritmética. Aplicamos lo estudiado para solucionar el problema 3 de manera algebraica

A saber, en el problema 3, tenemos dos sucesiones, recordemos

"el móvil A recorre 10 m/seg. El otro móvil B recorre 3 m en el primer segundo, y en cada segundo siguiente recorre 5 m más que en el anterior"

Ejercicio 9. Escribamos la sucesión para el móvil A en los primeros *n* segundos usando el símbolo de suma

$\sum_{j=1}^{n} 10$, vamos a desglosar (desarrollar) esta suma

$$\sum_{j=1}^{n} 10 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Ahora veamos cual es la expresión general para el móvil B

Escribamos la sucesión ____

Ahora la suma de cada desplazamiento en los primeros *n* segundos

Escribir la expresión general del término general para los primeros n segundos, usando el símbolo de suma, j como la variable independiente para el móvil B ______________

Encontrar el resultado de la distancia recorrida en n segundos para los dos móviles

Ahora, la suma de las distancias encontradas para ambos móviles debe ser igual a la distancia de separación, escribir la expresión resultante

____

Resolver para el valor de n que representa el tiempo que tardan en encontrarse los móviles, debe ser igual a lo encontrado en forma tabular.

SUCESIÓN GEOMÉTRICA

Ahora vamos a trabajar las sucesiones geométricas, el particular resolveremos como encontrar la expresión general para obtener la suma de este tipo de sucesiones.

Pregunta. Cómo podemos identificar una suma que provenga de una sucesión geométrica

____

Ejercicio 10. En las siguientes sumias, identificar cual corresponde a una de tipo geométrico, justificar la respuesta

a) 2+4+8+16+32+…………………..___________________Justificación_____________

b) 5+10+15+20+25…………………____________________Justificación____________

c) 5+12+19+26+33…………………____________________Justificación____________

d) $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+$.........…………_____________________Justificación___________

Con este conocimiento de una suma geométrica, vamos a resolver como entrar la suma de este tipo

Un problema que genera una sucesión geométrica es la que surge en el problema 4. *Recordemos "Un caracol decide trasladarse a 10 m de su lugar de origen, el caracol decide avanzar de la siguiente manera, primero recorre la mitad de la distancia total, descansa y recorre la mitad de la distancia que le faltaba y así sucesivamente"*

La suma S o serie correspondiente al avance del caracol es

$S=\frac{10}{2}+\frac{10}{4}+\frac{10}{8}+\frac{10}{16}+\frac{10}{32}+\ldots\ldots\ldots\ldots$ lo que podemos escribir con potencias como

$$S=\frac{10}{2}+\frac{10}{2^2}+\frac{10}{2^3}+\frac{10}{2^4}+\frac{10}{2^5}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{10}{2^n} \qquad (1)$$

considerando a n como la etapa n-ésima del desplazamiento del caracol.

Observamos que se trata de una serie geométrica, ¿Por qué? Porque al dividir un término entre el anterior se obtiene el mismo cociente, al cual llamaremos RAZÖN y lo representaremos con el símbolo r.

Cuál es el valor la razón en este caso $r=$ __________.

Vamos a encontrar una expresión que proporcione la suma hasta el número de etapa realizada por el caracol.

Procedemos de la siguiente manera multiplicamos la expresión (1) por la razón y la restamos a la suma original

$$S = \frac{10}{2} + \frac{10}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \frac{10}{2^4} + \frac{10}{2^5} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{10}{2^n}$$

Multiplicamos por

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\left[\frac{10}{2} + \frac{10}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \frac{10}{2^4} + \frac{10}{2^5} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{10}{2^n}\right] = \left[\frac{10}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \frac{10}{2^4} + \frac{10}{2^5} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{10}{2^n} + \frac{10}{2^{n+}}\right]$$

Restamos

$$S = \frac{10}{2} + \cancel{\frac{10}{2^2}} + \cancel{\frac{10}{2^3}} + \cancel{\frac{10}{2^4}} + \cancel{\frac{10}{2^5}} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \cancel{\frac{10}{2^n}}$$

$$-\quad \frac{1}{2}S = \cancel{\frac{10}{2^2}} + \cancel{\frac{10}{2^3}} + \cancel{\frac{10}{2^4}} + \cancel{\frac{10}{2^5}} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \cancel{\frac{10}{2^n}} + \frac{10}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{10}{2} - \frac{10}{2^{n+1}}$$

Al despejar S obtenemos la suma buscada $S = 10 - \frac{10}{2^n}$

Variar n y encontrar la distancia S recorrida en cada caso considerado a continuación, comparar con los resultados tabulares obtenidos

Ejercicio 11

Para $n=1$ S= _____________

Para $n=2$ S= _____________

Para $n=10$ S= _____________

Para $n=20$ S= _____________

Para $n=50$ S= _____________

En que etapa alcanza los 10 metros _________Explique____________________________

Ejercicio 12. Resolver el problema 5 usando el proceso del ejercicio 11**.**

Expresión para la suma ___________________________________

Valor de la suma para los siguientes valores

Para $n=1$ S= ____________

Para $n=2$ S= ____________

Para $n=10$ S= ____________

Para $n=20$ S= ____________

Para $n=50$ S= ____________

Ejercicio 13. Resolver el problema 6, utilizando la serie geométrica obtenida.

Escribir la serie geométrica ___________________________________

Escribir la suma S de áreas para

Para $n=1$ S= ____________

Para $n=2$ S= ____________

Para $n=10$ S= ____________

Para $n=20$ S= ____________

Para $n=50$ S= ____________

EJERCICIOS VARIOS DE SUCESIÓN GEOMÉTRICA

Ejercicio 14. Determinar los sumandos y el valor total de la suma $\sum_{k=2}^{6}\left(-\frac{3}{4}\right)^{k-2}$

$$\sum_{k=2}^{6}\left(-\frac{3}{4}\right)^{k-2} = \text{_____________________________________}$$

Ejercicio 15. Determinar los sumandos y el valor total de la suma $\sum_{k=1}^{5} 2\left(-3\right)^{k-1}$

$$\sum_{k=1}^{5} 2\left(-3\right)^{k-1} = \text{____}$$

Ejercicio 16. Determinar una fórmula en términos de n para la suma $\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k}$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k} = \underline{\hspace{8cm}}$$

LÍMITE AL INFINITO DE UNA SUCESIÓN

Queremos predecir el comportamiento de unas sucesiones cuando n se hace cada vez más grande (de manera formal; cuando n tiende a infinito $n \to \infty$).

Ejercicio 17. Llenar la siguiente tabla con valores discretos propuestos para la variable n que va aumentando como se muestra y observemos el comportamiento de las imágenes (valores) de las sucesiones a_n .

n	$\frac{35}{n}$	$\frac{9n+3}{3n-5}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^n$	$\sqrt[n]{700^n+725^n}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^n$
5					
10					
20					
100					
200					
250					
500					
1000					
2000					
5000					
10000					
50000					
100000					
1000000					
10000000					

Observar cuidadosamente el comportamiento de cada una de las sucesiones en la tabla.

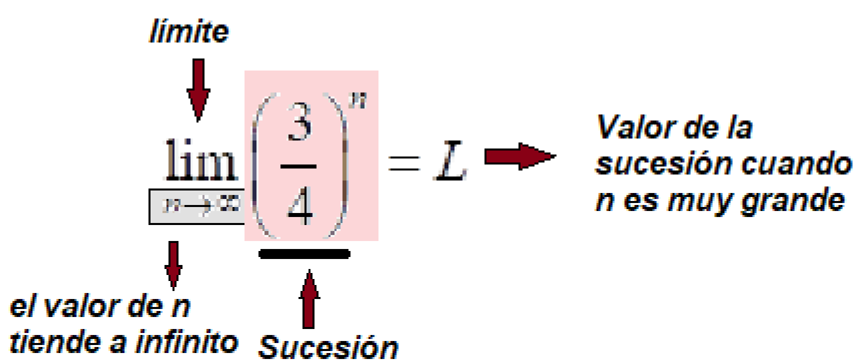
Ejercicio 18. Contestar el siguiente cuestionario

Escribir en lenguaje que ocurre con el valor de cada una de las sucesiones conforme se aumenta el valor de n y mencionar si al seguir aumentando tendremos un valor LIMITE, si es así escribirlo

	Sucesión	Comportamiento	LIMITE
1	$\frac{35}{n}$		
2	$\frac{9n+3}{3n-5}$		
3	$\left(\frac{3}{4}\right)^n$		
4	$\sqrt[n]{700^n+725^n}$		
5	$\left(\frac{5}{4}\right)^n$		

Observemos en particular que la sucesión del tercer renglón es una fracción menor de 1, y que al elevarla a una potencia que va aumentando su LIMITE es igual a L=________.

Esto lo escribiremos de manera simbólica de la siguiente manera, el cual se lee: *El límite de la sucesión cuando n es muy grande (tiende a infinito) es igual a L.*



Ejercicio 19. Escribir cada uno de los límites obtenidos en el ejercicio 18, con símbolos como el que se muestra en la imagen anterior.

1.____

2. ____

3. ____

4.____

5.____

Ejercicio 20. En cada uno de los siguientes ejercicios elaborar una tabla (escribirla en su cuaderno) para encontrar los límites infinitos de las sucesiones mostradas y escribir el resultado usando la simbología mostrada anteriormente.

a) $a_n = \dfrac{50n^2 + 8n}{10n^2 + 5}$ ____________________________________

b) $a_n = \dfrac{5n^3 + 8}{10n^4 + 5}$ ____________________________________

c) $a_n = \dfrac{8n^3 + 7}{10n^2 + 5}$ ____________________________________

d) $a_n = \dfrac{3^n + 7}{4^n - 5}$ ____________________________________

e) $a_n = \dfrac{5^n + 7}{4^n - 5}$ ____________________________________

f) $a_n = (1.05)^n$ ____________________________________

g) $a_n = (0.9)^n$ ____________________________________

h) $a_n = sen\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ ____________________________________

i) $a_n = n\,sen\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ ____________________________________

TEOREMAS DE LÍMITES

1) $\lim_{n\to\infty} c = c$ donde c es una constante	6) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad con \ a > 0$
2) $\lim_{n\to\infty} n^r = \infty, \quad con \ r > 0$	7) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3) $\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^r} = 0, \quad con \ r > 0 \quad y \ c$ es una constante	8) $\lim_{n\to\infty} \frac{c}{r^n} = 0, \quad con \ r > 1 \quad y \ c$ una constante
4) $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty, \quad con \ a > 1$	9) Sí $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ entonces $\lim_{n\to\infty} (a_n)^m = l^m$
5) $\lim_{n\to\infty} a^n = 0, \quad con \ \lvert a \rvert < 1$	10) Sí $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{l}$

Usando estos teoremas podemos calcular los límites sin tabular. Veamos algunos ejemplos

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{7}{8}\right) = \frac{7}{8}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{49}{(1.5)^n} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{9}{\sqrt[5]{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{9}{n^{\frac{1}{5}}} = 0$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{15n^3+8}{3n^3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{15n^3}{3n^3} + \frac{8}{3n^3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{15n^3}{3n^3} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{8}{3n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} 5 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{8}{3n^3} = 5$

e)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n(6n+1)}{5^n(2n)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4^n}{5^n}\right)\left(\frac{6n+1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \left(\frac{6n}{2n} + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\right) = 0(3+0) = 0$$

f) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{9+(0.7)^n}{\left(-\frac{8}{9}\right)^n+5} = \dfrac{\lim_{n\to\infty}\left(9+(0.7)^n\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(\left(-\frac{8}{9}\right)^n+5\right)} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} 9 + \lim_{n\to\infty}(0.7)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{8}{9}\right)^n + \lim_{n\to\infty} 5} = \dfrac{9+0}{0+5} = \dfrac{9}{5}$

Ejercicio 21. Calcular los siguientes límites usando métodos algebraicos

$a)\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{18n^3+4n^2-9}{5+7n^2-6n^3}$ ______________________________

$b)\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{34n^5-43n^2+17}{17n^7+16n^3+3}$ ______________________________

$c)\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3+15}{5n^2+9n+1}$ ______________________________

$d)\ \lim_{n\to\infty} \left(10-\dfrac{10}{2^n}\right)$ ______________________________

$e)\ \lim_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ______________________________

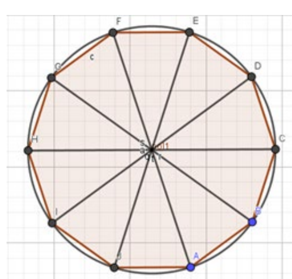
$f)\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{8+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{2}{5}\right)^n-2}$ ______________________________

$g)\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{(2)^{\frac{1}{n}}-8}{(2)^{\frac{1}{n}}+24}$ ______________________________

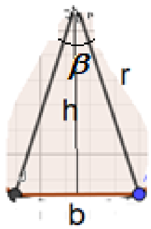
Ejercicio 22. Usando la herramienta vista hasta el momento vamos a calcular el área de un círculo de radio r, inscribiendo un polígono regular de n lados.

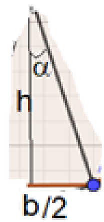
a) Trazamos un círculo de cierto radio, llamaremos r al radio e inscribimos un polígono regular con n lados. En este caso con 10 lados. Desde el centro trazamos líneas a los vértices y observamos que se construyen 10 triángulos congruentes como ejemplo base.

Para resolver el ejercicio, se sugiere hacer todo el desarrollo en su cuaderno



Vamos a calcular el área de cada rectángulo y la multiplicamos por 10





El ángulo en la parte superior del triángulo es $\beta = 2\dfrac{\pi}{10}$ por lo tanto, el ángulo $\alpha = \dfrac{\pi}{10}$

Con este ángulo y usando trigonometría podemos calcular su base b y su altura h y en consecuencias su área

Escribir los resultados obtenidos base b = ____________________

La altura h = ____________________

Y el resultado del área es A = ________________________________

Siguiendo el mismo proceso escriba la expresión del área para un polígono inscrito de n lados

Se sugiere escribir la base y la altura como en el caso anterior

Escribir los resultados obtenidos base b = ____________________

La altura h = ____________________

Y el resultado del área es A = ________________________________

Comprobar que la sucesión obtenida es $\acute{A}rea\ del\ polig\acute{o}no = nr^2 sen\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}$

Finalmente calcular el límite de la sucesión cuando el número de lados tiende a infinito

Escribir el resultado obtenido ________________________________

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONÓMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDAES
PLANTEL ORIENTE
ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

Examen Unidad 1 de Cálculo Diferencial e Integral I. NOCIÓN DE LÍMITE. PROCESOS INFINITOS

Resolver los siguientes problemas

1. La expresión para encontrar la suma de n- términos de $\sum_{k=1}^{n}(7k+2)$ es
2. Encontrar la suma de los primeros n términos de la suma que corresponde a la sucesión

$$a_n = \left\{7, -\frac{14}{5}, \frac{28}{25}, -\frac{56}{125}, \frac{112}{625}, ...\right\}$$

3. Encontrar el término general de la sucesión $a_n = \{7, 12, 17, 22, 27, ...\}$
4. La suma de los 7 primeros términos de una progresión geométrica cuya razón es 3 es 7651, ¿Cuál es el séptimo término?
5. El valor del límite $\lim_{n\to\infty} \dfrac{-3n^2 - \frac{5}{2}n + 7}{\frac{2}{3}n^2 - 5n + 3}$ es:
6. El valor del límite $\lim_{n\to\infty} \dfrac{-\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{5}\right)^n + 7}{\frac{2}{3n} + 3}$ es:
7. ¿Cuál es el área de un polígono regular de 10 lados inscrito en una circulo de 30 cm de radio?

8. Un canguro recorre en su primer salto una distancia de 1 m, en su segundo salto recorre 1/3 de la primera distancia recorrida, en su tercer salto recorre 1/3 de la segunda distancia recorrida, y así sucesivamente ¿Cuánta distancia recorre en total el canguro? 1.5 m

UNIDAD 2

LA DERIVADA, VARIACIÓN Y RAZÓN DE CAMBIO

UNIDAD 2. El concepto de derivada: variación y razón de cambio.

Propósito. Al finalizar la unidad, el alumno interpretará el concepto de derivada a partir del análisis de la variación y de la razón de cambio, al resolver problemas en diferentes contextos cuyos modelos sean funciones polinomiales.

Aprendizajes

- Reconoce en diversos contextos la variación y la razón de cambio en funciones lineales. Explica el significado de la razón de cambio y verifica qué es una constante, a través de procesar la información de las situaciones planteadas.
- Reconoce en diversos contextos la variación y la razón de cambio de las funciones cuadráticas en un intervalo dado, a través de procesar la información de las situaciones planteadas.
- Reconoce en diversos contextos la variación y la razón de cambio de las funciones cúbicas en un intervalo dado, a través de procesar la información de las situaciones planteadas.
- Reconoce y deduce a la razón de cambio instantánea como el límite de las razones de cambio promedio.
- Utiliza a los procesos infinitos como una forma de obtener la razón de cambio instantánea de una función polinomial y la interpreta como un límite.
- Identifica a la derivada de una función polinomial en un punto como el límite de las razones de cambio promedio.
- Interpreta en el contexto de una situación o problema modelado por una función polinomial, la información que proporciona su derivada.
- Calcula la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función polinomial, como el límite de las rectas secantes.
- Calcula la derivada de funciones polinomiales con grado menor o igual a tres, en un punto, usando el límite del cociente de Fermat:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

UNIDAD 2. EL CONCEPTO DE DERIVADA Y RAZÓN DE CAMBIO

En el presente texto suponemos que el alumno conoce el concepto de función donde tanto la variable como su dominio son números reales, su relación y el seguimiento de estos temas requieren de cierto manejo formal, pues los conceptos y su definición en este texto, se distinguen considerablemente de los utilizados anteriormente.

Para desarrollar nuestros ejercicios en esta UNIDAD, se requiere tener bien definidos los conceptos que se van a trabajar, por lo que iniciaremos con contestar el siguiente cuestionario.

CUESTIONARIO

A) ¿Qué es una razón matemática? ____

B) ¿Qué es una función de variable real con variable real?

____

C) En la expresión $y = F(x)$, ¿Cuál es la variable dependiente? ________¿Cuál es la variable independiente?______________

D) ¿Qué valores puede tomar la variable independiente? ________________________

E) ¿Qué valores puede tomar la variable dependiente? __________________________

F) Definir un intervalo en la línea numérica Real________________________________

G) Existen 4 tipos de Intervalos que podemos identificar en la línea numérica Real. Describir cada uno de ellos y representarlos gráficamente

i) Intervalo cerrado____

Grafica

ii) Intervalo abierto ____

Grafica

iii) Intervalo semiabierto____

Grafica

iv) Intervalo semicerrado ____

Grafica

H) En cada una de las siguientes expresiones escribe el término faltante para factorizar la expresión del lado izquierdo.

$x^2 - h^2 = (x-h)(\_\_\_\_\_\_\_\_)$

$x^3 - h^3 = (x-h)(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$

$x^4 - h^4 = (x-h)(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$

$x^2 - xh = x(\_\_\_\_\_\_\_\_)$

I) Identifica cada una de las siguientes funciones, de acuerdo con su tipo (polinomial, racional, irracional), en el caso de polinomial indicar su grado.

$a)\ f(x) = -\frac{2}{3}x + 7$ __________________________________

$b)\ f(x) = 2x^2 - 3x + 8$ __________________________________

$\text{c)}\ f(x) = \frac{5x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 3x + 2}$ __________________________________

$d)\ f(x) = -3x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ __________________________________

$e)\ f(x) = \sqrt{5x^2 - 3x + 3}$ __________________________________

$f)\ f(5) = 25$ __________________________________

$g)\ f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x + 1}$ __________________________________

RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO

Con el siguiente problema, contesta las siguientes preguntas

Problema 1. Se extrae el agua de una piscina, el volumen V del agua después de *t* minutos de iniciada la extracción el volumen de agua en la piscina es $V(t)$ litros, donde $V(t) = 250(1600 - 80t + t^2)$, *t* en minutos.

a) Escribir la función que describe el problema______________________________

b) ¿Cuál es la variable dependiente? _____________¿Qué representa?__________

c) ¿Cuál es la variable independiente? ____________¿Qué representa?__________

d) ¿El tiempo puede tomar valores negativos? _________Escribir el dominio de la función _____________

e) ¿Cuál es el valor del volumen de en la piscina al tiempo $t = 10\,\text{min}$?

$$V(10) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

f) Tabular y graficar la función (usar la escala adecuada) en el intervalo $[4,12]$. Utilizar los valores del tiempo que elija cada quién.

Dato	t	$V(t)$
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

Se observa en la tabla que, al ir variando el valor del tiempo elegido, la función también cambia de valor de acuerdo con la función establecida.

Contestar las siguientes preguntas

De acuerdo con los datos que elegiste para el tiempo, escribe cuál fue la variación del tiempo entre el dato (t_4) y el dato (t_2). Escribe tu resultado a continuación

$$t_4 - t_2 = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Ahora escribe la variación que tuvo la función en ese cambio de tiempo, esto es

$$V(t_4) - V(t_2) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Ahora de acuerdo con la definición de razón, vamos a calcular la razón del cambio de Volumen entre el cambio de tiempo, a saber

$\dfrac{V(t_4) - V(t_2)}{t_4 - t_2} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$ es importante escribir las unidades.

A este resultado en general le llamamos **razón de cambio promedio,** observar que en este problema el resultado es negativo, explicar

____

Con lo visto anteriormente, trabajemos el siguiente problema

Problema 2. Cierta compañía inicio sus operaciones el 1° de enero de 2018. Las utilidades anuales brutas de la compañía después de t años de operación son de G pesos. Si la función de las utilidades en el tiempo está dada por la expresión $G(t) = 50000 + 18000t - 600t^2$, Encontrar la razón promedio de las utilidades con respecto al tiempo.

Realizar una representación tabular llenando la siguiente tabla

t años	**1**	**2**	**3**	**6**	**9**	**11**	**12**
$G(t)$							

Realizar en el cuaderno de apoyo la gráfica de $G(t)$ vs. t.

Se observa en la tabla que, al ir variando el valor del tiempo elegido, la función también cambia de valor de acuerdo con la función establecida.

Contestar las siguientes preguntas

De acuerdo con los datos que elegiste para el tiempo, escribe cuál fue la variación del tiempo entre los datos que se quieras elegir, representarlos con símbolos.

La variación de dos datos cualesquiera la vamos a representar de aquí en adelante como Δt (se lee “delta t”) y significa la diferencia de un valor final menos un valor inicial, también se acostumbra a decir “incremento de una variable” y regularmente es el valor final menos el valor inicial. Escribe tu resultado a continuación para la variación del tiempo

$$\Delta t = t_f - t_i = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Ahora escribe la variación que tuvo la función en ese cambio de tiempo, escribamos la expresión con el símbolo delta (Δ)

$$\Delta G = G(t_f) - G(t_i) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Ahora de acuerdo con la definición de razón, vamos a calcular la razón del cambio de Ganancia entre el cambio de tiempo, a saber

$\dfrac{\Delta G}{\Delta t} = \dfrac{G(t_f) - G(t_i)}{t_f - t_i} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$ es importante escribir las unidades.

El resultado es la **razón de cambio promedio de las Ganancias respecto al tiempo,** En diversos textos, la razón de cambio promedio, también se nombra TASA PROMEDIO.

Una expresión general para la tasa promedio de las utilidades anuales brutas de la compañía en el intervalo $[t_0, t]$, t_0 representa el valor inicial, t indica el valor final, vamos a proceder de la siguiente manera.

Observemos que el tiempo inicial lo tenemos como t_0 y el tiempo final será t, por lo tanto

$$\overline{G}(t) = \frac{\Delta G(t)}{\Delta t} = \frac{G(t)-G(t_0)}{t-t_0} = \frac{\left(50000+18000t-600t^2\right)-\left(50000+18000t_0-600t_0^{\,2}\right)}{t-t_0}$$

$$\overline{G}(t) = \frac{\Delta U(t)}{\Delta t} = \frac{G(t)-G(t_0)}{t-t_0} = \frac{18000(t-t_0)-600\left(t^2-t_0^{\,2}\right)}{t-t_0} = -600(t+t_0)+18000$$

Reproducir en el cuaderno de apoyo las operaciones algebraicas

Finalmente, tenemos la razón promedio de las utilidades respecto al tiempo, observamos que esta representado por el símbolo $\overline{G}$

$$\overline{G}(t) = -600(t+t_0)+18000 \ \frac{pesos}{año}$$

Con está expresión, para este problema en particular podemos calcular la razón promedio, conociendo el valor inicial de la variable independiente y el valor final de la misma variable.

Problema 3. Un objeto se desplaza con respecto a un origen determinado, de acuerdo con la expresión $S(t)=5t+3$. Encuentre la <u>*razón de cambio promedio*</u> de su desplazamiento. Ilustre con tabulación y gráficas.

a) Escribir la función y su dominio ____
b) Elegir en que intervalo cerrado de tiempo se va a tabular ____________________
c) Tabular con 8 valores dentro del dominio

Dato	*t*	*F(t)*
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

8		

d) Calcular la razón de cambio promedio entre los datos 2 y 6;

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

e) Calcular la razón de cambio promedio entre los valores no definidos, con tiempo inicial t_1 y tiempo final t_2

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Ahora trabajaremos un problema cuando los límites son valores no definidos, esto quiere decir que tomaremos dos símbolos que representen valores inicial y final del dominio correspondiente.

Problema 4. Un objeto se desplaza con respecto a un origen determinado de acuerdo con la expresión $S(t) = t^2 + 7t - 6$. Encuentre la razón de cambio promedio de su desplazamiento respecto al tiempo en el intervalo $[t, t_1]$, en este problema de física, al resultado obtenido le llamaremos (*rapidez promedio*).

Solución

Obtener la variación del tiempo $\Delta t =$ ____________

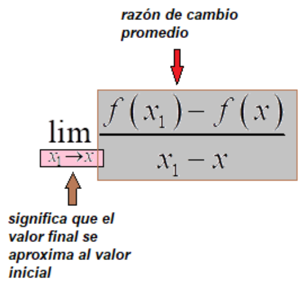
Obtener la variación de la función en dicho intervalo $\Delta S(t) =$ ______________________

Escribir la razón promedio $\frac{\Delta S(t)}{\Delta t} =$ _________________________ no olvidar unidades

Nota: Escribir en el cuaderno de apoyo las operaciones correspondientes.

RAZÓN DE CAMBIO INSTÁNTANEO

La razón de cambio instantáneo la entenderemos como el cambio de la razón respecto al tiempo en un instante dado, esto es, de acuerdo con lo visto en la unidad 1, lo calcularemos como el *límite* de la razón de cambio promedio, cuando el valor final se acerca infinitesimalmente al valor inicial, usemos inicialmente la representación de una función $f(x)$, a través de la expresión



Problema 5. Consideremos un automóvil que recorre una distancia de acuerdo con la expresión $D(t) = 30 + 2t - 4t^2 \; Km/h$. a) Calcular su razón de cambio promedio (rapidez promedio) entre los tiempos $t = 2hr$ y $t = 4hr$ b) Calcular su razón de cambio instantáneo al tiempo $t = 2hr$ (rapidez instantánea). C) Calcular su razón de cambio instantáneo al tiempo $t \; hr$ (rapidez instantánea)

a) Cálculo de la razón de cambio promedio entre los tiempos $t = 2hr$ y $t = 4hr$ Recordemos que en este caso lo que nos piden calcular es la rapidez promedio.

$$\bar{\text{v}} = \frac{\Delta D}{\Delta t} = \frac{D(4) - D(2)}{4 - 2} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

b) Ahora vamos a calcula la razón de cambio instantáneo, lo haremos para ejemplificar nos piden calcularla en $t = 2hr$

Usamos como tiempo inicial $t = 2hr$ y como tiempo final un tiempo $t \; hr$

$$\text{v} = \lim_{t \to 2} \frac{\Delta D}{\Delta t} = \lim_{t \to 2} \frac{D(t) - D(2)}{t - 2} = \lim_{t \to 2} \frac{30 + 2t - 4t^2 \text{ -(2)}}{t - 2} = \lim_{t \to 2} \frac{28 + 2t - 4t^2}{t - 2}$$

Efectuar la división y calcular el límite indicado $\text{v} =$ __________ escribir unidades.

Nota. En problemas de física, la rapidez es un concepto de la magnitud de la velocidad.

c) Vamos a calcular la rapidez a cualquier tiempo $t \; hr$, usemos el valor final como t_1 y el valor final como t

$$\text{v} = \lim_{t_1 \to t} \frac{\Delta D}{\Delta t} = \lim_{t \to 2} \frac{D(t_1) - D(t)}{t_1 - t} = \lim_{t \to 2} \frac{(30 + 2t_1 - 4t_1^2) - \left(30 + 2t - 4t^2\right)}{t_1 - t}$$

Efectuar las operaciones correspondientes y escribir la expresión para la razón de cambio instantánea en un tiempo $t \; hr$ $\text{v} =$ __________________________

Como nos habremos dado cuenta, hasta el momento hemos trabajado con funciones que dependen del tiempo, no solo estos existen como veremos a continuación.

Problema 6. El costo de producción de x unidades de cierto artículo es $C(x)=5000+10x+0.05x^2$. a).- Calcular la razón de cambio promedio de C con respecto x cuando cambia el nivel de producción de artículos es de $x=95$ a $x=104$ .b).- Calcular la razón de cambio instantáneo de C cuando se producen x artículos. C) Calcular la razón de cambio instantánea cuando la producción de artículos es $x=110$

a) Razón de cambio promedio cuando se producen entre $x=95$ a $x=104$ artículos.

$$\overline{C}=\frac{\Delta C}{\Delta x}=\frac{C(104)-C(95)}{104-95}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

b) La razón de cambio instantáneo la calcularemos usando la siguiente expresión y los símbolos mostrados, realizar las operaciones requeridas y escribir el resultado, no olvidar las unidades

$$\lim_{\mathrm{w}\to x}\frac{\Delta C}{\Delta x}=\frac{C(\mathrm{w})-C(x)}{\mathrm{w}-x}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

c) Calcular la razón de cambio instantánea cuando la producción de artículos es $x=110$

Hasta el momento se ha trabajado con funciones de tipo polinomial y que expresan el comportamiento en un problema.

Pero se tienen problemas donde se utilizan otro tipo de funcione algebraicas, veamos ejercicios a partir de funciones abstractas (no aplicada a ningún problema específico).

Ejercicio 1. Encontrar la razón de cambio instantánea a partir de la función $f(x)=\dfrac{x^2-5}{x+2}$

A partir de este momento utilizaremos como valor inicial el símbolo x y como valor final al símbolo w para la variable independiente, entonces lo que pide el ejercicio es que calculemos

$$\lim_{\mathrm{w}\to x}\frac{f(\mathrm{w})-f(x)}{\mathrm{w}-x}$$

Se sugiere hacerlo por pasos

1. Escribir $f(\mathrm{w})=$____________________________

2. Escribir $f(\mathrm{w})-f(x)=$____________________________

3. Encontrar el cociente, y reducirlo $\dfrac{f(\mathrm{w})-f(x)}{\mathrm{w}-x}=$ ______________________

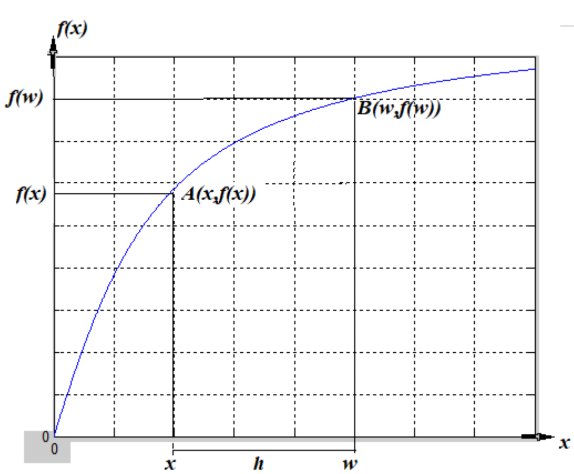
4. Calcular el límite $\lim\limits_{\mathrm{w}\to x}\dfrac{f(\mathrm{w})-f(x)}{\mathrm{w}-x}=$ ______________________

Lo obtenido en el punto 4 es el resultado de nuestro ejercicio.

Ejercicio 2. Utilizando el límite $\lim\limits_{\mathrm{w}\to x}\dfrac{f(\mathrm{w})-f(x)}{\mathrm{w}-x}$ utilizado en el Ejercicio 1, encontrar la razón de cambio instantáneo para las siguientes funciones. Expresaremos el resultado con la función primada como se muestra

1. $f(x)=3$ $\qquad f'(x)=$ ____________________
2. $f(x)=5x$ $\qquad f'(x)=$ ____________________
3. $f(x)=4x^2+3x-5$ $\qquad f'(x)=$ ____________________
4. $g(x)=-5x^2+4x+2$ $\qquad g'(x)=$ ____________________
5. $g(x)=-5x^2+4x+2$ $\qquad g'(x)=$ ____________________
6. $h(x)=4x^3-3x^2-2x-5$ $\qquad h'(x)=$ ____________________
7. $j(x)=-5x^3+4x^2+x+10$ $\qquad j'(x)=$ ____________________
8. $m(x)=6x^4-3x^3+2x^2+7$ $\qquad m'(x)=$ ____________________

Ahora trabajaremos con otro tipo de representación algebraica para encontrar la razón de cambio promedio, vamos a realizar algunas conversiones en el plano cartesiano de la siguiente manera



Ahora vamos a usar aspectos geométricos, acorde a la figura

La distancia entre x y w es h, esto lo podemos escribir como $x+h=w$ o también como $h=w-x$

Si $w\to x$, entonces $w-x\to 0$, que equivale a decir que $h\to 0$.

Observemos la figura anterior Tenemos dos puntos $A(x, f(x))$ y $B(w, f(w))$ En ejercicios anteriores calculamos $$\lim_{w \to x} \frac{f(w)-f(x)}{w-x} \text{..........(I)}$$	Por lo tanto, usando las expresiones en términos de h, la expresión (I) la podemos escribir como $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{..........(II)}$$

Ejercicio 3. Utilizando el límite $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, encontrar la razón de cambio instantáneo para las funciones del ejercicio 2. Expresaremos el resultado con la función primada como se muestra

1. $f(x) = 3$ $\qquad f'(x) =$ ____________________
2. $f(x) = 5x$ $\qquad f'(x) =$ ____________________
3. $f(x) = 4x^2 + 3x - 5$ $\qquad f'(x) =$ ____________________
4. $g(x) = -5x^2 + 4x + 2$ $\qquad g'(x) =$ ____________________
5. $g(x) = -5x^2 + 4x + 2$ $\qquad g'(x) =$ ____________________
6. $h(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x - 5$ $\qquad h'(x) =$ ____________________
7. $j(x) = -5x^3 + 4x^2 + x + 10$ $\qquad j'(x) =$ ____________________
8. $m(x) = 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 7$ $\qquad m'(x) =$ ____________________

Revisar los resultados obtenidos en los ejercicios 2 y 3. Escribir sus conclusiones

____

Habrás observado que los resultados son iguales en cada uno de los ejercicios, hasta ahorita a ese procedimiento lo hemos denominado razón de cambio instantáneo, en los textos de matemáticas al resultado obtenido bajo los procedimientos utilizados se les nombra Derivada de una función y lo escribimos de la siguiente manera.

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Los procedimientos mostrados donde encontramos la razón de cambio instantáneo de una función generan una nueva función a la cual denominaremos *Derivada de la función,* estos procedimientos son

$$\lim_{w \to x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x}$$ denominado METODO DE FERMAT y

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ denominado METODO DE LEIBNITZ-NEWTON

La representaremos en ambos casos como $\frac{df(x)}{dx}$, lo cual se lee como derivada respecto a x, es importante que lo indicado **no es una división.**

Ejercicio 4. Encontrar la derivada de la función $f(x) = 4x^2 - 2x + 3$ utilizando ambos métodos

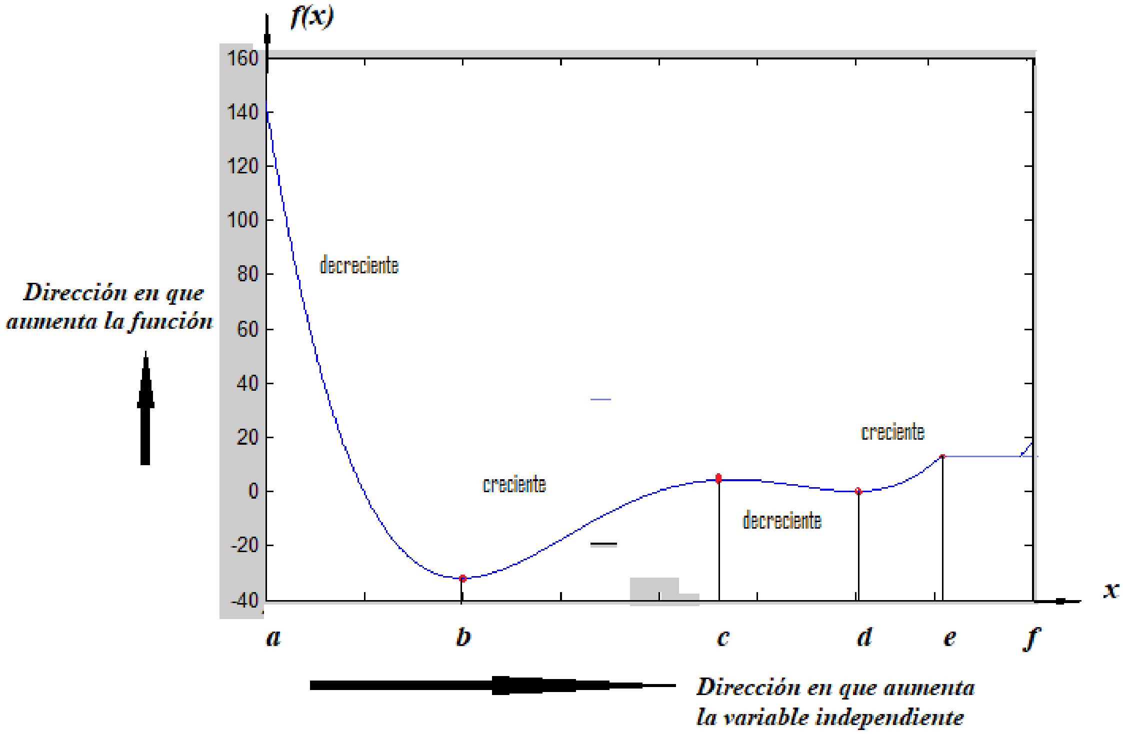
Resultado $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} =$ ____

Ejercicio 5. Encontrar la derivada de la función $g(t) = 2t^3 - 3t^2 + 5t + 7$ utilizando ambos métodos. Escribir el resultado con la simbología correspondiente.

____

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Para tratar este tema, primero trabajamos con una gráfica cualesquiera y determinemos los lugares (intervalos) donde la función tome valores conforme aumenta el valor de la variable independiente, puede ser que la función no cambie de valor (constante), donde la función vaya disminuyendo su valor (decreciente) y donde la función aumente su valor (creciente), observemos el siguiente gráfico.



Los puntos marcados con rojo, son puntos donde la función cambia de decreciente (creciente) a creciente (decreciente) o en su caso a constante. Identifiquemos los intervalos para cada caso.

Usaremos solo intervalos abiertos, ya que los puntos donde cambia la característica (decreciente, creciente o constante) de la curva no está incluido.

Descripción de la curva mostrada

En el intervalo (a, b) la función es decreciente

En el intervalo (b, c) la función es creciente

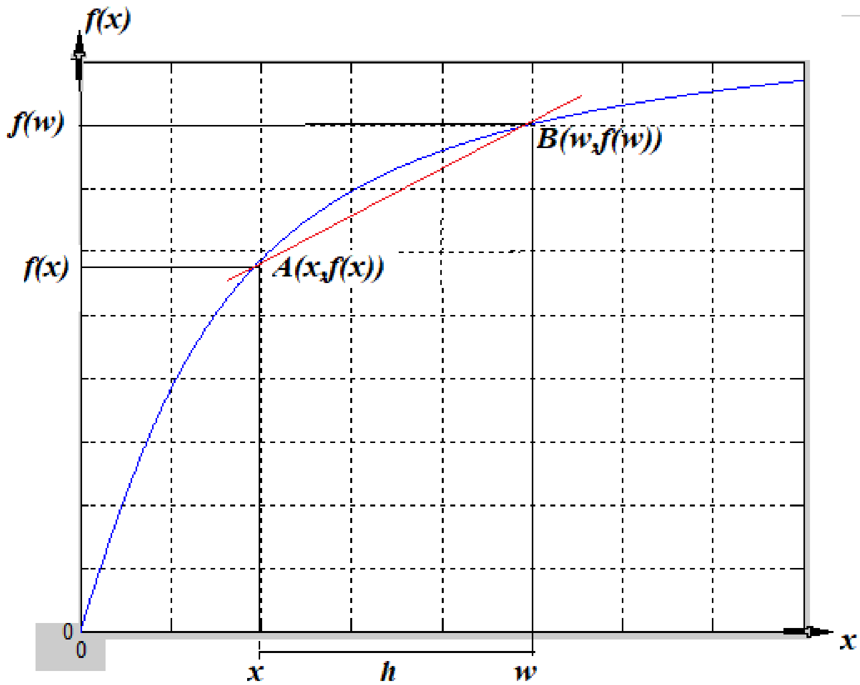
En el intervalo (c, d) la función es decreciente

En el intervalo (d, e) la función es creciente

En el intervalo (e, f) la función es constante

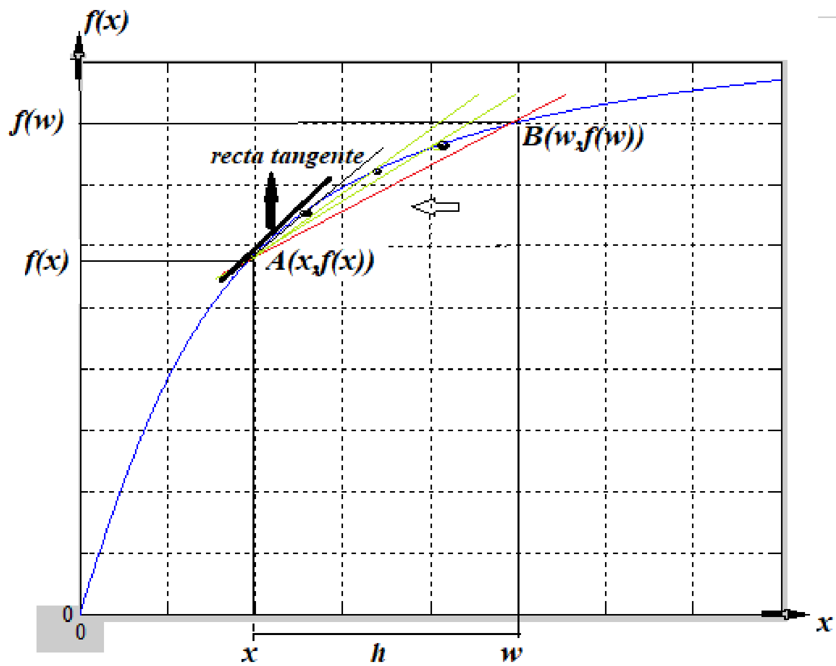
En resumen, debemos analizar en los respectivos intervalos sobre el eje X.

Ahora analicemos la expresión para razón de cambio promedio $\dfrac{f(\mathrm{w})-f(x)}{\mathrm{w}-x}$ en una gráfica



Si trazamos una recta que pase por los puntos A y B y calculamos $\frac{f(\mathrm{w})-f(x)}{\mathrm{w}-x}$ (la razón de cambio promedio), geométricamente, obtenemos la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos, *observar que esta recta es una recta secante* (mostrada en rojo) a la curva (Intersecta a la curva en dos puntos A y B).

Ahora que ocurre con la recta secante cuando $\mathrm{w} \to x$, esto es cuando $\mathrm{w} - x \to 0$, la recta se convierte en una recta tangente en el punto A, observar la figura



Con este análisis gráfico podemos decir que el $\lim_{w \to x} \frac{f(w)-f(x)}{w-x}$ o en su defecto el $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, determinan la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado. Esto es la derivada evaluada en un punto nos determina dicho resultado.

Sigamos analizando en la gráfica, ahora las pendientes de rectas tangentes, para ello contestemos las siguientes preguntas

a) El ángulo de inclinación de una recta se mide con respecto a ____

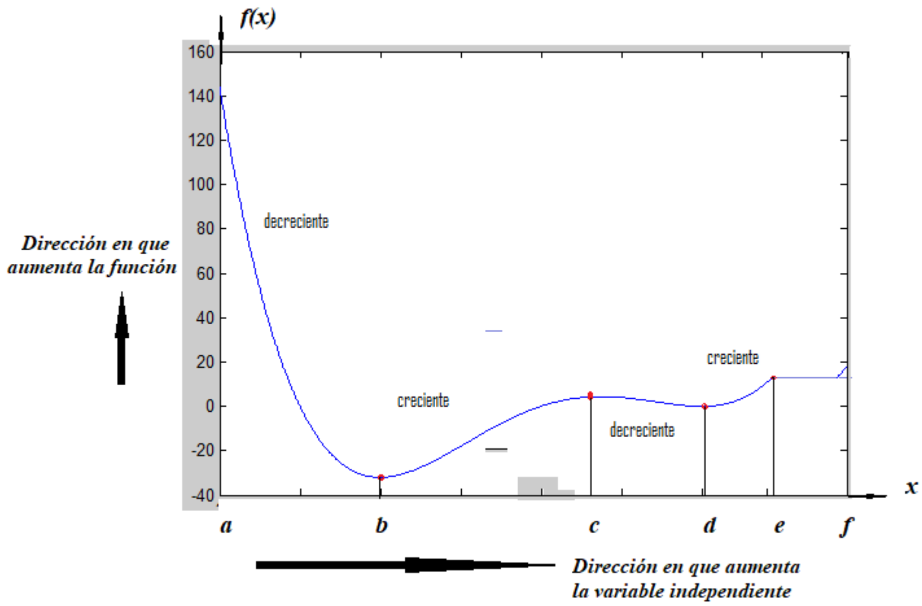
b) Si la recta tiene pendiente positiva el ángulo de inclinación (α) de la recta está en el intervalo_______________________

c) Si la recta tiene pendiente negativa el ángulo de inclinación (α) de la recta está en el intervalo_______________________

d) Si la recta tiene pendiente cero, la recta es ________________________al eje X

e) Si la recta tiene ángulo de inclinación de 90^0 la recta es ____________________ al eje X.

Ejercicio 6. En la siguiente figura trazar rectas tangentes a la curva en los diversos intervalos y puntos indicados en color rojo, e indicar el signo de cada una de ellas y si la curva es creciente o decreciente o ninguna de ese tipo.



Intervalo	Signo de la recta tangente	Característica de la curva

Conclusión del análisis de los signos y la característica de la curva.

____

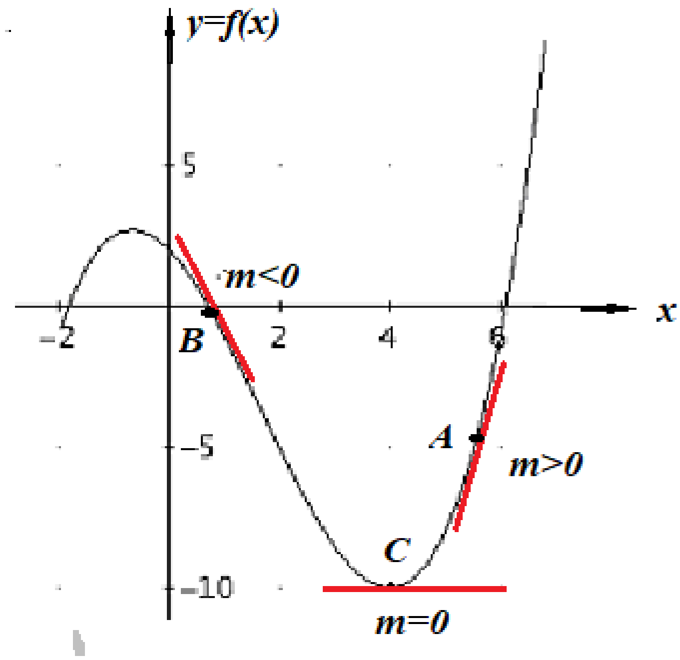
Podemos decir que la derivada de una función evaluada en un punto de un intervalo nos proporciona la pendiente de la recta tangente en ese punto.

El signo ______________________ proporciona, si función es creciente

El signo _______________________ proporciona si la función es decreciente

Y en el punto donde la curva cambia de creciente a decreciente o viceversa, la pendiente en dicho punto es igual a _____________.

Como un resumen, observemos la siguiente gráfica



La recta tangente en el punto A tiene pendiente positiva y corresponde a la región donde la función es creciente, la recta tangente en el punto B tiene pendiente negativa y corresponde a la región donde la función es decreciente y la recta donde la pendiente es igual a cero, corresponde al punto donde hay un cambio de la curva de decreciente a creciente**.**

Ejemplo. Con la siguiente función $f(x)=4x^2+3x-5$ realizar lo siguiente en cada una de ellas.

i) Encontrar su derivada.

Aplicamos el límite elegido (Fermat o Leibnitz Newton), escribiremos Leibnitz

Newton $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4(x+h)^2+3x-5)+5-(4x^2+3x-5)}{h}$

Se desarrollan las operaciones y obtenemos $\frac{df(x)}{dx}=8x+3$

ii) Encontrar los puntos donde la pendiente de la recta tangente es igual a 0

Para resolver esto, igualamos la derivada igual a 0, recordemos, que la interpretación geométrica de la derivada es la pendiente de la recta tangente

Por lo tanto $8x+3=0$ su solución es $x=-\frac{3}{8}$.

Coordenadas de los puntos. La coordenada del punto es, lo identificamos con $P(-\frac{3}{8},-\frac{89}{16})$ Verificarlo__________________________

iii) Calcular la pendiente de la recta tangente en $x=2$.

Esto lo realizamos sustituyendo el valor de x en la derivada. Se acostumbra a utilizar el símbolo m para la pendiente, por lo tanto $m=f'(2)=8(2)+3=13$

iv) Escribir la ecuación correspondiente de la recta tangente

Para encontrar la ecuación de la recta tangente, utilizamos la expresión de la recta dado punto y pendiente $y-y_1=m(x-x_1)$, el punto $(x_1,y_1)\equiv(-\frac{3}{8},-\frac{89}{16})$ y la pendiente es $m=13$, la ecuación de la recta tangente es $y=13x-\frac{9}{16}$

Verificarlo.

v) Indicar los intervalos en la cual (el o los puntos) dividen la región del eje X

En este caso es un solo punto que divide al eje X, este punto es el que nos proporciona una pendiente igual a cero, Es decir $x=-\frac{3}{8}$, las regiones están dadas por los intervalos $\left(-\infty,-\frac{3}{8}\right)$ y $\left(-\frac{3}{8},\infty\right)$

vi) Determinar si la función crece o decrece en cada intervalo.

Ya vimos que para un valor mayor a $x=-\frac{3}{8}$, esto es $x=2$, la pendiente de la recta tangente es positiva, luego en esa región la función crece, debemos analizar un valor menor a $x=-\frac{3}{8}$, por ejemplo $x=-2$, entonces calculamos la pendiente de la recta tangente con la derivada, esto es $f(-2)=4(-2)+3=-8+3=-5$, resulta que la pendiente de la recta tangente es negativa, por lo tanto la curva en esa región es decreciente.

En el intervalo $\left(-\infty,-\frac{3}{8}\right)$ la función decrece y en el intervalo $\left(-\frac{3}{8},\infty\right)$ la función crece.

Graficar este ejercicio con Geogebra y comprobar lo realizado.

Ejercicio 7. En cada una de las siguientes funciones realizar lo siguiente en cada una de ellas. Se sugiere graficar cada una de ellas utilizando Geogebra y comprobar sus resultados e imprimirlas y ponerlas en su cuaderno.

a) $g(x) = -5x^2 + 4x + 2$

i. Encontrar su derivada ___________________________

ii. Encontrar los puntos donde la pendiente de la recta tangente es igual a 0

Coordenadas de los puntos ________________________________

iii. Calcular la pendiente de la recta tangente en x =2. _____________

iv. Escribir la ecuación correspondiente de la recta tangente _______________

v. Indicar los intervalos en la cual los puntos dividen la región del eje X

____

vi. Determinar si la función crece o decrece en cada intervalo.

____

b) $h(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x - 5$

i. Encontrar su derivada ___________________________

ii. Encontrar los puntos donde la pendiente de la recta tangente es igual a 0

Coordenadas de los puntos ________________________________

iii. Calcular la pendiente de la recta tangente en x =2. _____________

iv. Escribir la ecuación correspondiente de la recta tangente _______________

v. Indicar los intervalos en la cual los puntos dividen la región del eje X

____

vi. Determinar si la función crece o decrece en cada intervalo.

____

c) $j(x) = -5x^3 + 4x^2 + x + 10$

i) Encontrar su derivada ____________________________

ii) Encontrar los puntos donde la pendiente de la recta tangente es igual a 0

Coordenadas de los puntos _________________________________

iii) Calcular la pendiente de la recta tangente en x =2. ______________

iv) Escribir la ecuación correspondiente de la recta tangente ________________

v) Indicar los intervalos en la cual los puntos dividen la región del eje X

____

vi) Determinar si la función crece o decrece en cada intervalo.

____

d) $m(x) = 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 7$

i) Encontrar su derivada ____________________________

ii) Encontrar los puntos donde la pendiente de la recta tangente es igual a 0

Coordenadas de los puntos _________________________________

iii) Calcular la pendiente de la recta tangente en x =2. ______________

iv) Escribir la ecuación correspondiente de la recta tangente ________________

v) Indicar los intervalos en la cual los puntos dividen la región del eje X

____

vi) Determinar si la función crece o decrece en cada intervalo.

____

.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONÓMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDAES
PLANTEL ORIENTE
ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

Examen Unidad 2 de Cálculo Diferencial e Integral I

La Derivada, Variación y Razón de cambio

Resolver los siguientes problemas

1. Un objeto se desplaza de acuerdo con la expresión $S(t) = 8t+18$ metros y t se mide en segundos. Calcular a) la razón de cambio promedio de S(t) en el intervalo $[3,5]seg$ b) La razón de cambio instantáneo en el tiempo $t\ seg$ c) la razón de cambio promedio de la velocidad instantánea en el intervalo $[t_o,t]seg$ d9 la aceleración en *t=5 seg.*

2. Una piedra es lanzada hacia arriba, se mueve de acuerdo con la ley $y(t)=55t-5t^2m$. Calcular

a) Calcular la velocidad promedio en el intervalo $[1,2]seg$ y en el intervalo $[6,8]seg$.
b) Calcular la velocidad promedio en el intervalo $[t_o,t]seg$
c) Calcular la velocidad instantánea a cualquier tiempo t .
d) Calcular la velocidad instantánea en los tiempos $t=3seg$ y $t=7seg$
e) Calcular la aceleración promedio en el intervalo $[4,7]seg$
f) Calcular la aceleración en cualquier tiempo. ¿Cómo es esta aceleración?

3. Un cuerpo se mueve en una recta horizontal de acuerdo con la expresión $x(t)=t^3-9t^2+24t+5m$, t en s. Encontrar
   a) La razón de cambio promedio en el intervalo $[t_o,t]seg$
   b) Encontrar la razón de cambio promedio en el intervalo $[4,6]seg$

c) Encontrar la razón de cambio instantáneo en $t = 5seg$

d) ¿En qué intervalos el cuerpo se mueve hacia la parte positiva y en que intervalos se mueve hacia la izquierda?

e) ¿En que intervalos su velocidad es positiva y en cuales su velocidad es negativa?

f) ¿Cuál es su aceleración a cualquier tiempo t ?

4. El costo total de producir x radios diarios es $C(x) = \frac{x^2}{4} + 5x + 25 pesos$

   y el precio de venta de cada radio es $P(x) = 50 - \frac{x}{2} pesos$.

   a) ¿Cuál es la expresión para el beneficio diario $B(x)$?

   b) ¿En que intervalo de producción de radios aumenta el beneficio?

   c) ¿En que intervalo de producción de radios disminuye el beneficio?

   d) ¿Cuál es el beneficio instantáneo en términos del número de radios producidos diariamente?

   e) ¿Para que valor de radios producidos diarios x se obtiene el mayor beneficio?

5. El costo de producción de x unidades de cierto artículo es $C(x) = 1500 + 5x + .09x^2$ pesos. a) Calcular la razón de cambio promedio del Costo respecto a x cuando cambia el nivel de producción de $x = 80$ artículos a $x = 140$ artículos, b) Calcular la razón de cambio promedio en el intervalo $[x_o, x]$ c) Calcular la razón de cambio instantáneo para cuando se producen x artículos, d) Calcular la razón de cambio instantáneo para cuando se producen 150 artículos.

6. Un tanque cilíndrico contiene 180 000 galones de agua, que se pueden vaciar hasta el fondo en 1 hr, la ley de Torricelli expresa

el volumen V de agua que se queda en el tanque después de t minutos como sigue $V(t) = 18000(1 - \frac{t}{60}) litros$; t en minutos. Hallar

a) La razón de cambio promedio en el intervalo $[t_o, t]\min$ y b) La razón de cambio instantánea en $t = 40\min$

7. Encontrar la derivada de las siguientes funciones

   a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$

   b) $g(x) = -2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$

8. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ en $x=3$.

UNIDAD 3

DERIVADAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

$f(x) = 3x^5 - x^2 \qquad f'(x) = 15x^4 - 2x$

$f(x) = 3x^4 - 5x^2 \qquad f'(x) = 12x^3 - 10x$

$f(x) = 3x^{0,7} - 6x$ [illegible] $f'(x) = 2,1x$ [illegible] $1,2x$ [illegible] $\frac{2,1}{x^{0,8}} - \frac{1,2}{x^{0,8}}$

$f(x) = 4x^3 - 6x \qquad f'(x) = 12x^2 - 6$

$f(x) = 3x^{\frac{1}{5}} - 7x^{\frac{4}{9}} \qquad f'(x)$ [illegible] $- \frac{28}{9}x^{\frac{-5}{9}} = \frac{3}{5 \cdot \sqrt[5]{x^4}} - \frac{28}{9 \cdot \sqrt[9]{x^5}}$

$f(x) = 3x^{\sqrt{6}} - x^{\sqrt{5}} \qquad f'(x) = 3\sqrt{6} \cdot x^{\sqrt{6}-1} - \sqrt{5} \cdot x^{\sqrt{5}-1} = \frac{3\sqrt{6}}{x^{1-\sqrt{6}}} - \frac{\sqrt{5}}{x^{1-\sqrt{5}}}$

$f(x) = 2x^{\frac{3}{\sqrt{7}}} - 7x^{\frac{4}{\sqrt{9}}}$ [illegible] $\frac{4}{\sqrt{9}} \cdot x^{\frac{4}{\sqrt{9}}-1} =$

$$\frac{6}{\sqrt{7}\,x^{1-\frac{3}{\sqrt{7}}}} - \frac{28}{\sqrt{9}\,x^{1-\frac{4}{\sqrt{9}}}}$$

$f(x) = \frac{1}{7x^3} -$ [illegible]

$f(x) = \frac{7}{x^5} - \frac{6}{x^4} = 7x^{-5} - 6x^{-4} \qquad f'(x) = 7 \cdot (-5) \cdot x^{-6} - 6 \cdot (-4) \cdot x^{-5} = \frac{-35}{x^6} + \frac{24}{x^5}$

UNIDAD 3. Derivada de funciones algebraicas

Propósito. Al finalizar la unidad el alumno usará el concepto de derivada a través de su representación algebraica, para identificar patrones de comportamiento y obtendrá las reglas de derivación; utilizará estas reglas para obtener la derivada de una función de manera eficaz y la reconocerá como otra función. Además, aplicará las reglas de derivación en diferentes contextos.

Aprendizajes

- Obtiene la derivada de una función polinomial de 1°, 2° y 3° grados, usando la definición en su representación:
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
- Identifica geométricamente la relación de la representación de la derivada:
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
con la representación anterior.
- Obtiene derivadas utilizando los dos límites anteriores.
- Explica la relación entre la derivada de una función lineal y la pendiente de la recta; identifica dicha relación en el caso de la función constante.
- Identifica el patrón de comportamiento de derivadas de funciones del tipo $f(x) = cx^n$ obtenidas utilizando la definición y determina su regla de derivación.
- Identifica patrones de comportamiento de las derivadas en operaciones con funciones: suma, producto, cociente y de la forma $f^n(x)$, para obtener las reglas de derivación correspondientes.
- Obtiene la derivada de funciones algebraicas usando las reglas de derivación y la regla de la cadena.
- Identifica a la derivada como una función que proporciona la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la gráfica de la función original.
- Identifica a la derivada de una función como una función que proporciona la razón de cambio instantáneo.
- Utiliza la función derivada para resolver problemas en diferente contexto.

UNIDAD 3. DERIVADA DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

En esta unidad se trabajará completamente en forma algebraica, encontraremos la expresión (fórmula) para determinar la derivada de funciones algebraicas del tipo polinomial, racional, de una función elevada a un exponente *n* entero o fraccionario (función irracional).

DEFINICIÓN DE DERIVADA

DEFINICIÓN. La función real de variable real $f(x)$ es derivable o diferenciable en el punto x_0 (en la unidad anterior lo denominamos valor inicial) si $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ existe.

La expresión anterior es equivalente a la utilizada en la unidad anterior, a saber

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ o $\frac{f(\mathrm{w}) - f(x)}{\mathrm{w} - x}$ y la representamos como $\frac{df(x)}{dx}$ y se lee "derivada de la función f(x) respecto a x, recordemos NO ES UNA DIVISIÖN:

Se sugiere establecer la que llamaremos la "regla de los 4 pasos" como se sugirió en la unidad anterior

A partir de la definición de la derivada se desarrolló el método de los cuatro pasos que nos ayuda a obtener las fórmulas que determinan la derivada de una función de una forma general, además nos permite obtener la derivada de cualquier función por medio de un procedimiento general.

La regla de los cuatro pasos se basa en la definición $\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ que se ha manejado a lo largo del texto:

La fórmula o definición de la derivada se va desarrollando poco a poco, por medio de cuatro pasos como se muestra a continuación:

Consideremos a la función $f(x)$

Pasos para seguir

1. Se obtiene la función en $x + h$: $f(x+h)$
2. Se obtiene el incremento de la función: $f(x+h) - f(x)$
3. Se obtiene la razón de incrementos: $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
4. Y finalmente se obtiene el límite cuando $\Delta x \to 0$: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Ejercicio 1. Encontrar la derivada de la función $f(x)=c$ (c una constante)

Paso 1. Evaluar $f(x+h)=$ ____________

Paso 2. Evaluar $f(x+h)-f(x)=$ __________

Paso 3. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=$ ______

Paso 4. Calcular el $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ del resultado del inciso c) ______

Conclusión: La derivada de una función constante es igual a _____________

Ejercicio 2. Encontrar la derivada de la función $f(x)=cx$ (c una constante)

Paso 1. Evaluar $f(x+h)=$ ____________

Paso 2. Evaluar $f(x+h)-f(x)=$ __________

Paso 3. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=$ ______

Paso 4. Calcular el $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ del resultado del inciso c) ______

Ejercicio 3. Encontrar la derivada de la función $f(x)=cx^2$ (c una constante)

Paso 1. Evaluar $f(x+h)=$ ____________

Paso 2. Evaluar $f(x+h)-f(x)=$ __________

Paso 3. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=$ ______

Paso 4. Calcular el $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ del resultado del inciso c) ______

Ejercicio 4. Encontrar la derivada de la función $f(x)=cx^3$ (c una constante)

Paso 1. Evaluar $f(x+h)=$ ____________

Paso 2. Evaluar $f(x+h)-f(x)=$ __________

Paso 3. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=$ ______

Paso 4. Calcular el $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ del resultado del inciso c) ______

Ejercicio 5. Con estos resultados ¿podremos inferir la derivada de $f(x) = cx^n$? n entero

Escribir el resultado de $\dfrac{dcx^n}{dx} =$ ________

Ahora vamos a realizar un procedimiento general para derivar una suma de funciones

Ejercicio 6. Encontrar la derivada de la función $F(x) = f(x) + g(x)$ (Suma de funciones)

Sigamos los 4 pasos

Paso 1. Evaluar $F(x+h) =$ ____

Paso 2. Evaluar $F(x+h) - F(x) =$ ____

(Agrupar las funciones correspondientes a $f(x)$ y $g(x)$)

Paso 3. Escribir $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} =$ ____

Paso 4. Escribir el resultado de

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

En resumen, tendremos $\dfrac{d(f(x) + g(x))}{dx} = \dfrac{df(x)}{dx} + \dfrac{dg(x)}{dx}$

Ejercicio 7. Derivar la función polinomial $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 5$

$$\frac{df(x)}{dx} = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN RACIONAL

Ejercicio 8. Vamos a obtener la deriva de una función del tipo $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$; $g(x) \neq 0$

Paso 1. Evaluar $F(x+h) =$ ____

Paso 2. Evaluar $F(x+h) - F(x) =$ ____

(Agrupar las funciones correspondientes a $f(x)$ y $g(x)$)

Paso 3. Escribir $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} =$ ____

Paso 4. Escribir el resultado de

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

En resumen, tendremos $\dfrac{d\dfrac{f(x)}{g(x)}}{dx} = \dfrac{g(x)\dfrac{df(x)}{dx} - f(x)\dfrac{dg(x)}{dx}}{\left(g(x)\right)^2}$

Ejercicio 9. Derivar la función racional $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 5}{3x - 5}$

$$\frac{df(x)}{dx} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

DERIVADA DE UN PRODUCTO DE FUNCIONES

Ejercicio 10. Vamos a obtener la deriva de una función del tipo $F(x) = f(x)g(x)$

Paso 1. Evaluar $F(x+h) =$ __________________________________

Paso 2. Evaluar $F(x+h) - F(x) =$ __________________________________

(Agrupar las funciones de manera adecuada) **

Paso 3. Escribir $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} =$ __________________________________

Paso 4. Escribir el resultado de

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

En resumen, tendremos $\dfrac{df(x)g(x)}{dx} = f(x)\dfrac{dg(x)}{dx} + g(x)\dfrac{df(x)}{dx}$

Ejercicio 11. Derivar el siguiente producto de funciones $F(x) = \left(5x^3 - 3x^2\right)\left(2x - 5\right)$

$$\frac{df(x)}{dx} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Ejercicio 12. Obtener la derivada de $F(x) = \left(f(x)\right)^2 = f^2(x)$ (utilizar el resultado del ejercicio 11). *Sugerencia Escribir* $f^2(x) = f(x)f(x)$

$$\frac{df^2(x)}{dx} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Ejercicio 13. Obtener la derivada de $F(x)=\left(f(x)\right)^3=f^3(x)$ (utilizar el resultado del ejercicio 12). *Sugerencia Escribir* $f^3(x)=f^2(x)f(x)$

$$\frac{df^2(x)}{dx}=\underline{\hspace{8cm}}$$

Ejercicio 14. Obtener la derivada de $F(x)=\left(f(x)\right)^n=f^n(x)$ (utilizar el resultado de los ejercicios 12 y 13) donde n es un número natural

$$\frac{df^n(x)}{dx}=\underline{\hspace{8cm}}$$

Obtener la derivada de $F(x)=\left(f(x)\right)^n=f^n(x)$ (utilizar el resultado del ejercicio 14) donde n es un número racional (quebrado)

Ejemplo 1. Encontrar la derivada de la función $f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$

Vamos a usar la regla de los 4 pasos

Paso 1. Evaluar $f(x+h)=\sqrt{x+h}$

Paso 2. Evaluar $f(x+h)-f(x)=\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$

Paso 3. Escribir $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

Vamos a multiplicar numerador y denominador por el binomio conjugado del numerador de la expresión anterior

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

Reduciendo $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\dfrac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$

Paso 4. Escribir el resultado de $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

El resultado es $\dfrac{d(\sqrt{x})}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Ejercicio 15. Encontrar la derivada de la función $f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$ usando la fórmula

$\dfrac{df^n(x)}{dx}=nf^{n-1}(x)\dfrac{df(x)}{dx}$.

$$\frac{d(x^{1/2})}{dx}=\frac{1}{2}(x)^{1/2-1}\frac{\cancel{dx}^{1}}{\cancel{dx}}=\frac{1}{2}(x)^{-1/2}=\frac{1}{2(x)^{1/2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Observamos que en el ejemplo 1 y en el ejercicio 15 el resultado es el mismo.

Podemos decir que nuestra fórmula, hasta el momento es válida para exponentes naturales y fraccionarios. Debemos mencionar que también es válida para exponentes negativos.

Ejemplo 2. Encontrar la derivada de $f(x)=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$

Vamos a utilizar la regla de los 4 pasos

Paso 1. Evaluar $f(x+h)=\dfrac{1}{x+h}$

Paso 2. Evaluar $f(x+h)-f(x)=\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-(x+h)}{(x+h)(x)}=-\dfrac{h}{(x+h)(x)}$

Paso 3. Escribir $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{-\dfrac{h}{(x+h)(x)}}{h}=-\dfrac{\cancel{h}}{\cancel{h}(x+h)(x)}=-\dfrac{1}{(x+h)(x)}$

Paso 4. Escribir el resultado de $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(-\dfrac{1}{(x+h)(x)}\right)=-\dfrac{1}{x^2}$

Ejercicio 16. Encontrar la derivada de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$ usando la fórmula

$\dfrac{df^n(x)}{dx}=nf^{n-1}(x)$.

$$\frac{d(x^{-1})}{dx}=-1(x)^{1/2-1}\frac{\cancel{dx}^{1}}{\cancel{dx}}=-(x)^{-1-1}=-(x)^{-2}=-\frac{1}{x^2}$$

Observamos que en el ejemplo 2 y en el ejercicio 16 el resultado es el mismo.

ES claro que esto se han realizado para ejemplos particulares, sin embargo, se puede mostrar que la $\dfrac{df^n(x)}{dx}=nf^{n-1}(x)\dfrac{df(x)}{dx}$ es válida para cualquier exponente

En el apéndice A se presenta un desarrollo más general para la fórmula $\frac{df^n(x)}{dx} = nf^{n-1}(x)\frac{df(x)}{dx}$, la cual se denomina derivada de la cadena.

Ejercicio 17. Demuestre que la derivada de la función $f(x) = \sqrt{5x^2 - 3x + 3}$ aplicando la derivada de la cadena es $f'(x) = \frac{10x - 3}{2\sqrt{5x^2 - 3x + 3}}$

Desarrollar las operaciones requeridas en su cuaderno de apoyo.

Fórmulas de derivadas algebraicas

$\frac{dc}{dx} = 0$ c constante	$\frac{dcx^n}{dx} = cnx^{n-1}$
$\frac{d(f(x) \pm g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{dg(x)}{dx}$	$\frac{d(f^n(x))}{dx} = nf^{n-1}(x)\frac{df(x)}{dx}$
$\frac{df(x)g(x)}{dx} = f(x)\frac{dg(x)}{dx} + g(x)\frac{df(x)}{dx}$	$\frac{d\frac{f(x)}{g(x)}}{dx} = \frac{g(x)\frac{df(x)}{dx} - f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{g^2(x)}; \quad g(x) \neq 0$

Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

Ejercicio 18. $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3x + 7$

$\frac{df(x)}{dx} =$ ______________________________

Ejercicio 19. $f(x) = 3\sqrt{x+1} - \frac{3}{x-1}$

$\frac{df(x)}{dx} =$ ______________________________

Ejercicio 20. $f(x) = \frac{3 - 5x^2}{4x - 2}$

$$\frac{df(x)}{dx} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Ejercicio 21. $f(x) = 5x^2\sqrt{4-3x^2}$

$$\frac{df(x)}{dx} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Ejercicio 22. $f(x) = \left(5x^2 - 2x + 3\right)^{3/2}$

$$\frac{df(x)}{dx} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Ejercicio 23. $f(x) = \left(4 - 3x^2\right)^{-2/3}$

$$\frac{df(x)}{dx} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Vamos a utilizar la interpretación geométrica de la derivada para resolver los siguientes ejercicios.

Sugerencia. Algoritmo para seguir: 1. Encontrar las coordenadas del punto; Derivar la función; Evaluar la derivada en el punto dado (pendiente); Escribir la expresión para la recta dada su pendiente y un punto.

Ejercicio 24. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva dada por la función $y = 5x^3 + 2x^2 - 5x + 2$ en $x = 4$.

Ecuación de la recta ______________________________

Ejercicio 25. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva dada por la función $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2x - 1}$ en $x = 3$.

Ecuación de la recta ______________________________

Ejercicio 26. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva dada por la función $y = 4x\sqrt{2x^2 - 3x}$ en $x = -2$.

Ecuación de la recta ______________________________

Ejercicio 27. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva dada por la función $y=(-3x^2+2x)^4$ en $x=-2$.

Ecuación de la recta ___________________________________

Encontrar el punto o puntos donde la pendiente de la recta tangente a una curva dada por la función indicada en cada ejercicio es igual a cero

Ejercicio 28. $y=-6x^3+3x^2+5x+3$.

Punto ___________________________________

Ejercicio 29. $y=\frac{4x+2}{2x^2+3}$.

Punto ___________________________________

Ejercicio 30. $y=4x^2\sqrt{4x^2-6x+3}$

Punto ___________________________________

Ejercicio 31. $y=(-3x^2+2)^3$

Punto ___________________________________

Vamos a utilizar la derivada para encontrar la razón de cambio instantánea en los siguientes problemas. No olvidar las unidades en cada problema

Problema 1. Un objeto se mueve a lo largo de una trayectoria dada por la ecuación de movimiento $S(t)=\sqrt{5+t^2}$ con $t\geq 0$. Encontrar la razón de cambio instantánea del desplazamiento respecto al tiempo.

$$\frac{dS}{dt}= \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

Problema 2. Un objeto se desplaza con respecto a un origen determinado, de acuerdo con la expresión $S(t)=50t-9.8t^2+5$. con $t\geq 0$. Encontrar la razón de cambio instantánea del desplazamiento respecto al tiempo.

$$\frac{dS}{dt}= \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

Problema 3. Una masa de aire frío se aproxima a una ciudad de modo que la temperatura es $T(t)$ t

temperatura en función del tiempo es $T(t) = 0.1(400 - 40t + t^2)$ en el intervalo $0 \leq t \leq 12$. Encontrar la razón de cambio instantánea de la Temperatura respecto al tiempo.

$$\frac{dT}{dt} = \underline{\hspace{6cm}}$$

Problema 4. Un tanque cilíndrico contiene 120 000 galones de agua, que se pueden vaciar por el fondo en 1 hora, la ley de Torricelli expresa el volumen V de agua que se queda en el tanque después de t minutos como sigue $V(t) = 120000\left(1 - \frac{t}{60}\right)^2$ para $0 \leq t \leq 60$. Encontrar la razón de cambio instantánea del Volumen respecto al tiempo.

$$\frac{dV}{dt} = \underline{\hspace{6cm}}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONÓMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL ORIENTE

ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

Examen Unidad 3 de Cálculo Diferencial e Integral I. Derivada de funciones algebraicas

Resolver los siguientes ejercicios, agregando los procedimientos realizados

1. Encontrar la derivada $f(x) = -\frac{5}{3}x^4 + 8x^3 - 7x - 8$

   ○ a. $\frac{df(x)}{dx} = -\frac{20}{3}x^3 + 24x^2 - 7$
   ○ b. $\frac{df(x)}{dx} = \frac{20}{3}x^3 + 24x^2 + 7x + 8$
   ○ c. $\frac{df(x)}{dx} = -\frac{20}{3}x^3 + 24x^2 - 7x - 8$
   ○ d. $\frac{df(x)}{dx} = \frac{20}{3}x^3 - 24x^2 - 7x - 8$
   ○ e. $\frac{df(x)}{dx} = -\frac{20}{3}x^3 - 24x^2 - 7x$

2. Encontrar la derivada de $f(x) = 3\sqrt{x^5} + \sqrt{x^3}$

   ○ a. $\frac{df(x)}{dx} = \frac{15}{2}\sqrt{x^3} + \frac{3}{4}\sqrt{x}$
   ○ b. $\frac{df(x)}{dx} = \frac{15}{2}\sqrt{x^3} + \frac{1}{3}\sqrt{x}$
   ○ c. $\frac{df(x)}{dx} = -\frac{15}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{3\sqrt{x}}$
   ○ d. $\frac{df(x)}{dx} = -\frac{2}{15}\sqrt{x} + \frac{1}{3\sqrt{x}}$
   ○ e. $\frac{df(x)}{dx} = \frac{15}{2}x^{3/5} + \frac{1}{3}x^{-2/3}$

3. Encontrar la derivada de $y = x^2\sqrt{x-1}$

   ○ a. $y' = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$
   ○ b. $y' = \frac{5x^2 - 4x}{2\sqrt{x-1}}$
   ○ c. $y' = 5x^2\sqrt{x-1}$
   ○ d. $y' = \frac{5x^2 - 4x}{\sqrt{x-1}}$
   ○ e. $y' = \frac{5x^2 - 4x}{\sqrt{x-1}}$

4. Encontrar la derivada de $y=\frac{5x-6}{x^2+2}$

a. $\frac{dy}{dx}=\frac{-10x+10}{(x^2+2)^2}$

b. $\frac{dy}{dx}=\frac{-5x^2+12x+10}{(x^2+2)^2}$

c. $\frac{dy}{dx}=\frac{-5x^2+12x+10}{(x^2+2)}$

d. $\frac{dy}{dx}=\frac{5x^2-10x+10}{(x^2+2)^2}$

e. $\frac{dy}{dx}=\frac{-5x^2-12x-10}{(x^2+2)^2}$

5. Encontrar la derivada de $f(x)=\sqrt{-3x^2+5x-7}$

a. $\frac{df(x)}{dx}=\frac{-6x^2-5}{\sqrt{-3x^2-5x-7}}$

b. $\frac{df(x)}{dx}=\frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+7}}$

c. $\frac{df(x)}{dx}=\frac{-6x+5}{2\sqrt{-3x^2+5x-7}}$

d. $\frac{df(x)}{dx}=\frac{3x^2-5}{\sqrt{3x^2+5x-7}}$

e. $\frac{df(x)}{dx}=\frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2+5x-7}}$

6. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva cuya función es $y=-2x^3+3x^2-3x+2$ en el punto $x=-1$

a. $2y+3x-5=0$

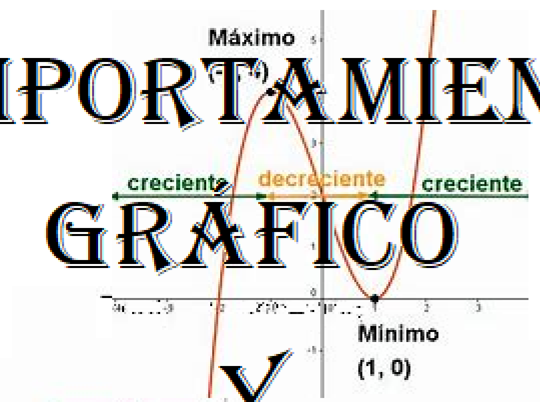
b. $2y-3x+5=0$

c. $y+5=0$

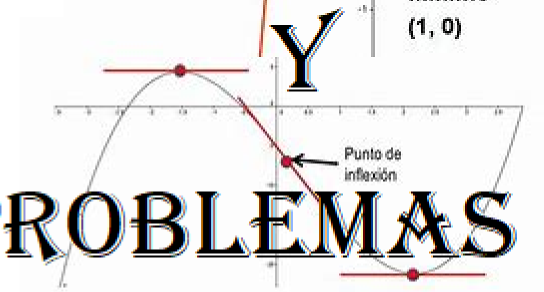
d. $y-15x+5=0$

e. $2y-10x+5=0$

UNIDAD 4



COMPORTAMIENTO GRÁFICO Y



PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

UNIDAD 4 Comportamiento gráfico y problemas de optimización

Propósito. Al finalizar la unidad el alumno contrastará la gráfica de una función y sus dos primeras derivadas para obtener información sobre el comportamiento de la función; utilizará dicha información para resolver problemas de optimización.

Aprendizajes

- Interpreta en forma gráfica y algebraica los intervalos en donde una función es creciente, decreciente o constante.
- Deduce a través de un análisis gráfico, las relaciones existentes entre la gráfica de una función y sus dos primeras derivadas: signo de la primera derivada asociada con crecimiento o decrecimiento de la función, derivada nula con puntos críticos, signo de la segunda derivada, con concavidad y segunda derivada nula con un posible cambio de concavidad punto de inflexión
- Esboza la gráfica de la derivada de una función dada la gráfica de esta.
- Calcula los puntos críticos de una función y los clasifica en máximos, mínimos o puntos de inflexión.
- Analiza el tipo de concavidad de la función a partir del signo de la segunda derivada.
- Esboza la gráfica de una función utilizando la información que proporcionan su primera y segunda derivada.
- Infiere que los criterios de la primera y segunda derivada sintetizan el análisis realizado entre las gráficas de $f(x), f'(x), f''(x)$
- Resuelve problemas que involucran máximos o mínimos de una función de acuerdo con su dominio restringido

UNIDAD 4. COMPORTAMIENTO GRÁFICO Y PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Utilizando la derivada, analizaremos el comportamiento de una función y lo aplicaremos a problemas de optimización.

Comencemos con un problema puramente algebraico y geométrico para repasar los conceptos vistos hasta el momento

Ejercicio 1. Con la función polinomial, $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 5x - 4$ repasemos lo siguiente

Encontrar la derivada $\frac{df(x)}{dx} =$ ____________________________

Encontrar el punto o puntos donde la derivada es igual a cero.

Puntos ____________________________________

Marcar en el plano cartesiano el o los puntos encontrados.

Marcar los intervalos limitados por los puntos marcados. Considere todo el eje Real

Intervalos ____________________________________

Calcular la pendiente de las rectas tangentes a la curva en un punto cualquiera de cada intervalo

Pendientes en los diferentes intervalos ______________________________________

Con las pendientes calculadas en el punto anterior determine si la curva es creciente o decreciente en cada intervalo. Graficar. Comparar con un gráfico hecho en Geogebra.

Creciente en el o los intervalos ______________________________________

Decreciente en el o los intervalos______________________________________

Nota. Cuando una función es creciente o decreciente en un intervalo **I** es llamada ***monofónica*** en dicho intervalo**.**

Apliquemos la herramienta anterior al siguiente problema

Problema 1. Pedro tiene 100 metros de malla de alambre y va a cercar un terreno rectangular para usarlo como espacio de juegos. Quiere construir un terreno que tenga la máxima área posible y que este cercado con la cantidad de malla que se indica. ¿Qué dimensiones debe tener el terreno cercado?

a) Dibujar un rectángulo y utilizar las varíales x e y para representar el largo y ancho del terreno cercado.

b) Escribir la expresión para el perímetro P ________________________

c) Escribir la expresión para el Área del terreno cercado A ____________________

d) Escribir el área en términos de una sola variable, se sugiere x

____

e) Utilizar la función $A(x)$ encontrada en el inciso (d). para analizarla de la siguiente manera:

i) Encontrar su derivada $\frac{dA}{dx} =$

ii) Encontrar el punto donde la derivada es igual a cero. *Punto* _____________

iii) Encontrar el valor de la otra variable correspondiente al valor de x encontrado, esto es el valor de y . _______________

f) Determinar si es Punto un máximo o mínimo ____________________________

Ahora, a manera de resumen podemos decir lo siguiente.

Con el uso del concepto de derivada establecemos el siguiente criterio:

Suponer que la función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y diferenciable en el intervalo (a,b):

a) Si $f'(x) > 0$ para todo valor de x en el intervalo (a,b), entonces la función $f(x)$ es creciente en el intervalo $[a,b]$.
b) Si $f'(x) < 0$ para todo valor de x en el intervalo (a,b), entonces la función $f(x)$ es decreciente en el intervalo $[a,b]$.

c) Se dice que una **función es diferenciable en un punto** a si $f'(a)$ existe. Esto es, es diferenciable en un intervalo abierto (a,b) si la función es **diferenciable** en cada valor del intervalo.

A continuación, vamos a formalizar el lenguaje utilizado para los diferentes conceptos utilizados

PUNTOS CRÍTICOS

En la gráfica de una función existen puntos donde las pendientes de las rectas tangentes tienen pendiente igual a cero, esto es, si trazamos una recta tangente en esos puntos la línea recta corresponde a una recta horizontal.

Ejercicio 2. Encontrar los puntos críticos de la curva cuya función es

$$f(x) = 9x^3 - 3x^2 - 6x + 2$$

Puntos críticos____

Ejercicio 2. Encontrar los puntos críticos de la curva cuya función es $f(x) = \frac{2x-3}{4x^2+5}$

Puntos críticos____

Ejercicio 3. Encontrar los puntos críticos de la curva cuya función es $f(x) = \sqrt{4x^2+5}$

Puntos críticos____

Ejercicio 4. Encontrar los puntos críticos de la curva cuya función es

$$f(x) = (5x^3 - 3x + 2x)^2$$

Puntos críticos____

Ejercicio 5. Encontrar los puntos críticos de la curva cuya función es $f(x) = 5x\sqrt{3x^2+5}$

Puntos críticos____

PUNTO MÁXIMO DE UNA CURVA

Definición. Una función $f(x)$ tiene un máximo absoluto en $x = c$ si $f(c) > f(x)$ para todo valor de x en el dominio de la función. El número $f(c)$ corresponde al máximo valor de la función en el dominio de esta.

Ejercicio 6. Encontrar el máximo absoluto de la función $f(x) = 24x - x^3$ en el dominio restringido, el intervalo cerrado $[-2,6]$.

Encontrar su derivada ____________________________________

Encontrar el punto crítico ________________________________

Determinar si corresponde a un máximo o a un mínimo ______________________

¿Corresponde a un valor absoluto? ________________________________

PUNTO MÍNIMO DE UNA CURVA

Definición. Una función $f(x)$ tiene un mínimo absoluto en $x=c$ si $f(c)<f(x)$ para todo valor de x en el dominio de la función. El número $f(c)$ corresponde al mínimo valor de la función en el dominio de esta.

Ejercicio 7. Encontrar el máximo y/o mínimo absoluto de la función $f(x)=x^2-5$

Encontrar su derivada __________________________________

Encontrar el punto crítico ________________________________

Determinar si corresponde a un máximo o a un mínimo ______________________

¿Corresponde a un valor absoluto? ________________________________

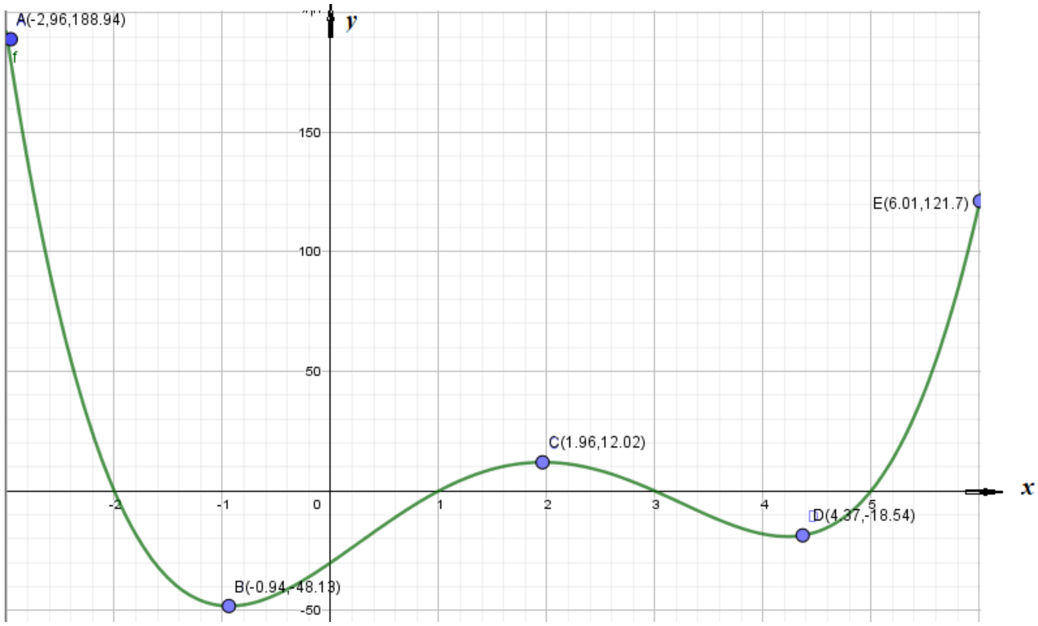
MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES O RELATIVOS

En la gráfica de una función pueden existir puntos máximos o mínimos locales (relativos) que no corresponden a los absolutos, como su nombre lo indica sólo están localizados en un intervalo que contenga a dichos puntos.

Definición. Una función $f(x)$ tiene un máximo local o máximo relativo en $x=c$ si existe un intervalo abierto **I** conteniendo a $x=c$ tal que $f(c)>f(x)$ para toda x en el intervalo dado.

Definición. Una función $f(x)$ tiene un mínimo local o mínimo relativo en $x=c$ si existe un intervalo abierto I conteniendo a $x=c$ tal que $f(c)<f(x)$ para toda x en el intervalo dado.

Ejercicio 8. En a siguiente gráfica de la función $f(x)=x^4-7x^3+5x^2+31x-30$, establecer los máximos y/o mínimos absolutos y los máximos y o mínimos locales.



Máximo Global ____

Mínimo Global____

Máximo Local____

Mínimo Local____

Una vez que hemos repasado los conceptos anteriores, vamos a aplicarlos usando el criterio de la primera derivada.

Trabajemos con funciones polinomiales

En cada una de las siguientes funciones determinar sus puntos críticos, sus regiones de crecimiento y las de decrecimiento y determinar los puntos que corresponde a puntos máximos y/o mínimos.

Ejercicio 9 $y = 2x^3 - 9x^2 + 6x + 10$	Derivada___________________________________ Puntos críticos______________________________ Intervalos de crecimiento___________________ Puntos máximos___________________________ Puntos mínimos____________________________ ¿Alguno de los puntos es Máximo o mínimo global? ___________________________________
Ejercicio 10 $f(x) = 4x^2 + 3x - 5$	Derivada___________________________________ Puntos críticos______________________________ Intervalos de crecimiento___________________ Puntos máximos___________________________ Puntos mínimos____________________________ ¿Alguno de los puntos es Máximo o mínimo global? ___________________________________

Ejercicio 11 $y = 0.25x^4 + x^3 - 20x^2 + 10$	Derivada___________________________________ Puntos críticos_____________________________ Intervalos de crecimiento___________________ Puntos máximos____________________________ Puntos mínimos_____________________________ ¿Alguno de los puntos es Máximo o mínimo global? ___________________________________
Ejercicio 12 $g(x) = -5x^2 + 4x + 2$	Derivada___________________________________ Puntos críticos_____________________________ Intervalos de crecimiento___________________ Puntos máximos____________________________ Puntos mínimos_____________________________ ¿Alguno de los puntos es Máximo o mínimo global? ___________________________________
Ejercicio 13 $j(x) = -5x^3 + 4x^2 + x + 10$	Derivada___________________________________ Puntos críticos_____________________________ Intervalos de crecimiento___________________ Puntos máximos____________________________ Puntos mínimos_____________________________ ¿Alguno de los puntos es Máximo o mínimo global? ___________________________________
Ejercicio 14 $h(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x - 5$	Derivada___________________________________ Puntos críticos_____________________________ Intervalos de crecimiento___________________ Puntos máximos____________________________ Puntos mínimos_____________________________ ¿Alguno de los puntos el Máximo o mínimo global? ___________________________________
Ejercicio 15 $m(x) = 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 7$	Derivada___________________________________ Puntos críticos_____________________________ Intervalos de crecimiento___________________ Puntos máximos____________________________ Puntos mínimos_____________________________ ¿Alguno de los puntos el Máximo o mínimo global? ___________________________________

SEGUNDA DERIVADA

Si $f(x)$ es una función derivable, entonces su derivada $f'(x)=\dfrac{df(x)}{dx}$ es también una función, luego $f'(x)$ también puede tener su propia derivada, la cual se representa como $f''(x)=\dfrac{df'(x)}{dx}$. Esta nueva función $f''(x)$ se llama la **segunda derivada de la función** $f(x)$.

Ejercicios 16. Encontrar la segunda derivada de las siguientes funciones

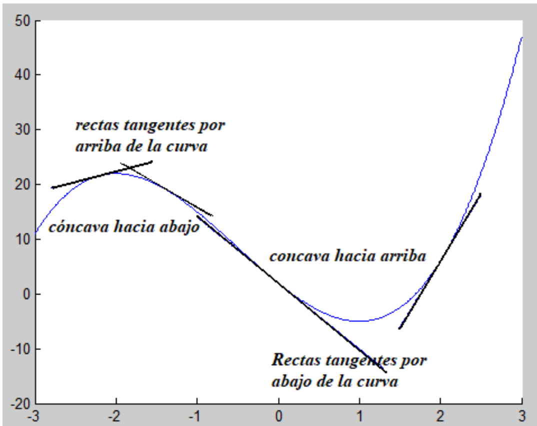
Función	Segunda Derivada de la Función
a) $r=c\theta^3+d\theta^2+e\theta.$	
b) $y=6x^{\frac{7}{2}}+4x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}.$	
c) $y=\sqrt{3x}+\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}.$	
d) $y=\dfrac{a+bx+cx^2}{x}.$	
e) $y=\dfrac{3x+7}{2x^2-5}$	
f) $y=\sqrt{5x-3x^2}$	
g) $y=\dfrac{\sqrt{5x-1}}{2x+3}$	

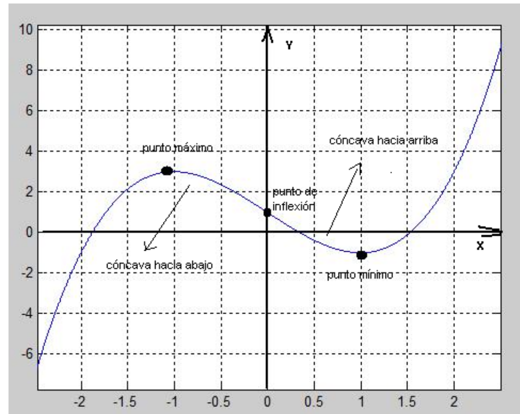
CONCAVIDAD. PUNTOS DE INFLEXIÓN

DEFINICION. Si en la gráfica de $f(x)$ todas las rectas tangentes se establecen por debajo de ella, se dice que la gráfica es cóncava hacia arriba, si por el contrario las rectas tangentes a ella se establecen por arriba de ella, se dice que la curva es cóncava hacia abajo.

DEFINICION. El punto P de la curva donde la gráfica cambia de **cóncava hacia abajo** a **cóncava hacia arriba** o cambia de **cóncava hacia arriba** a **cóncava hacia abajo** se llama **PUNTO DE INFLEXION.**

Lo anterior se muestra en los siguientes gráficos





De acuerdo con las dos definiciones anteriores, podemos utilizar la herramienta de la segunda derivada para determinar la concavidad

Ejercicio 17. Determinar el intervalo en donde la curva de la función $y = x^3 - 3x + 1$ es cóncava hacia arriba y en donde es cóncava hacia abajo Y determinar también el punto de inflexión. Bosquejar la curva.

Usamos el criterio de la primera derivada para determinar los puntos máximo y/o mínimo

a) Derivar la función ______________________________

b) Encontrar los puntos críticos ______________________________

Usar el criterio de la primera derivada y contestar lo siguiente

c) Si existe un punto máximo, escribirlo ______________________

d) Si existe un punto mínimo, escribirlo ______________________

Criterio para encontrar los puntos de inflexión

Para encontrar los puntos de inflexión utilizaremos la herramienta de la segunda derivada que a la letra dice "La segunda derivada es igual a cero en los puntos de inflexión"

e) Encontrar la segunda derivada de la función ______________________

f) Igualar a cero ____

g) Resolver la ecuación ____

h) Escribir las coordenadas de los puntos encontrados ____________________

i) Indicar si existe un punto de inflexión. Si es así escribirlo ________________

j) Indicar los intervalos de concavidad hacia arriba _______________________

k) Indicar los intervalos de concavidad hacia abajo _______________________

Ejercicio 18. Determinar la concavidad en las siguientes funciones, considerar siempre el eje Real.

Función	Intervalos de concavidad
a) $y = x^2$.	
b) $y = 5 - 2x - x^2$	
c) $y = x^3$.	
d) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$	
e) $y = 4 - (x-3)^3$	
g) $y = x^4$	
h) $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$	

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Si encontramos que la segunda derivada de una función evaluada en un punto crítico $x = c$ es mayor que cero $f''(c) > 0$, tenemos que en $x = c$ hay un punto máximo.

Si encontramos que la segunda derivada de una función evaluada en un punto crítico $x = c$ es menor que cero $f''(c) < 0$, tenemos que en $x = c$ hay un punto mínimo.

Sin embargo, este criterio falla si $f''(c) = 0$

Ejercicio 19. Usando el criterio de la segunda derivada, determinar los puntos máximos o mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones. Graficarlos

Función	Intervalos de concavidad
a) $y = x^2$.	
a) $f(x) = 4x^2 + 3x - 5$	
c) $y = x^3$.	
d) $g(x) = -5x^2 + 4x + 2$	
a) $h(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x - 5$	
g) $y = x^4$	
h) $j(x) = -5x^3 + 4x^2 + x + 10$	
i) $m(x) = 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 7$	

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Problema 4.1. Se tiene una lámina cuadrada de 30 cm por lado. Se desea construir una caja abierta, cortando en las cuatro esquinas cuadrados iguales y doblando los lados hacia arriba (construirla con una hoja de papel). Escribir la función Volumen en términos del corte realizado y calcular el valor del doblez tal que la caja contenga el máximo volumen**.**

Solución ____

Problema 4.2. Se quiere construir una caja rectangular de base cuadrada, abierta por arriba, calcular el volumen de la mayor caja que se pueda obtener de 1200 cm^2 de material.

Solución ____

Problema 4.3. Se desea construir un depósito rectangular de base cuadrada abierto por arriba. Debe tener 125 metros cúbicos de capacidad. Si el costo de las caras laterales es de 2 pesos por metro cuadrado y el del fondo de 4 pesos por metro cuadrado, ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que el costo sea mínimo?

Solución ____

Problema 4.4. Un prado rectangular de un jardín ha de tener 72 m^2 de área. Debe rodearse de un paseo de 1 metro de ancho en los lados y dos metros de ancho en las extremidades. Si el área total del prado y del paseo debe ser mínima. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del prado?

Solución ____

Problema 4.5. Se desea cercar un terreno rectangular de área dada uno de cuyos lados coincide con la orilla de un río. Si no se necesita cerca del lado del río demuéstrese que se necesitará la mínima cantidad de materiales cuando el largo del terreno sea 2 veces el ancho.

Solución ____

Problema 4.6. Un anuncio en un cartel debe tener 50 cm^2 de material impreso, con 6 cm de margen arriba y abajo y 3 cm de margen a los lados. ¿Qué dimensiones debe tener el cartel de mínima superficie?

Solución ____

Problema 4.7. Que dimensiones (radio y altura) debe tener un contenedor cilíndrico de 1000 litros (1 m^3) de tal manera que se utilice una superficie mínima de material.

Solución ____

Problema 4.8. Un cable de 100 cm de longitud es cortado en dos piezas, con una de las partes se forma un cuadrado y con la otra parte se forma un triángulo equilátero ¿Dónde debe hacerse el corte si la suma de las dos áreas formadas debe ser máxima?

Solución ____

.

.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONÓMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL ORIENTE
ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

Examen Unidad 4 de Cálculo Diferencial e Integral I. Comportamiento Gráfico y Problemas de Optimización

Resolver los siguientes ejercicios

Se debe resolver en hojas cuadriculadas o milimétricas para bosquejar correctamente las gráficas.

En cada una de las siguientes funciones encontrar a) los puntos críticos, b) Las coordenadas de los puntos críticos, c) Las regiones de crecimiento y decrecimiento de la curva, d) Indicar cuáles puntos son máximo, mínimo o punto de inflexión y e) graficar.

1. $y = 3x^3 + 9x^2 - 8x - 10$
2. $y = 2x^2 - 80x + 10$
3. $y = 0.5x^4 + 2x^3 - 15x^2$

En la siguiente función, encontrar los puntos donde la curva cambia de concavidad y determinar los intervalos de concavidad hacia abajo y concavidad hacia arriba

4. $y = 0.5x^4 + 2x^3 - 15x^2$

5. Una variedad de pelícanos se encuentra en peligro de extinción, su población es una función del tiempo dado por la función

$$P(t) = 100\left(1 + \frac{4t}{t^2 + 16}\right) \qquad \text{t en años}$$

Donde 100 es la población inicial de pelícanos. Encuentre el número máximo de pelícanos que pueden existir.

Bibliografía

1. Anfossi, A. (1950) ***Cálculo Diferencial e Integral***, Editorial Progreso, México, D.F.
2. Bers, Lipman, (1975) ***Cálculo Diferencial e Integral,*** Editorial Interamericana
3. Boyce William, Di Prima Richard, (1999), ***Cálculo,*** CECSA Ediciones México
4. Granville, Smith, (1970) ***Cálculo Diferencial e Integral, CECSA***
5. Grupo institucional 401-C, CCH UNAM, (2011) ***Cálculo Diferencial e Integral I, Colegio*** de Ciencias y Humanidades, UNAM
6. Gutiérrez S, Sánchez Faustino, (1998), ***Matemáticas para las Ciencias Naturales***, Aportaciones matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana
7. Kline, Morris. (2010) ***Matemáticas para los estudiantes de humanidades,*** Fondo de Cultura económica
8. Leithold, Louis, (2007) ***Cálculo con Geometría Analítica,*** Oxford University Press-Harla México, S.A. de C.V
9. Sántalo Carbonell ***Cálculo Diferencial e Integral***, Textos universitarios S.A.
10. Stewart, James, (2015), Calculus, Thompson Matemáticas Editorial
11. Swokowsky, Earl W., (2004) ***Cálculo con Geometría Analítica,*** Oxford University Press-Harla México, S.A. de C.V